

*«Траектория движение тела,  
брошенного под углом к  
горизонту  
с учетом сопротивления  
ветра»*

Автор проекта: Троян Виктор

10 класс МБОУ «СОШ № 40» г. Старый Оскол  
Белгородской области

Руководитель: Теплова Марина Евгеньевна,  
учитель физики МБОУ «СОШ № 40» г.  
Старый Оскол Белгородской области

# *Актуальность темы*

Известно, что на дальность полета планирующих снарядов (диск и копье) сильное влияние оказывают наличие ветра и угол атаки при полете снаряда. Встречный и попутный ветер необходимо учитывать и при метании спортивных орудий. Разница в дальности полета молота из-за влияния внешних условий может составлять 4-6 м.

Прогресс в конструировании оружия привел к тому, что в наши дни артиллерийские орудия стреляют 90-килограммовыми снарядами на расстояния более 40 км, противотанковые снаряды способны пробивать стальную броню толщиной 50см, а управляемые ракеты могут доставить исчисляемую в тоннах боевую нагрузку в любую точку земного шара.

# *Основная идея проекта*

Создать математическую модель тела, движущегося в поле тяготения Земли, без учета его вращения вокруг собственной оси. Выяснить, какова форма траектории баллистического движения и как зависит дальность полета тела от силы сопротивления, скорости и направления ветра.

# *Формулировка проблемы*

Описать траекторию полета тела, определив положение центра масс и его пространственное положение в функции времени полета (времени после запуска).

Меняя начальную скорость, начальную высоту, угол направления движения тела, скорость ветра относительно земли, построить графики зависимости дальности и высоты полета тела от этих параметров.

# *Гипотеза*

При любых значениях угла, высоты, скорости движения снаряда форма траектории остается неизменной.

Дальность полета тела зависит от силы сопротивления воздуха, которая пропорциональна квадрату скорости движения тела.

Чем больше скорость ветра, тем ближе к исходной точке падает тело. Попутный ветер увеличивает дальность траектории, а встречный ветер - уменьшает дальность броска при одинаковой начальной скорости.

# *Проверка гипотезы*

Для создания модели тела, движущегося в поле тяготения Земли, необходимо изучить теоретический материал по теме «Баллистика»:

1. Баллистическое движение в поле тяготения Земли.
2. Движение снаряда в воздухе.
3. Основные причины сопротивления воздуха полету:
  - вязкость воздуха;
  - баллистические волны;
  - влияние ветра, плотности воздуха и атмосферного давления на траекторию полета.

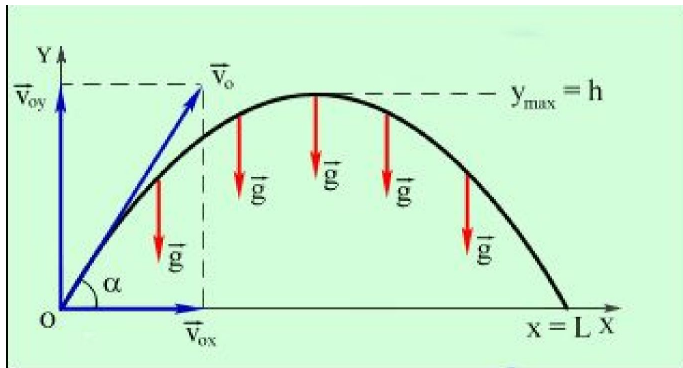
# *Проектирование*

Основная задача внешней баллистики - описать эту траекторию тела, определив положение центра масс и пространственное положение снаряда в функции времени полета (времени после запуска). Для этого нужно решить систему уравнений, в которых учитывались бы силы и моменты сил, действующие на снаряд.

## Баллистическое движение в поле тяготения Земли

Движение тела, брошенного под углом к горизонту, можно рассматривать как суперпозицию двух независимых движений: равномерного движения по горизонтали и равноускоренного движения тела, брошенного вертикально вверх.

Выражая проекции скорости и координаты через модули векторов, решу задачу для случая  $x_0=0$  и  $y_0=0$ .



$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \cos \alpha \\ v_y = v_{0y} \sin \alpha \\ x = v_x \cdot t = v_{0x} t \cos \alpha \\ y = v_{0y} \cdot t - \frac{g t^2}{2} = v_{0y} t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2} \end{cases}$$

Чтобы получить уравнение траектории, нужно время  $t$  из уравнения через координату  $x$  и подставить в уравнение для  $y$ :

$$y = v_{0y} \cdot \frac{x}{v_{0x}} - \frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_{0x}} \right)^2 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2 v_{0x}^2} x^2$$



$$y = v_{0y} \cdot \frac{x}{v_{0x}} - \frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_{0x}} \right)^2 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2 v_{0x}^2} x^2$$

Между координатами получилась квадратичная зависимость. Значит траектория - парабола.

В этом случае предполагается, что на тело не действуют никакие другие силы, кроме земного тяготения и оно движется в вакууме над плоской неподвижной земной поверхностью.

Согласно первому закону Ньютона, при отсутствии действия на тело внешних сил оно будет двигаться прямолинейно и равномерно вдоль оси ОХ.

Такая ситуация возможна при стрельбе из артиллерийских орудий в глубоком космосе, вдали от источников тяготения при пренебрежимо малом сопротивлении межзвездной среды.

Однако такая возможность на текущий момент возможна лишь в фантастической литературе.

## Движение снаряда в воздухе

Для сугубо земных практических условий стрельбы на тело (снаряд) во время его движения действуют сила тяжести и аэродинамическая сила.

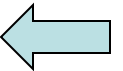
Первая направлена к земной поверхности и сообщает снаряду ускорение, направленное вертикально вниз. Так как размеры снаряда много меньше преодолеваемой им дистанции, то его движение можно рассматривать как движение материальной точки по кривой (траектория полёта).

Снаряд рассматривается как материальная точка, и учитываются его лобовое сопротивление (сила сопротивления воздуха, действующая в обратном направлении по касательной к траектории и замедляющая движение снаряда), сила тяжести, скорость вращения Земли и кривизна земной поверхности.

*(Вращение Земли и кривизну земной поверхности можно не учитывать, если время полета по траектории не очень велико.)*

## ОСНОВНЫЕ ПРИЧИНЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА ПОЛЁТУ

- *вязкость воздуха;*
- *отрыв пограничного слоя с образованием завихрения;*
- *образование баллистической волны.*

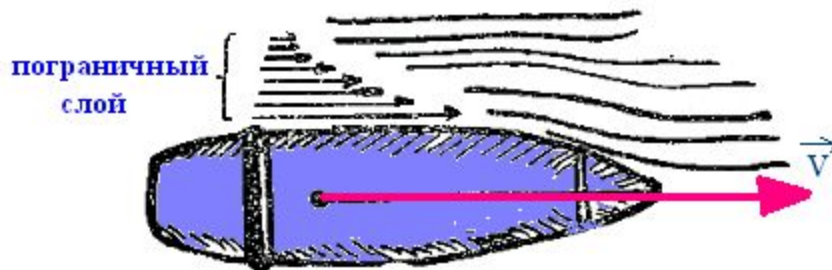


## ВЯЗКОСТЬ ВОЗДУХА, ОБРАЗОВАНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Вязкость воздуха объясняется наличием внутреннего сцепления между частицами воздуха.

При движении снаряда частицы воздуха, непосредственно примыкающие к снаряду, вследствие сцепления с его поверхностью, движутся со скоростью снаряда.

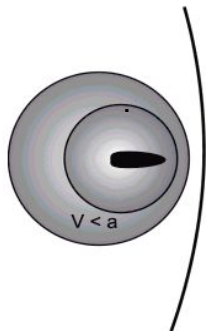
Следующий слой частиц воздуха в результате внутреннего сцепления также приходит в движение, но уже с несколько меньшей скоростью. Движение этого слоя передаётся следующему, и так до тех пор, пока разность скоростей частиц не станет равной нулю. Образуется так называемый *пограничный слой*



# БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ.

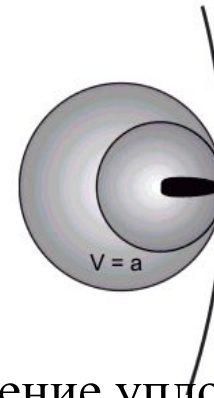
При всяком колебании и движении тел в воздухе создаются бесконечно малые уплотнения, которые распространяются со скоростью звука. Если частота этих колебаний находится в пределах 20-20000 колебаний в секунду, мы воспринимаем их как звук.

При движении снарядов со скоростью меньшей скорости звука эти уплотнения, распространяясь во все стороны, "обгоняют" снаряд и уходят вперёд, не оказывая на него влияния



При дозвуковых скоростях:

$$F(v) = 1,21 \cdot 10^{-4} \cdot V^2$$



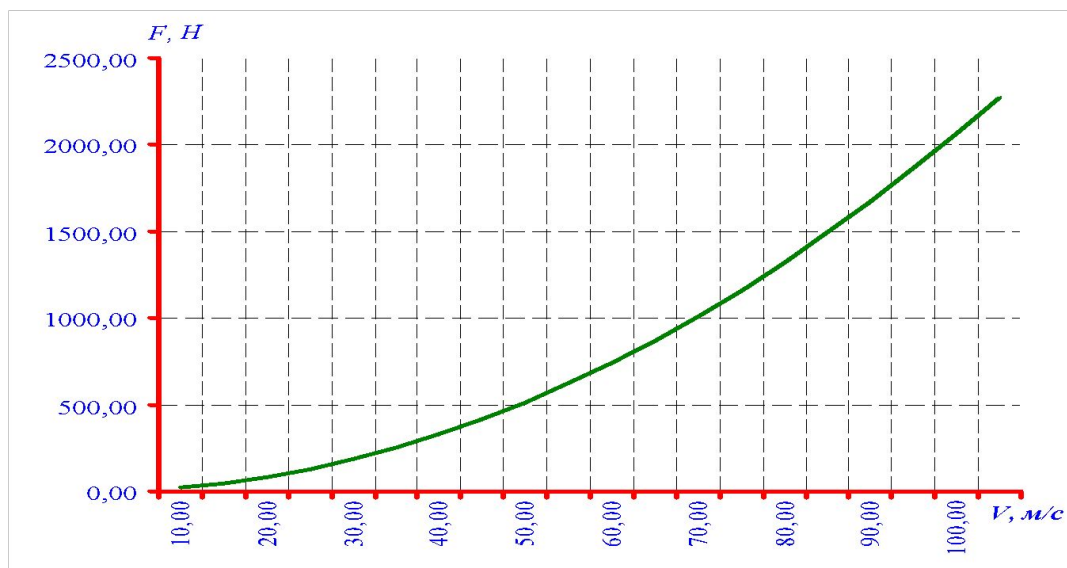
Распространение уплотнений воздуха перед снарядом при сверхзвуковых скоростях:

$$F(v) = \frac{V}{3} - 80$$

*При скорости снаряда, равной скорости звука, эти уплотнения накладываются одно на другое у головной части, создавая уже значительно плотный слой. Образуется баллистическая волна. Давление на фронте этой волны может достигать **8 - 10** атмосфер.*

*Для преодоления такого большого давления у головной части расходует наибольшая часть энергии снаряда, что приводит к резкому уменьшению скорости его полёта.*

*Суммарная сила сопротивления, образующаяся вследствие вышеуказанных причин, и есть полная аэродинамическая сила. Сила сопротивления движению пропорциональна квадрату скорости тела.*



# Влияние ветра

Ветер оказывает значительное влияние на полёт снарядов. Это влияние тем больше, чем больше скорость ветра и меньше вес и скорость снарядов. В зависимости от скорости ветра различают:

слабый ветер

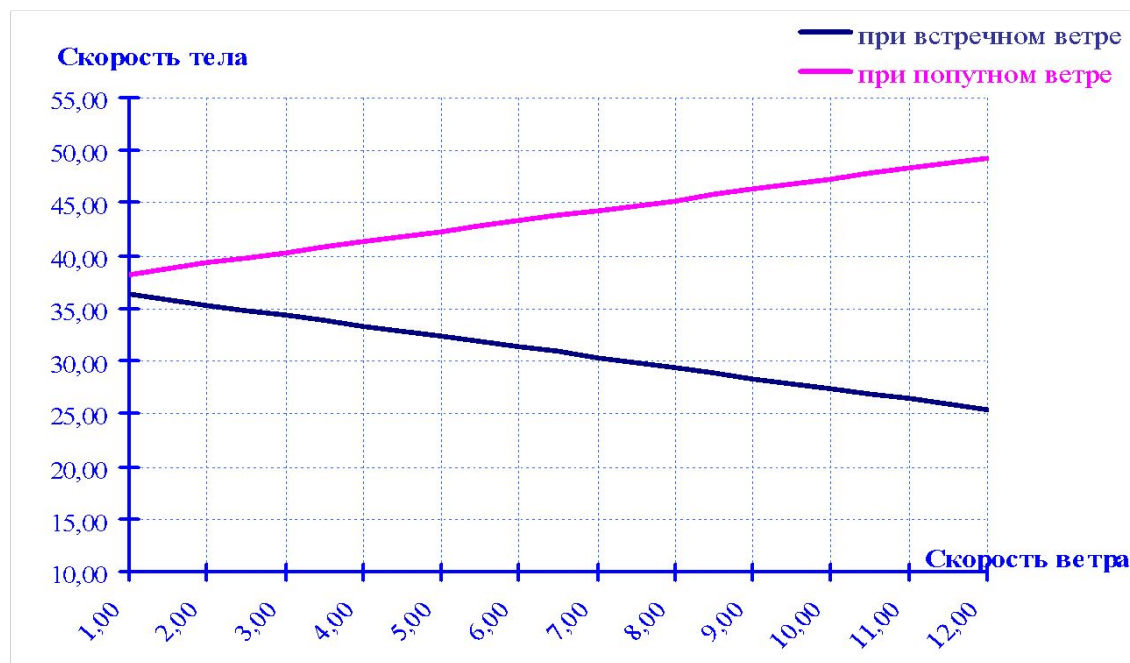
*(до 2 м/с)*

умеренный

*(4 - 6 м/с)*

сильный

*(8 - 10 м/с)*



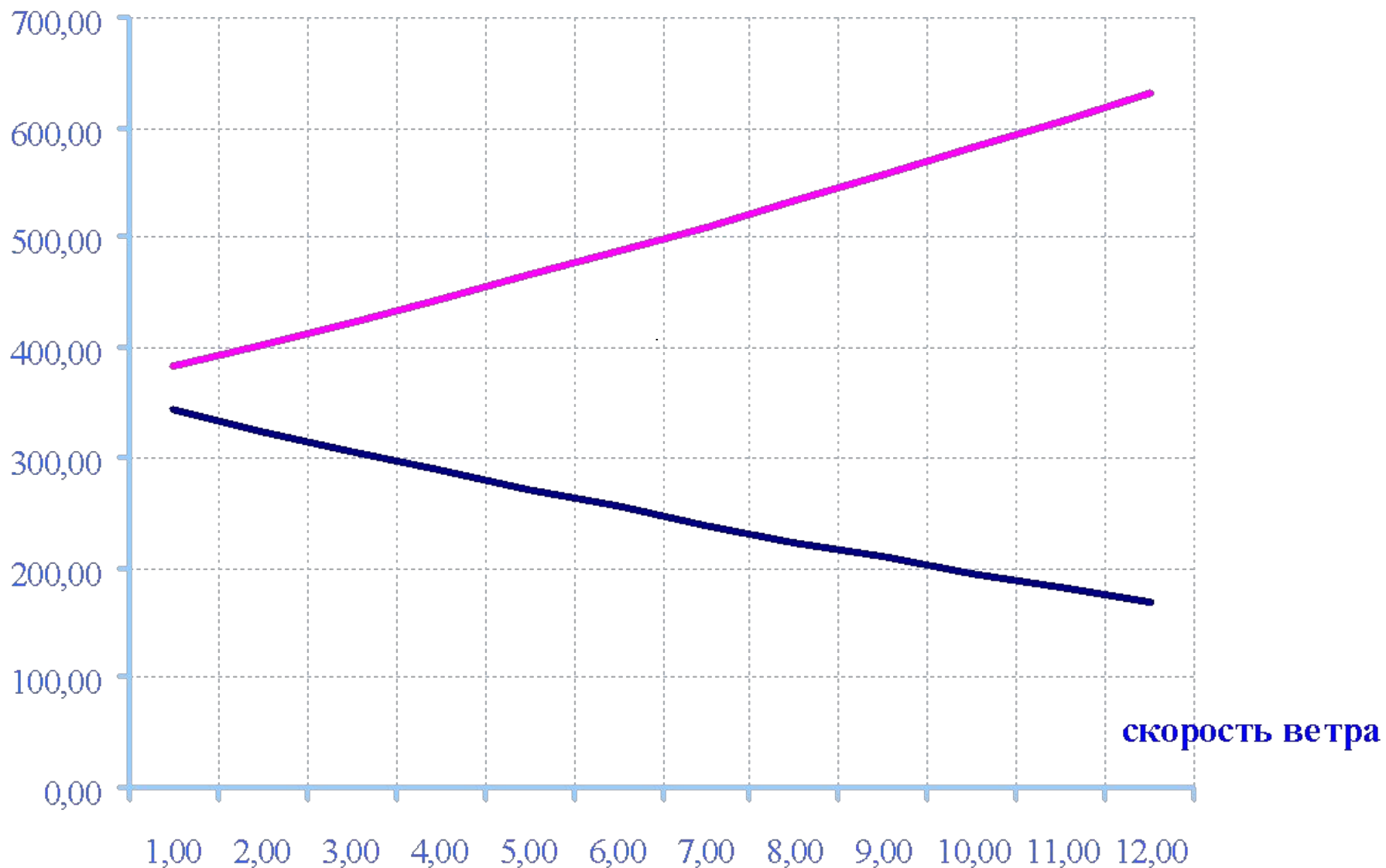
Ветер может быть попутным, встречным, направленным под углом к плоскости стрельбы.

Влияние продольного ветра на движущийся снаряд сводится к изменению сопротивления воздуха вследствие изменения скорости снаряда по отношению к атмосфере: при попутном ветре сопротивление воздуха уменьшается, так как, согласно правилу сложения скоростей Галилея, относительная скорость снаряда меньше его начальной скорости. При встречном – сила сопротивления движению возрастает.

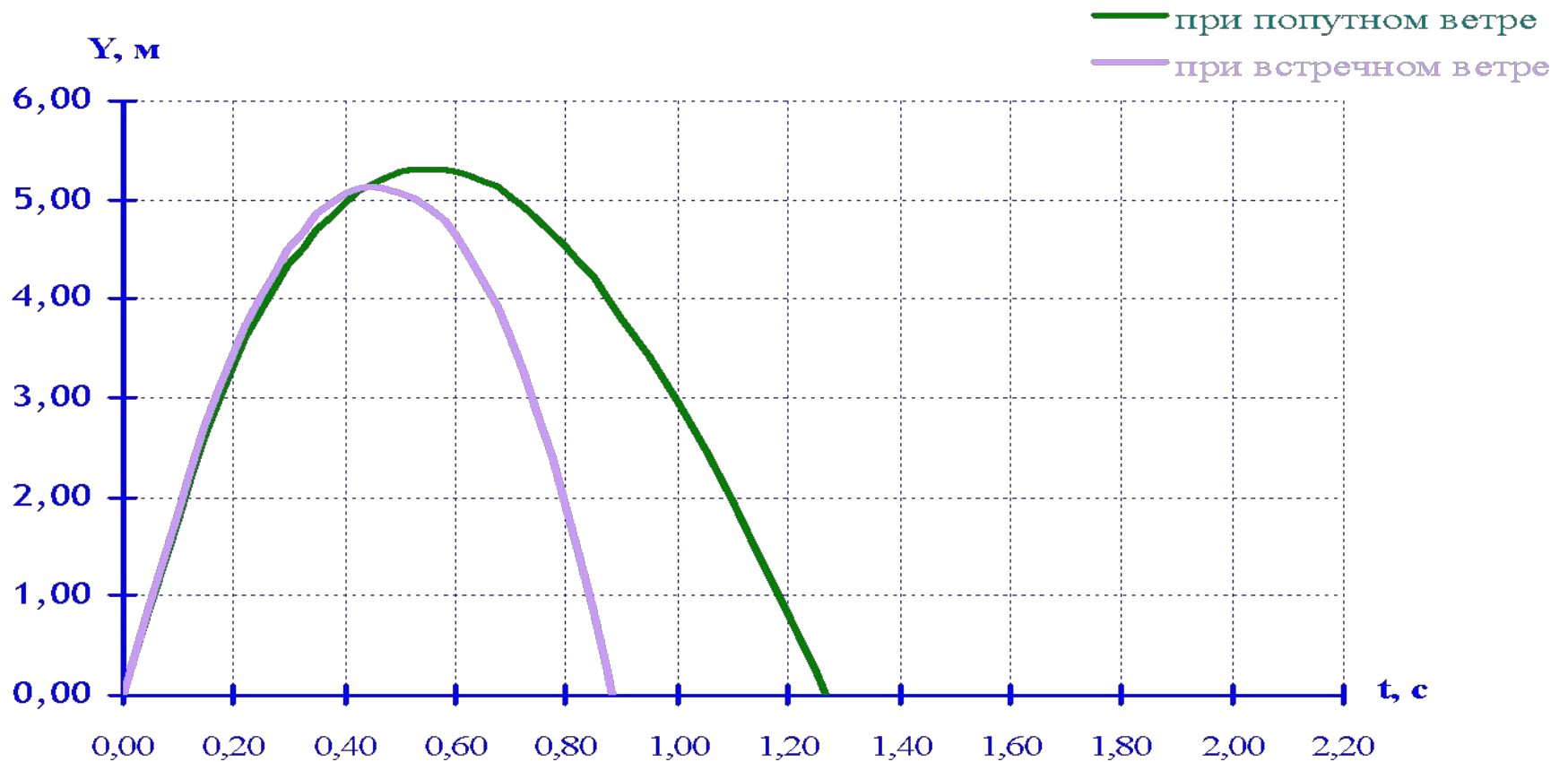


**сила  
сопротивления**

**попутный ветер**  
**встречный ветер**



При попутном ветре сопротивление воздуха уменьшается, поэтому дальность полёта снарядов увеличивается; при встречном ветре дальность полёта уменьшается.



- При стрельбе из артиллерийских орудий, особенно на средние и большие дальности, существенное влияние на дальность полёта снаряда оказывает продольный ветер.
- Наиболее существенным из всех метеорологических факторов, влияющих на полёт снарядов, мин и пуль, является боковой ветер. Боковой ветер отклоняет снаряды в сторону от плоскости стрельбы, причём отклонения могут достигать даже при умеренном ветре значительных величин.

# Влияние плотности воздуха

Плотность воздуха увеличивает или уменьшает сопротивление воздуха.

Плотность воздуха зависит от температуры, атмосферного давления и влажности.

Чем выше температура воздуха, тем меньше его плотность и, следовательно, меньше сила сопротивления воздуха. Поэтому с повышением температуры снаряд полетит дальше.

И, наоборот, чем ниже температура, тем больше плотность воздуха, тем ближе полетит снаряд при всех прочих равных условиях.

Чем меньше будет плотность воздуха, тем меньше будет и сила сопротивления воздуха.

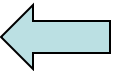
# Атмосферное давление

С увеличением атмосферного давления плотность воздуха увеличивается, и, следовательно, увеличивается сила сопротивления воздуха.

С понижением давления уменьшается плотность воздуха, уменьшается сопротивление, и снаряды имеют большую дальность полёта.

За нормальное атмосферное давление принято давление, равное 750 мм ртутного столба на высоте 110 м над уровнем моря.

С увеличением высоты над уровнем моря на каждые 100 метров давление падает на 8 - 9 мм ртутного столба.



## Расчет силы сопротивления воздуха.

Величина силы сопротивления воздуха может значительно превосходить силу тяжести. Эта разница тем больше, чем меньше вес снаряда и больше скорость его полёта. Величина силы сопротивления возрастает особенно резко при движении снарядов со скоростями, превышающими скорость звука.







Вследствие значительной сложности такого явления, как сопротивление воздуха, до сих пор нет полной теоретической зависимости, выражающей величину силы сопротивления.

Из повседневной практики известно, что поток газа действует на тело, помещенное в этот поток, с некоторой силой, названной силой лобового сопротивления.

Эта сила возрастает с увеличением скорости потока.

Результирующая сила давления, действующая на шар в направлении потока, будет пропорциональна динамическому напору  $\frac{\rho v^2}{2}$  и площади поперечного сечения шара.

Хорошей иллюстрацией к возникновению силы лобового служат представленные в таблице величины коэффициентов лобового сопротивления тел различной формы (Г. Шлихтинг "Теория пограничного слоя" ).

	тело	$C_x$
	диск	1,11
	полусфера	1,35...1,40
	полусфера	0,30...0,40
	шар	0,4
	каплевидное	0,045
	каплевидное	0,1



Существует ряд эмпирических формул для выражения силы сопротивления воздуха. Приведу одну из них:

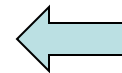
$$F_{\text{сопр}} = C_x r V^2 S_{\text{мид}} / 2.$$

Коэффициент лобового сопротивления  $C_x$  зависит от числа Рейнольдса  $Re = f(Re)$ . Число Рейнольдса  $Re = r V d / m$ , где  $m = 1,01 \cdot 10^{-3}$  кг/м с - коэффициент динамической вязкости воздуха. Для условий ( $V_0 = 30$  м/с,  $r = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>,  $d = 12$  см) получаем значение числа  $Re: 5,3 \cdot 10^{-3}$ .

Для тела в форме шара по графику  $C_x = f(Re)$  из монографии (Г. Шлихтинг "Теория пограничного слоя" (табл. выше) значение  $C_x = 0,4-0,45$ . Максимальное значение силы сопротивления в момент выброса снаряда ( $V_0 = 30$  м/с) равно  $F_{\text{сопр}0} = 0,4 \cdot 1,2 \cdot 30^2 \cdot 1,13 \cdot 10^{-2} / 2 = 2,75$  Н.

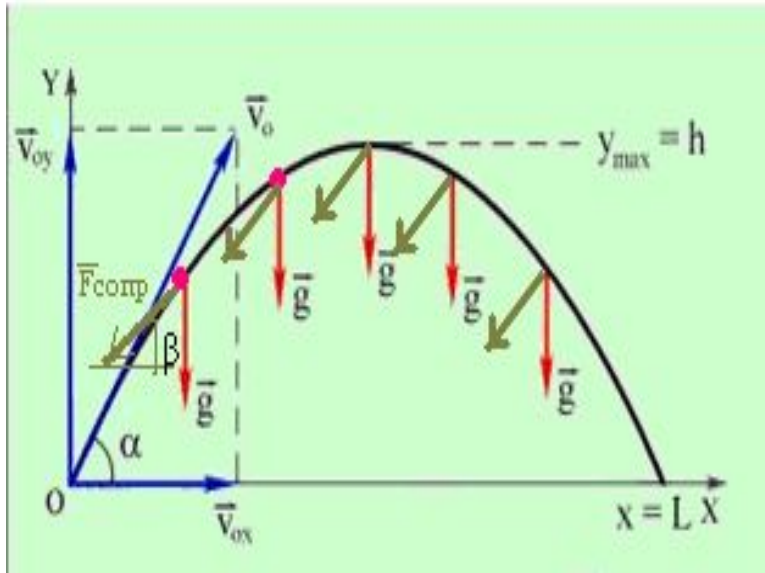
Вообще, коэффициент лобового сопротивления снаряда можно определить экспериментально в аэродинамической трубе или на испытательном полигоне, оснащённом точным измерительным оборудованием.

Задача облегчается тем, что для снарядов разного диаметра коэффициент лобового сопротивления одинаков, если они имеют одинаковую форму.



# Результат труда

## Расчет траектории движения с учетом силы сопротивления



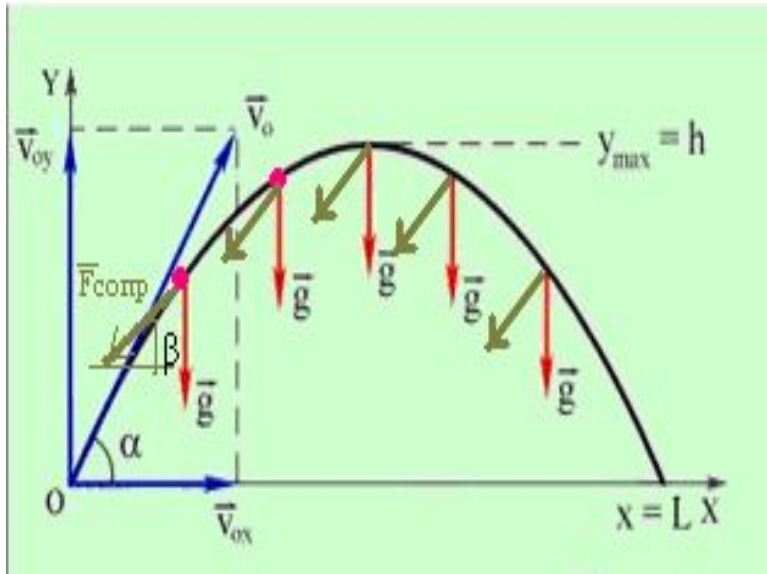
Пусть составляющие силы сопротивления

( $F_{сопр\ x}$ ,  $F_{сопр\ y}$ ) остаются постоянными во время движения и равными максимальным значениям силы сопротивления для тела в начальный момент времени.

При названных допущениях движение снаряда вдоль оси OX будет равнозамедленным с ускорением  $a_x = - F_{сопр\ x} / m$ ;

вдоль оси OY - равнозамедленным до вершины подъема с ускорением  $a_y = - g - F_{сопр\ y} / m$  и равноускоренным после вершины подъема с

ускорением  $a_y = + g - F_{сопр\ y} / m$ .



$m \cdot a_x = - F_{\text{сопр } x}$ , где  $F_{\text{сопр } x} = F_{\text{сопр}} \cdot \cos \beta$ ;

$m \cdot a_y = - mg - F_{\text{сопр } y}$ , где  $F_{\text{сопр } y} = F_{\text{сопр}} \cdot \sin \beta$ .

$a_x = - F_{\text{сопр } x} / m$

$a_y = - (g + F_{\text{сопр } y} / m)$

Уравнения движения будут иметь вид:

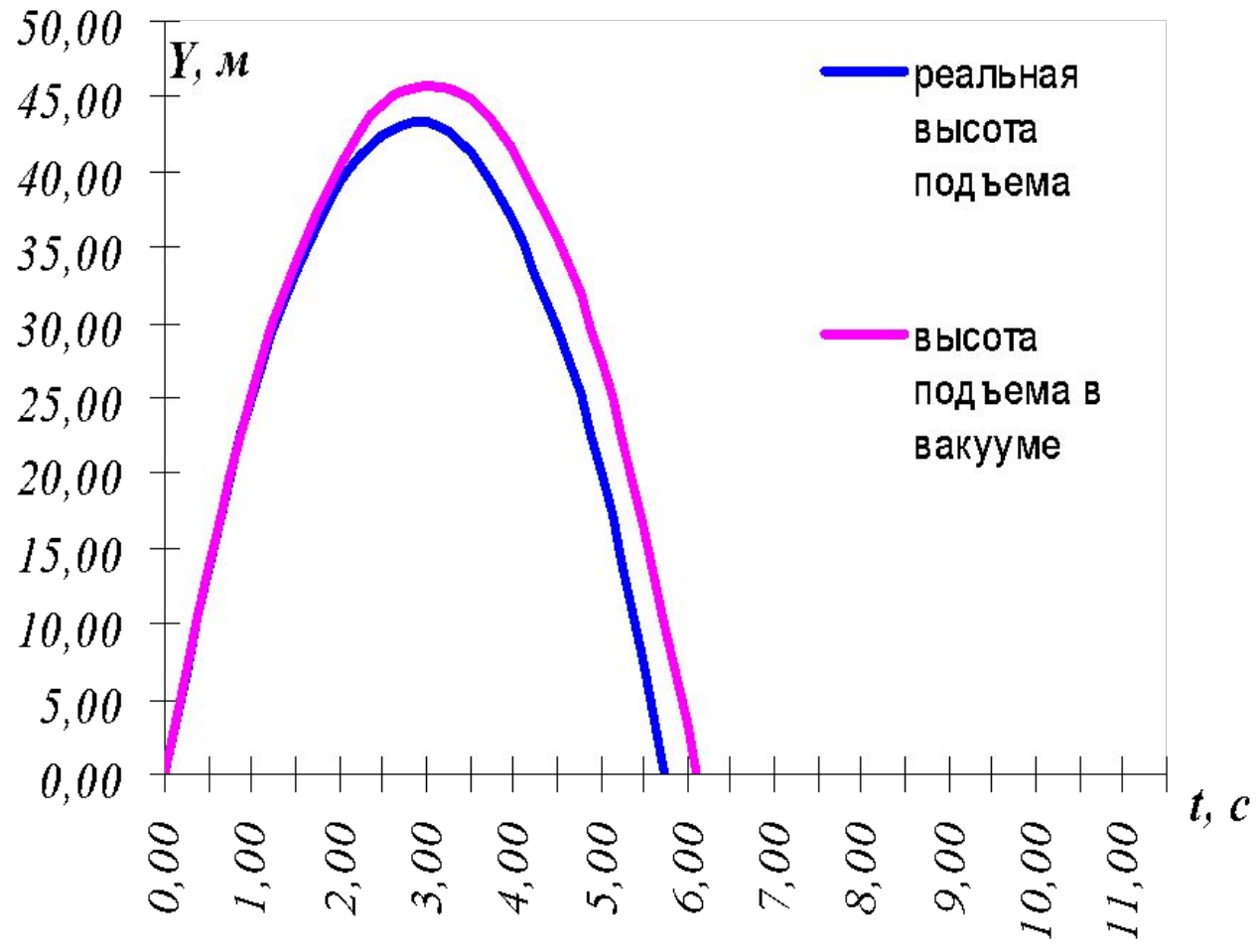
$$x = x_0 + v_{ox} t - F_{\text{сопр } x} t^2 / 2m$$

$$y = y_0 + v_{oy} t - (g + F_{\text{сопр } y} / m) t^2 / 2m$$

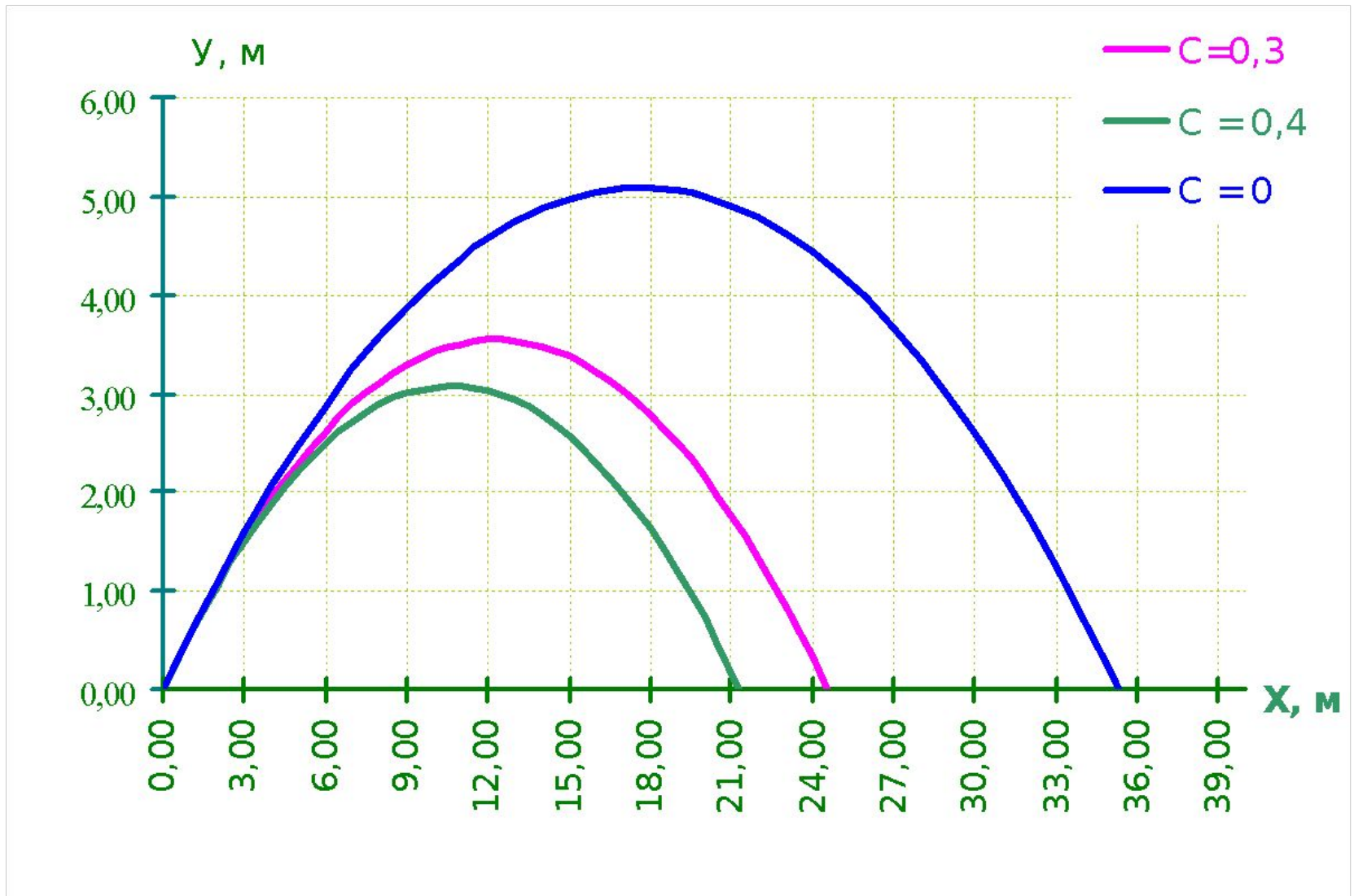
Запишу уравнение траектории движения снаряда с учетом силы сопротивления воздуха

$$y = v_{oy} \frac{x}{v_{ox}} - \frac{a_y}{2} \left( \frac{x}{v_{ox}} \right)^2 = \frac{v_{oy}}{v_{ox}} x - \frac{a_y}{2v_{ox}^2} x^2$$

Сравню траектории движения снаряда в условиях наличия и отсутствия сил сопротивления.



Наибольшему коэффициенту лобового сопротивления соответствует меньшая дальность полета и высота подъема.



# *Вывод*

- На основе всех проделанных опытов можно сделать окончательный вывод об изменении формы траектории баллистического движения.
- Изменив все параметры, я убедился, что, при любых значениях угла, высоты, скорости движения снаряда форма траектории остается неизменной.
- Дальность полета тела зависит от силы сопротивления воздуха, которая пропорциональна квадрату скорости движения тела.
- Чем больше скорость ветра, тем ближе к исходной точке падает тело. Попутный ветер увеличивает дальность траектории, а встречный ветер - уменьшает дальность броска при одинаковой начальной скорости.