С Т А Т И К А

Тема 8. Трение.

Тема 9. Центр тяжести.

8. Трение

Несколько видов трения, в т. ч.:

а) трение скольжения;

б) трение качения.

8.1. Трение скольжения .

Опр. Силой трения скольжения называется сила сопротивления относительному скольжению при стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел.

8.2 Законы трения скольжения при покое.

а) При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (или сила сцепления), которая может принимать любые значения от нуля до значения $F_{пр}$, ***называемого предельной силой трения.***

Сила трения, приложенная к телу, направлена в сторону противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть.

б) Предельная сила трения численно равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление или нормальную реакцию: $F_{пр} = f_0 \cdot N$.

Статический коэффициент трения f_0 ***– величина безразмерная; он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей.***

в) Значение предельной силы трения $F_{пр}$ ***в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей. При равновесии сила трения*** $F \leq F_{пр}$.

***<u>Опр.</u>* Равновесие, имеющее место, когда сила трения равна $\vec{F}_{пр}$ называется предельным равновесием.**

<u>8.3. Трение скольжения при движении</u>

***<u>Опр.</u>* При движении сила трения скольжения направлена в сторону, противоположную движению, и равна произведению динамического коэффициента трения на нормальное давление:**

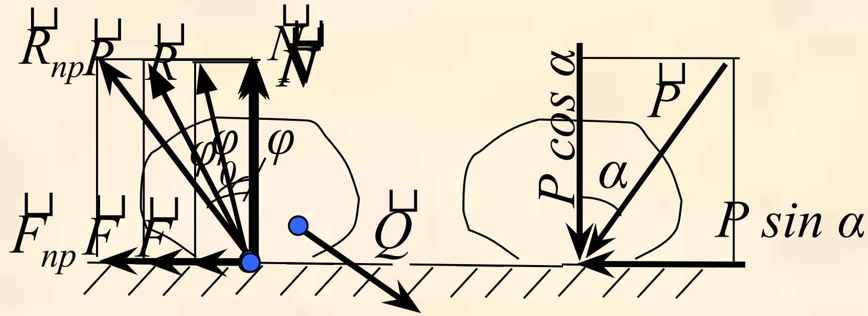
$$F = f \cdot N.$$

Динамический коэффициент трения скольжения - f безразмерная величина и определяется опытным путем.

8.4. Реакция шероховатой связи. Угол трения.

Реакция реальной связи слагается из двух составляющих: из нормальной реакции $\vec{N}$ и перпендикулярной ей силы трения $\vec{F}$.

При изменении силы трения от нуля до $\vec{F}_{пр}$ сила $\vec{R}$ изменяется от $\vec{N}$ до $\vec{R}_{пр}$, а ее угол с нормалью растет от нуля до некоторого предельного значения φ_0.



Вывод. **Никакой силой, образующей с нормалью угол α, меньший угла трения ϕ_0, тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя.**

Опр. **Наибольший угол ϕ_0, который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью к поверхности, называется углом трения:**

$$tg\,\phi_0 = F_{пр} / N = f_0.$$

8.5. Равновесие при наличии трения.

Различают два типа задач на равновесие с учетом трения скольжения:

1. Предельное равновесие, когда сила трения равна $F_{пр} = f_0 \cdot N$. Задачи этого типа решают обычно, добавляя к действующим силам силу $F_{пр}$;

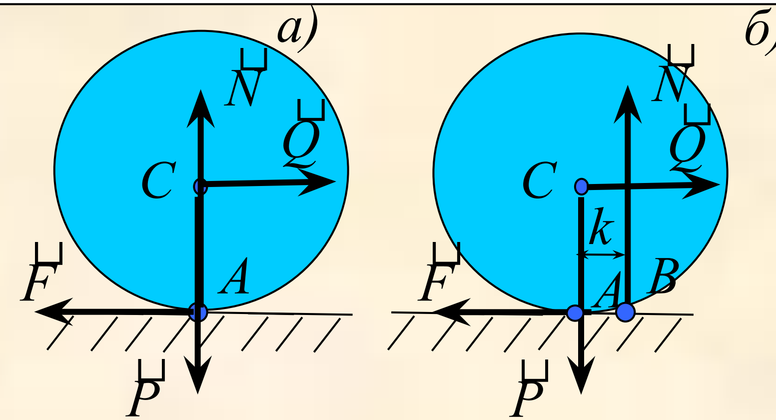
2. Определение силы трения F, когда равновесие не является предельным. В этом случае силу трения скольжения считают неизвестной и определяют ее из уравнений равновесия.

8.6. Трение качения.

Опр. ***Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.***

При отсутствии деформаций (Рис. а)), качение должно начаться при любой малой силе $\vec{Q}$.

При учете деформации касание тел происходит вдоль некоторой площадки АВ (Рис. б)).



Пара сил $\vec{Q}$, $\vec{F}$ способствует вращению цилиндра, а пара $\vec{N}$, $\vec{P}$ препятствует этому вращению.

При увеличения силы $\vec{Q}$ линия действия $\vec{N}$ будет смещаться в сторону В и расстояние k будет возрастать.

Так будет до тех пор, пока момент пары сил $\vec{Q}$, $\vec{F}$ не превысит момент пары $\vec{N}$, $\vec{P}$, т. е. пока Q не достигнет предела - $Q_{пр}$.

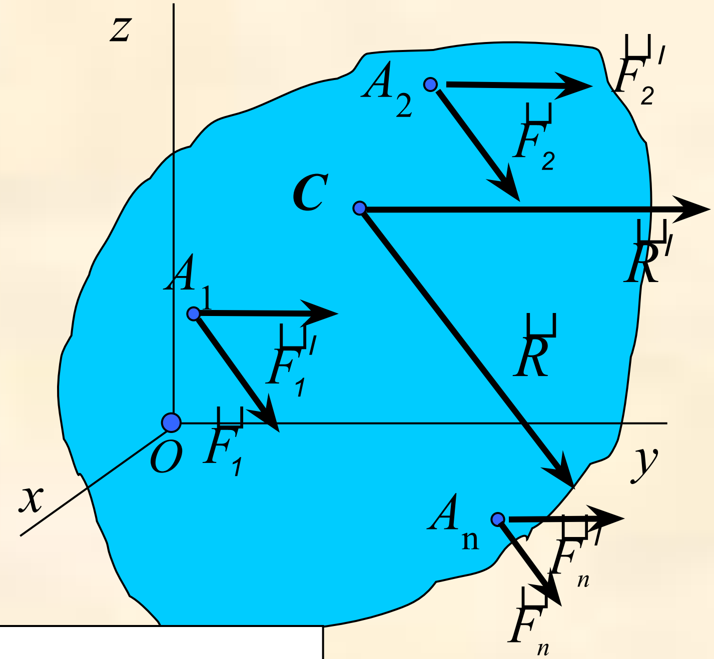
<u>Опр.</u> Величина k называется коэффициентом трения качения.

<u>Вывод.</u> Для учета трения качения необходимо добавить к действующим силам момент трения качения $M_k = N \cdot k$, направленный в сторону противоположную качению.

9. Центр тяжести

9.1. Центр параллельных сил

Рассмотрим пространственную систему параллельных и направленных в одну сторону сил, имеющую равнодействующую, приложенную к точке С - $\vec{R}$.



Если повернуть все силы на некоторый угол, то равнодействующая повернется на тот же угол.

<u>Вывод.</u> Линия действия равнодействующей при повороте системы сил на любой угол всегда проходит через одну и ту же точку С.

<u>Опр.</u> Точка С, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при поворотах этих сил около их точек приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, называется <u>центром параллельных сил.</u>

Определим координаты точки С.

<u>Вывод.</u> Координаты центра параллельных сил определяются по формулам:

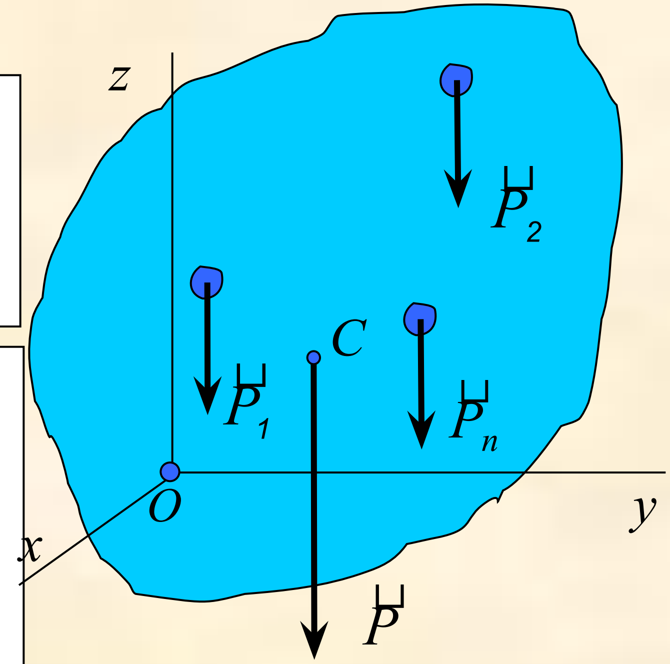
$$x_C = \frac{1}{R}\sum F_k \cdot x_k; \quad y_C = \frac{1}{R}\sum F_k \cdot y_k; \quad z_C = \frac{1}{R}\sum F_k \cdot z_k, \qquad (1)$$

где

x_k, y_k, z_k – координаты точек приложения сил F_k ($k = 1,2, \ldots, n$).

<u>9.2.Центр тяжести твердого тела</u>

<u>Опр.</u> Модуль равнодействующей сил тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ называется <u>весом тела</u> и определяется равенством $P = \sum P_k$.



<u>Опр.</u> Центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка С, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести, действующих на частицы данного тела, при любом положении тела в пространстве.

<u>Координаты центра тяжести</u>, как центра параллельных сил, определяются формулами (1); следовательно,

$$x_C = \frac{1}{P}\sum P_k \cdot x_k; \qquad y_C = \frac{1}{P}\sum P_k \cdot y_k; \qquad z_C = \frac{1}{P}\sum P_k \cdot z_k, \qquad (2)$$

где x_k, y_k, z_k – координаты точек приложения сил P_k ($k = 1, 2, \ldots, n$).

9.3.Координаты центров тяжести однородных тел

Понятие однородного тела

Опр. Однородным называется тело, когда вес $p_к$ любой его части пропорционален объему $V_к$ этой части: $p_к = \gamma \cdot V_к$, а вес P всего тела пропорционален объему V, т.е. $P = \gamma \cdot V$, где γ − вес единицы объема.

Центр тяжести однородного объема V

Подставляя выражения $p_к = \gamma \cdot V_к$ и $P = \gamma \cdot V$ в формулы (2), получим:

$$x_C = \sum V_к \cdot x_к / V, \quad y_C = \sum V_к \cdot y_к / V, \quad z_C = \sum V_к \cdot z_к / V, \qquad (3)$$

где $V_к$ − объемы частиц тела, V − объем тела, $x_к$, $y_к$, $z_к$ − координаты объемов частиц тела.

Центр тяжести однородной тонкой пластинки

Центр тяжести однородной тонкой пластинки определится аналогично:

$$x_C = \sum s_к \cdot x_к / S, \quad y_C = \sum s_к \cdot y_к / S, \qquad (4)$$

где S − площадь всей пластины; $s_к$ − площади ее частей.

Центр тяжести однородной линии

Центр тяжести однородной линии определится по формулам:

$$x_C = \sum l_к \cdot x_к / L, \quad y_C = \sum l_к \cdot y_к / L, \quad z_C = \sum l_к \cdot z_к / L, \qquad (5)$$

где L −длина всей линии, l_k − длины ее частей.

9.4.Способы определения координат центров тяжести тел

Способ симметрии

***Теорема.* Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.**

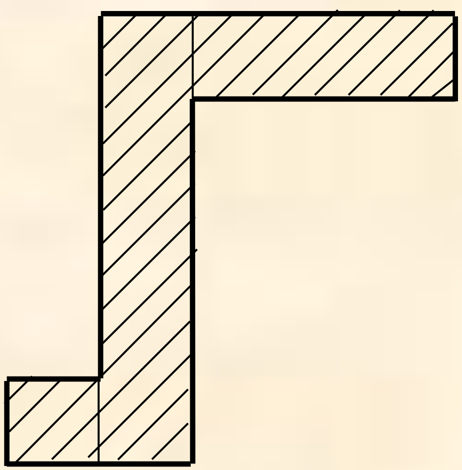
Способ разбиения

Суть метода разбиения заключается в том, что если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести можно вычислить по формулам (3) – (5).

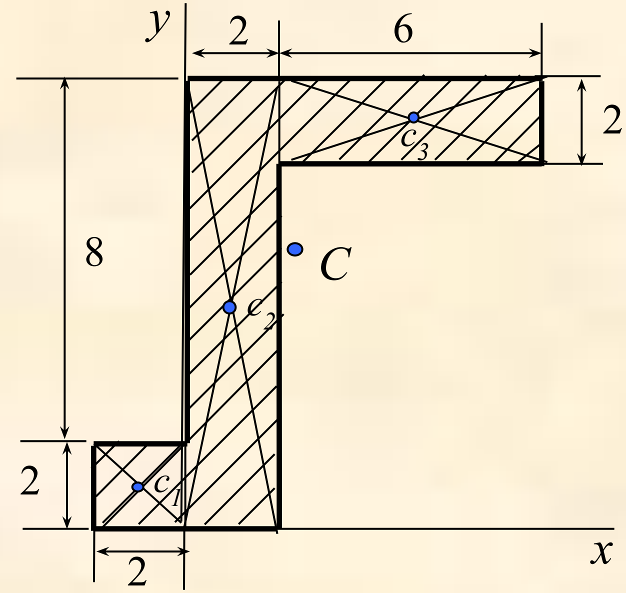
При этом число слагаемых в каждой сумме будет равно числу частей, на которые разбито тело.

Пример применения способа разбиения

Определить координаты центра тяжести однородной пластины, изображенной на рисунке. Размеры в сантиметрах.



Решение.



Выберем оси координат и разобьем пластинку на три прямоугольника.

Вычислим координаты центров тяжести каждого из прямоугольников и их площади.

№	1	2	3
x_k	- 1	1	5
y_k	1	5	9
S_k	4	20	12

Площадь всей пластины

$$S = s_1 + s_2 + s_3 = 4 + 20 + 12 = 36 \text{ см}^2.$$

Подставляя вычисленные величины в формулы* (4) *получим

$$x_C = (s_1 \cdot x_1 + s_2 \cdot x_2 + s_3 \cdot x_3) / S =$$
$$= (-4 + 20 + 60) / 36 = 2{,}1 \text{ см},$$

$$y_C = (s_1 \cdot y_1 + s_2 \cdot y_2 + s_3 \cdot y_3) / S = (4 + 100 + 108) / 36 = 5{,}9 \text{ см}.$$

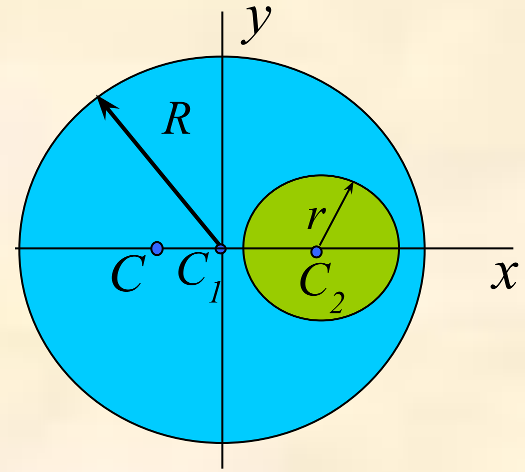
Центр тяжести пластины показан на рисунке.

Способ дополнения (способ отрицательных площадей)

Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тел без выреза и вырезанной части известны.

Пример применения способа разбиения

Определить положение центра тяжести круглой пластинки радиуса R с вырезом радиуса r. Расстояние $C_1 C_2 = a$.



Решение

Найдем площади и координаты центров тяжестей

$$s_1 = \pi R^2, \quad s_2 = -\pi r^2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = a, \quad S = s_1 + s_2 = \pi (R^2 - r^2).$$

Определим координаты центра тяжести по формулам (4)

$$x_C = (x_1 s_1 + x_2 s_2)/S = -a r^2 / (R^2 - r^2); \qquad y_C = 0.$$

Найденный центр тяжести C лежит левее точки C_1.

Способ интегрирования

Разобьем однородный объем V; однородную пластинку, площадью S; однородную линию, длиной L, на бесконечное количество малых частиц и переходя в формулах (3) – (5) к пределу, получим:

$$x_C = 1/V \int_{(V)} x \cdot dv, \quad y_C = 1/V \int_{(V)} y \cdot dv, \quad z_C = 1/V \int_{(V)} z \cdot dv, \qquad (3')$$

где dv − бесконечно малый объем частицы тела, V − объем тела, x, y, z − координаты бесконечно малых частиц тела.

$$x_C = 1/S \int_{(S)} x \cdot ds, \quad y_C = 1/S \int_{(S)} y \cdot ds, \qquad (4')$$

где ds − бесконечно малая площадь частицы пластины, S − площадь пластины, x, y − координаты бесконечно малых частиц пластины.

$$x_C = 1/L \int_{(L)} x \cdot dl, \quad y_C = 1/L \int_{(L)} y \cdot dl, \quad z_C = 1/L \int_{(L)} z \cdot dl, \qquad (5^{/})$$

где dl − бесконечно малая длина частицы линии,
L − длина линии, x, y, z − координаты бесконечно малых частиц линии.

Определение координат центра тяжести по формулам ($3^{/}$) - ($5^{/}$) выражает метод интегрирования.

Экспериментальные способы

Различают два основных экспериментальных способа определения положения центра тяжести неоднородных тел произвольной формы.

а) метод подвешивания

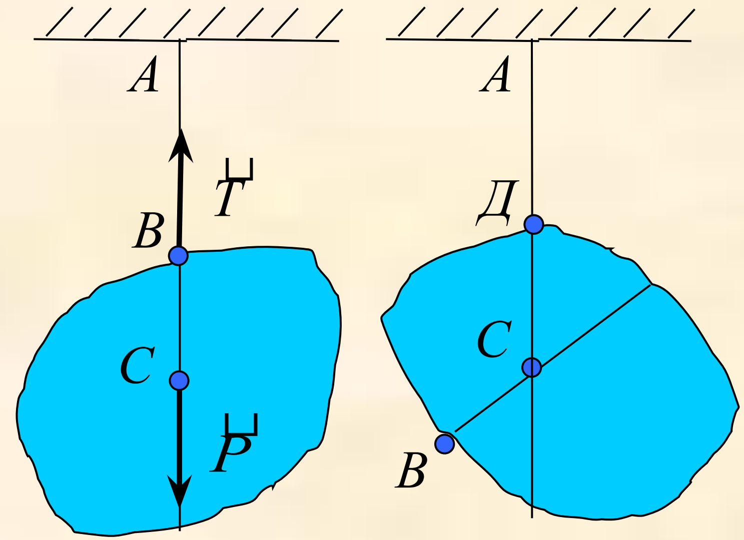
Заключается в том, что тело подвешивают на нити или тросе за различные его точки.

Подвесим пластину произвольной формы на тросе (нити) АВ.

Пластина будет находится в равновесии под действием двух сил: силы тяжести тела $\vec{P}$, приложенной к центру тяжести С, и силы натяжения нити - $\vec{T}$.

В соответствии с аксиомой о двух силах линии действия сил будут совпадать, т. е. центр тяжести С лежит на линии, которая продолжает нить.

Проведем эту линию мелом и подвесим пластину за другую точку Д.



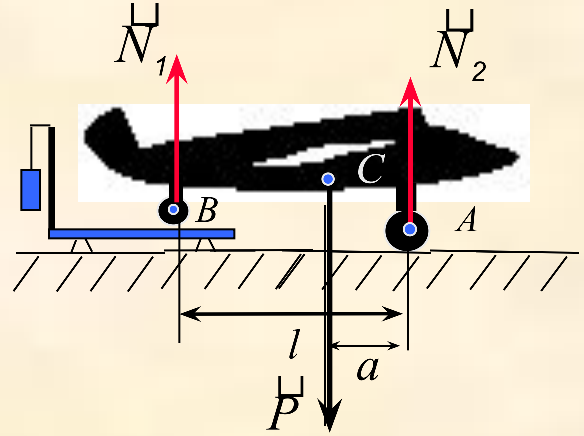
Центр тяжести пластины будет находиться на линии, продолжающей нить. Проведем эту линию.

Центр тяжести С находится на пересечении линий.

б) метод взвешивания

Применяется для определения центра тяжести тяжелых неоднородных тел (самолет, паровоз и т.п.).

Рассмотрим самолет, расстояние между колесами которого AB = l.



Горизонтальную координату центра тяжести можно считать известной, если будет найдено расстояние a.

Для определения a поставим колесо B на весы и найдем реакцию $\vec{N}_1$.

Аналогично, поставив колесо A на весы, найдем реакцию $\vec{N}_2$.

Тогда вес самолета определится в виде суммы: $P = N_1 + N_2$.

Уравнение моментов относительно точки A:

$$-N_1 \cdot l + P \cdot a = 0.$$

Откуда находим: $a = l \cdot N_1 / (N_1 + N_2)$.

9.5. Центры тяжести некоторых однородных тел

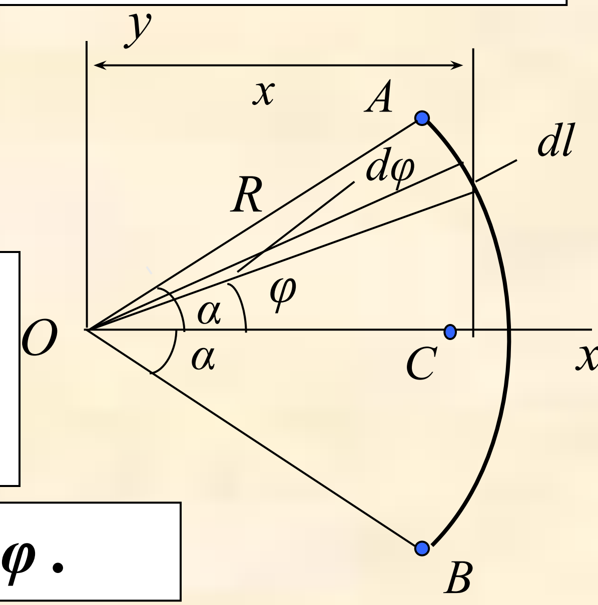
Центр тяжести дуги окружности

Рассмотрим дугу АВ радиуса R с центральным углом АОВ= 2α.

В силу симметрии ц. т. лежит на оси x.

Найдем x_C по методу интегрирования.

Элемент dl дуги длиной dl = R dφ, опирается на угол dφ и его положение определяется углом φ.



Найдем координату x элемента dl: x = R cos φ .

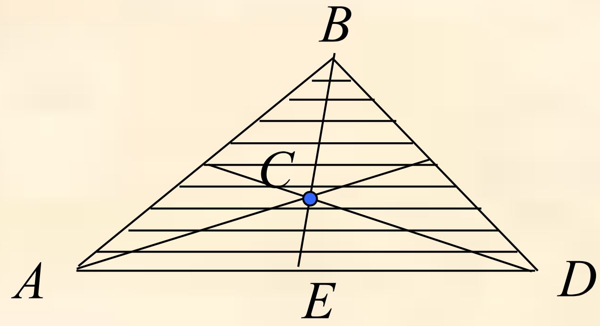
Подставляя выражения для dl и x в формулу (5′) , получим

$$x_C = 1/L\int_A^B x \cdot dl = R^2/L\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi\, d\varphi = 2R^2/L \sin\alpha.$$

С учетом того, что L = R 2 α , находим, что <u>центр тяжести дуги окружности лежит на ее оси симметрии на расстоянии от центра O, равным</u> $x_C = (R\sin\alpha)/\alpha$. (*)

Центр тяжести площади треугольника

Разобьем площадь треугольника ABD прямыми, параллельными стороне AD, на n узких полосок.



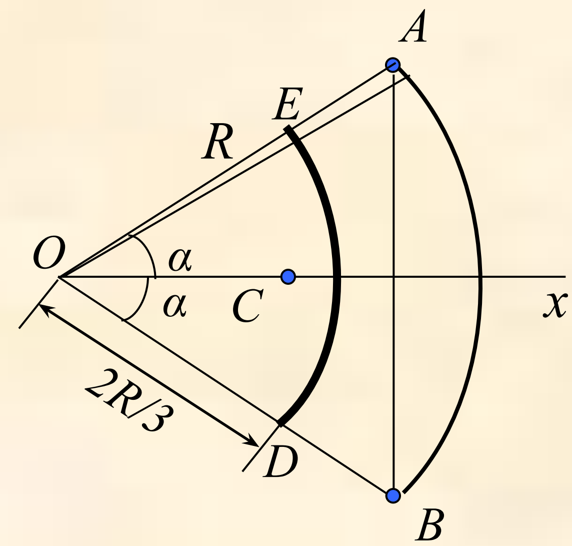
Центры тяжести этих полосок будут лежать на медиане BE треугольника.

Следовательно, и центр тяжести всего треугольника лежит на этой медиане.

Аналогичный результат получается для двух других медиан.

<u>Вывод.</u> Центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан.
При этом CE = BE / 3.

Центр тяжести кругового сектора



Рассмотрим круговой сектор OAB радиуса R с центральным углом 2 α .

Разобьем площадь сектора OAB радиусами, проведенными из центра O, на n секторов.

При большом числе n их можно считать треугольниками, центры тяжести которых лежат на дуге DE радиуса 2R/3.

Т. е. центр тяжести сектора OAB совпадает с центром тяжести дуги DE, положение которого определяется по формуле (*).

Вывод. *Центр тяжести площади кругового сектора лежит на его оси симметрии на расстоянии от центра O, равном*

$$x_C = 2\ R \sin\alpha / (3\alpha).$$