

# Треугольник Паскаля

Работа выполнена  
Бессоновой Марией  
ученицей 10 А класса  
МОУ СОШ № 1  
г. Михайловска  
2010 год

*“Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В тоже время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике.”*

Мартин Гарднер

**Треугольник Паскаля** — арифметический треугольник, образованный биномиальными коэффициентами. Назван в честь Блеза Паскаля.

Если очертить треугольник Паскаля, то получится равнобедренный треугольник. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Продолжать треугольник можно бесконечно. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Имеет применение в теории вероятности и обладает занимательными свойствами.

0:  
1:  
2:  
3:  
4:  
5:  
6:  
7:  
8:  
9:  
10:  
11:  
12:  
13:  
14:

Треугольник Паскаля

$$1 \quad (a+b)^n =$$

$$1 \quad 1 \quad = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

$$1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1$$

$$1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1$$

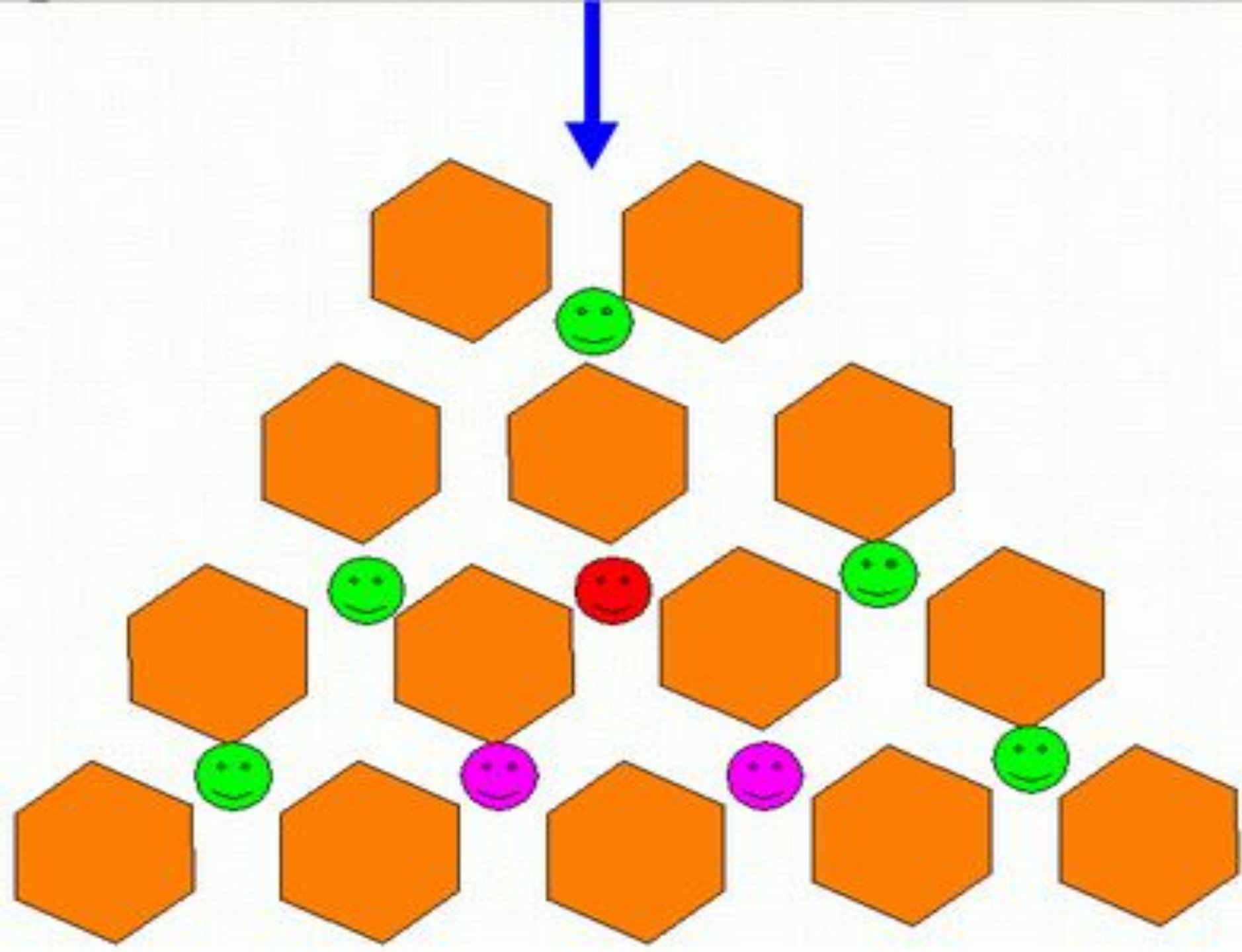
$$1 \quad 11 \quad 55 \quad 165 \quad 330 \quad 462 \quad 462 \quad 330 \quad 165 \quad 55 \quad 11 \quad 1$$

$$1 \quad 12 \quad 66 \quad 220 \quad 495 \quad 792 \quad 924 \quad 792 \quad 495 \quad 220 \quad 66 \quad 12 \quad 1$$

$$1 \quad 13 \quad 78 \quad 286 \quad 715 \quad 1287 \quad 1716 \quad 1716 \quad 1287 \quad 715 \quad 286 \quad 78 \quad 13 \quad 1$$

$$1 \quad 14 \quad 91 \quad 364 \quad 1001 \quad 2002 \quad 3003 \quad 3432 \quad 3003 \quad 2002 \quad 1001 \quad 364 \quad 91 \quad 14 \quad 1$$

Мартин Гарднер пишет в книге "Математические новеллы" (М., Мир, 1974): "Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В тоже время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике".

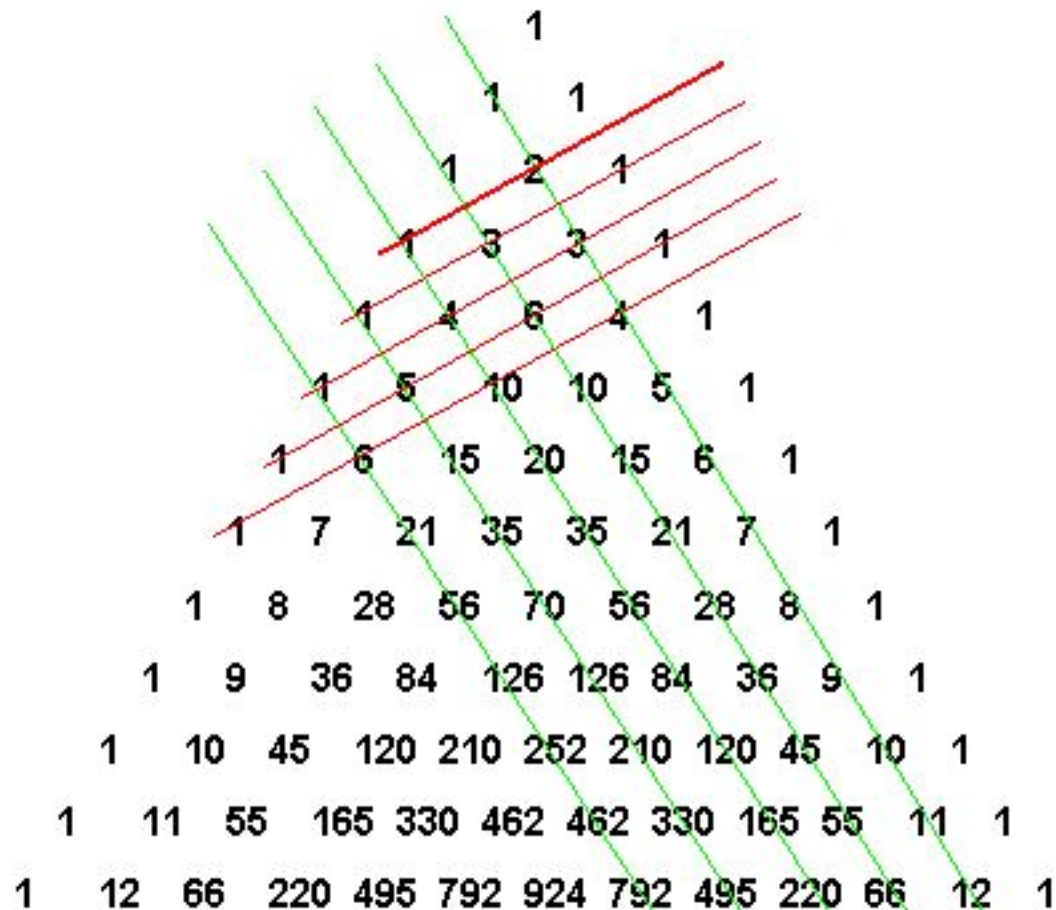


Предположим, что вы входите в город как показано на схеме синей стрелкой, и можете двигаться только вперед, точнее, все время выбирая, вперед налево, или вперед направо. Узлы, в которые можно попасть только единственным образом, отмечены зелеными смайликами, точка, в которую можно попасть двумя способами, показана красным смайликом, а тремя, соответственно, розовым. Это один из вариантов построения треугольника, предложенный Гуго Штейнгаузом в его классическом "Математическом калейдоскопе".



А еще проще объясняют устройство треугольника Паскаля слова: каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Все

элементарно, но сколько в этом таится чудес.



На вершине треугольника стоит 1. Треугольник можно продолжать неограниченно. Он обладает симметрией относительно вертикальной оси, проходящей через его вершину. Вдоль диагоналей (насколько у треугольника могут быть диагонали, но не будем придираться, такая терминология встречается в публикациях), параллельных сторонам треугольника (на рисунке отмечены зелеными линиями) выстроены треугольные числа и их обобщения на случай пространств всех размерностей.

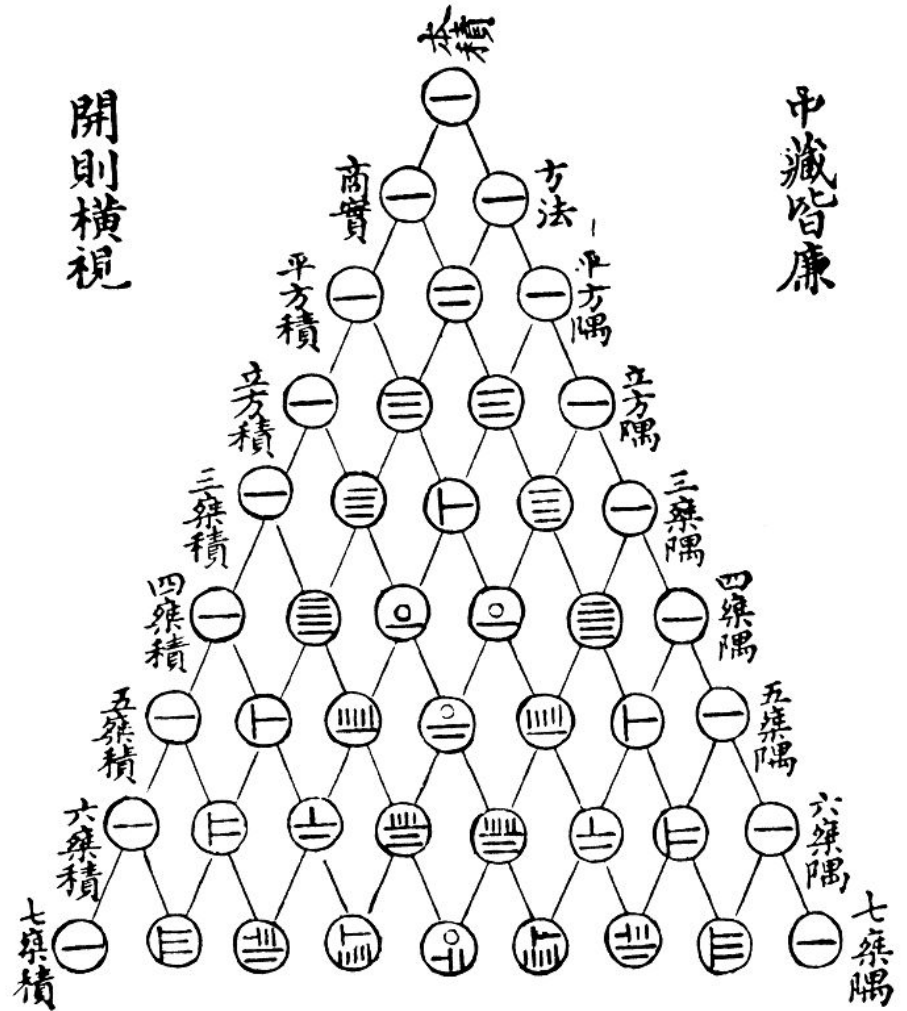
# История

Треугольник Яна Хуэя в китайском средневековом манускрипте, 1303 год

Первое упоминание треугольной последовательности биномиальных коэффициентов под названием *meru-prastaara* встречается в комментарии индийского математика X века Халаюдхи к трудам другого математика, Пингалы. Треугольник исследуется также Омаром Хайямом около 1100 года, поэтому в Иране эту схему называют треугольником Хайяма. В 1303 году была выпущена книга «Яшмовое зеркало четырёх элементов» китайского математика Чжу Шицзе, в которой был изображен треугольник Паскаля на одной из иллюстраций; считается, что изобрёл его другой китайский математик, Ян Хуэй (поэтому китайцы называют его треугольником Яна Хуэя). На титульном листе учебника арифметики, написанном в 1529 году Петром Апианом, астрономом из Ингольтштадского университета, также изображён треугольник Паскаля. А в 1653 году (в других источниках в 1655 году) вышла книга Блеза Паскаля «Трактат об арифметическом треугольнике».

# 古法七乘方圖

Треугольник Яна  
Хуэя в  
китайском  
средневековом  
манускрипте,  
1303 год



七積	六積	五積	四積	三積	二積	一積	方法	七積
----	----	----	----	----	----	----	----	----

# Свойства

- Второе число каждой строки соответствует её номеру.
- Третье число каждой строки равно сумме номеров строк, ей предшествующих.
- Третье число каждой строки является треугольным.
- Четвертое число каждой строки является тетраэдрическим.
- Сумма чисел  $n$ -й восходящей диагонали, проведенной через строку

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots = F_n$$

- 
- Если вычесть из центрального числа в строке с чётным номером соседнее число из той же строки, то получится число Каталана.
- Сумма чисел  $n$ -й строки треугольника Паскаля равна  $2^n$ .
- Простые делители чисел треугольника Паскаля образуют симметричные самоподобные структуры.
- Если в треугольнике Паскаля все нечётные числа окрасить в чёрный цвет, а чётные - в белый, то образуется треугольник Серпинского.

# Ссылки

1. [http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA\\_%D0%9F%D0%B0%D1%81%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D0%9F%D0%B0%D1%81%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F)
2. Фукс Д., Фукс М. [Арифметика биномиальных коэффициентов](#) // [Квант](#). — 1970. — № 6. — С. 17-25.
3. Weisstein, Eric W. [Pascal's Triangle](#) Pascal's Triangle (англ.) на сайте Wolfram [MathWorld](#).
4. Абачиев С. К. [Радужная фрактальность треугольника Паскаля](#)
5. [http://arbuz.uzpak.uz/u\\_treug.html](http://arbuz.uzpak.uz/u_treug.html)