

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Цепи с одним источником питания

Примеры решения

Пример 1

задач

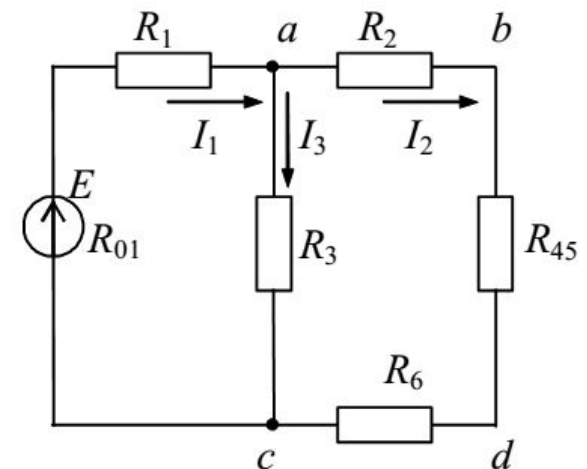
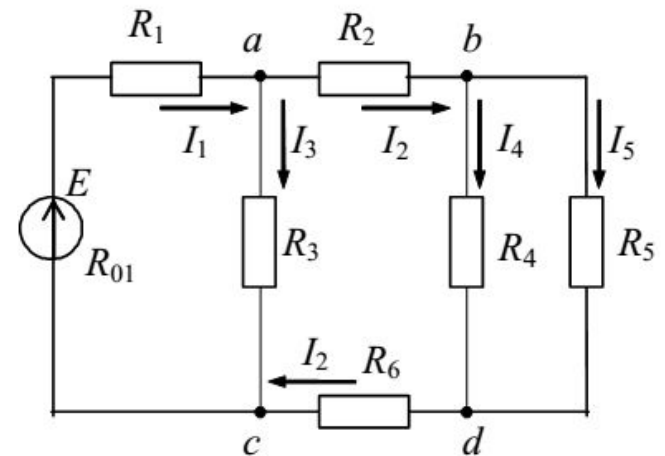
Заданная электрическая цепь характеризуется следующими параметрами элементов: $E=312\text{В}$, $R_{01}=1\text{Ом}$, $R_1=3\text{Ом}$, $R_2=6\text{Ом}$, $R_3=20\text{Ом}$, $R_4=8\text{Ом}$, $R_5=16\text{Ом}$, $R_6=7\text{Ом}$. Рассчитать токи во всех ветвях, падения напряжения на отдельных участках, потребляемую мощность и составить баланс мощностей.

Решение (по методу эквивалентных преобразований)

Эквивалентное (входное, общее) сопротивление цепи определяется путем "свертывания" схемы.

1. Резисторы R_4 и R_5 соединены параллельно, их общее сопротивление:

$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = \frac{8 \cdot 16}{8 + 16} \approx 5,33, \text{Ом.}$$



Сопротивления R_2 , R_{45} и R_6 соединены последовательно друг с другом, их эквивалентное сопротивление:

$$R_{2456} = R_2 + R_{45} + R_6 = 6 + 5,33 + 7 = 18,33, \text{ Ом.}$$

Пассивный элемент R_3 подключен параллельно

$$R_{32456} = \frac{R_3 \cdot R_{2456}}{R_3 + R_{2456}} = \frac{20 \cdot 18,33}{20 + 18,33} \approx 9,56, \text{ Ом.}$$

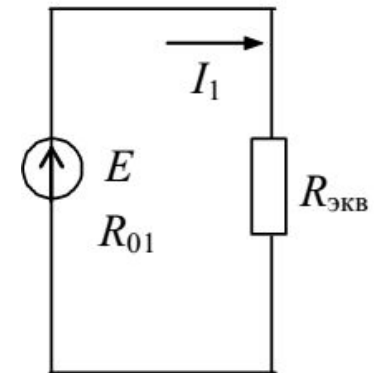
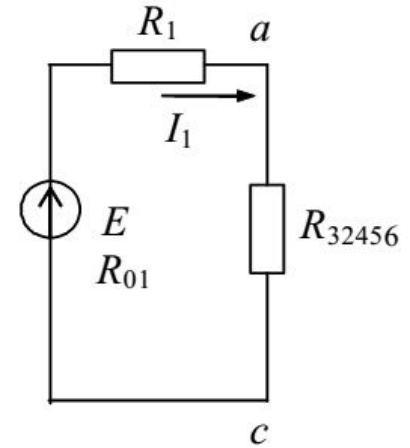
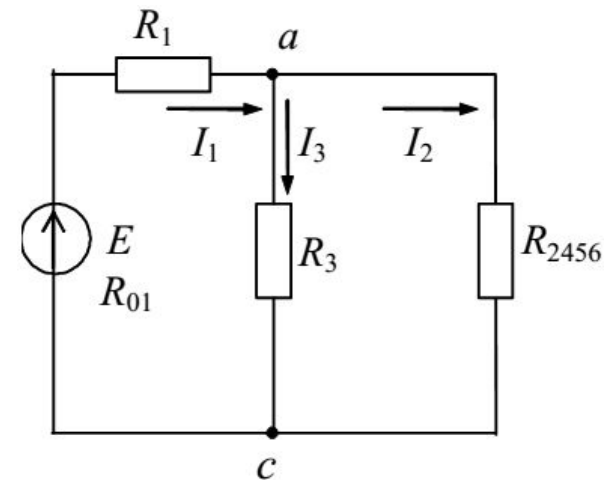
Эквивалентное сопротивление внешней цепи состоит из последовательно соединенных R_1 и R_{32456} , поэтому

$$R_{\text{ЭКВ}} = R_1 + R_{32456} = 3 + 9,56 = 12,56, \text{ Ом.}$$

Ток, потребляемый схемой, в ветви источника питания

$$I_1 = \frac{E}{R_{\text{ЭКВ}} + R_{01}} = \frac{312}{12,56 + 1} = 23,01, \text{ А.}$$

Остальные токи, а также напряжения на отдельных участках определяются путем "развертывания" эквивалентной схемы до исходной.



Напряжение на участке “ac”

$$U_{ac} = R_{32456} \cdot I_1 = 9,56 \cdot 23,01 = 218,98, \text{ В},$$

ток I_3 , протекающий по ветви с резистором R_3 ,

$$I_3 = \frac{U_{ac}}{R_3} = \frac{219,98}{20} \approx 11,00, \text{ А},$$

ток I_2 соответственно

$$I_2 = \frac{U_{ac}}{R_{2456}} = \frac{219,98}{18,33} \approx 12,00, \text{ А}.$$

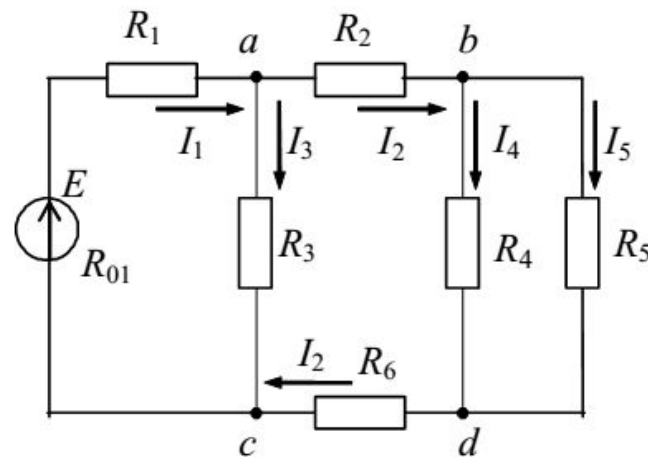
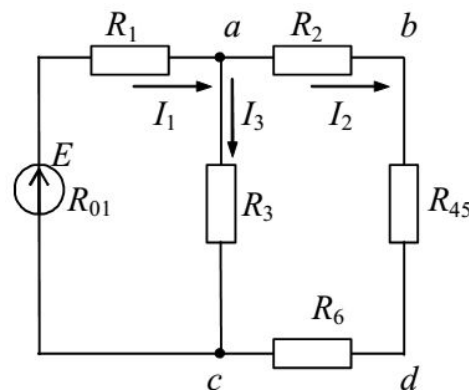
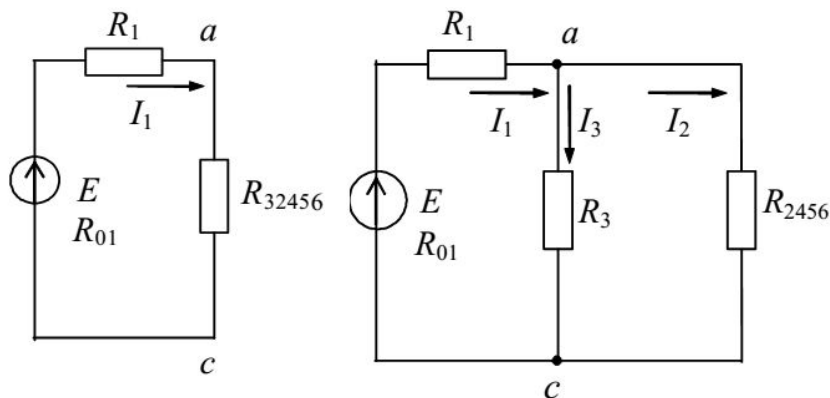
Напряжение на участке “bd”

$$U_{bd} = R_{45} \cdot I_2 = 5,33 \cdot 12,00 = 63,96, \text{ В};$$

тогда

$$I_4 = \frac{U_{bd}}{R_4} = \frac{63,96}{8} \approx 8,00, \text{ А},$$

$$I_5 = \frac{U_{bd}}{R_5} = \frac{63,96}{16} \approx 4,00, \text{ А}.$$



3. Мощность, отдаваемая источником,

$$P_{\text{ист}} = E \cdot I_1 = 312 \cdot 23,01 = 7179,12, \text{ Вт.}$$

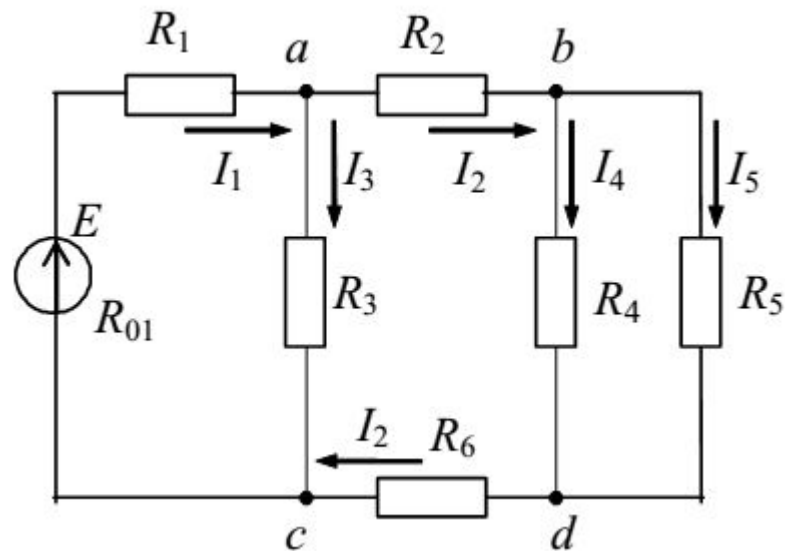
Мощность, потребляемая схемой,

$$\begin{aligned} P_{\text{потр}} &= R_{01} \cdot I_1^2 + R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 + R_5 \cdot I_5^2 + R_6 \cdot I_2^2 = \\ &= 1 \cdot 23,01^2 + 3 \cdot 23,01^2 + 6 \cdot 12,00^2 + 20 \cdot 11,00^2 + 8 \cdot 8,00^2 + 16 \cdot 4,00^2 + \\ &+ 7 \cdot 12,00^2 \approx 7179,48, \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Уравнение баланса мощностей:

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}},$$

$$7179,12 \text{ Вт} \approx 7179,48 \text{ Вт.}$$



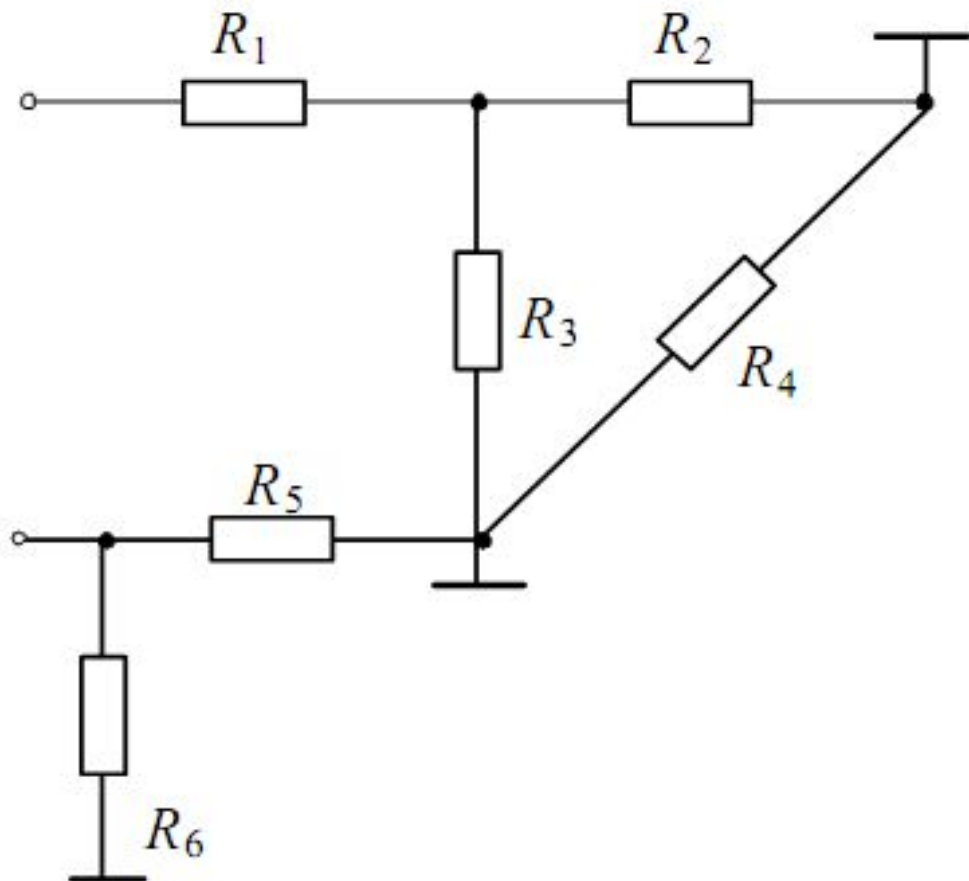
Самостоятельно!

Определить входное сопротивление заданной электрической цепи относительно питающих зажимов, если

$$R_1 = R_4 = 4 \text{ Ом},$$

$$R_2 = R_3 = 3 \text{ Ом},$$

$$R_5 = R_6 = 9 \text{ Ом}.$$

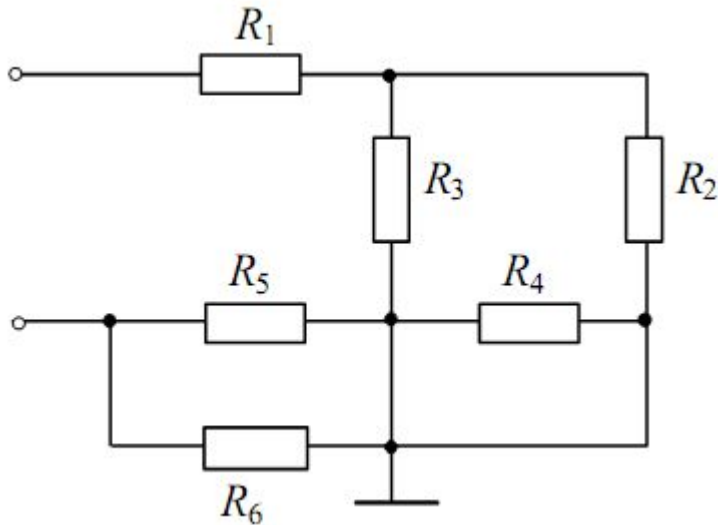


Пример 2

Определить входное сопротивление заданной электрической цепи относительно питающих зажимов, если $R_1=R_4=4\text{Ом}$, $R_2=R_3=3\text{Ом}$, $R_5=R_6=9\text{Ом}$.

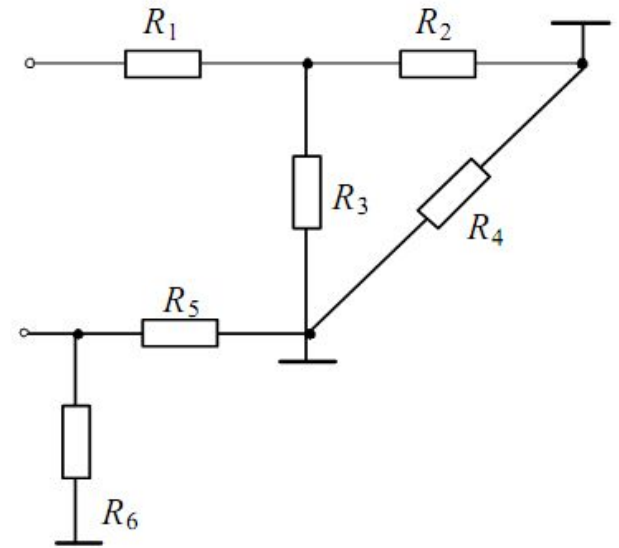
Решение

Поскольку заземленные узлы являются равнопотенциальными ($\phi=0$), исходная схема может быть представлена следующим образом.



Резистор R_4 закорочен, поэтому не влияет на входное сопротивление

$$\begin{aligned} R_{\text{вх}} &= R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} = \\ &= 4 + \frac{3 \cdot 3}{3 + 3} + \frac{9 \cdot 9}{9 + 9} = 10, \text{ Ом.} \end{aligned}$$

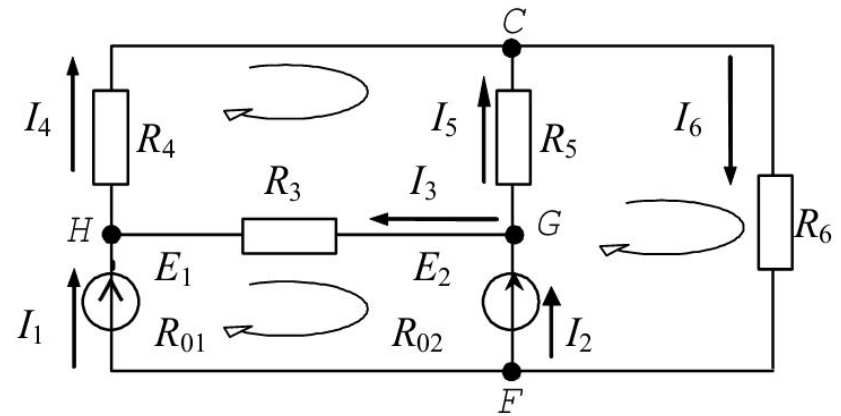


Цепи с двумя и более источниками питания

В электрической схеме, имеющей следующие параметры: $E_1=52\text{В}$, $E_2=69\text{В}$, $R_{01}=1\text{ Ом}$, $R_{02}=2\text{ Ом}$, $R_3=5\text{ Ом}$, $R_4=2\text{ Ом}$, $R_5=6\text{ Ом}$, $R_6=3\text{ Ом}$, рассчитать токи во всех ветвях и составить уравнение баланса мощностей.

РЕШЕНИЕ 1:

На основе уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа.



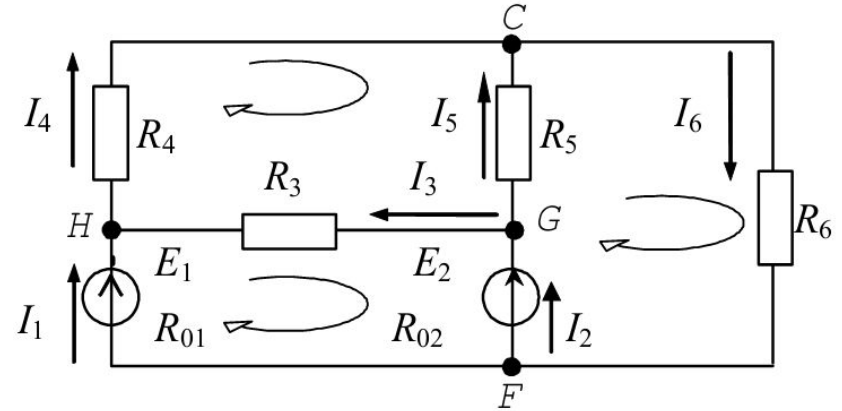
1. Выбираются условно положительные направления токов в ветвях.

2. Составляются уравнения на основе первого закона Кирхгофа для любых трех потенциальных узлов из четырех (H, C, G, F), имеющих в схеме: для узла H $\rightarrow I_1 + I_3 - I_4 = 0$,

$$\text{для узла C} \rightarrow I_4 + I_5 - I_6 = 0,$$

$$\text{для узла G} \rightarrow I_2 - I_3 - I_5 = 0.$$

3. Составляются уравнения на основе второго закона Кирхгофа для любых трех независимых замкнутых контуров с учетом предварительно выбранных положительных направлений обхода этих контуров (например, по часовой стрелке):



$$\text{для контура } HCGH \rightarrow R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 - R_5 \cdot I_5 = 0,$$

$$\text{для контура } HGFH \rightarrow R_{01} \cdot I_1 - R_{02} \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 = E_1 - E_2,$$

$$\text{для контура } CFGC \rightarrow R_{02} \cdot I_2 + R_5 \cdot I_5 + R_6 \cdot I_6 = E_2.$$

4. Из решения системы записанных выше шести уравнений получаются следующие значения токов:

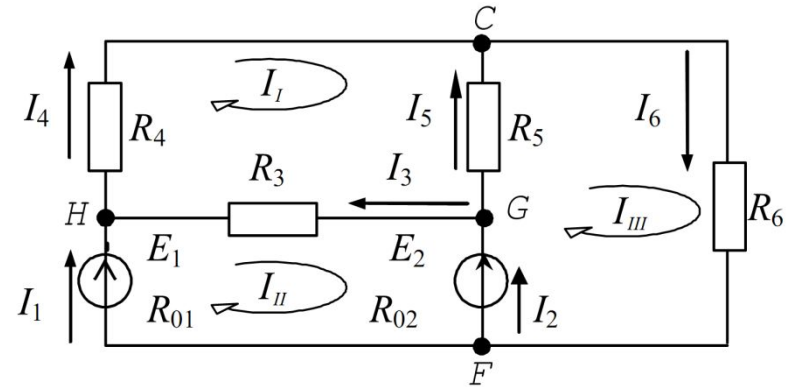
$$I_1 = 5 \text{ A}, I_2 = 6 \text{ A}, I_3 = 2 \text{ A}, I_4 = 7 \text{ A}, I_5 = 4 \text{ A}, I_6 = 11 \text{ A}.$$

Поскольку полученные значения всех токов положительны, предварительно выбранные их направления верны.

РЕШЕНИЕ 2:

Согласно методу контурных токов:

1. Выбираются условно положительные направления токов в ветвях, а также контурных токов в трех независимых контурах (например, по часовой стрелке).



2. Составляются уравнения по второму закону Кирхгофа относительно контурных токов для трех ранее выбранных

НЕЗАВИСИМЫХ КОНТУРОВ:

$$(R_3 + R_4 + R_5) \cdot I_I - R_3 \cdot I_{II} - R_5 \cdot I_{III} = 0,$$

$$-R_3 \cdot I_I + (R_{01} + R_3 + R_{02}) \cdot I_{II} - R_{02} \cdot I_{III} = E_1 - E_2,$$

$$-R_5 \cdot I_I - R_{02} \cdot I_{II} + (R_{02} + R_5 + R_6) \cdot I_{III} = E_2.$$

3. Решение согласно методу Гаусса дает следующие результаты:

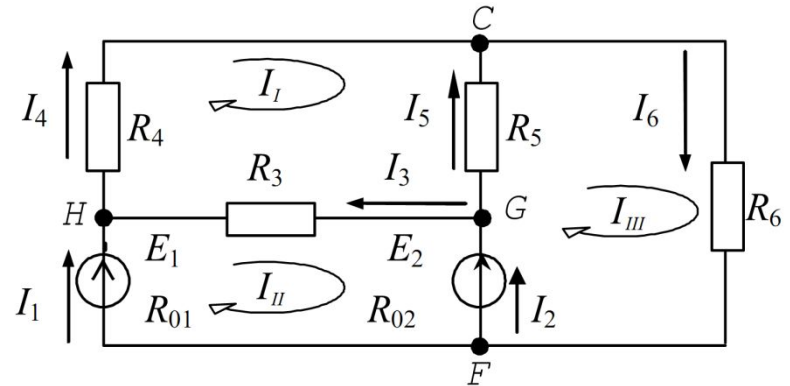
$$I_I = 7 \text{ A}, I_{II} = 5 \text{ A}, I_{III} = 11 \text{ A}.$$

4. Определяются значения токов в ветвях через рассчитанные контурные.

$$I_1 = I_{II} = 5 \text{ A}, I_2 = I_{III} - I_{II} = 6 \text{ A},$$

$$I_4 = I_I = 7 \text{ A}, I_3 = I_I - I_{II} = 2 \text{ A},$$

$$I_6 = I_{III} = 11 \text{ A}, I_5 = I_{III} - I_I = 4 \text{ A}.$$



5. Уравнение баланса мощностей на основе закона сохранения энергии для рассматриваемой схемы записывается так:

$$E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 = R_{01} \cdot I_1^2 + R_{02} \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 + R_5 \cdot I_5^2 + R_6 \cdot I_6^2,$$

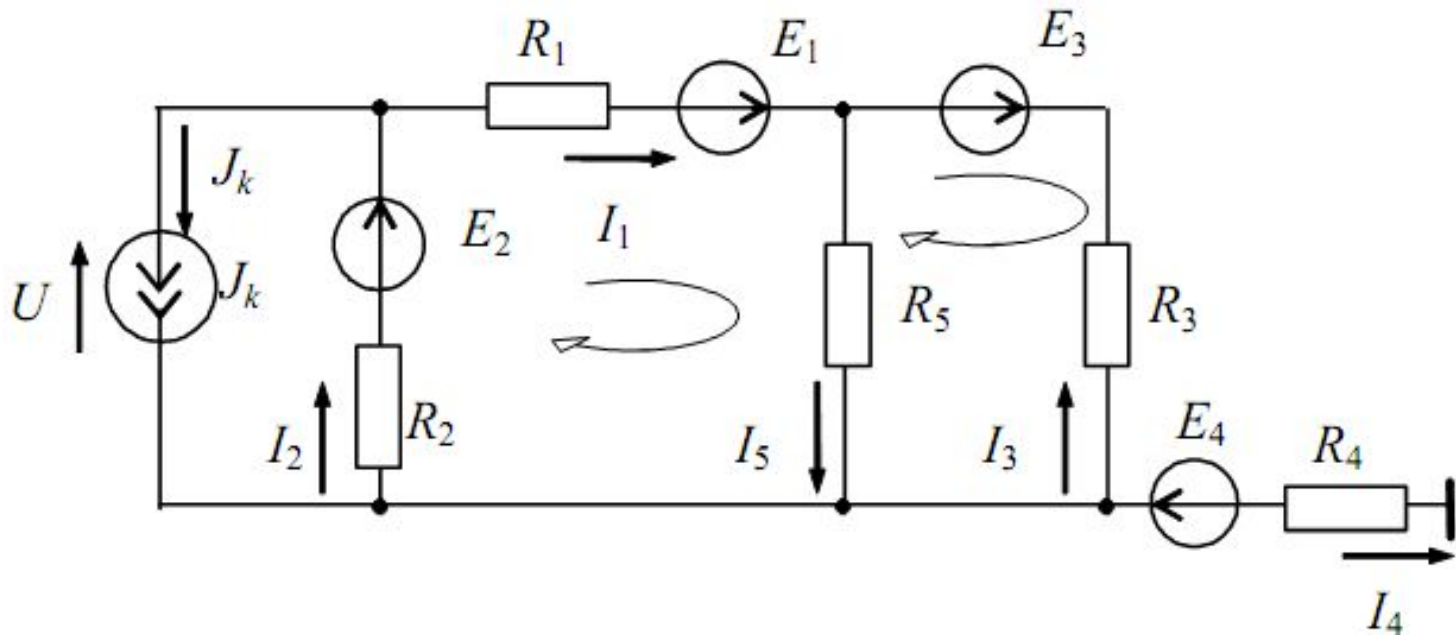
$$52 \cdot 5 + 69 \cdot 6 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 6^2 + 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 7^2 + 6 \cdot 4^2 + 3 \cdot 11^2,$$

$$674 \text{ Вт} = 674 \text{ Вт}.$$

Самостоятельно!

В заданной электрической схеме, имеющей следующие параметры:

$E_1=80\text{В}$, $E_2=70\text{В}$, $E_3=20\text{В}$, $E_4=50\text{В}$, $J_k=5\text{А}$, $R_1=40\text{Ом}$, $R_2=R_3=10\text{Ом}$, $R_4=20\text{Ом}$, $R_5=25\text{Ом}$,
рассчитать токи во всех ветвях и составить уравнение баланса мощностей.



Пример 2

В заданной электрической схеме, имеющей следующие параметры: $E_1=80\text{В}$, $E_2=70\text{В}$, $E_3=20\text{В}$, $E_4=50\text{В}$, $J_k=5\text{А}$, $R_1=40\text{Ом}$, $R_2=R_3=10\text{Ом}$, $R_4=20\text{Ом}$, $R_5=25\text{Ом}$, рассчитать токи во всех ветвях и составить уравнение баланса мощностей.

Решение

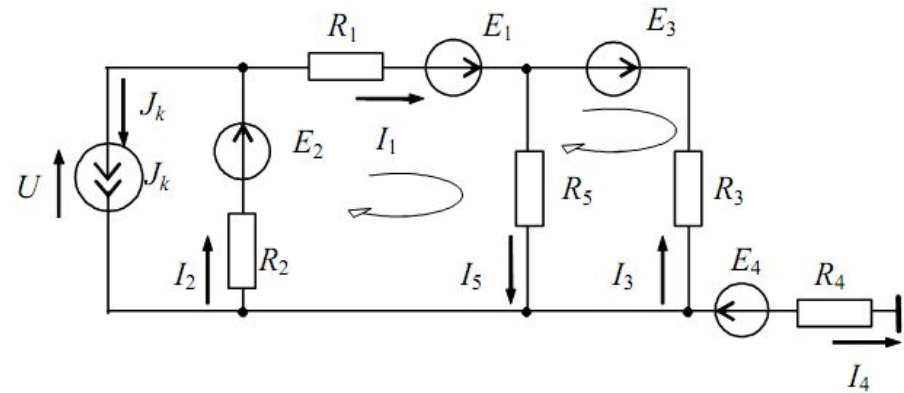
а) На основе уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа:

1. Выбираются условно положительные направления токов в ветвях. Составляются уравнения на основе первого закона Кирхгофа для любых двух из трех потенциальных узлов, имеющих в схеме

$$-I_1 + I_2 - J_k = 0,$$

$$I_1 + I_3 - I_5 = 0;$$

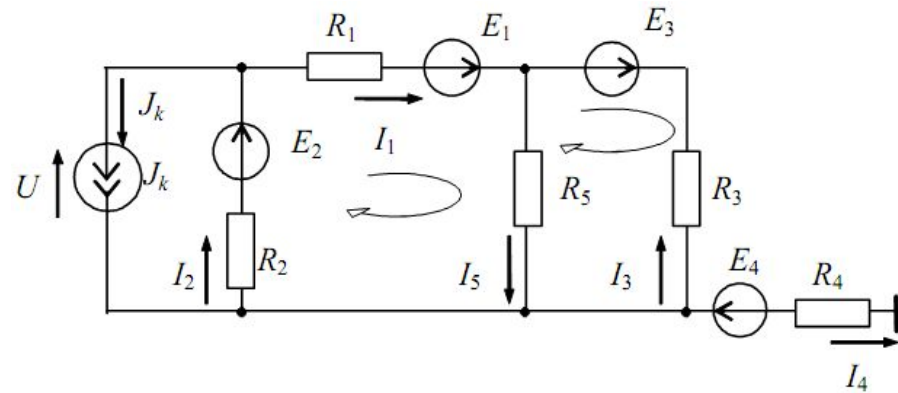
ток $I_4=0$, так как ветвь с элементами E_4 , R_4 заземлена и больше заземленных ветвей нет.



3. Составляются уравнения на основе второго закона Кирхгофа для любых двух независимых замкнутых контуров с учетом предварительно выбранных положительных направлений обхода этих контуров (например, по часовой стрелке):

$$R_2 \cdot I_2 + R_1 \cdot I_1 + R_5 \cdot I_5 = E_2 + E_1,$$

$$-R_5 \cdot I_5 - R_3 \cdot I_3 = E_3.$$



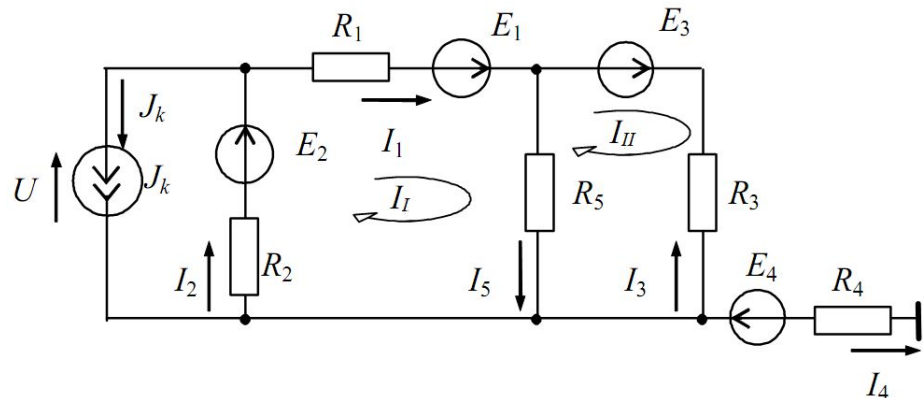
4. Из решения системы записанных выше четырех уравнений следует:

$$I_1 = 2 \text{ A}, I_2 = 7 \text{ A}, I_3 = -2 \text{ A}, I_4 = 0, I_5 = 0.$$

Поскольку ток I_3 отрицателен, истинное направление его в соответствующей ветви схемы противоположно.

б) Согласно методу контурных токов:

1. Выбираются условно положительные направления токов в ветвях (см. схему), а также контурных токов в двух независимых замкнутых контурах (например, по часовой стрелке).



2. Составляются уравнения по второму закону Кирхгофа относительно контурных токов для обоих ранее выбранных независимых замкнутых контуров:

$$(R_1 + R_2 + R_5) \cdot I_I - R_5 \cdot I_{II} + R_2 \cdot J_k = E_1 + E_2,$$

$$-R_5 \cdot I_I + (R_3 + R_5) \cdot I_{II} = E_3.$$

3. Решение согласно методу Гаусса приводит к следующим результатам:

$$I_I = 2\text{A}, \quad I_{II} = 2\text{A}.$$

4. Определяются значения токов в ветвях через рассчитанные контурные:

$$I_1 = I_I = 2\text{A}, \quad I_2 = I_I + J_k = 7\text{A}, \quad I_3 = -I_{II} = -2\text{A}, \quad I_5 = I_I - I_{II} = 0.$$

5. Уравнение баланса мощностей согласно закону сохранения энергии:

$$E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 - E_3 \cdot I_3 + U \cdot J_k = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_5 \cdot I_5^2,$$

где напряжение на зажимах источника тока на основе закона Ома для активного участка цепи, содержащего элементы E2, R2,

$$U = -E_2 + R_2 \cdot I_2,$$

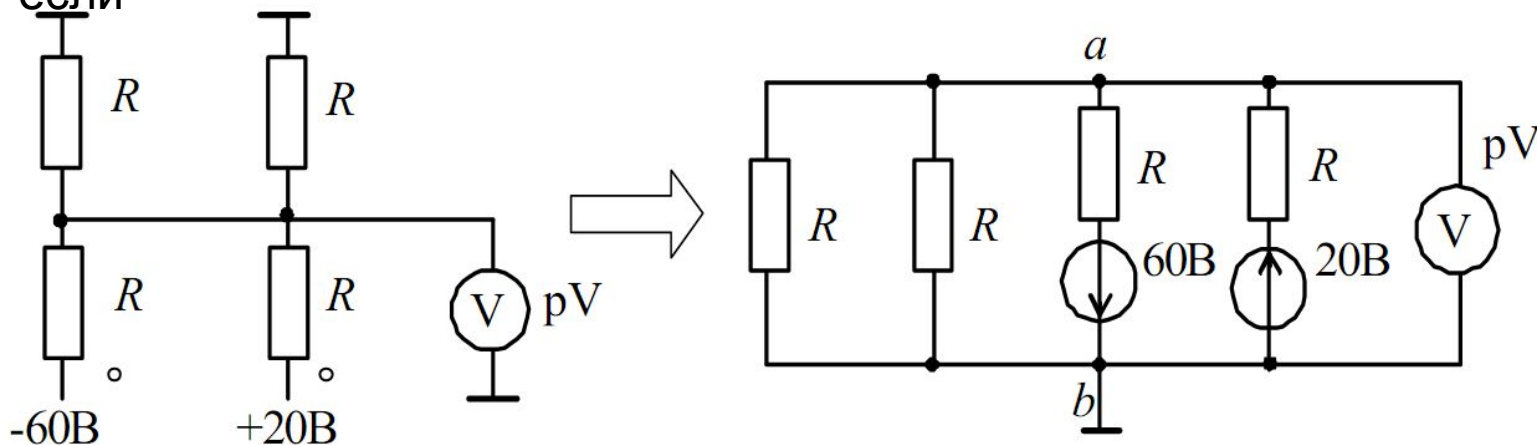
$$80 \cdot 2 + 70 \cdot 7 - 20 \cdot (-2) + (-70 + 10 \cdot 7) \cdot 5 = 40 \cdot 2^2 + 10 \cdot 7^2 + 10 \cdot (-2)^2 + 25 \cdot 0^2,$$

$$690\text{Вт} = 690\text{Вт}.$$

Метод междуузлового напряжения (метод двух узлов)

Определить показание вольтметра,

если



Решение

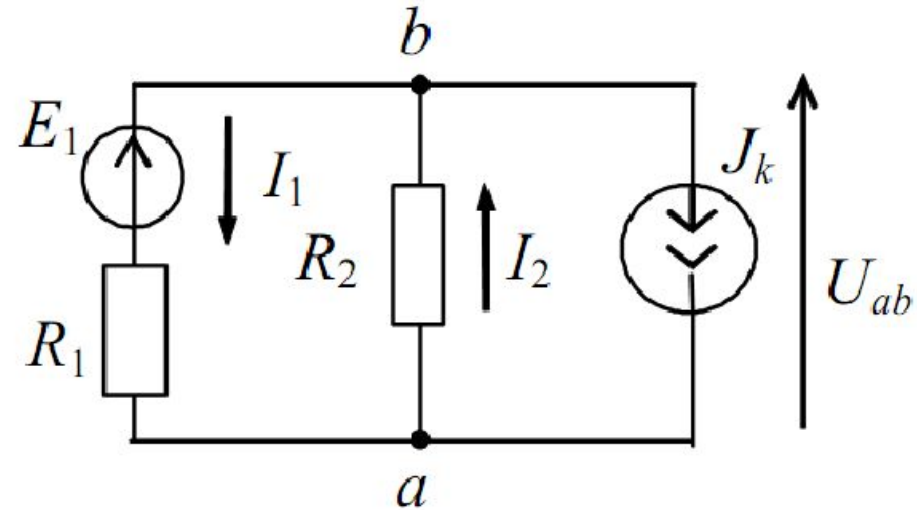
1. Исходная схема представляется в виде, более удобном для анализа.
2. Показание вольтметра есть не что иное, как абсолютная величина напряжения между двумя узлами U_{ab} :

$$U_{ab} = \frac{\pm \sum_{l=1}^n G_{\text{ЭКВ}_l} \cdot E_{\text{ЭКВ}_l} \pm \sum_{i=1}^m J_{k_i}}{\sum_{j=1}^h G_{\text{ЭКВ}_j}}$$

$$U_{ab} = \left| \frac{\frac{-60}{R} + \frac{20}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} \right| = 10, \text{ В.}$$

Пример

2 В заданной электрической схеме, имеющей следующие параметры: $E_1 = 20$ В, $J_k = 1$ А, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, определить токи во всех ветвях



Решение

1. Напряжение между двумя узлами U_{ab} с учетом направлений ЭДС и тока источников питания:

$$U_{ab} = \frac{-\frac{E_1}{R_1} + I_k}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{-\frac{20}{2} + 1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = -12, \text{ В.}$$

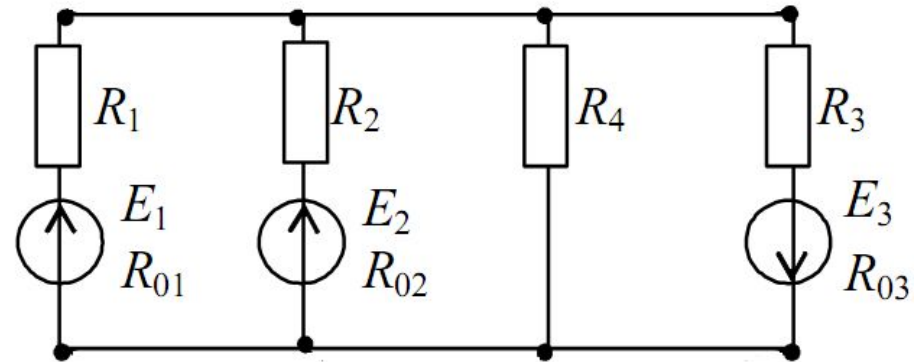
2. Токи в ветвях на основе закона Ома соответственно для активного и пассивного участков цепи с учетом предварительно выбранных условно положительных направлений:

$$I_1 = \frac{-(E_1 + U_{ab})}{R_1} = \frac{-(20 - 12)}{2} = -4, \text{ А}, \quad I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = \frac{-12}{4} = -3, \text{ А.}$$

$$I_1 - I_2 + J_k = -4 - (-3) + 1 = 0,$$

Самостоятельно!

В заданной электрической схеме, имеющей следующие параметры: $E_1 = 336$ В, $R_{01} = 2$ Ом, $E_2 = 176$ В, $R_{02} = 1$ Ом, $E_3 = 30$ В, $R_{03} = 2,5$ Ом, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 7$ Ом, $R_3 = 7,5$ Ом, $R_4 = 12$ Ом, рассчитать токи во всех ветвях



1. Напряжение между двумя узлами U_{ab} с учетом направлений ЭДС относительно узла, обозначаемого первой буквой индекса искомого напряжения,

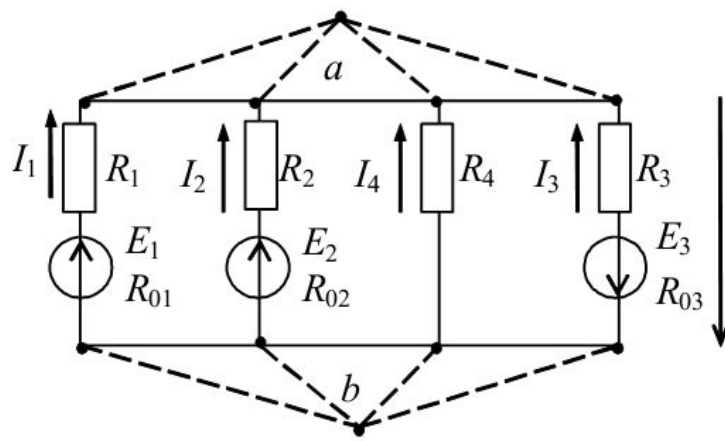
$$U_{ab} = \frac{+G_1 E_1 + G_2 E_2 - G_3 E_3}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} = \frac{\frac{336}{12} + \frac{176}{8} - \frac{30}{10}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = 120, \text{ В},$$

где

$$G_1 = \frac{1}{R_1 + R_{01}} = \frac{1}{12}, \text{ См}, \quad G_2 = \frac{1}{R_2 + R_{02}} = \frac{1}{8}, \text{ См},$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3 + R_{03}} = \frac{1}{10}, \text{ См},$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{12}, \text{ См} - \text{ проводимости соответствующих ветвей.}$$



2. Токи в ветвях на основе закона Ома для активного или пассивного участков цепи с учетом предварительно выбранных условно положительных их направлений:

$$I_1 = G_1 \cdot (E_1 - U_{ab}) = \frac{1}{12} \cdot (336 - 120) = 18, \text{ А},$$

$$I_2 = G_2 \cdot (E_2 - U_{ab}) = \frac{1}{8} \cdot (176 - 120) = 7, \text{ А},$$

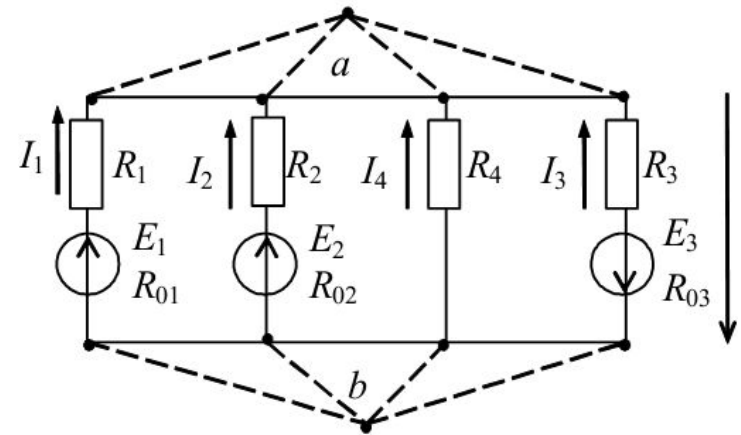
$$I_3 = G_3 \cdot (-E_3 - U_{ab}) = \frac{1}{10} \cdot (-30 - 120) = -15, \text{ А},$$

$$I_4 = -G_4 \cdot U_{ab} = -\frac{1}{12} \cdot 120 = -10, \text{ А}.$$

Проверка по первому закону Кирхгофа (для любого из двух узлов) подтверждает правильность расчетов:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 18 + 7 - 15 - 10 = 0,$$

причем отрицательные значения токов I_3 и I_4 "говорят" о том, что действительные их направления противоположны выбранным.

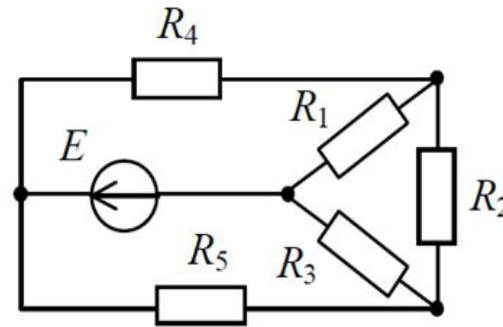


Метод эквивалентного

Пример 1

В заданной электрической схеме, имеющей следующие параметры: $E = 12$ В, $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = R_4 = 12$ Ом, $R_5 = 4$ Ом, рассчитать ток в ветви, содержащей R_2

Решение

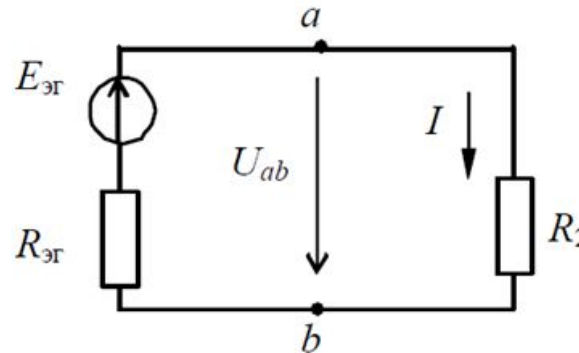


1. Выбирается условно положительное направление неизвестного тока в ветви с R_2 и составляется эквивалентная схема замещения

2. Искомый ток на основе второго закона Кирхгофа

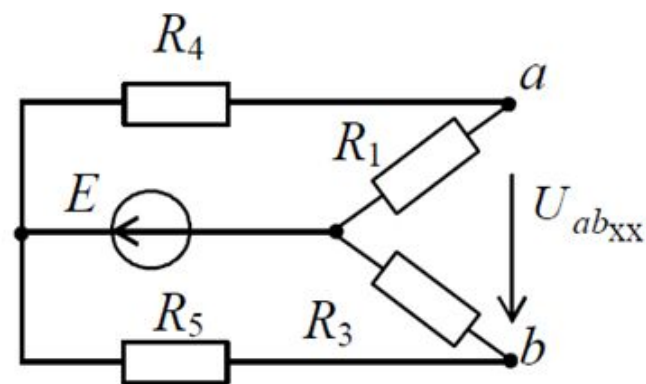
$$I = \frac{E_{\text{эГ}}}{R_{\text{эГ}} + R_2},$$

где $E_{\text{эГ}} = U_{ab_{\text{ХХ}}}$ – ЭДС эквивалентного генератора;



$R_{\text{эГ}}$ – внутреннее сопротивление эквивалентного генератора.

3. Напряжение между зажимами a и b , к которым подключается исследуемая ветвь, в режиме холостого хода эквивалентного генератора

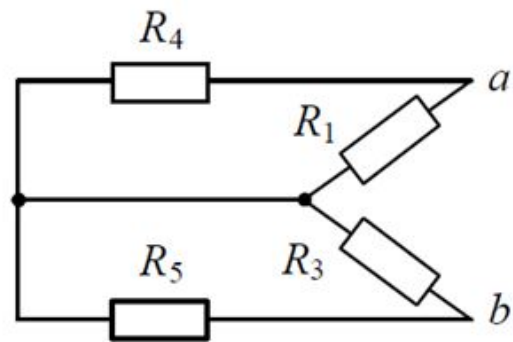


$$E_{\text{эГ}} = U_{ab_{\text{хх}}} = R_1 \cdot \frac{E}{R_1 + R_4} - R_3 \cdot \frac{E}{R_3 + R_5} = 6 \cdot \frac{12}{6+12} - 12 \cdot \frac{12}{12+4} = -5, \text{В.}$$

где $\frac{E}{R_1 + R_4}$ – ток, протекающий по ветви, с резисторами R_1 и R_4 ;

$\frac{E}{R_3 + R_5}$ – ток, протекающий по ветви, с резисторами R_3 и R_5 .

4. Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора как общее сопротивление относительно зажимов a и b пассивного двухполюсника, получаемого из схемы эквивалентного генератора, работающего на холостом ходу, путем закорачивания источника ЭДС



$$R_{ab_{\text{ххпд}}} = R_{\text{эг}} = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_5} = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} + \frac{12 \cdot 4}{12 + 4} = 7, \text{ Ом};$$

поскольку резистор R_1 параллелен R_4 , а R_3 параллелен R_5 , относительно друг друга эти группы соединены последовательно.

5. Таким образом, ток в ветви, содержащей резистор R_2 :

$$I = \frac{-5}{7 + 3} = -0,5, \text{ А.}$$

Отрицательное значение тока "говорит" о том, что его истинное направление в ветви схемы противоположно выбранному.