

# Численные методы решения задач механики сплошных сред

## *4. Турбулентность.*

### *Пограничный слой*

Автор курса лекций:

Породнов Борис Трифионович, д. ф.-м. н.,  
профессор кафедры молекулярной физики  
УГТУ-УПИ

Екатеринбург 2008

[900igr.net](http://900igr.net)

# Модуль 5

# ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

# Лекция 19

## ТЕОРИЯ ПРАНДТЛЯ. ТУРБУЛЕНТНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ТРУБАХ

# Цели изучения:



- Теория Прандтля турбулентного движения:
  - определение профиля скорости,
  - понятие вязкого подслоя.
- Эксперименты по изучению свойств турбулентного движения:
  - формулы Блазиуса для коэффициента сопротивления гладких труб,
  - опыты Никурадзе с шероховатыми трубами.
- Развитая турбулентность:
  - масштабирование пульсаций,
  - энергия крупно- мелкомасштабных вихрей,
  - закон Колмогорова-Обухова.

# Содержание

## 10.5. Теория Прандтля:

10.5.1. Постановка задачи,

10.5.2. Средняя длина перемешивания. Профиль скорости,

10.5.3. Вязкий подслой.

## 10.6. Турбулентное движение в трубах:

10.6.1. Движение жидкости в трубах с гладкими стенками,

10.6.2. Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса,

10.6.3. Эмпирический закон Никурадзе для коэффициента сопротивления.

## 10.7. Развитая турбулентность:

10.7.1. Масштабирование турбулентных пульсаций,

10.7.2. Диссипируемая энергия при крупномасштабном движении,

10.7.3. Закон Колмогорова-Обухова

## 10.5. Теория Прандтля

### 10.5.1. Постановка задачи

- Теория **Прандтля** турбулентного движения основывается на аналогии с молекулярным движением в газе. Рассмотрим плоское турбулентное движение несжимаемой среды вдоль бесконечной стенки (рис. 10.6). Выберем два слоя, параллельных оси  $x$ . Среднюю скорость движения частиц среды в них обозначим через  $u$  и  $u+du$ . Предположим, что скорость  $u$  определяется средней пульсационной скоростью, которая является функцией  $y$ , а средняя пульсационная  $y$ -составляющая

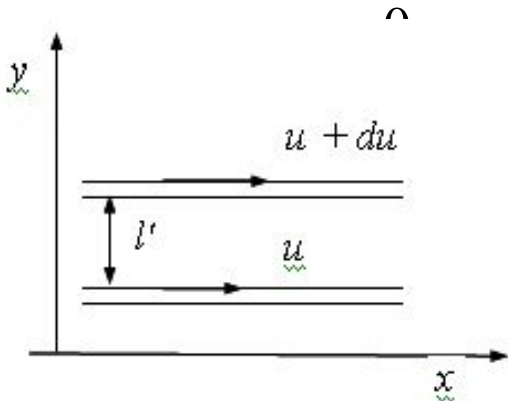


Рис. 10.6

- Прандтль по аналогии с кинетической теорией газов предполагает, что расстояние между слоями  $l'$  это некоторый аналог средней длины свободного пробега молекул в газе. На этом расстоянии частицы среды могут переходить из слоя в слой лишь благодаря своим пульсационным скоростям  $v'_y$ . Причем, импульсы таких частиц сохраняются при прохождении длины  $l'$ . Частица среды, попадающая из нижнего слоя в верхний, имеет среднюю скорость  $\bar{v}_x = u$ , отличающуюся от

средней скорости верхнего слоя на  $du$ . Очевидно, "сталкиваясь" в верхнем слое с его частицами, скорость последних так же может изменяться на величину порядка  $du$ . Это изменение создает пульсацию порядка  $du$ :

$$v'_x \cong du = l' \frac{du}{dy}, \quad l' \approx dy. \quad (10.5.1)$$

## 10.5.2. Средняя длина перемешивания. Профиль скорости

- Предположим, что турбулентность изотропна, по крайней мере, вдали от стенки:

$$|v'_x| \approx |v'_y|, \quad |v'_y| \approx l' \frac{du}{dy}.$$

Тогда тензор турбулентных напряжений можно записать в виде:

$$|T_{xy}| = \rho \cdot \overline{v'_x v'_y} = \rho \cdot k \cdot (\overline{l'})^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2 = \rho \cdot l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2, \quad k \cdot (\overline{l'})^2 = l^2. \quad (10.5.2)$$

Величину  $l$  называют *длиной пути перемешивания*, которая может зависеть от  $y$ . Далее Прандтль предполагает, что длина пути перемешивания прямо пропорциональна расстоянию от стенки:

$$l = \kappa \cdot y \quad (10.5.3)$$

- Здесь  $\kappa$  - некоторый безразмерный коэффициент пропорциональности. Предположение (10.5.2) можно подкрепить рассуждением о том, что стенка препятствует развитию поперечных пульсационных скоростей и, очевидно, на самой стенке длина пути перемешивания или пропорциональная ей "длина свободного пробега" должна быть равна нулю. Как и при ламинарном режиме течения, также предполагается, что тензор турбулентных напряжений не изменяется по нормали к стенке и равен его значению на стенке  $\tau_0$ , т.е.  $T_{xy} = \tau_0 = const$ .
- Для определения средней скорости  $u$ , используя (10.5.2, 3), получаем уравнение

$$\tau_0 = \rho \cdot \kappa^2 \cdot y^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2, \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot \frac{1}{y}.$$

- Решение этого уравнения имеет вид:

$$u = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot \ln y + c. \quad (10.5.4)$$

## 10.5.3. Вязкий подслой

- Из (10.5.4) следует, что средняя скорость турбулентного движения вязкой несжимаемой среды вдоль бесконечной стенки распределена по логарифмическому закону. Величина  $(\tau_0/\rho)^{1/2}$  в (10.5.4) имеет размерность скорости и её обычно обозначают через  $v_*$ . Формулу (10.5.4) удобно записать в безразмерной виде. Для этого составим безразмерную комбинацию из величин  $(y, v_*)$ . Такой комбинацией является выражение  $y v_* / \nu$ . Тогда формулу (10.5.4) можно записать для безразмерной скорости

в виде:

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y v_*}{\nu} + c_*, \quad u_* = \frac{1}{\kappa} \ln y_* + c_* . \quad (10.5.5)$$

- Такой логарифмический профиль скорости в пограничном слое называют **профилем Блазиуса**
- Очевидно, что и при турбулентном движении среды на поверхности обтекаемого тела вследствие условий прилипания всегда существует тонкий слой, в котором среды движется ламинарно. Этот слой называют **вязким подслоем**. Ясно, что формула (10.5.5) справедлива лишь вне вязкого подслоя. Постоянная  $c$  должна быть определена экспериментально.



## 10.6. Турбулентное движение в трубах.

### 10.6.1. Движение жидкости в трубах с гладкими стенками

- Движение среды в трубах, как очень важное для практики, интенсивно изучалось экспериментально многими исследователями, начиная с [Пуазейля](#) (1840-42 гг) и [Рейнольдса](#) (1876-83 гг). Более ранние опыты создавали, как в настоящее время сказали бы, экспериментальную базу данных для развития науки. Исследователи зачастую представляли только опытные зависимости от некоторых отдельных параметров, характеризующих движение (диаметр трубы, плотность жидкости, скорость движения и т.п.), а не имея представления о подобии движений, не могли провести их обобщение.
- Возможность правильной постановки опытов и обобщения их результатов появилась лишь после введения в теорию *критерия динамического подобия потоков - числа Рейнольдса*. Шведский учёный *Блазиус* в 1911 г. в основу обобщения экспериментальных результатов ввел число Рейнольдса, что позволило ему эмпирически найти формулу для коэффициента сопротивления труб при турбулентном движении, пригодную для любых сред в широком диапазоне скорости движения среды и диаметров труб.
- В теме 9 было показано, что для расчета гидравлического сопротивления  $\Delta P$  гладких, круглых цилиндрических труб используется формула вида

$$\Delta P = \frac{\rho \bar{v}^2}{2} \frac{l}{d} \lambda, \quad \lambda = \lambda(\text{Re}), \quad \text{Re} = \frac{\rho \bar{v} d}{\eta}. \quad (10.6.1)$$

Здесь  $\bar{v}$  - средняя по сечению трубы скорость движения среды.

## Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса

- Для **ламинарного движения** коэффициент  $\lambda$  гидравлического сопротивления равен:

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \quad \Delta P \sim \bar{v}, \quad Re < 2300. \quad (10.6.2)$$

- Для **турбулентного движения** Блазиус получил формулу

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{1/4}}, \quad \Delta P \sim v^{7/4} \approx \bar{v}^2, \quad 2,3 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^5. \quad (10.6.3)$$

- Из этих формул видно, что сопротивление труб  $\Delta P$  при ламинарном движении пропорционально первой степени средней скорости, тогда как при турбулентном движении пропорционально  $\bar{v}^{7/4}$  или примерно квадрату скорости.

- Предположим, что при турбулентном движении среды в трубе обеспечивается кинематическое подобие при изменении скорости и радиуса трубы. Это означает, что, если в какой-то точке трубы скорость изменилась в некоторое число раз, то во всех других точках она изменится во столько же раз. Если за характерную выбрать скорость  $v_{\max}$  на оси трубы, то это условие кинематического подобия можно записать следующим образом:

$$v(r) = v_{\max} f(r/r_0). \quad (10.6.4)$$

- Из закона сопротивления трубы при турбулентном течении при некоторых предположениях можно вывести закон распределения скорости по сечению трубы. Можно показать, используя формулу (10.6.3), что этот закон имеет вид:

$$v(r) = v_{\max} (1 - r/r_0)^{1/7}, \quad \bar{v} = \frac{98}{120} v_{\max}. \quad (10.6.5)$$

- Как видно из (10.6.5), при турбулентном движении средняя скорость движения среды по трубе мало отличается от максимальной в отличие от ламинарного движения, при котором

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_{\max}$$

# Профили скорости при ламинарном и турбулентном режимах течения

На рис. 10.7 представлены примерные эпюры скоростей при ламинарном и турбулентном движении жидкости в трубе. Как было показано в теме 8, для ламинарного движения профиль скорости определяется формулой

$$v(r) = v_{\text{макс}} \left(1 - r^2 / r_0^2\right).$$

Как видно из рисунка 10.7, основное изменение скорости турбулентного движения наблюдается вблизи поверхности, вблизи же оси это изменение мало.

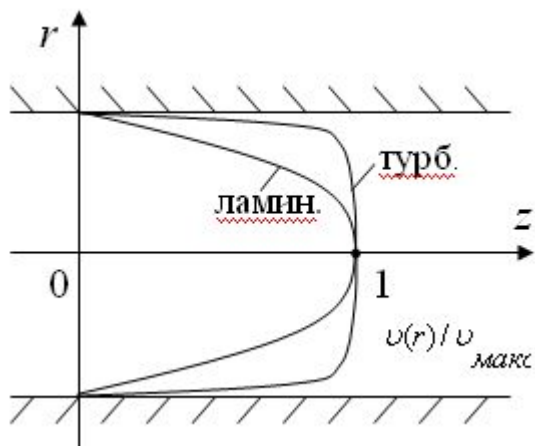


Рис. 10.7

В последствии турбулентное движение жидкости в трубах изучалось многими исследователями. Для коэффициента сопротивления трубы в настоящее время существует более десятка различных эмпирических формул. Так, в 1932 г. Никурадзе, обработав свои экспериментальные результаты согласно теории турбулентности Прандтля, получил для распределения скоростей эмпирическую формулу:

$$\frac{v}{v_*} = 2,5 \ln \frac{v_* y}{\nu} + 5,5. \quad (10.6.6)$$

Здесь  $y$  - расстояние от стенки трубы. Характерная скорость  $v_*$  по экспериментально измеряемым величинам может быть определена следующим образом:

$$v_*^2 = \frac{\tau_0}{\rho}, \quad 2\pi \cdot r_0 / \tau_0 = \pi \cdot r_0^2 \Delta P, \quad \tau_0 = \frac{r_0 \Delta P}{2 \cdot l}, \quad v_*^2 = \frac{r_0 \Delta P}{2 \cdot l \rho}.$$

## Эмпирический закон Никурадзе для турбулентного движения в трубах с гладкими стенками

- Формула (10.6.6) хорошо описывает экспериментальные результаты во всех точках сечения трубы, кроме, конечно, тонкого ламинарного подслоя, примыкающего непосредственно к стенке. Используя формулу (10.6.6), можно получить уравнение для определения коэффициента  $\lambda$  гидравлического сопротивления трубы:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0,88 \ln(\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 1,1, \quad \text{Re} = \frac{\rho \bar{v} d}{\eta}, \quad 4 \cdot 10^3 < \text{Re} < 3,2 \cdot 10^6. \quad (10.6.7)$$

- Формула Никурадзе (10.6.7) справедлива в более широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса, но более сложна для практического использования, чем формула Блазиуса (10.6.3).

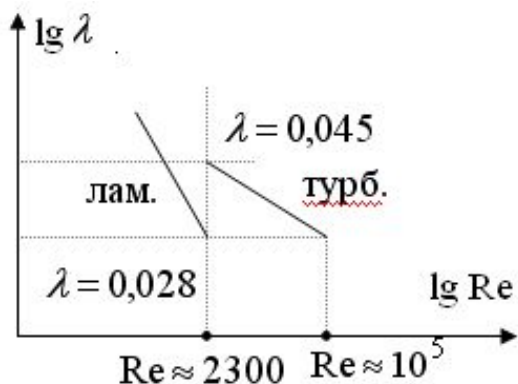


Рис.10.8

График зависимости коэффициента сопротивления гладких труб от числа Рейнольдса изображен на рис.10.8. Как видно из рисунка, при переходе от ламинарного режима течения к турбулентному коэффициент сопротивления трубы возрастает скачком. Тщательные опыты Никурадзе показывают, что показатель степени в степенной формуле (10.6.5) для распределения скорости по сечению трубы непрерывно убывает от  $1/7$  при  $\text{Re} = 4 \cdot 10^3$  до  $1/10$  при  $\text{Re} = 3,2 \cdot 10^6$ . Это соответствует тому, что сопротивление трубы  $\lambda$  с увеличением числа Рейнольдса приближается к квадратичному закону в зависимости от средней по сечению скорости движения.

## 10.6.2. Турбулентное движение в трубах с шероховатыми стенками

Выше было рассмотрено турбулентное движение среды в трубах с гладкими стенками. Опыт показывает, что степень чистоты внутренней поверхности трубы существенным образом влияет на её сопротивление, причем тем сильнее, чем больше число Рейнольдса. Так, трубы после длительной эксплуатации (вследствие коррозии) увеличивают коэффициент сопротивления более, чем в два раза. Очевидно, формулы для распределения скоростей и для коэффициента сопротивления каким-то образом должны учитывать шероховатость стенок труб. Это тем более очевидно, поскольку шероховатость труб является геометрическим параметром, необходимым для динамического подобия потоков.

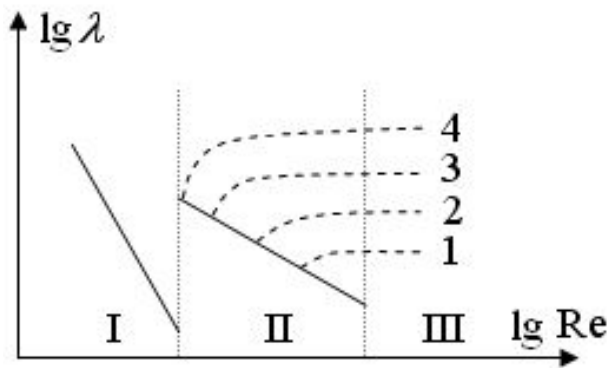


Рис. 10.9

Обозначим среднюю высоту бугорков шероховатостей на стенках через  $h$ . В опытах Никурадзе шероховатость создавалась искусственно при помощи приклеивания к стенкам трубы песчинок, имеющих некоторый средний размер зерен  $h$ . Очевидно, что трубы будут геометрически, а потоки - динамически подобными, если для них сохраняется отношение  $h/r_0$ . Следовательно, формулы для

распределения скоростей и коэффициента сопротивления шероховатых труб должны быть некоторыми функциями от относительной шероховатости.

Обработывая многочисленные экспериментальные данные, Никурадзе получил результаты, которые качественно иллюстрируют зависимость на рис. 10.9.

# Эмпирический закон Никурадзе для турбулентного движения в трубах с шероховатыми стенками

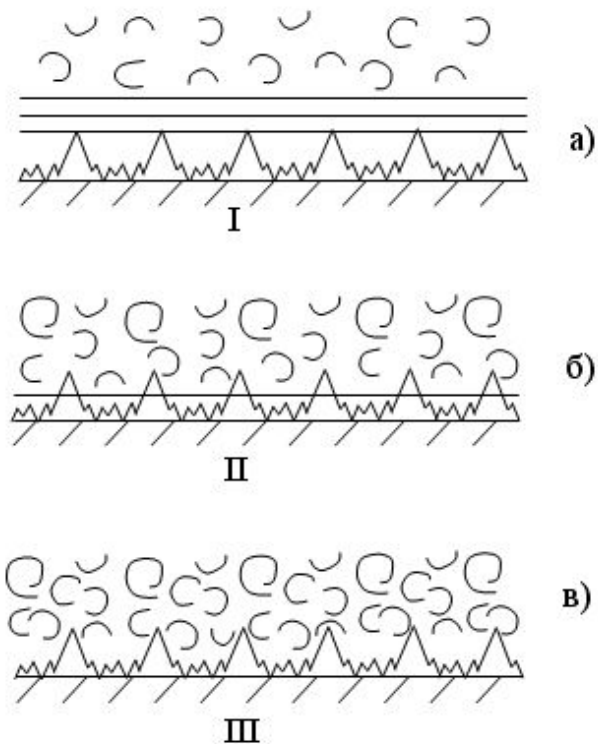
- Всю область чисел Рейнольдса можно разбить на три области: область I ламинарного движения, переходную область II и область III, в которой коэффициент гидравлического сопротивления  $\lambda$  не зависит от числа Рейнольдса. Как видно, трудно экспериментальные кривые описать некоторой единой формулой. Однако для больших чисел Рейнольдса (область III), когда коэффициент сопротивления не зависит от числа Рейнольдса, а зависит лишь от относительной шероховатости, Никурадзе приводит следующие эмпирические формулы:

$$\frac{v}{v_*} = 2,5 \ln \frac{r}{h} + 8,48, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0,87 \ln \frac{r_0}{h} + 1,74, \quad \ln \frac{v_* h}{v} > 4,25. \quad (10.6.8)$$

- Вышеприведенное условие применимости формул (10.6.8) на практике почти всегда выполняется. Конечно, можно и не пользоваться формулами (10.6.8), а для практических расчетов брать данные прямо с графика на рис.10.9.
- Сложный характер кривых на рис.10.9 можно объяснить физически. При ламинарном движении (область I), если шероховатости не загромождают сечения трубы, их влияние никак не сказывается на сопротивлении трубы. При этом, очевидно, бугорки шероховатостей погружены в неподвижную между ними среду, играющую роль смазки (рис.10.10а). Даже при турбулентном движении в основном потоке около стенки всегда существует *ламинарный подслой*, который прикрывает бугорки шероховатостей.

## Физические причины независимости коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса

- При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса (область II) вершины бугорков начинают обнажаться и с них срываются вихри, что создает дополнительную турбулизацию потока, а, следовательно, увеличение коэффициента гидравлического сопротивления (рис. 10б).



- Причем, это произойдет при тем больших числах Рейнольдса, чем меньше относительная шероховатость трубы  $h/r_0$ . Наконец, при больших числах Рейнольдса или скорости движения среды (область III) бугорки шероховатостей полностью обнажаются (рис.10.10в), и степень турбулизации потока полностью определяется вихрями, срывающимися с их вершин, и, следовательно, коэффициент сопротивления не зависит от числа Рейнольдса, характеризующего основное движение в трубе.
- Очевидно, что чем больше относительная шероховатость стенки  $h/r_0$ , тем при меньших числах Рейнольдса наблюдается отклонение коэффициента  $\lambda$  от рассчитанного по формуле Блазиуса для гладких труб, и тем большее его значение наблюдается в области III (см. рис. 10.9).

Рис. 10.10

## 10.7. Развитая турбулентность.

### 10.7.1. Масштабирование турбулентных пульсаций

- Рассмотрим свойства турбулентного движения, пользуясь *методом анализа размерностей физических величин*.
- После потери устойчивости движения в среде сначала появляются крупные вихри, создающие крупные нерегулярные пульсации скорости: частицы среды двигаются по сравнительно плавным траекториям, хотя их траектории сильно перепутаны. По мере дальнейшего увеличения числа Рейнольдса траектории частиц становятся менее плавными, появляются более *мелкие вихри*. На фоне плавных траекторий появляются более мелкие их искривления, а скорость частиц приобретает более мелкие нерегулярные пульсации. При больших числах Рейнольдса турбулентное движение содержит *вихри от самых крупных до самых мелких*, в которых частицы среды перемещаются как целое с одинаковыми скоростями – такое движение называют развитым турбулентным движением.
- Очевидно, турбулентное движение можно рассматривать как результат наложения движений различных масштабов. Под *масштабом* движения понимают порядок тех расстояний, на которых скорость частиц среды изменяется существенно. При  $Re \geq Re_{кр}$  появляются сначала *крупномасштабные* пульсации, масштаб которых порядка размеров самой области движения  $l$  (для трубы порядка её диаметра  $d$ ). На меньших расстояниях изменение скорости незначительно. Крупномасштабные движения обладают и наибольшей амплитудой пульсаций, т.е. разность скоростей на концах отрезка  $l$  велика и может быть сравнимой со средней скоростью движения на расстоянии  $l$ , т.е.

$$\Delta u \sim \bar{v}.$$



# Крупно- и мелкомасштабные пульсации скорости

- При увеличении числа Рейнольдса появляются всё более и более *мелкомасштабные* пульсации вплоть до пульсаций самого мелкого масштаба  $\lambda_0$ . Области среды размером двигаются при заданном числе Рейнольдса как целое: внутри них *частицы движутся с одинаковыми скоростями*. На больших расстояниях порядка  $l$  изменение скорости определяется, как отмечалось выше, в основном крупномасштабными пульсациями, и по порядку величины оно равно  $\sim l^{-1/2}$ . На малых же расстояниях изменение скорости определяется мелкомасштабными пульсациями.

- Наряду с числом Рейнольдса  $Re = (l\rho v)/\eta$  характеризующим турбулентное движение в целом, а так же крупномасштабное движение, можно ввести понятие о числе Рейнольдса  $Re_\lambda$ , характеризующим движение в любом масштабе  $\lambda$  от самого мелкого до самого крупного:

$$Re_\lambda = \frac{\lambda \rho v_\lambda}{\eta}. \quad (10.7.1)$$

В (10.7.1)  $\lambda$  определяет масштаб движения, а  $v_\lambda$   $n$ -порядок величины скорости пульсационного движения этого масштаба.

- Движение среды при больших числах Рейнольдса как *крупномасштабное движение* можно рассматривать как движение *маловязкой*, в пределе идеальной среды. описываемой уравнениями **Эйлера**. Отсюда следует, что в крупномасштабных движениях не должно происходить заметной диссипации энергии движения, т.к. вклад вязких сил мал ( $\eta \approx 0$ ).
- С уменьшением масштаба движения  $\lambda$  уменьшается и скорость  $v_\lambda$ , а, тем более,  $Re_\lambda$ . Поэтому при уменьшении масштаба движения вязкость играет всё большую роль вплоть до самого мелкого масштаба  $\lambda_0$ . Именно в наиболее *мелкомасштабных движениях* масштаба  $\lambda_0$  происходит основная диссипация энергии турбулентного движения.

## 10.7.2. Диссипируемая энергия при крупномасштабном движении

- Т. о., можно представить следующую *схему диссипации энергии* механического движения среды при турбулентном движении. Почти вся энергия турбулентного движения содержится в крупномасштабных движениях. Эта энергия передается в движения самых мелких масштабов порядка  $\lambda_0$ , в которых и происходит её диссипация в тепло. Т.е., существует направленный поток энергии от крупномасштабных к мелкомасштабным движениям, причем этот поток, проходя промежуточные масштабы, остается почти неизменным.
- Определим порядок величины *диссипируемой энергии*  $\varepsilon$  в единицу времени в единице массы среды. Т.к. крупномасштабное движение можно рассматривать как движение идеальной среды ( $\eta = 0$ ), то параметрами, определяющими это движение, являются  $\rho$ ,  $\Delta u$ ,  $l$ . Из этих определяющих параметров можно образовать единственную комбинацию, имеющую размерность  $\varepsilon$ :
 
$$\varepsilon \sim \frac{(\Delta u)^3}{l}. \quad (10.7.2)$$
- Как уже отмечалось, турбулентно движущуюся среду можно рассматривать как среду, обладающую некоторой турбулентной вязкостью  $\eta_T$ . Очевидно, что турбулентная вязкость также должна определяться крупномасштабным движением, т.е. теми же определяющими параметрами  $\rho$ ,  $\Delta u$ ,  $l$ , поскольку характер осредненного движения, очевидно, в основном определяется крупномасштабными пульсациями. Из них можно образовать лишь одну комбинацию, имеющую размерность коэффициента турбулентной вязкости  $\eta_T$ , порядок величины которого определяется выражением

$$\eta_T \sim \rho \cdot \Delta u \cdot l. \quad (10.7.3)$$

# Порядок величины диссипируемой энергии

- Разделив правую и левую часть (10.7.3) на коэффициент динамической вязкости получим:

$$\frac{\eta_T}{\eta} \sim \frac{\rho \cdot \Delta u \cdot l}{\eta} = \text{Re}. \quad (10.7.4)$$

- В формулах (10.7.3,4), вообще говоря, может стоять значительный безразмерный численный коэффициент. Очевидно, что в формуле (10.7.4) этот численный коэффициент значительно ближе к единице, если поделить правую часть (10.7.4) на  $\text{Re}_{кр}$ . Тогда при  $\text{Re} \approx \text{Re}_{кр}$ , что следует и из физических соображений:

$$\frac{\eta_T}{\eta} \approx \frac{\text{Re}}{\text{Re}_{кр}}. \quad (10.7.5)$$

- Тогда величина диссипируемой энергии  $\epsilon_T$  может быть определена из (10.7.2,3) следующим образом:

$$\epsilon_T \sim \frac{\eta_T}{\rho} \left( \frac{\Delta u}{l} \right)^2. \quad (10.7.6)$$

- Интересно сравнить полученное выражение с аналогичным выражением для  $\epsilon$  при ламинарном движении. Как показано в теме 8, энергия диссипации в единице массы в единицу времени ламинарно движущейся несжимаемой среды определяется по формуле:

$$\epsilon \sim \frac{dE}{dt \rho dV} = -\frac{\eta}{2\rho} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \approx \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\Delta u}{l} \right)^2 \quad (10.7.7)$$

- Из (10.7.6,7) видно, что формулы, определяющие порядок величины диссипируемой энергии при турбулентном и ламинарном движениях совершенно идентичны при замене  $\eta$  на  $\eta_T$ .

## 10.7.3. Закон Колмогорова-Обухова

- Рассмотрим движение в *промежуточных* масштабах  $\lambda_0$  ( $l > \lambda > \lambda_0$ ). Очевидно, в качестве параметров, определяющих движение в промежуточных масштабах можно выбрать  $\rho$ ,  $\lambda$  и  $\varepsilon$  - поток энергии, “переходящий” от крупномасштабных движений к движению самых мелких масштабов, в которых он диссипируется в тепло. По-видимому, вязкость для движений в промежуточных масштабах еще не играет заметной роли.
- Оценим порядок  $v_\lambda$ , т.е. величину изменения скорости на концах отрезка порядка  $\lambda$ . Из вышеуказанных параметров можно образовать лишь одну величину с размерностью скорости -  $(\varepsilon \cdot \lambda)^{1/3}$ . Т.о., имеем:
 
$$v_\lambda \sim (\varepsilon \cdot \lambda)^{1/3} \sim \Delta u \left( \frac{\lambda}{l} \right)^{1/3}. \quad (10.7.8)$$

Из (10.7.8) видно, что изменение скорости на расстояниях порядка  $\lambda$  пропорционально кубическому корню из этого расстояния. Соотношение (10.7.8) называют *законом Колмогорова-Обухова* для турбулентного движения.

- Перейдем к рассмотрению самых мелких масштабов движения  $\lambda_0$ , в которых и происходит диссипация энергии турбулентного движения вследствие вязкости среды. Определим порядок величины самых мелких масштабов движения  $\lambda_0$ . Рассмотрим число Рейнольдса масштаба  $\lambda$ :

$$\text{Re}_\lambda = \frac{v_\lambda \cdot \lambda}{\nu} \sim \frac{\Delta u \cdot l}{\nu} \left( \frac{\lambda}{l} \right)^{4/3}. \quad (10.7.9)$$

# Величина мелкого масштаба

- Очевидно, для самых мелких масштабов движения, когда вязкость играет определяющую роль,  $Re_{\lambda_0} \approx 1$ . Тогда из (10.7.9) следует:

$$\lambda_0 \sim \frac{l}{Re^{3/4}}. \quad (10.7.10)$$

- Формулу (10.7.10) можно получить, рассматривая в качестве определяющих параметров движения в масштабах  $\lambda_0$  параметры  $\rho$ ,  $\varepsilon$  и  $\eta$ . Формулой (10.7.10) определяется размер областей среды, которые при заданном числе Рейнольдса двигаются как целое. Чем больше число Рейнольдса, тем меньше размер этих областей. Эксперименты подтверждают увеличение мелкомасштабных вихрей в турбулентном движении среды с увеличением числа Рейнольдса в области  $Re > Re_{кр}$ .

# Выводы



Введены основные *определения и получены основные соотношения*, описывающие турбулентное движение вязкой среды:

- логарифмический профиль скорости,
- вязкий подслой вблизи обтекаемой поверхности,
- зависимость коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса,
- уравнения Никурадзе для шероховатых труб,
- крупно- и мелкомасштабные пульсации скорости,
- закон Колмогорова-Обухова для скорости турбулентного движения.

# Информационное обеспечение лекции

- 1. Бабаков А.В., Белоцерковский О.М., Северинов Л.И. Численное исследование течения вязкого теплопроводного газа у тупого тела конечных размеров.- Изв. АН СССР. Сер. Механ. жидк. и газа, 1975, №3, с. 112-123.
- 2. Бабаков А.В. Численное моделирование некоторых задач аэрогидродинамики.-М.: ВЦ АН СССР, 1986, с. 56.
- 3. Белоцерковский О.М., Северинов Л.И. Консервативный метод потоков и расчет обтекания тела конечных размеров вязким теплопроводным газом.- ЖВМ и МФ, 1973, 13, №2, с. 385-397.
- 4. Самарский А.А. О консервативных разностных схемах.- В кн.: Проблемы прикл. матем. и механ. М.: Наука, 1971, с.129-136.

# Справочные данные

Курс лекций является частью учебно-методического комплекса «Численные методы расчета задач механики сплошных сред. 1. Теория упругости и идеальная среда».

Автор: Породнов Борис Трифонович, д. ф. – м. н., профессор кафедры молекулярной физики УГТУ-УПИ.

Учебно-методический комплекс подготовлен на кафедре МФ ФТФ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ.