Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 254
с углубленным изучением английского языка
Кировского района

Геометрия - 1

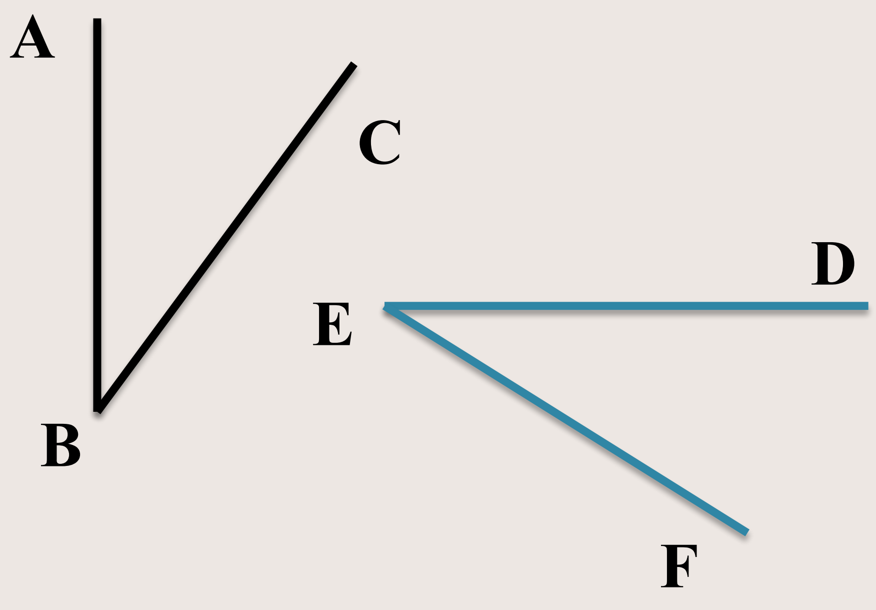
Треугольники и четырехугольники

Лекции профессора А.Г. Мордковича
в пересказе учителя математики
Павловой Марины Константиновны

Полезные факты и теоремы

О **равенстве углов** со взаимно перпендикулярными сторонами

Если $\angle ABC$ и $\angle DEF$ оба острые или оба тупые и $AB \perp DE$, $BC \perp EF$, то $\angle ABC = \angle DEF$.



Задача 1

Задача 2

Задача 5

Полезные факты и теоремы

О **точках пересечения** медиан, биссектрис, высот треугольника

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Три высоты треугольника пересекаются в одной точке (ортоцентр треугольника).

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке (центроид треугольника) и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины.

Задача 4

Полезные факты и теоремы

Свойства **средней линии** трапеции

- Средняя линия параллельна основаниям трапеции.
- Средняя линия равна полусумме оснований трапеции.
- Средняя линия (и только она) делит пополам любой отрезок, заключенный между основаниями трапеции.
- *Эти теоремы справедливы и для средней линии треугольника.*

Задача 6

Полезные факты и теоремы

Свойство **медианы**

в прямоугольном треугольнике

В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

Обратная теорема

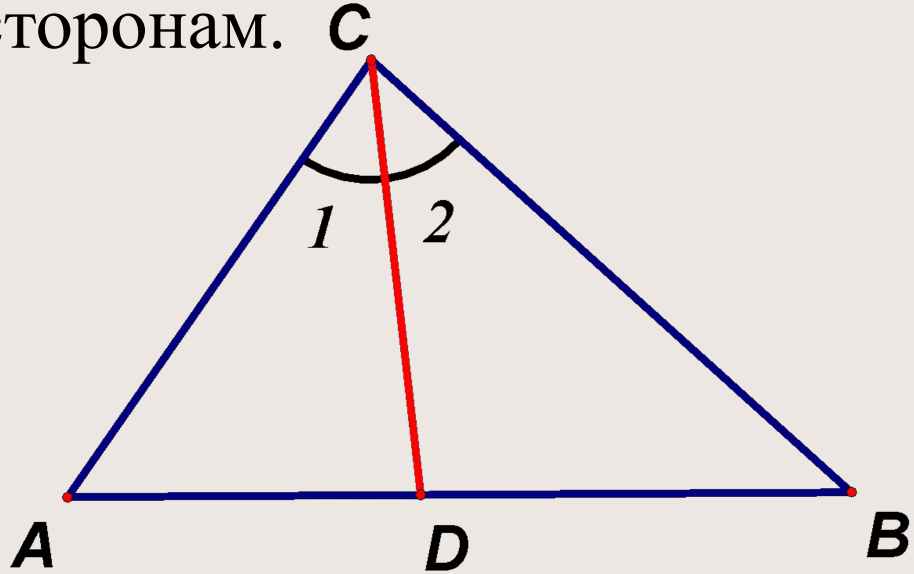
Если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.

Задача 5

Полезные факты и теоремы

Свойство **биссектрисы** внутреннего угла треугольника

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит сторону, к которой она проведена, на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

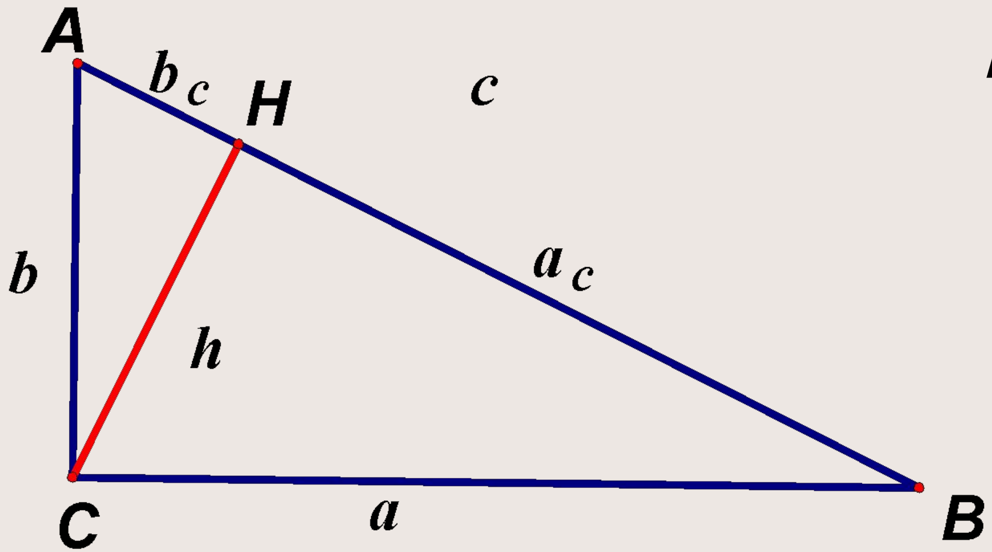


$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{CB}{DB}$$

Полезные факты и теоремы

Метрические соотношения
в прямоугольном треугольнике



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = c \cdot a_c$$

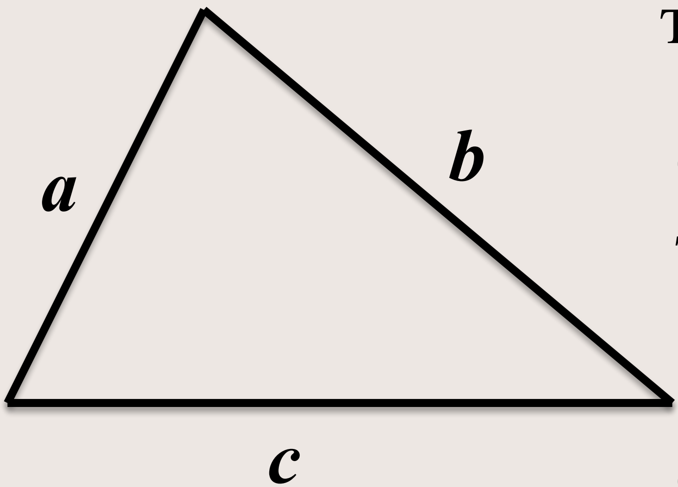
$$b^2 = c \cdot b_c$$

$$h = \frac{a \cdot b}{c}$$

Полезные факты и теоремы

Определение **вида** треугольника по его сторонам

Пусть ***a, b*** и ***c*** – стороны треугольника, причем ***c*** - наибольшая сторона, тогда



если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный

если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный

если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный

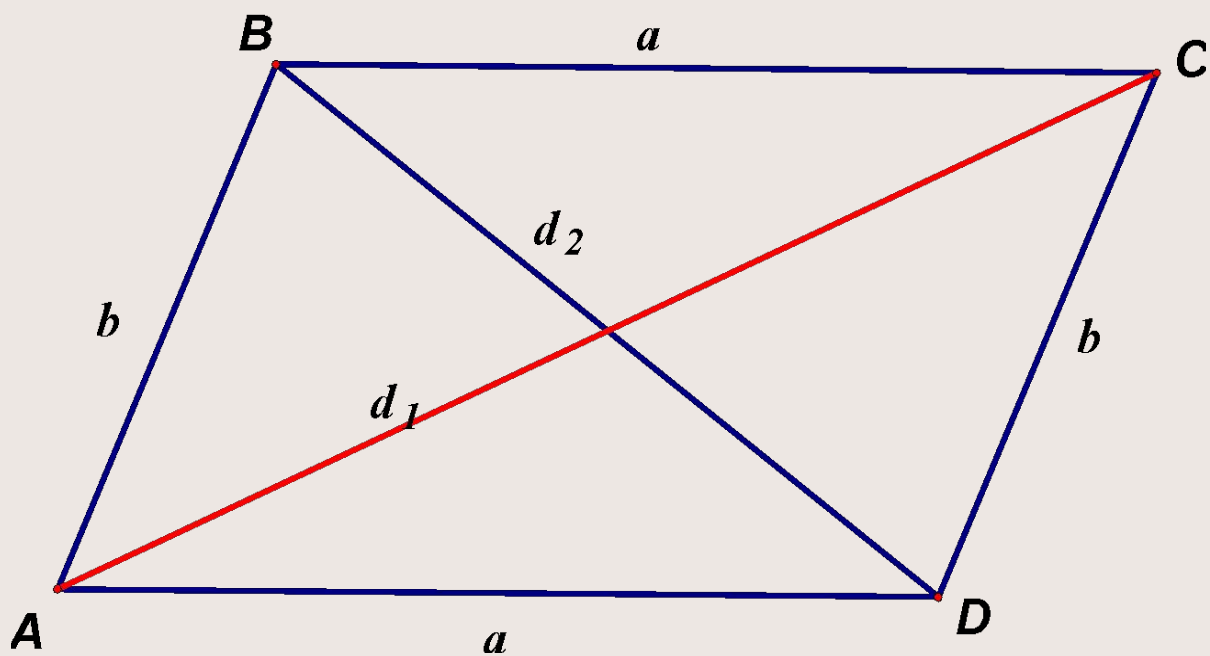
Задача 9

Полезные факты и теоремы

Метрические соотношения в параллелограмме

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$



Задача 3

Полезные факты и теоремы

Обобщенная теорема подобия

Если два треугольника подобны, то любой линейный элемент (или сумма линейных элементов) одного треугольника относится к соответствующему линейному элементу (или сумме соответствующих линейных элементов) другого треугольника как соответственные стороны.

Соответственные линейные элементы: медианы, высоты, биссектрисы, периметры, радиусы описанной и вписанной окружностей.

Задача 9

Три пути доказательства равенства отрезков

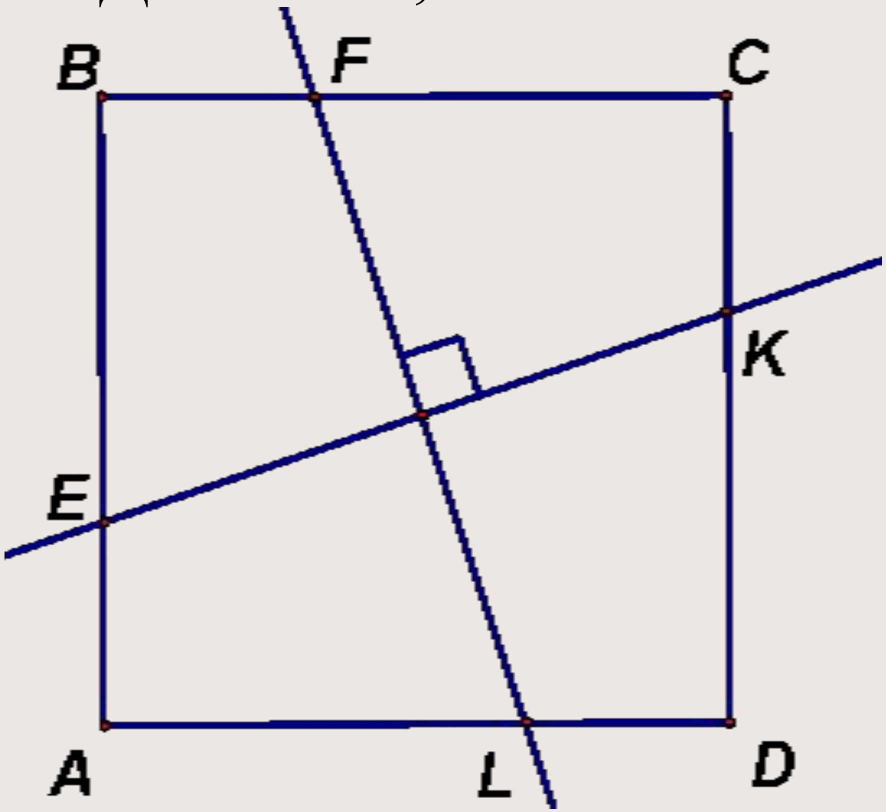
- Рассмотреть эти отрезки как стороны двух треугольников и доказать, что треугольники равны.
- Рассмотреть эти отрезки как стороны одного треугольника и доказать, что треугольник равнобедренный.
- Заменить отрезок a равным отрезком a_1 , отрезок b равным отрезком b_1 и доказать равенство отрезков a_1 и b_1.

Дополнительные построения

- Проведение прямой, параллельной или перпендикулярной одной из имеющихся.
- Удвоение медианы треугольника с целью достроить треугольник до параллелограмма.
- Проведение вспомогательной биссектрисы.
- Дополнительные построения, связанные с окружностью.

Задача 1

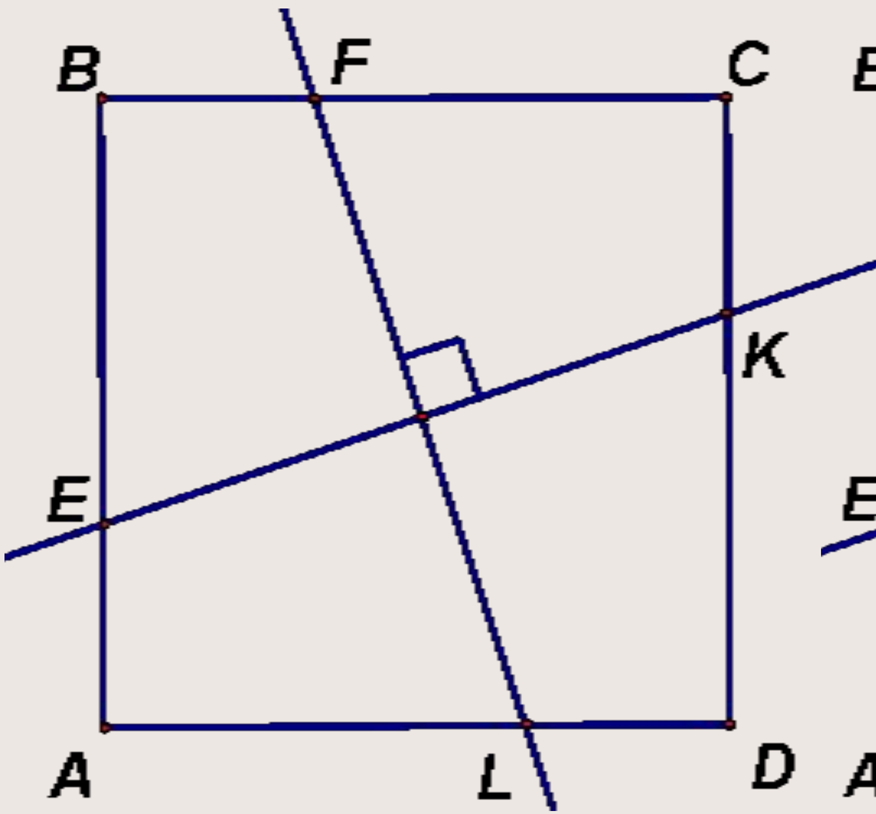
Две взаимно перпендикулярные прямые пересекают стороны ***AB*, *BC*, *CD*, *AD*** квадрата ***ABCD*** в точках ***E*, *F*, *K*, *L*** соответственно. Докажите, что ***EK=FL*.**

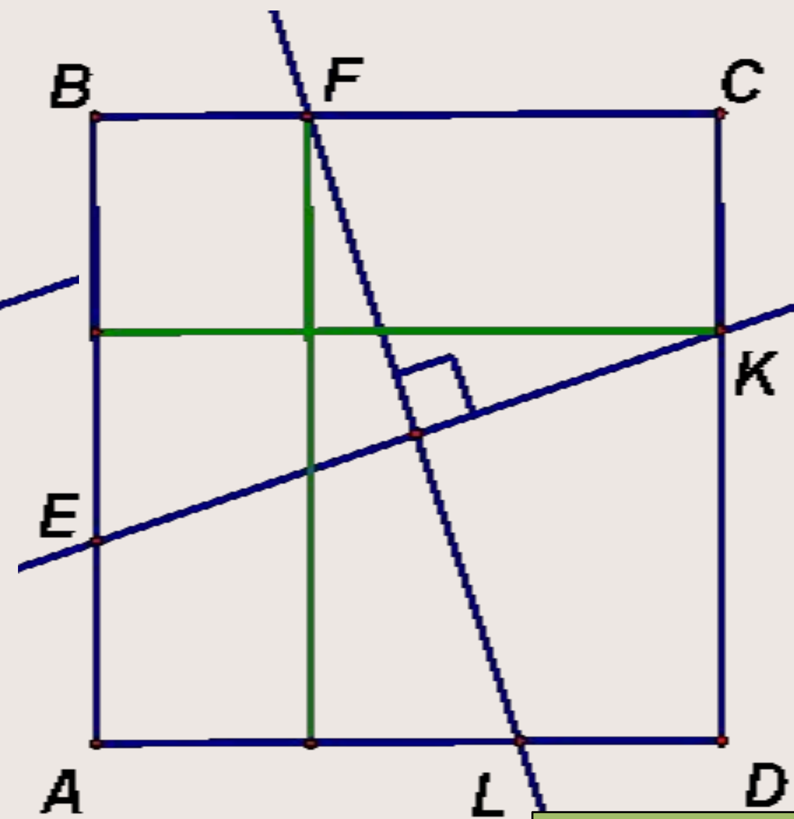


Нужный факт

Две взаимно перпендикулярные прямые пересекают стороны ***AB, BC, CD, AD*** квадрата ***ABCD*** в точках ***E, F, K, L*** соответственно.

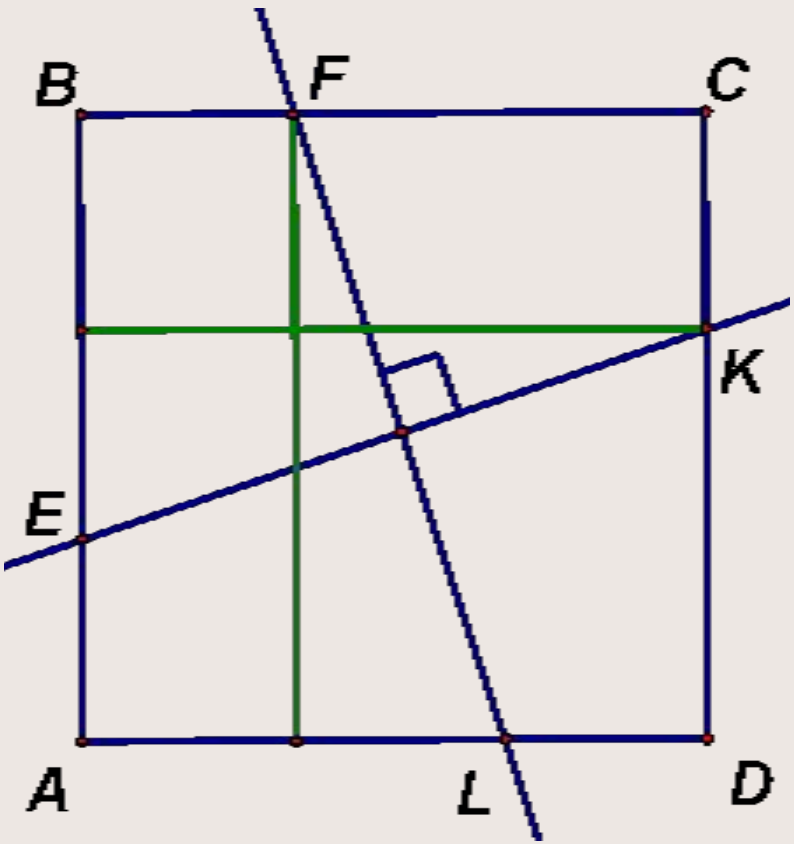
Докажите, что ***EK=FL.***

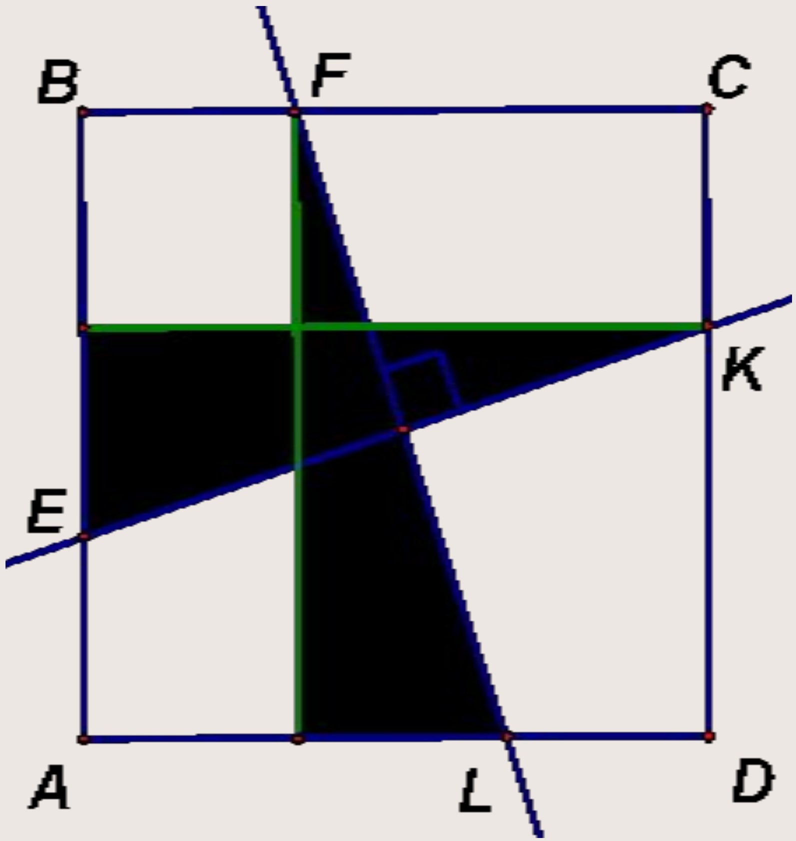




Нужный

Две взаимно перпендикулярные прямые пересекают стороны ***AB*, *BC*, *CD*, *AD*** квадрата ***ABCD*** в точках ***E*, *F*, *K*, *L*** соответственно. Докажите, что ***EK=FL*.**

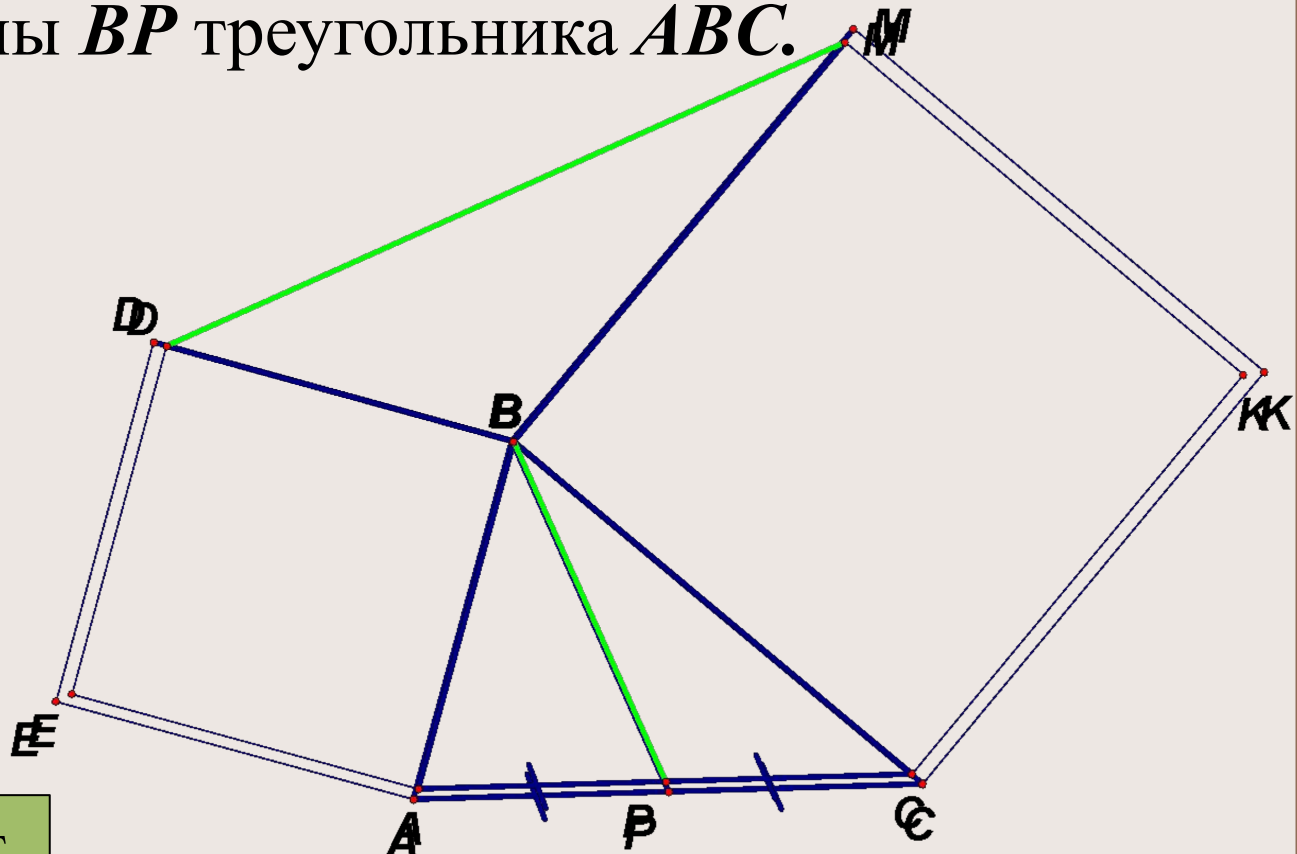




Нужный

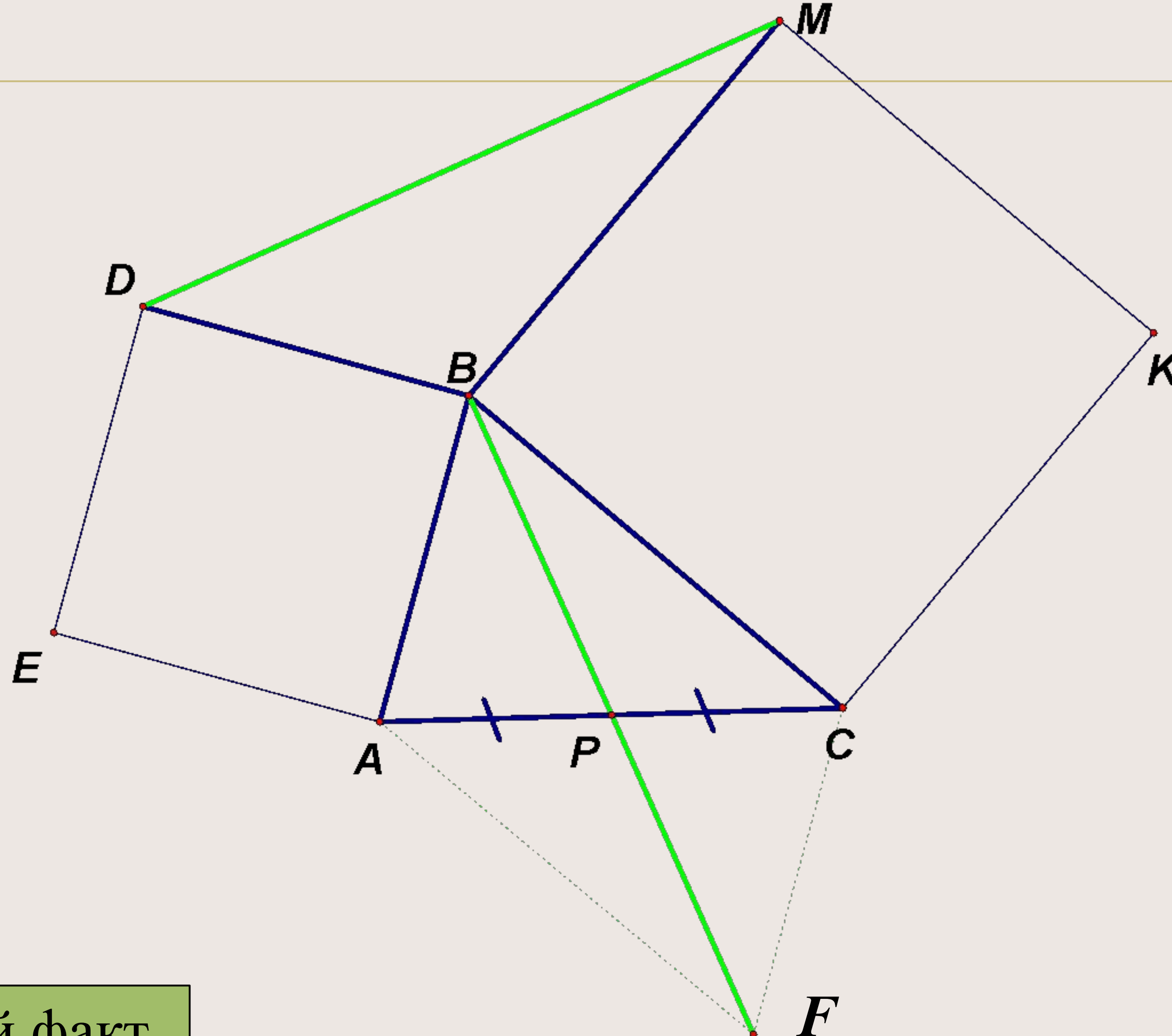
Задача 2

На сторонах ***AB*** и ***BC*** треугольника ***ABC*** вне его построены квадраты ***ABDE*** и ***BCKM***. Докажите, что отрезок ***DM*** в два раза больше медианы ***BP*** треугольника ***ABC***.



Нужный факт

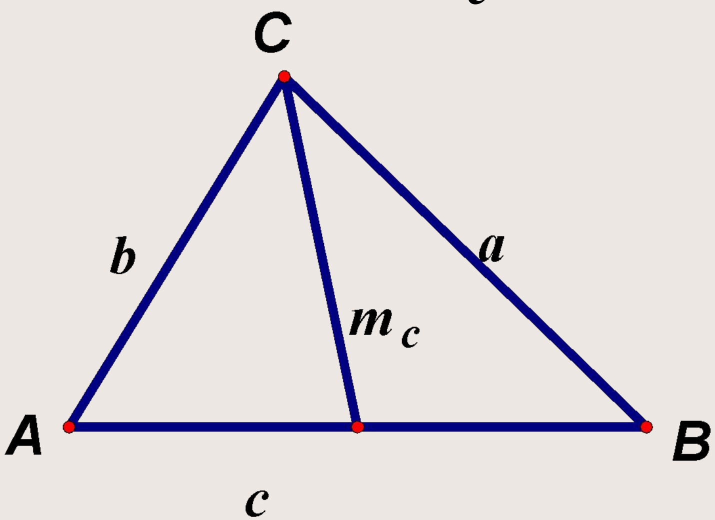
На сторонах *AB* и *BC* треугольника *ABC* вне его построены квадраты *ABDE* и *BCKM*. Докажите, что отрезок *DM* в два раза больше медианы *BP* треугольника *ABC*.

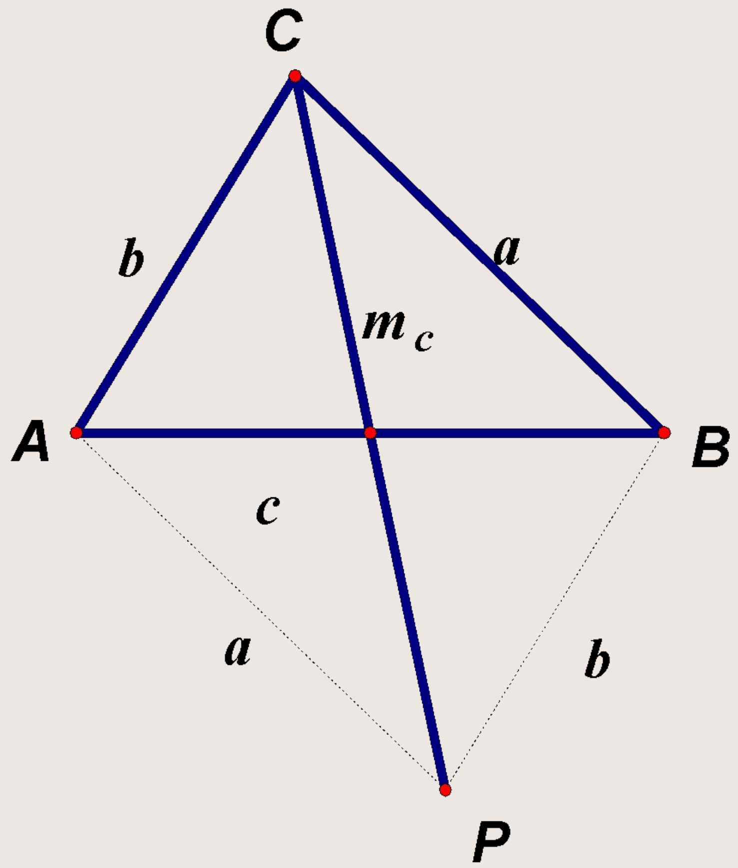


Нужный факт

Задача 3

Стороны треугольника ***a*, *b*, *c*.** Вычислить медиану m_c, проведенную к стороне *c*.

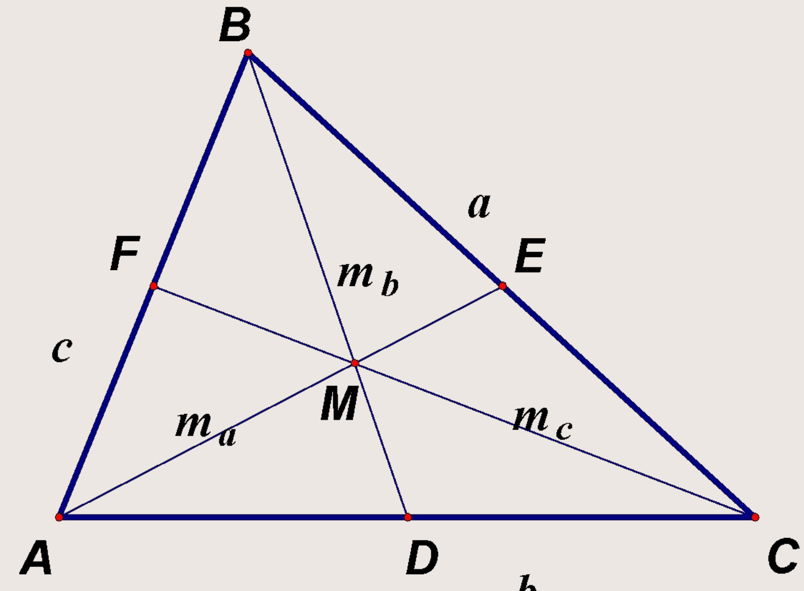




Нужный факт

Задача 4

Доказать, что в любом треугольнике сумма медиан меньше периметра, но больше ¾ периметра.



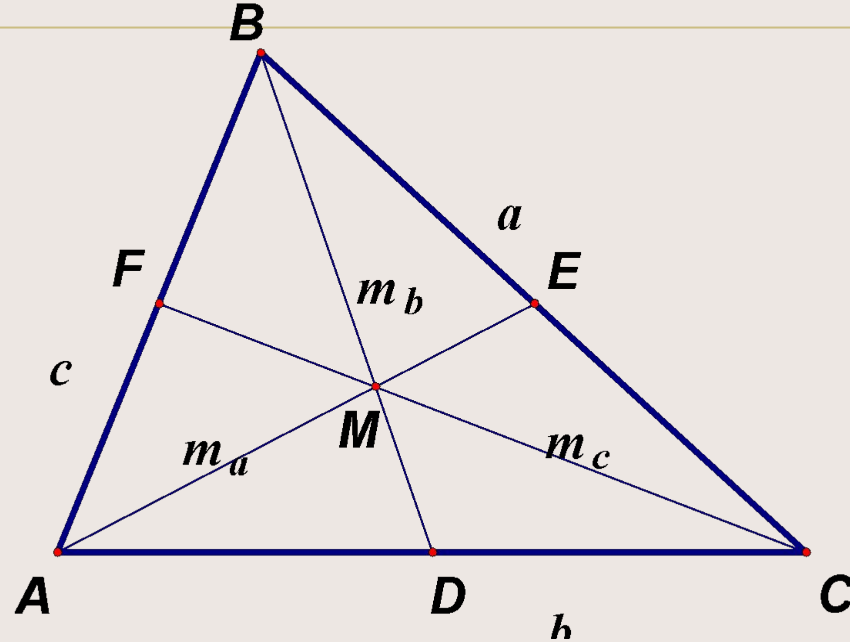
Сначала докажем, что сумма медиан ***больше ¾ периметра***.

Затем докажем, что сумма медиан ***меньше периметра***.

Нужный факт

Сначала докажем, что сумма медиан ***больше ¾ периметра***.

Рассмотрим ΔAMC



$$AM = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3}m_a$$

$$MC = \frac{2}{3}CF = \frac{2}{3}m_c$$

$$AC < AM + MC$$

$$b < \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c$$

Нужный факт

Рассмотрим Δ**BMC:** $BC < BM + MC$

$$a < \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c$$

Рассмотрим Δ**ABM:** $AB < BM + AM$

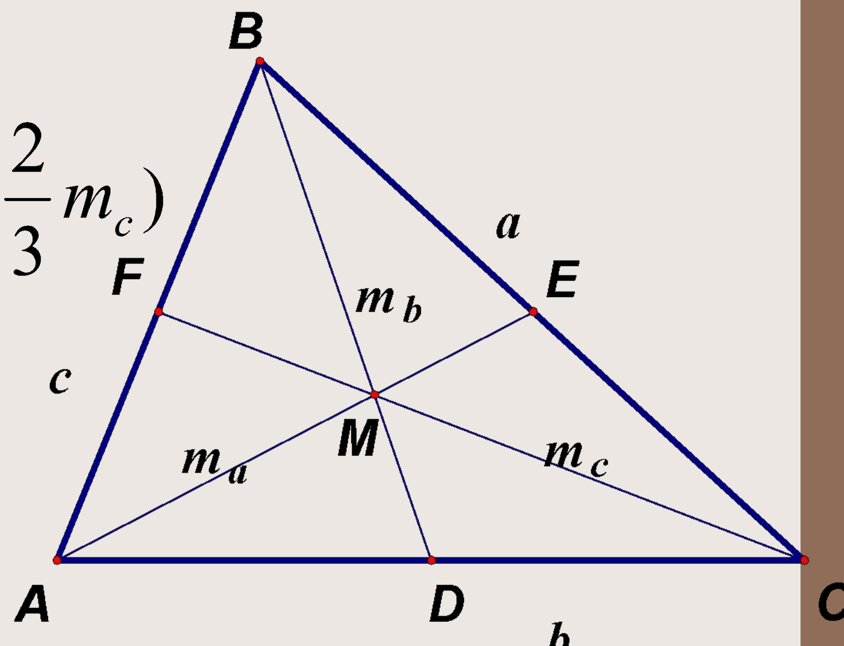
$$c < \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_a$$

$$a + b + c < 2 \cdot (\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c)$$

$$a + b + c < \frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c)$$

$$\frac{3}{4}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c$$

$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a + b + c)$$



Докажем, что сумма медиан ***меньше периметра***.

Рассмотрим Δ***BCK:***

$$BK < BC + CK$$

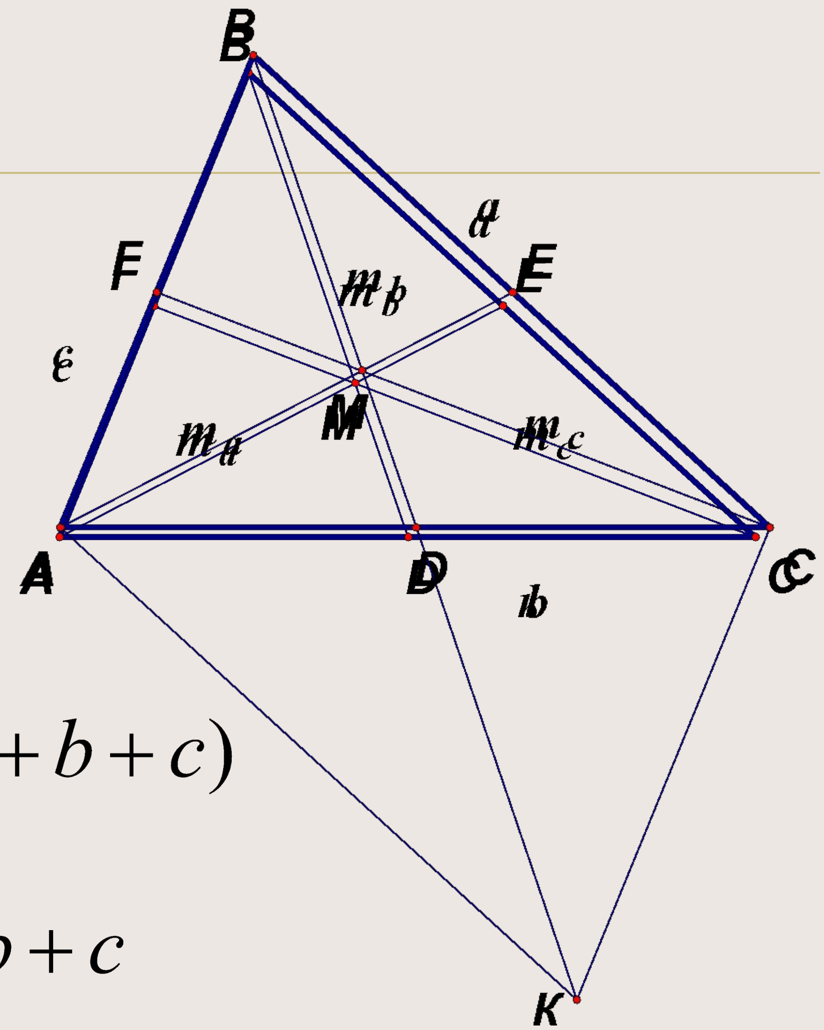
$$2m_b < a + c$$

$$2m_a < b + c$$

$$2m_c < a + b$$

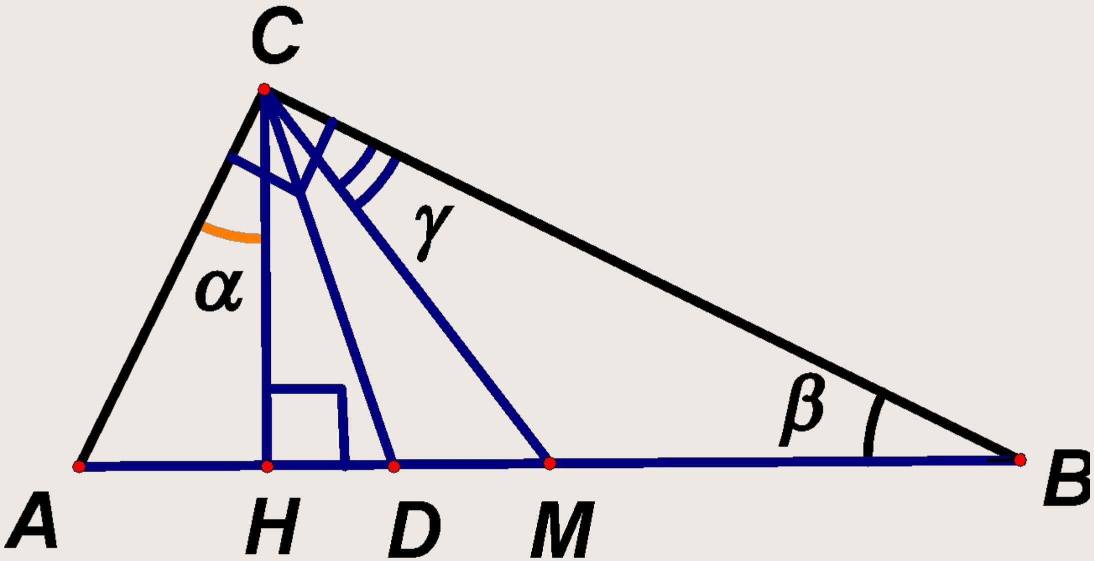
$$2(m_a + m_b + m_c) < 2(a + b + c)$$

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c$$



Задача 5

Доказать, что в неравнобедренном прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенной из той же вершины.



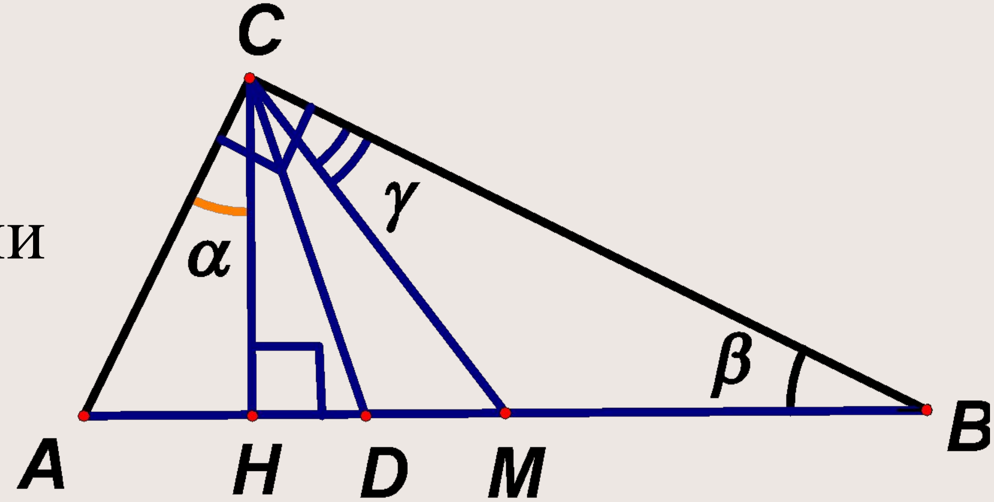
Нужный факт 1

Нужный факт 2

Доказать, что в неравнобедренном прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенной из той же вершины.

1. $\alpha = \beta$

как углы с взаимно перпендикулярными сторонами:



$$AC \perp BC, \; CH \perp AB$$

2. $CM = \frac{1}{2} AB; \; CM = MB; \; \gamma = \beta;$ $\qquad \alpha = \gamma$

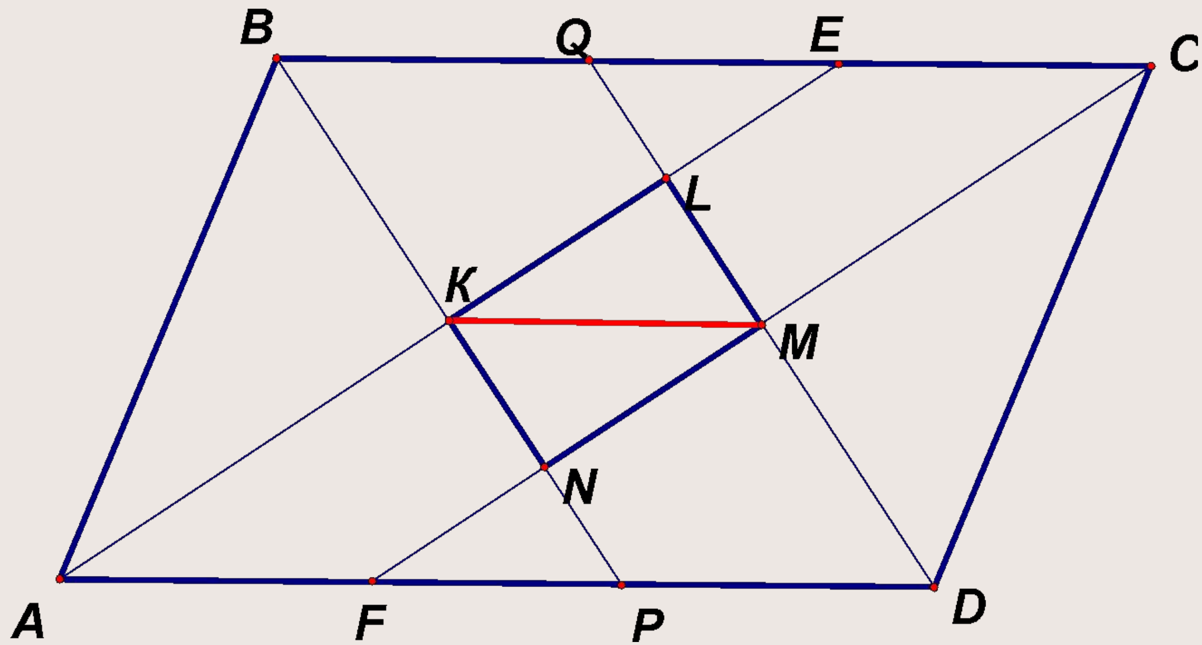
3. $\angle HCD = \angle ACD - \alpha;$

$\angle DCM = \angle DCB - \gamma;$ $\qquad \angle HCD = \angle DCM$

Доказано.

Задача 6

В параллелограмме со сторонами ***a*** и ***b*** проведены биссектрисы внутренних углов. Найдите длины диагоналей четырехугольника, образованного в пересечении биссектрис.



Нужный факт

1. ***AE*** - биссектриса угла ***A***,
BP - биссектриса угла ***B***

$\angle ABC + \angle BAD = 180°$

$2\angle ABP + 2\angle BAE = 180$

Значит,

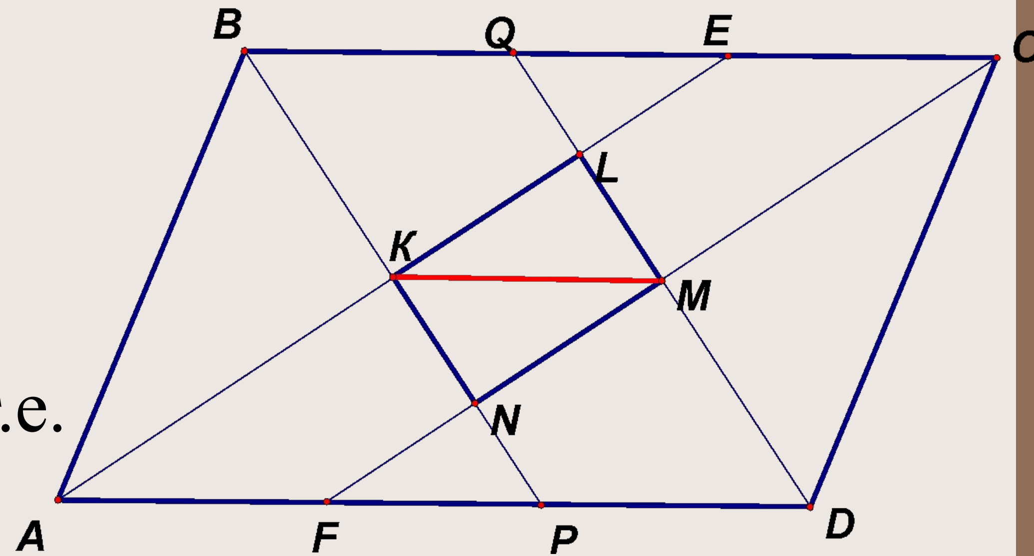
$\angle ABP + \angle BAE = 90°$

$\angle BKA = 90°$ *т.е.* ***биссектрисы AE и BP взаимно перпендикулярны***

2. Докажите аналогично взаимную перпендикулярность биссектрис ***AE*** и ***QD, BP*** и ***CF, CF*** и ***QD***

3. Вывод.

KLMN – четырехугольник с прямыми углами, т.е. прямоугольник.



4. Так как *KLMN* – прямоугольник, достаточно найти длину *KM*.

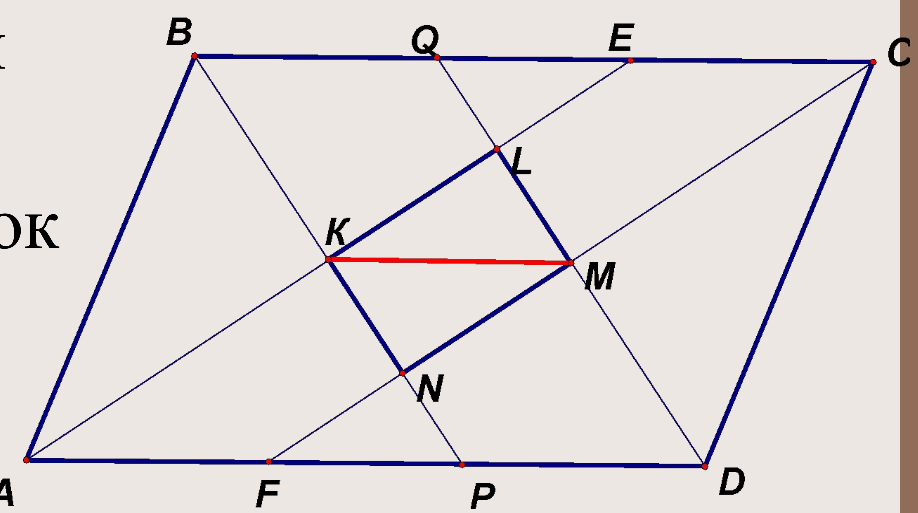
5. Рассмотрим ΔABP.

AK – биссектриса и высота, значит ΔABP – равнобедренный и *AK* – медиана.

6. $AB=AP = b$, *K* – середина *BP*.

Аналогично, *M* – середина *QD*.

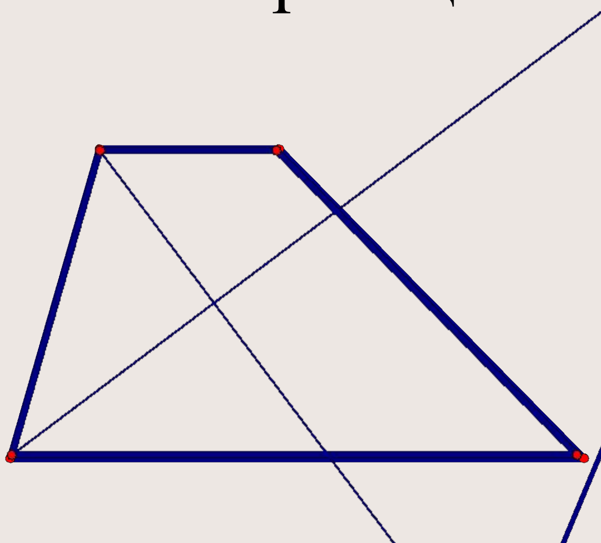
7. *KM* делит пополам отрезки *BP* и *QD*. Значит *KM* - отрезок на средней линии параллелограмма, поэтому $KM \| AD$.

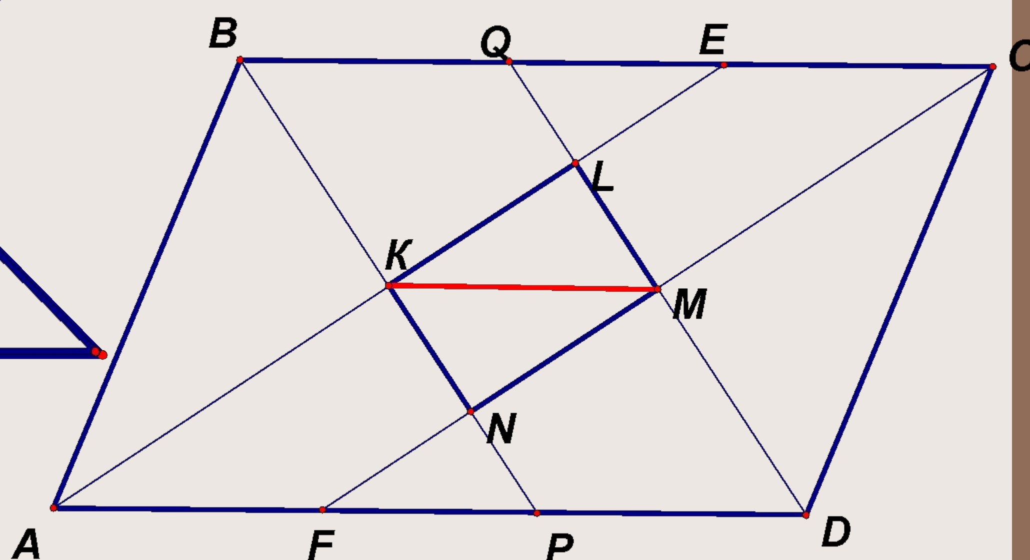


8. *KMDP* – параллелограмм, $KM=PD = AD\text{-}AP =a\text{-}b$

Важный результат задачи 6

Биссектрисы углов, прилегающих к боковой стороне трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии трапеции.





Замечание

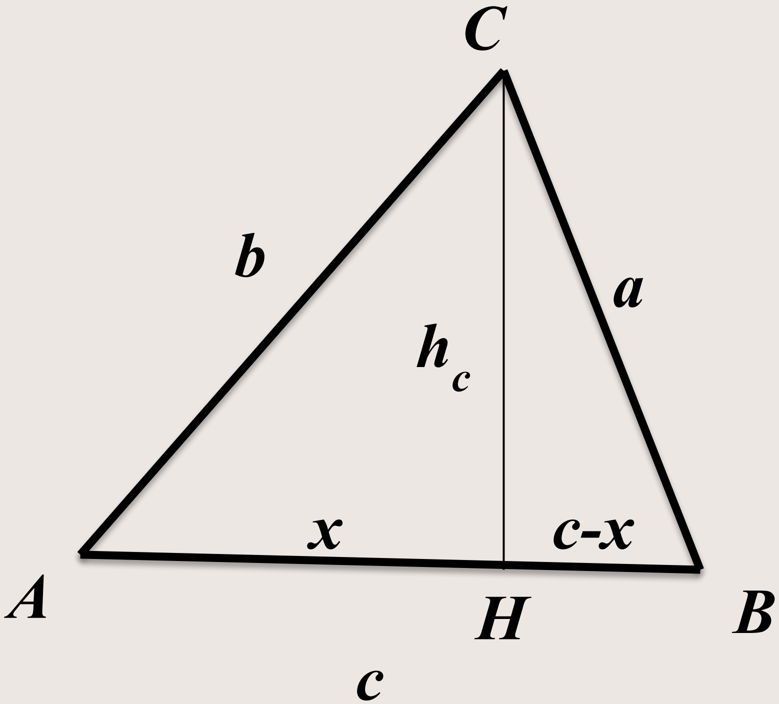
Основным методом составления уравнений в геометрических задачах является *метод опорного элемента*.

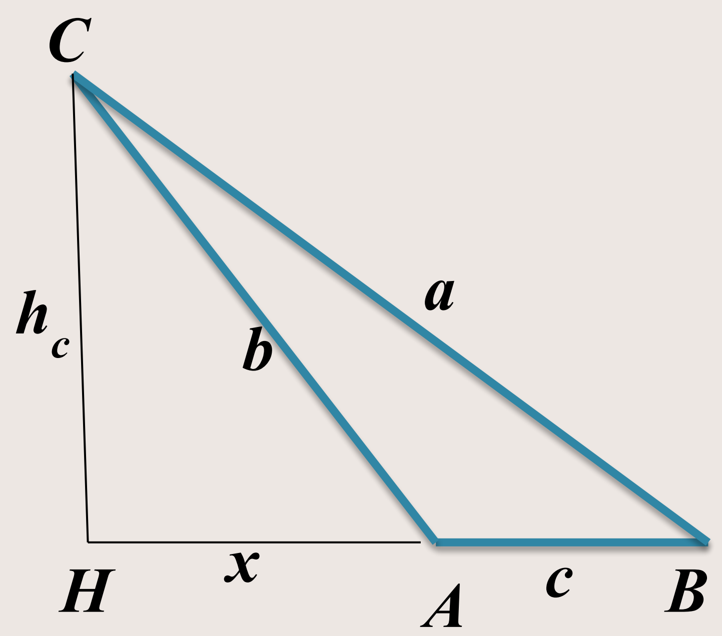
Он заключается в том, что один и тот же элемент (сторона, угол, площадь, радиус и т.д.) выражается через известные и неизвестные величины двумя различными способами и полученные выражения приравниваются.

В качестве опорного элемента часто выбирается площадь фигуры. Тогда говорят, что используется *метод площадей*.

Задача 7

Стороны треугольника ***a, b*** и ***c***. Вычислить высоту h_c, проведенную к стороне ***c***.





$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(b+c+a)}$$

Замечание

Если в задаче требуется найти отношение каких-либо величин, то она решается методом введения вспомогательного параметра.

В начале решения задачи какая-либо линейная величина принимается как известная. Обозначив ее буквой ***а*,** выражаем через нее те величины, отношение которых требуется найти. Тогда при составлении искомого отношения вспомогательный параметр ***а*** сократится.

Задача 8

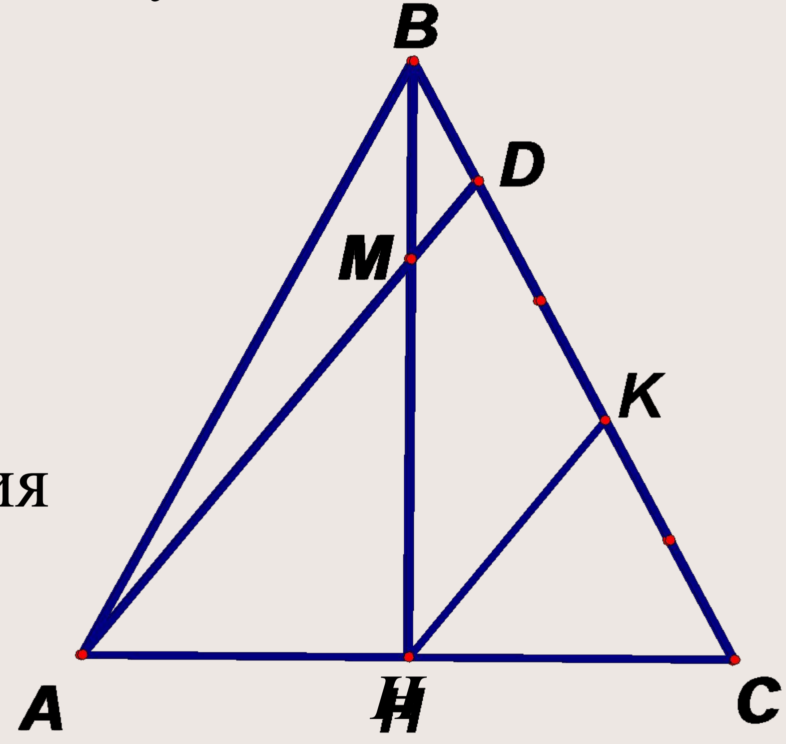
В треугольнике ***ABC*** стороны ***AB*** и ***BC*** равны, ***BH*** высота. На стороне ***BC*** взята точка ***D*** так, что ***BD:DC=1:4***. Найдите в каком отношении отрезок ***AD*** делит высоту ***BH***.

Пусть ***BD=a,*** тогда

DC=4a, BC=AB=5a

Проведем ***HK***||***AD,*** тогда

HK – средняя линия Δ***ADC,*** то ***DK=KC=2a***



В треугольнике ***ABC*** стороны ***AB*** и ***BC*** равны, ***BH*** высота. На стороне ***BC*** взята точка ***D*** так, что ***BD:DC=1:4***. Найдите в каком отношении отрезок ***AD*** делит высоту ***BH***.

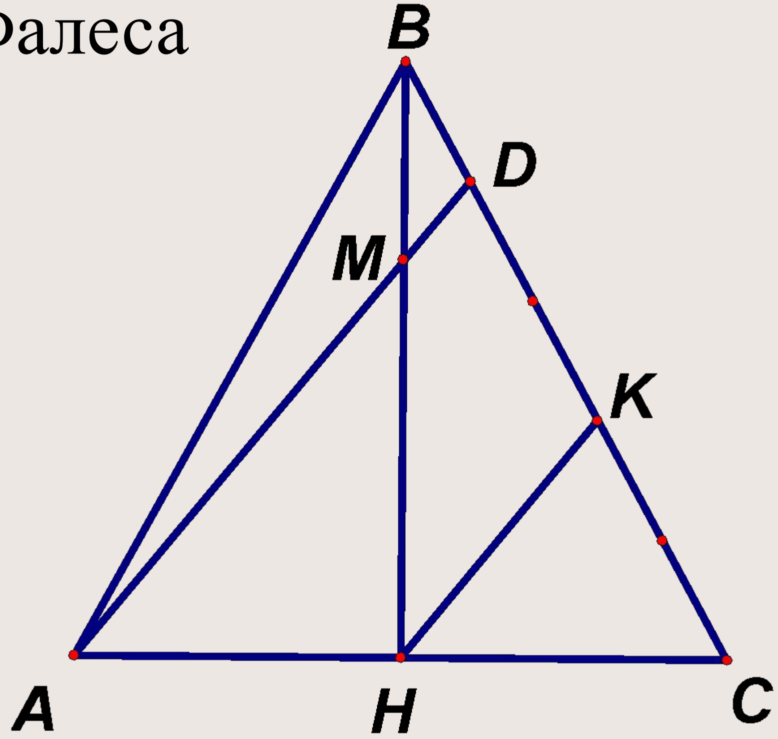
В Δ***BHK*** по теореме Фалеса

$$\frac{BM}{MH}=\frac{BD}{DK}$$

$$\frac{BD}{DK}=\frac{a}{2a}$$

$$\frac{BD}{DK}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{BM}{MH}=\frac{1}{2}$$



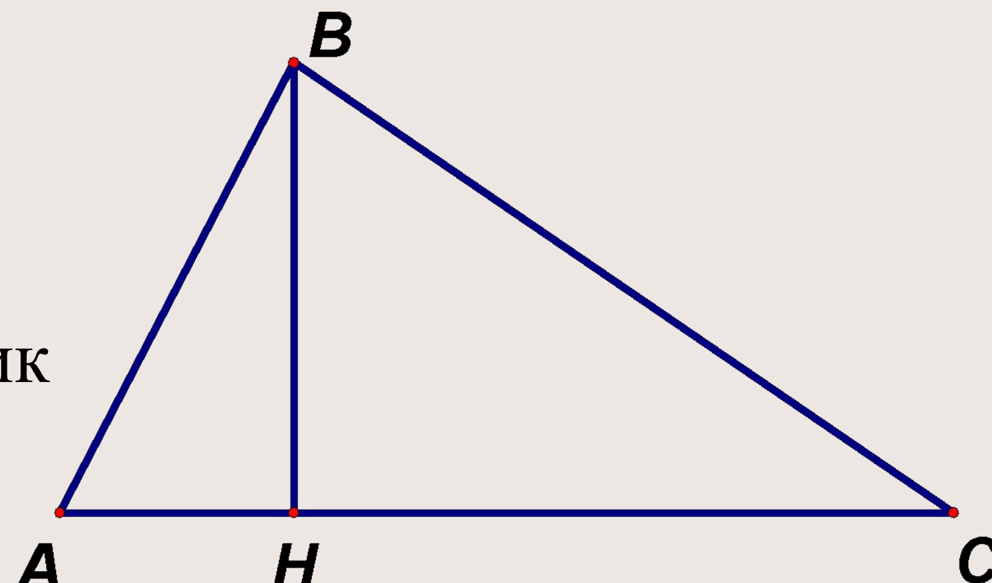
Задача 9

В треугольник со сторонами ***10, 17*** и ***21*** см, вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на одной стороне треугольника, а две вершины - на двух других сторонах треугольника. Найти стороны прямоугольника, если известно, что его периметр равен ***22,5*** см.

Определим вид треугольника.

$$21^2 \ ? \ 10^2 + 17^2$$

Значит, треугольник тупоугольный.



Нужный факт

В треугольник со сторонами *10, 17* и *21* см, вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на одной стороне треугольника, а две вершины - на двух других сторонах треугольника. Найти стороны прямоугольника, если известно, что его периметр равен *22,5* см.

Тогда две вершины прямоугольника лежат на большей стороне треугольника.

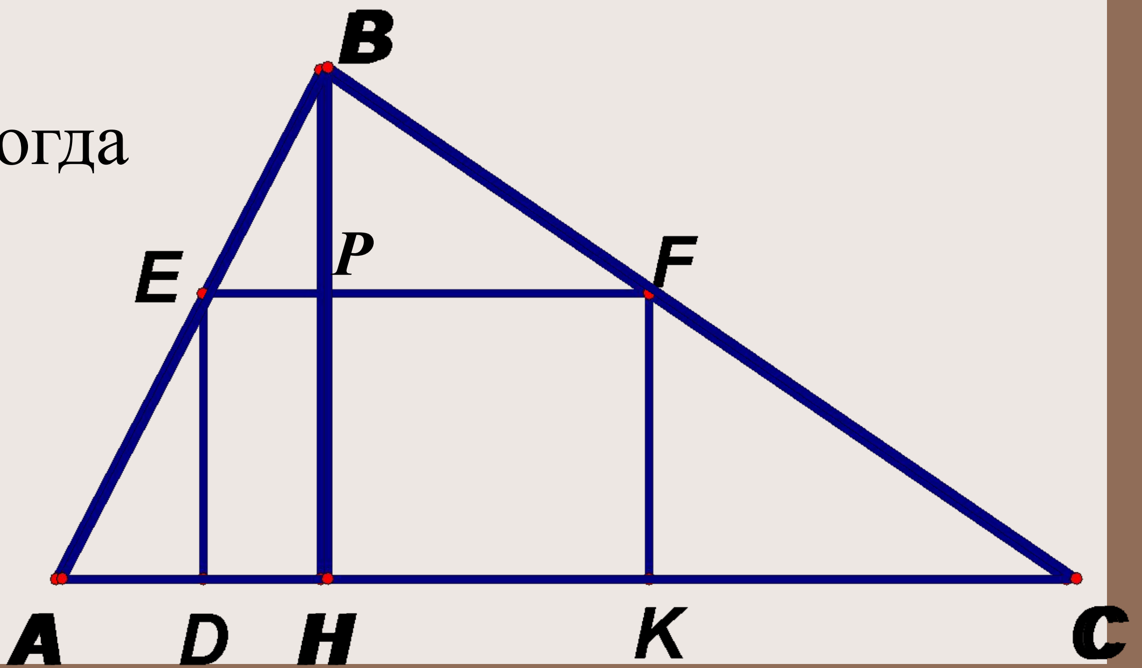
Найдем высоту ***BH*** как в задаче 7.

BH=8 см

Пусть ***ED=x,*** тогда

EF=11,25-x,

BP=8-x



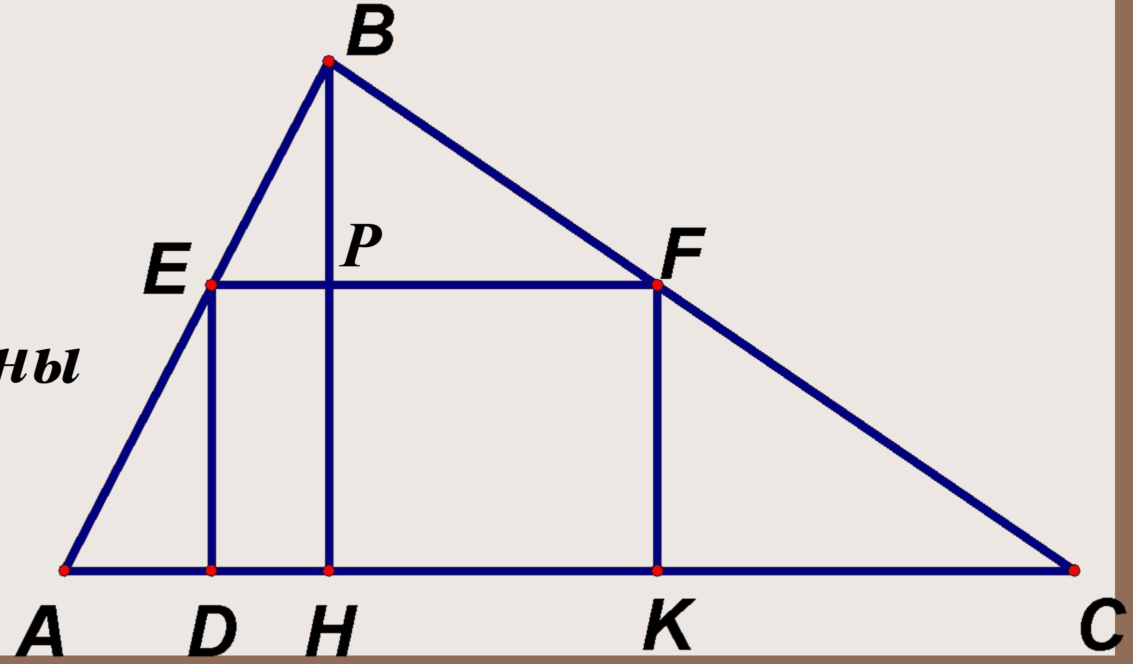
В треугольник со сторонами ***10, 17*** и ***21*** см, вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на одной стороне треугольника, а две вершины - на двух других сторонах треугольника. Найти стороны прямоугольника, если известно, что его периметр равен ***22,5*** см.

$$\Delta BEF \infty \Delta ABC$$

$$\frac{EF}{AC} = \frac{BP}{BH}$$

$$\frac{11{,}25 - x}{21} = \frac{8 - x}{8}$$

x=6



Ответ: стороны 6 см и 5,25 см

Нужный факт

Задача 10

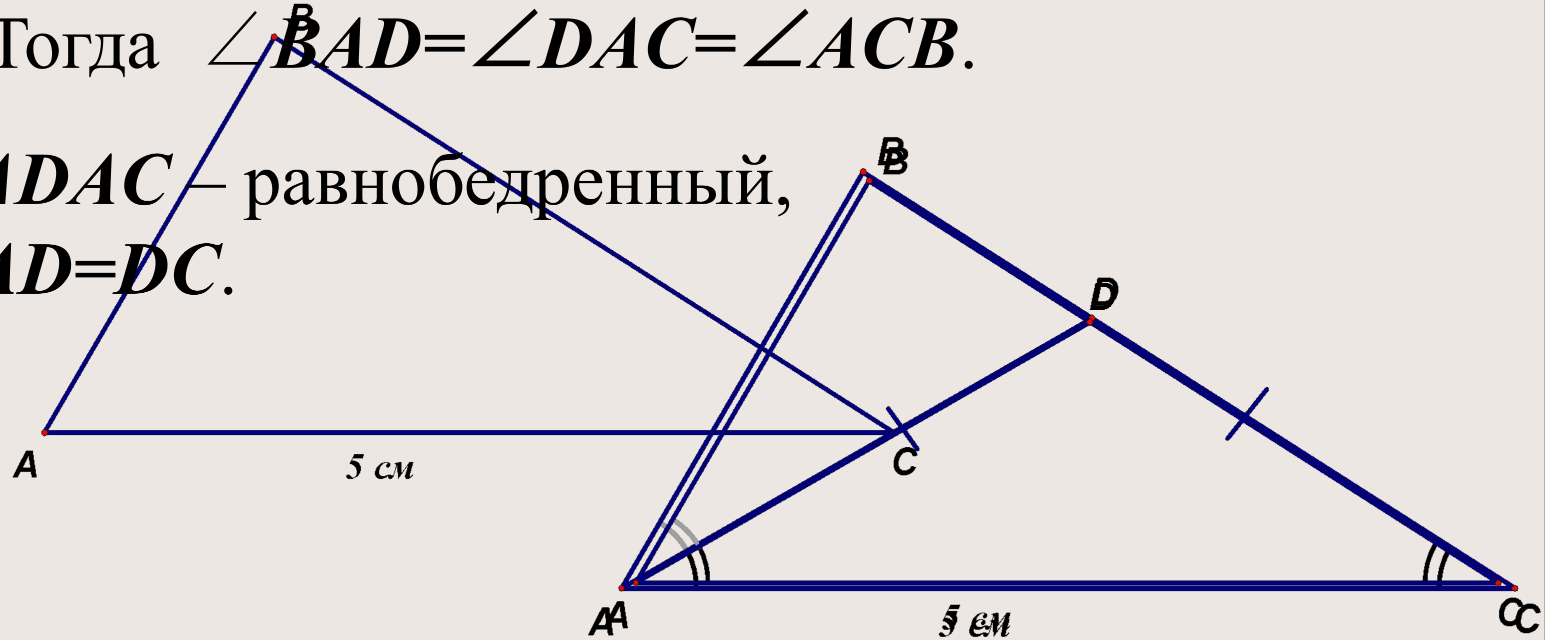
В треугольнике ***ABC*** известно, что угол ***A*** в два раза больше угла ***C***, сторона ***BC*** на **2** см больше стороны ***AB***, а ***AC*=5** см. Найти ***AB*** и ***BC***.

Проведем биссектрису ***AD*** угла ***A***.

Тогда $\angle BAD = \angle DAC = \angle ACB$.

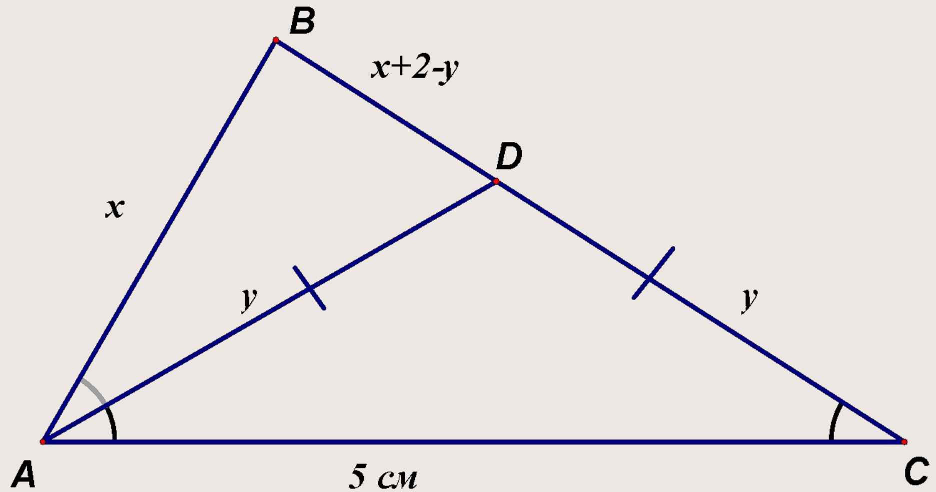
ΔDAC – равнобедренный,

$AD = DC$.



В треугольнике ***ABC*** известно, что угол ***A*** в два раза больше угла ***C***, сторона ***BC*** на ***2*** см больше стороны ***AB***, а ***AC=5*** см. Найти ***AB*** и ***BC***.

Т.к. $\angle BAD = \angle BCA$, $\angle B$ – общий, то $\Delta ABD \infty \Delta ABC$



$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{y}{5}, \\ \dfrac{x+2-y}{x} = \dfrac{y}{5} \end{cases}$$

$$5y - 10 = 2y$$

$$y = \frac{10}{3}$$

$$\begin{cases} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy \end{cases}$$

$$\frac{x}{x+2} = \frac{2}{3}$$

$$x = 4$$

Ответ: AB=4 см,
BC=6 см

Спасибо за внимание!