Л. № 12 Уравнения Максвелла

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. *Вихревое электрическое поле.*
2. *Ток смещения.*
3. *Уравнения Максвелла. Интегральная форма уравнений.*
4. *Уравнения Максвелла. Дифференциальная форма уравнений.*
5. *Граничные условия.*
6. *Свойства уравнений Максвелла.*

ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Для электростатического поля ЭДС это *циркуляция вектора напряженности поля по замкнутому контуру:*

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \varepsilon$$

ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

По Максвеллу изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле $\vec{E}_в$, которое является источником ЭДС:

$$\varepsilon_i = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = \oint_L \left(\vec{E}_B, d\vec{l}\right) = \oint_L E_{Bl}\, dl$$

где $\vec{E}_{Bl}$ - проекция вектора на направление $d\vec{l}$.

$$\Phi_B = \int_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \int_S B_n dS$$

$$\oint_L \left(\vec{E}_B, d\vec{l}\right) = -\frac{d}{dt}\int_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$$

ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

$$\oint_L \left(\vec{E}_B, d\vec{l}\right) = -\frac{d}{dt}\int_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$$

Поменяем местами операции дифференцирования и интегрирования:

$$\oint_L \left(\vec{E}_B, d\vec{l}\right) = -\frac{d}{dt}\int_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S}\right)$$

Вспомним некоторые сведения из теории электростатического поля.

В случае электростатического поля ЭДС замкнутого контура равна нулю. Это означает, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля E_q по замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_L \left(\vec{E}_q, d\vec{l}\right) = 0$$

ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

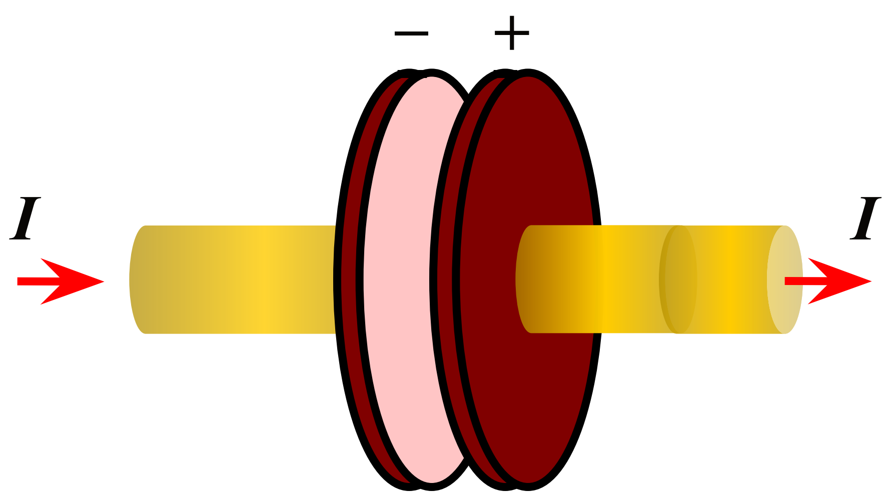
$$\oint_L \left(\vec{E}_q, d\vec{l}\right) = 0$$

$$\oint_L \left(\vec{E}_B, d\vec{l}\right) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S}\right)$$

Сравнивая эти выражения, видим принципиальное различие между электростатическим и вихревым полями: циркуляция вектора E_B в отличие от циркуляции вектора E_q не равна нулю.

ТОК СМЕЩЕНИЯ

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую плоский конденсатор

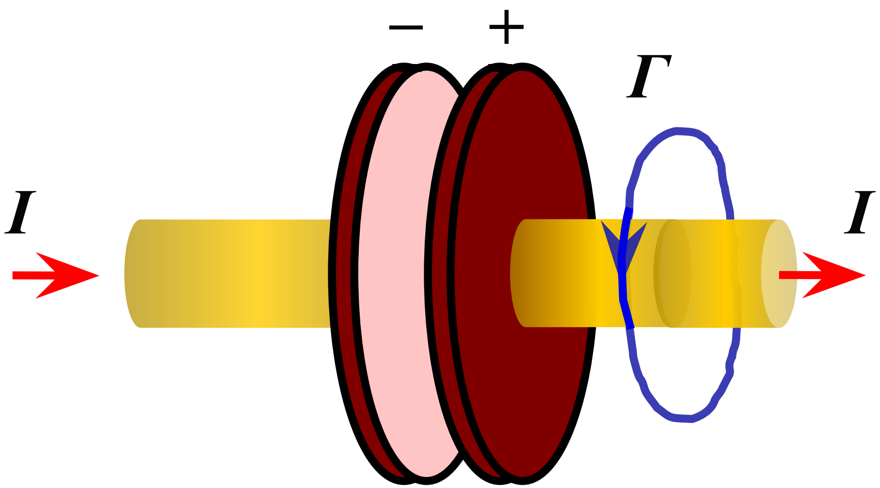


Применим для этого случая теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$:

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}) = I$$

(Циркуляция вектора $\vec{H}$ *по произвольному замкнутому контуру равна сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром)*

ТОК СМЕЩЕНИЯ

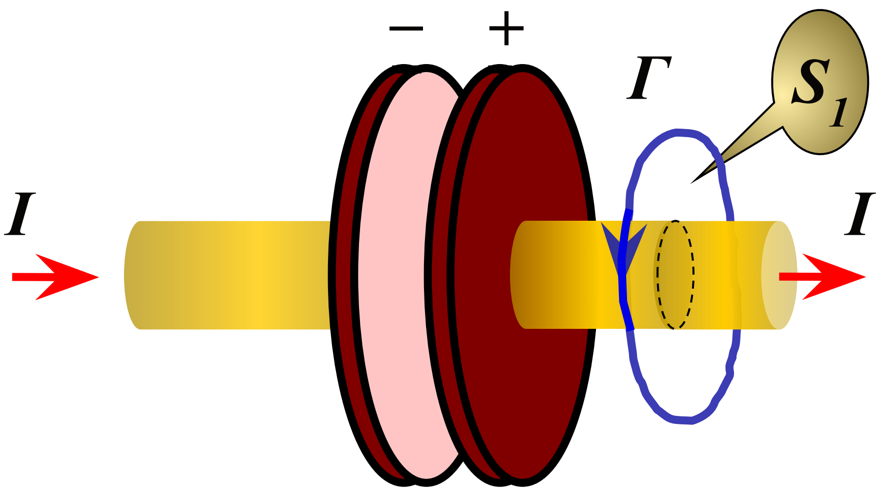


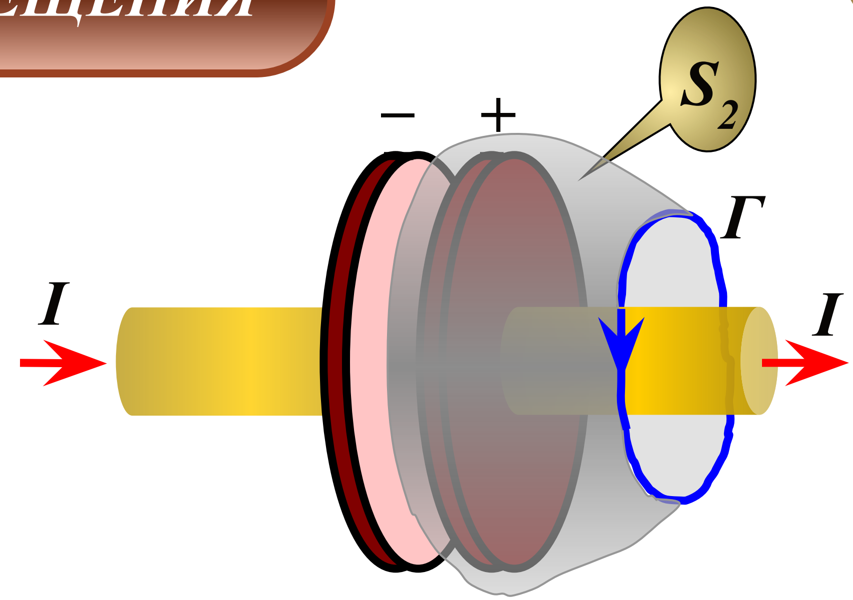
Выберем контур *Г*, охватывающий подводящий провод, зададим направление обхода контура.

Для того чтобы применить теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$, нужно выбрать поверхность, натянутую на контур *Г*.

Поскольку циркуляция вектора $\vec{H}$ от формы этой поверхности не должна зависеть, рассмотрим две поверхности, натянутые на контур.

ТОК СМЕЩЕНИЯ



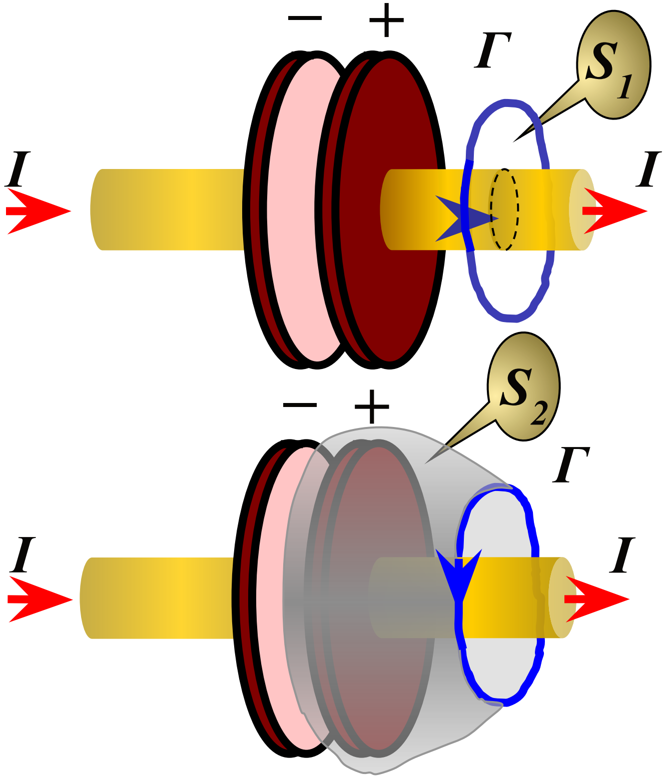


Поверхность S_1 пересекает провод с током

Поверхность S_2 не пересекает провод с током

Видим, что через поверхность S_1 течет ток проводимости I, а через поверхность S_2 тока нет, поскольку линии тока проводимости терпят разрыв в промежутке между обкладками конденсатора

ТОК СМЕЩЕНИЯ



Получается, что циркуляция вектора $\vec{H}$ зависит от формы поверхности, которую мы натягиваем на контур *Г*, чего не может быть.

Вывод: в случае изменяющихся во времени полей примененное уравнение перестает быть справедливым.

$$\cancel{\oint_L \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \int_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) = I}$$

Для разрешения возникшего противоречия Максвелл ввел в правую часть этого уравнения дополнительное слагаемое, которое назвал *плотностью тока смещения*

ТОК СМЕЩЕНИЯ

$$\boxed{j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t}}$$

$$j = j_{пр} + j_{см}$$

$$j = j_{пр} + j_{см} = \gamma E + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$i = \int_S j dS$$

$$\boxed{i = \int_S j dS = \int_S \left(\gamma E + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS}$$

- Закон полного тока

ТОК СМЕЩЕНИЯ

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ - плотность тока смещения

В соответствии с выражением $\oint_S \left(\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), d\vec{S} \right) = 0$ линии полного тока являются непрерывными в отличие от линий тока проводимости. Токи проводимости, если они не замкнуты, замыкаются токами смещения.

Введение полного тока позволяет разрешить противоречие, возникшее при попытке применить теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$, записанную для постоянных токов.

Для произвольного случая эта теорема будет иметь вид:

$$\oint_L \left(\vec{H}, d\vec{l} \right) = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла в интегральной форме.

1. $$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S}\right)$$

Циркуляция вектора $\vec{E}$ по любому замкнутому контуру равна со знаком минус производной по времени от магнитного потока через произвольную поверхность, ограниченную этим контуром.

Первое уравнение показывает, что источником электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющиеся во времени магнитные поля.

Первое уравнение – это по сути, закон электромагнитной индукции.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла в интегральной форме.

2. $$\oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0$$

Поток вектора индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

Это теорема Гаусса для магнитного поля.

Магнитное поле называют *вихревым*. В природе нет магнитных зарядов.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла в интегральной форме.

3.

$$\oint_L \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \int_S \left(\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right), d\vec{S}\right)$$

Закон полного тока

Циркуляция вектора $\vec{H}$ по любому замкнутому контуру равна полному току через произвольную поверхность, ограниченную этим контуром..

Уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла в интегральной форме.

4. $$\oint_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = \int_V \rho dV$$

Теорема Гаусса

Поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность в произвольной среде равен стороннему заряду, заключенному внутри поверхности.

Это постулат Максвелла, выражающий закон создания электрических полей действием зарядов в произвольных средах. Постулат записан в общем виде, для стороннего заряда, распределенного внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью ρ.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Из уравнений Максвелла следует:

- источниками электрического поля являются электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля.

- источниками магнитного поля являются движущиеся заряды (электрические токи), либо переменные электрические поля.

Уравнения Максвелла не симметричны относительно магнитных и электрических полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных.

Для *стационарных полей* ($\boldsymbol{E} = \boldsymbol{const}$ и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{const}$) уравнения Максвелла примут вид:

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0; \qquad \oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0; \qquad \oint_L \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = I; \qquad \oint_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = q.$$

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

Вспомним некоторые сведения из векторного анализа.

Ранее, определяя связь между напряженностью поля $\vec{E}$ и потенциалом φ, мы ввели в рассмотрение оператор ∇ (набла) или оператор Гамильтона:

$$\vec{E} = -\,qrad\,(\varphi) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla\varphi$$

Оператор набла - это вектор с компонентами $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Сведения из векторного анализа

Оператор имеет смысл в сочетании со скалярной или векторной величиной, на которую он умножается.

Пример: если умножить этот вектор на скаляр φ, получится вектор, представляющий собой градиент функции φ - $grad(\varphi)$

Если вектор ∇ умножить скалярно на вектор $\vec{a}$, получится скаляр, который имеет смысл дивергенции вектора $\vec{a}$.

$$(\nabla,\vec{a}) \equiv \nabla\vec{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = div\,\vec{a}$$

Если умножить вектор ∇ на вектор $\vec{a}$ векторно $[\nabla,\vec{a}]$, получится вектор с компонентами $[\nabla,\vec{a}]_x$, $[\nabla,\vec{a}]_y$, $[\nabla,\vec{a}]_z$.

Этот вектор называют «ротор вектора $\vec{a}$» - $rot\,\vec{a}$

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Сведения из векторного анализа

Это векторное произведение можно записать с помощью определителя

$$rot\,\vec{a} = [\nabla, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Итак, существуют три формы записи оператора набла в сочетании со скалярной или векторной функцией.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Сведения из векторного анализа

Теоремы векторного анализа, которые позволят осуществить переход от интегральных величин к дифференциальным:

1. Теорема Остроградского – Гаусса. Устанавливает связь между дивергенцией вектора $\vec{a}$ и потоком этого вектора через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V:

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Сведения из векторного анализа

Теоремы векторного анализа, которые позволят осуществить переход от интегральных величин к дифференциальным:

2. Теорема Стокса. Устанавливает связь между ротором вектора $\vec{a}$ в каждой точке некоторой поверхности S и циркуляцией этого вектора по контуру L, ограничивающему S:

$$\oint_L \left(\vec{a}, d\vec{l}\right) = \int_S rot\,\vec{a} \cdot d\vec{S}$$

Циркуляция вектора $\vec{a}$ по произвольному замкнутому контуру L равна потоку вектора $rot\,\vec{a}$ через произвольную поверхность S, ограниченную контуром (натянутую на контур).

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

$$\boxed{\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S}\right)}$$

В соответствии с теоремой Стокса:

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \int_S \left(rot\vec{E}, d\vec{S}\right)$$

В итоге можно записать:

$$\int_S \left(rot\vec{E}, d\vec{S}\right) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S}\right)$$

Из сравнения подынтегральных выражений получим окончательно

$$\boxed{rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

$$\boxed{\oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0}$$

В соответствии с теоремой Остроградского - Гаусса

$$\oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \int_V div\,\vec{B} \cdot dV$$

В итоге можно записать:

$$\oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \int_V div\,\vec{B} \cdot dV = 0$$

Окончательно получим

$$\boxed{div\,\vec{B} = 0}$$

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

$$\boxed{\oint_L \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \int_S \left(\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right), d\vec{S}\right)}$$

В соответствии с теоремой Стокса: $\oint_L \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \int_S \left(rot\,\vec{H}, d\vec{S}\right)$

В итоге можно записать: $$\int_S \left(rot\vec{H}, d\vec{S}\right) = \int_S \left(\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right), d\vec{S}\right)$$

Из сравнения подынтегральных выражений получим окончательно

$$\boxed{rot\,\vec{H} = \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)}$$

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

$$\boxed{\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \int_V \rho dV}$$

В соответствии с теоремой Остроградского - Гаусса

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \int_V div\, \vec{D} \cdot dV$$

В итоге можно записать:

$$\int_V div\, \vec{D} \cdot dV = \int_V \rho dV$$

Из сравнения подынтегральных выражений получим окончательно

$$\boxed{div\, \vec{D} = \rho}$$

Таким образом, получили полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad div\, \vec{B} = 0; \quad rot\vec{H} = \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right); \quad div\, \vec{D} = \rho.$$

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Свойства уравнений Максвелла.

1. *Уравнения Максвелла линейны.* Свойство линейности уравнений Максвелла непосредственно связано с принципом суперпозиции: если два каких-нибудь поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, то это относится и к сумме этих полей.

2. *Уравнения Максвелла содержат уравнение непрерывности,* выражающее закон сохранения электрического заряда.

3. *Уравнения Максвелла выполняются во всех инерциальных системах отсчета.* Уравнения релятивистски инвариантны. Их вид не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, хотя величины в них преобразуются по определенным правилам. Отдельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет относительный смысл.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

<u>Свойства уравнений Максвелла</u>.

4. *Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей.* Это обусловлено тем, что в природе существуют электрические заряды, но не обнаружены магнитные.

5. *Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле способно существовать самостоятельно – без электрических зарядов и токов*. Изменение состояния этого поля имеет волновой характер. Поля такого рода называют <u>электромагнитными волнами</u>. В вакууме они всегда распространяются со скоростью, равной скорости света. Этот вывод и теоретическое исследование электромагнитных волн привели Максвелла к созданию электромагнитной теории света, в соответствии с которой свет также представляет собой электромагнитные волны.