Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

- **1. Аналогия между характеристиками электрического и магнитного полей:**

Электрическое поле	Магнитное поле
Напряженность эл.поля $\vec{E}$ *Для точечного заряда* $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon r^2}$	Индукция магн. поля $\vec{B}$ *Для прямого провода* $B = \mu\mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi \cdot r}$
Электрическое смещение $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$	Напряженность магн. поля $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$

Характеристики $\vec{D}$ *и* $\vec{H}$ вспомогательные, физ. смысла не имеют, но упрощают матем. описание полей.

Первое уравнение Максвелла

- **представляет собой закон полного тока:**

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S}$$

- Смысл первого уравнения Максвелла состоит в том, что **любой ток проводимости *I* порождает вихревое магнитное поле , циркуляция которого вдоль произ-вольного замкнутого контура *l* равна *I*. Одновременно, всякое изменение вектора электрического смещения**
- $\partial \vec{D} / \partial t$ **также как и ток проводимости, порождает вихревое магнитное поле** $\vec{H}$ **.**

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} \qquad I_{см} = \int_S \vec{j}_{см} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \int_S \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}$$

Второе уравнение Максвелла

- **представляет собой закон электромагнитной индукции.**
- Максвелл высказал гипотезу, что **всякое переменное магнитное поле $\vec{B}$ возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле**, которое и является причиной возникновения индукционного тока в проводящем контуре.
- Иначе « изменяющееся во времени магнитное поле $\vec{B}$ порождает вихревое электрическое поле $\vec{E}$, циркуляция которого вдоль произвольного замкнутого контура l равна

$$\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S} = -\frac{\partial}{dt}\int_S \vec{B}\,d\vec{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad \Phi = \int_S \vec{B}\,d\vec{S}$$

Третье и четвертое уравнения Максвелла

- Третье уравнений Максвелла в интегральной форме

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

- выражает тот факт, что **в природе отсутствуют магнитные заряды, т.е. все силовые линии вектора являются замкнутыми линиями.**

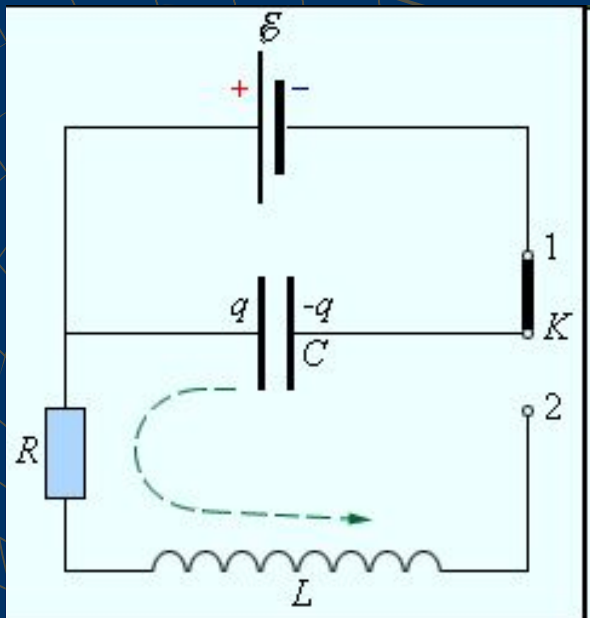
- **Суть четвертого уравнения состоит в том, что поток вектора электрического смещения $\vec{D}$ через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов ΣQ, расположенных внутри этой поверхности.**

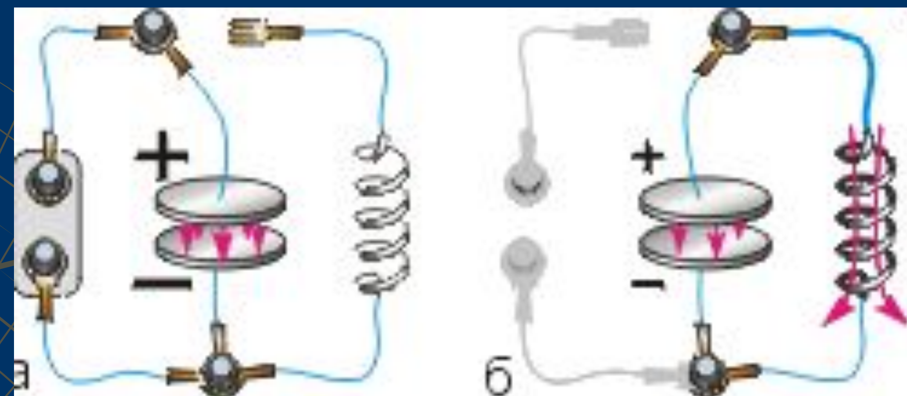
- Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

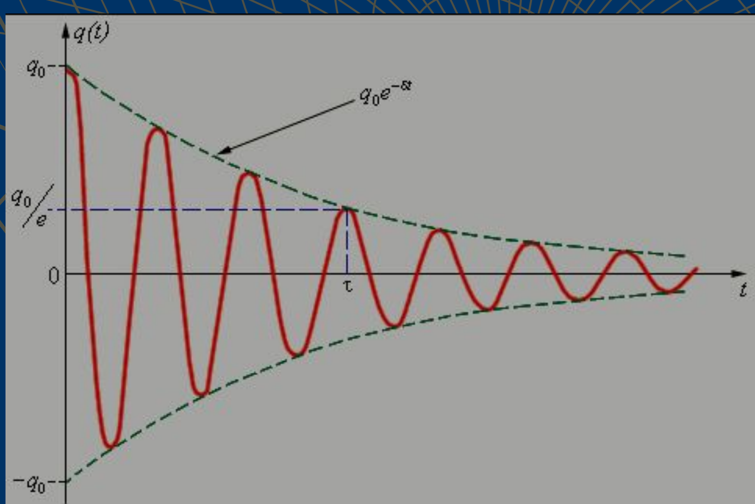
$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad div\vec{B} = 0 \qquad div\vec{D} = \rho$$

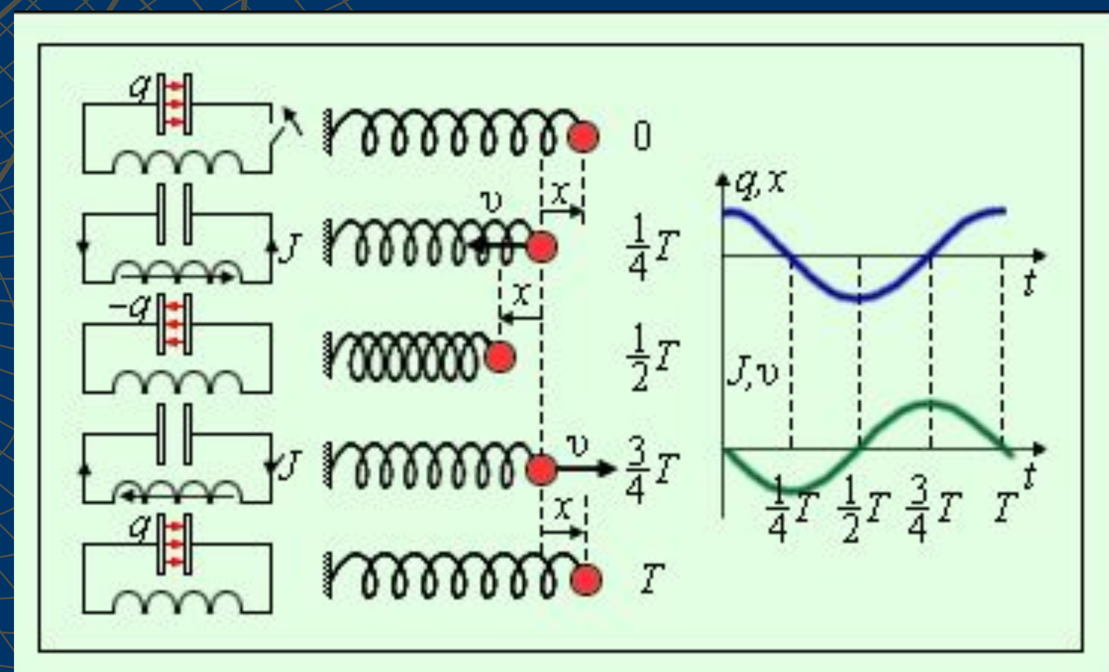
- Отметим, что в уравнениях Максвелла (1873 г.) заложено **существование электромагнитных волн**. Согласно уравнениям Максвелла, всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, а всякое переменное электрическое поле вызывает появление вихревого магнитного поля.
- Возбуждение взаимосвязанных электрического и магнитного полей и есть электромагнитная волна. Экспериментальное подтверждение гениальных предсказаний Максвелла было осуществлено в опытах Герца в 1888 г.

Свободные и вынужденные гармонические колебания в резонансном контуре



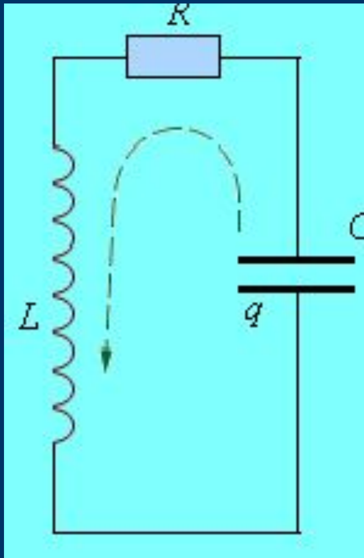






- II Закон Кирхгофа для замкнутой RLC-цепи:

$$iR + u_c = -L\frac{di}{dt}; \qquad i = \frac{dq}{dt}; \qquad q = u_c C \to u_c = \frac{q}{C};$$



$$\frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{dq}{dt}\frac{R}{L} + \frac{q}{LC} = 0. \qquad (1)$$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2}C + \frac{du_c}{dt}\frac{RC}{L} + \frac{u_c}{LC}C = 0; \qquad \frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{du_c}{dt}\frac{R}{L} + \frac{u_c}{LC} = 0 \qquad (2)$$

- Рассмотрим сначала случай, когда в контуре нет потерь (R = 0). Тогда

- $$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0 \qquad \frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

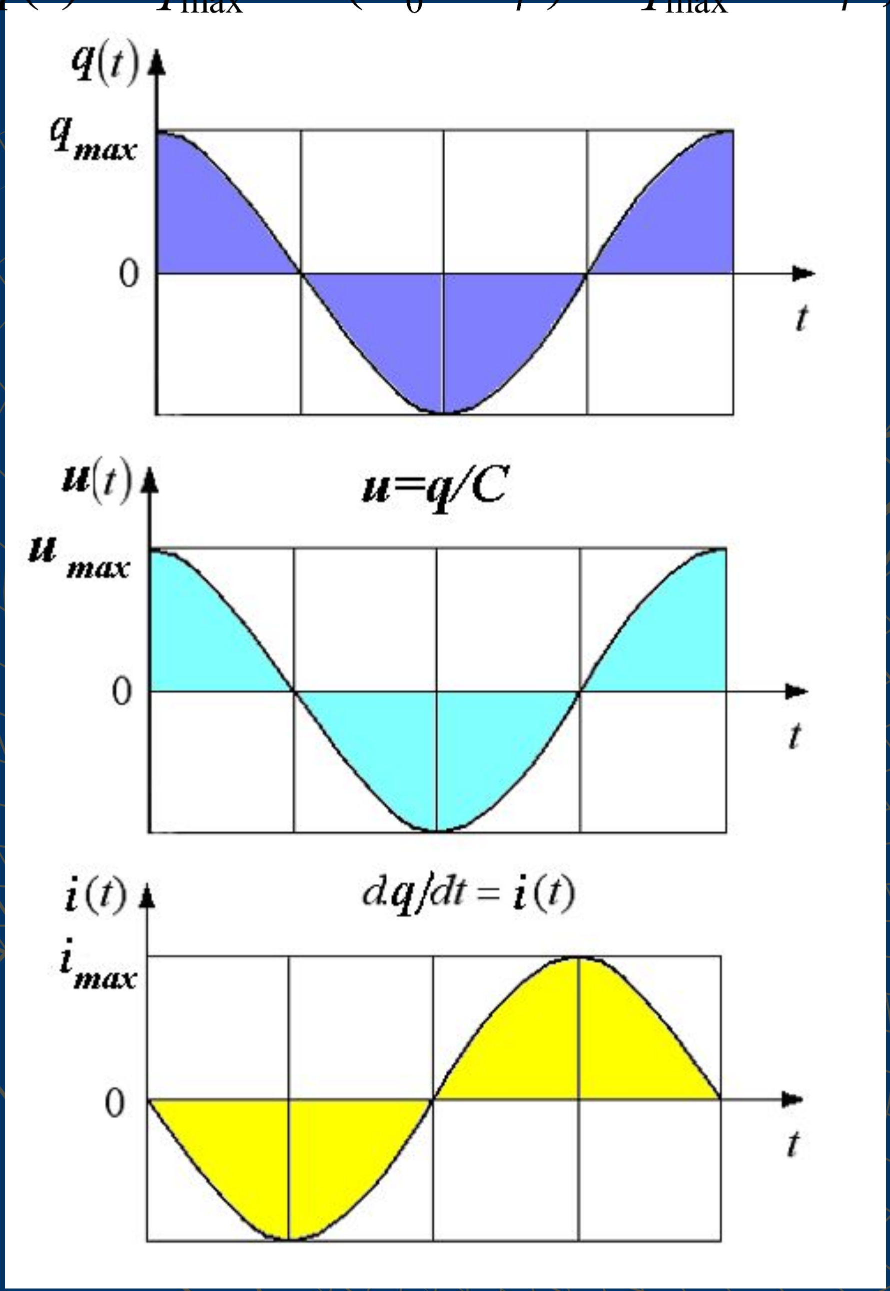
$$u_C(t) = U_{Cm}\cos(\omega_0 t + \varphi) = U_{Cm}\cos\psi \qquad q(t) = q_{\max}\cos(\omega_0 t + \varphi) = q_{\max}\cos\psi;$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ **- собственная частота свободных колебаний контура**

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$ **- период свободных колебаний.**

$$\psi = \omega_0 t + \varphi$$

$$q(t) = q_{\max}\cos(\omega_0 t + \varphi) = q_{\max}\cos\psi; \quad u_C(t) = U_{Cm}\cos(\omega_0 t + \varphi) = U_{Cm}\cos\psi$$

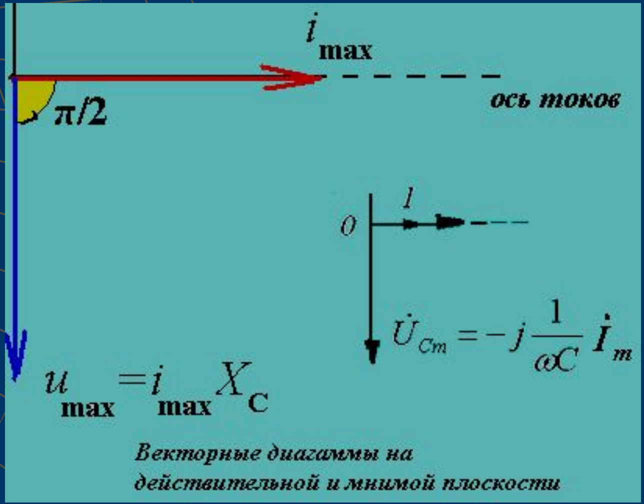


$$\frac{d}{dt}q(t) = i(t) = -(q_{\max}\omega_0)\sin(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= -(i_{\max})\sin(\omega_0 t + \varphi) = (i_{\max})\cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}).$$

Колебания тока опережают по фазе на π/2 колебания напряжения.

$$i_{\max} = q_{\max}\omega_0 = u_C C\omega_0 = \frac{u_C}{\dfrac{1}{\omega_0 C}} = \frac{u_C}{X_C};$$



$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega_0^2 q=0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=0$$

Электрические величины	**Механические величины**
Заряд конденсатора $q(t)$	Координата $x(t)$
Ток в цепи $i=dq/dt$	Скорость $\upsilon=dx/dt$
Индуктивность L	Масса m
Величина, обратная электроемкости $1/C$	Жесткость пружины k
Напряжение на конденсаторе $u_c=q/C$	Упругая сила kx
Магнитная энергия катушки $Li^2/2$	Кинетическая энергия $m\upsilon^2/2$
Магнитное потокосцепление Li	Импульс $m\upsilon$

Затухающие колебания

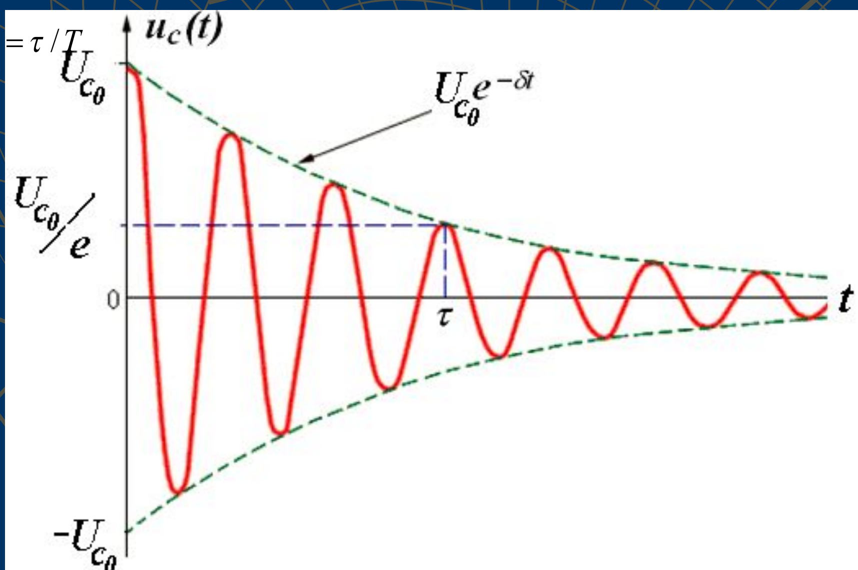
$$\frac{d^2u_c}{dt^2}+\frac{du_c}{dt}\frac{R}{L}+\frac{u_c}{LC}=0,\qquad \frac{R}{L}=2\delta;\qquad \omega_0^2=\frac{1}{LC};$$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2}+2\delta\cdot\frac{du_c}{dt}+\omega_0^2\cdot u_c=0.$$

$$u_C=U_{C0}e^{-\delta t}\cos\omega t$$

$$\tau=\frac{1}{\delta}=\frac{2L}{R}$$

$N=\tau/T$



-**Время релаксации** – время
-в течение которого амплитуда колебаний
уменьшается в ***e*** раз

Частота ω и период T затухающих колебаний:

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$$

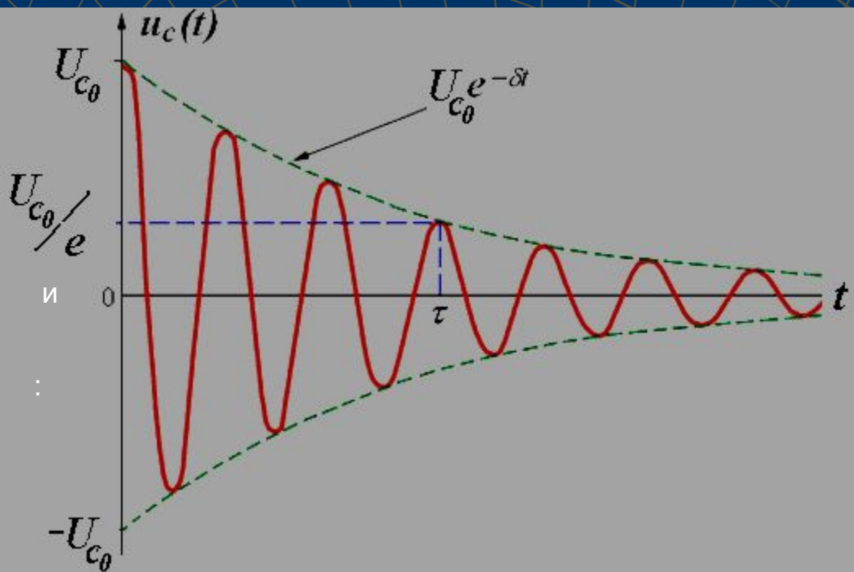
($\omega<\omega_0$)

$$N=\tau/T$$

- Число полных колебаний, совершаемых системой за время затухания τ .

Вычислим отношение

$$\frac{u_C(t)}{u_C(t+T)} = \frac{U_{C0}\cdot e^{-\delta t}\cdot\cos\omega t}{U_{C0}\cdot e^{-\delta(t+T)}\cdot\cos\omega(t+T)} = e^{\delta T}$$



Оно, как и в механике, называется **декрементом затухания**, а его логарифм

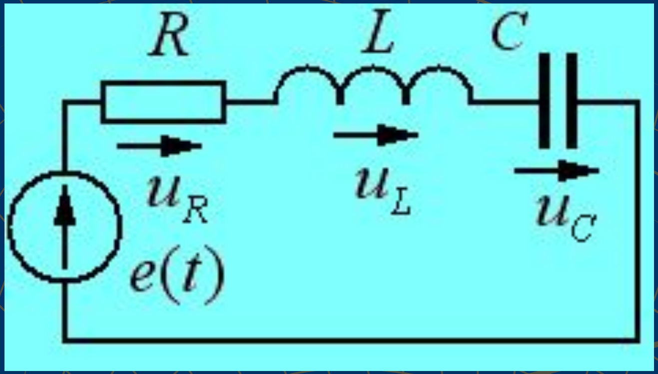
$$\theta = \ln\frac{u_C(t)}{u_C(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$$

-логарифмическим декрементом затухания. $\theta=\delta T$

Величина, обратная логарифмическому декременту называется **добротностью** Q колебательного контура:

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{\delta T} = \pi\frac{\tau}{T} \approx \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Вынужденные колебания в RLC контуре



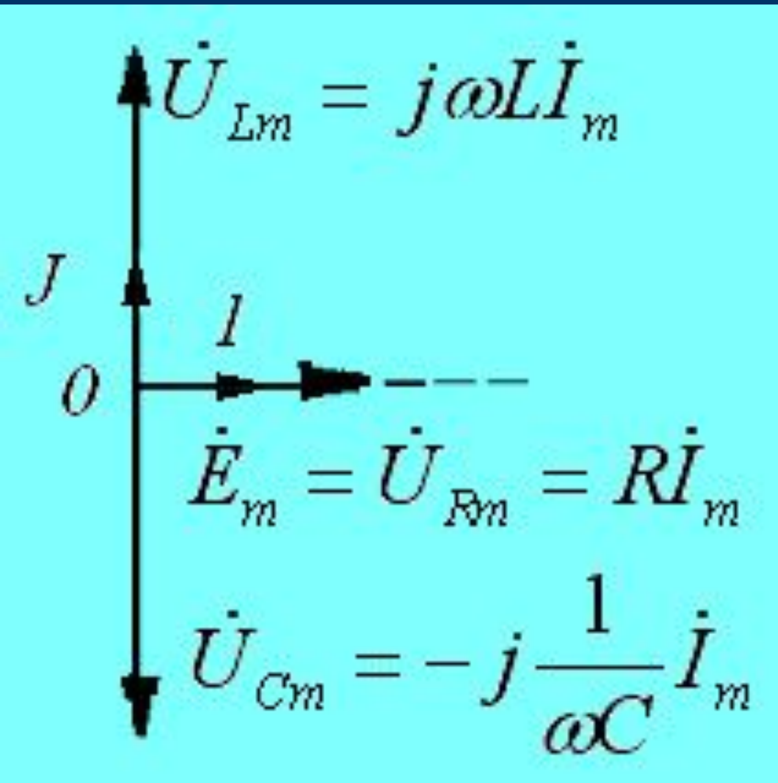
Установившиеся колебания, возникающие в контуре под действием синусоидальной ЭДС, называются **вынужденными колебаниями.**

Периодический внешний источник обеспечивает приток энергии к системе и, несмотря на наличие потерь , не дает колебаниям затухнуть. **Установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на частоте внешней** ЭДС -ω .

$$u_L(t)+u_R(t)+u_C(t)=e(t)$$

Дифференциальное уравнение вынужденных синусоидальных колебаний в резонансном контуре при действии ЭДС $e(t)=E_m\sin\omega t$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\delta\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2u_C=\omega_0^2E_m\sin\omega t$$



$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - 1/(\omega C)\right]^2}}$$

$$Z = R + j\left[\omega L - 1/(\omega C)\right]$$

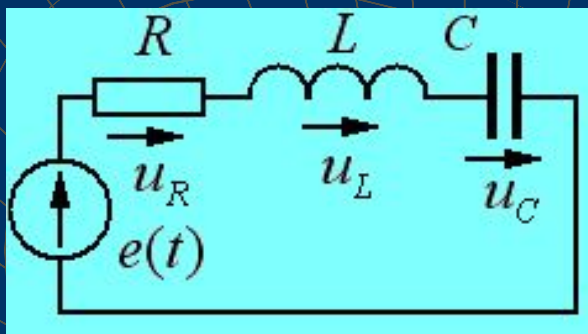
$$\left|Z\right| = \sqrt{R^2 + \left[\omega L - 1/(\omega C)\right]^2}$$

$$\varphi = -arctg\left[\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}\right]$$

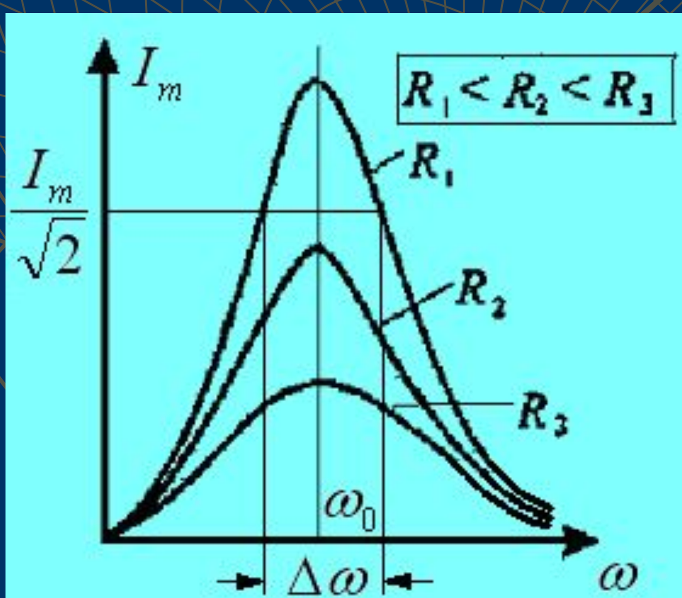
Вектор напряжения на резисторе U_{Rm} и ток в резисторе I_m совпадают по фазе, вектор напряжения на индуктивности U_{Lm} опережает ток в индуктив-ности I_m на 90º, а вектор напряжения на конденсато-ре U_{Cm} отстает от тока в конденсаторе I_m на 90º.

Резонанс

Явление резкого возрастания амплитуды тока при равенстве частоты ω внешнего воздействия и собственной резонансной частоты свободных колебаний контура ω_0 называется резонансом.



$$|Z| = \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}$$



Чем меньше сопротивление потерь R в контуре, тем выше и острее резонансная характеристика.
Степень "остроты" определяется добротностью Q колебательной системы:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}$$

Мощность в цепи переменного тока

$$p(t) = u(t)i(t)$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int U_m I_m \sin(\omega t + \varphi)\sin \omega t dt = UI\cos\varphi$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

-**действующие** или **эффективные значения**
- напряжения и тока;
- множитель $\cos\varphi$ называется **коэффициентом мощности**.

Пример. В сеть переменного тока и напряжением U= 220 В и частотой f=50 Гц включены последовательно конденсатор C=31,8 мкФ, резистор R=100 Ом и индуктивность L= 0,318 Гн. Найдите действующее значение тока I, напряжений U_C, U_R, U_L на элементах контура и мощность P, потребляемую цепью.

$Z_R=R=100$ Ом,
$Z_L=j\omega L=jX_L=j220$ Ом,

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C = -j90 \text{ Ом}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}} = 1{,}34 \text{ А} \qquad \varphi = -arctg\left[\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}\right] = -52{,}5^\circ$$

$U_R=Ir=134$В, $U_L=I\omega L=295$В, $U_C=I/(\omega C)=$ 120,6 В.

$$P = UI\cos\varphi = 179{,}5 \text{ Вт}$$