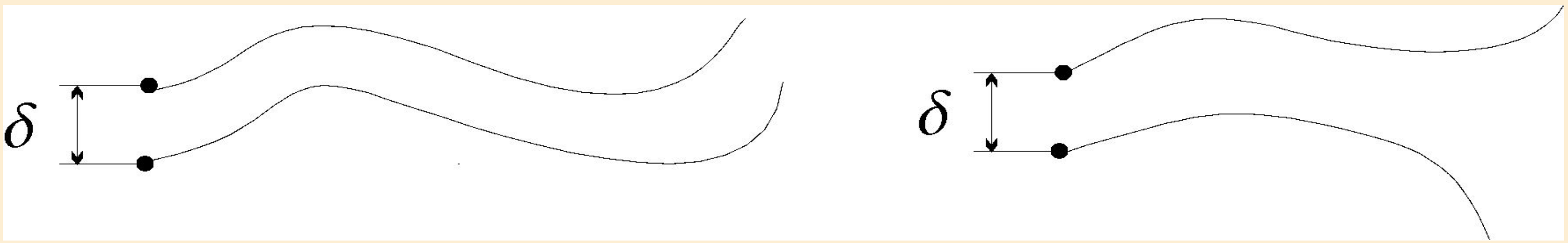
Вероятностные явления в возмущенных динамических системах

А.И.Нейштадт, ИКИ РАН

Электронная версия подготовлена А.А.Васильевым и М.Л. Пивоваровым

Вероятностные явления связаны с неперестановочностью пределов:

$$0=\lim_{T\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\sup_{0\le t\le T}\left|x_1(t)-x_2(t)\right|\neq\lim_{\delta\to 0}\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\left|x_1(t)-x_2(t)\right|$$



d- неточность знания начальных условий

T- время движения

Возмущенная система $=$ Интегрируемая система $+\varepsilon$ Возмущение

$T \gtrsim 1/\varepsilon$

$0<\varepsilon\ll 1$

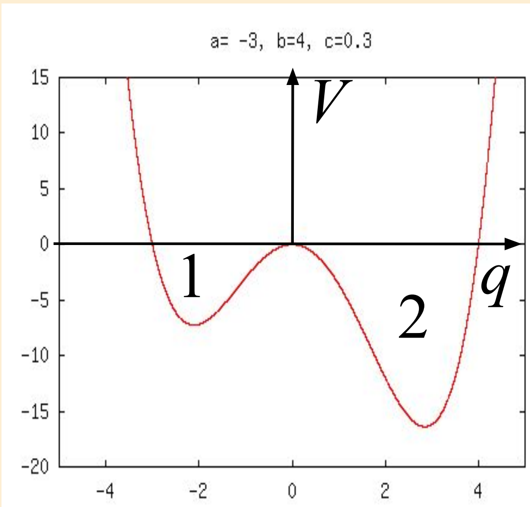
$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\sup_{0\le t\le 1/\varepsilon}\left|x_1(t)-x_2(t)\right|\neq\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\le t\le 1/\varepsilon}\left|x_1(t)-x_2(t)\right|$$

Темы:

- Вероятностное рассеяние при переходах через сепаратрису
- Скачки адиабатического инварианта при переходах через сепаратрису
- Рассеяние на резонансах, захват в резонанс

I. Вероятностное рассеяние при переходах через сепаратрису

Пример (В.И.Арнольд, 1963)

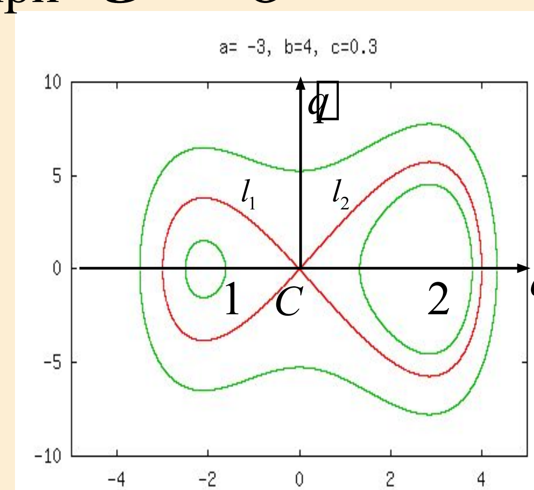


+ **малое трение** $\varepsilon f(q,\dot{q})$

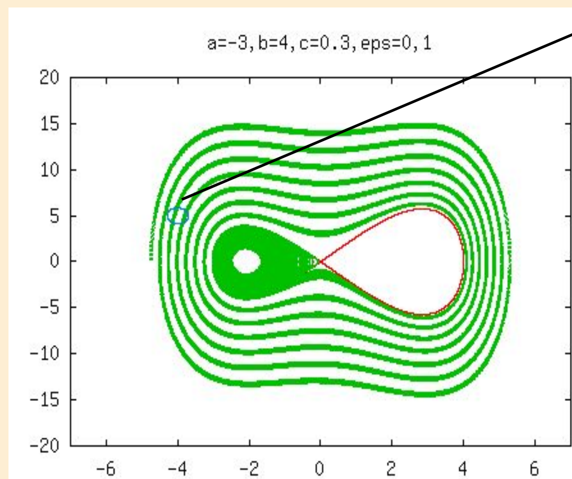
$$\ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = -\varepsilon f(q,\dot{q})$$

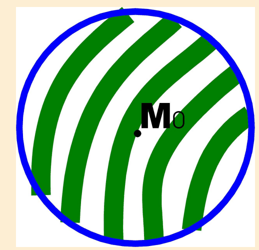
Фазовые портреты:

при $\varepsilon = 0$



при $\varepsilon \neq 0$





$$U^{\delta} = U_1^{\delta,\varepsilon} \cup U_2^{\delta,\varepsilon} \cup v$$

$\downarrow$ (1) $\quad$ $\downarrow$ (2)

<u>Определение</u>. Вероятность захвата точки M_0 в яму «1» есть

$$P_1(M_0) = \lim_{\delta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{mes} U_1^{\delta,\varepsilon}}{\operatorname{mes} U^{\delta}}$$

<u>Теорема</u>. (В.И.Арнольд)

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\displaystyle\oint_{l_1} \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\displaystyle\oint_{l_2} \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}}, \qquad P_1 + P_2 = 1$$

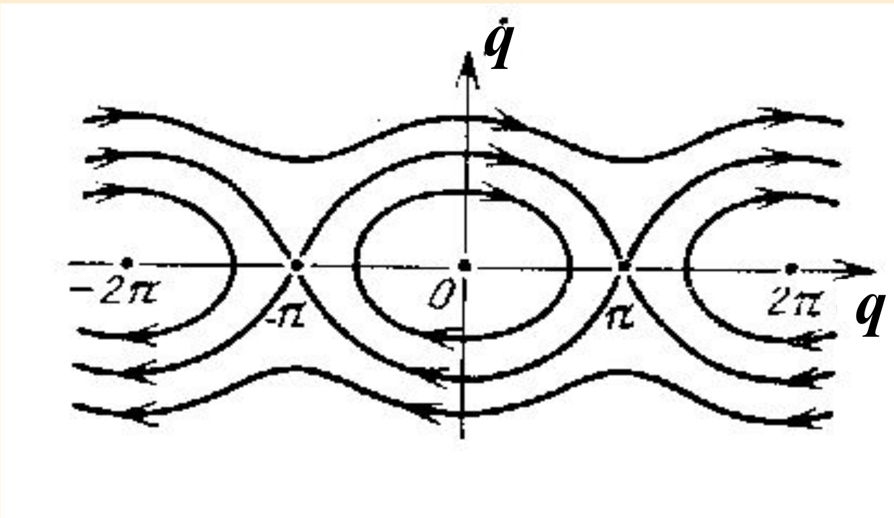
Вероятностный подход:

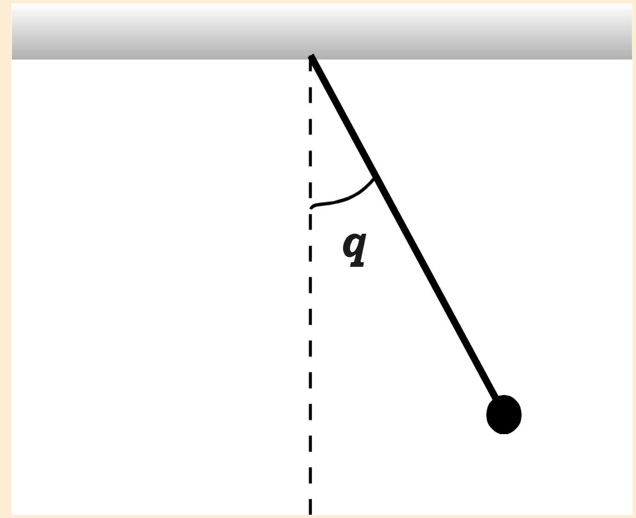
- И.М.Лифшиц, А.А.Слуцкин, В.М.Набутовский (1961) - движение заряженных квазичастиц
- В.И.Арнольд (1963) - математическое определение вероятности
- P.Goldreich, S.Peale (1966) - приливная эволюция вращения планет
- А.В.Гуревич, Е.Е.Цидилина (1979) - распространение радиоволн в ионосферных волноводных каналах
- G.Wolansky(1990), М.Брин, М.Фрейдлин (1999) - другое определение вероятности (+малая случайная сила) - «ответ» тот же

Пример: маятник

$$\ddot{q} + \omega^2(\tau)\sin q = -\varepsilon\,[K + L\dot{q}], \quad L, K > 0, \quad \tau = \varepsilon t$$

Фазовый портрет при $\varepsilon = 0, \tau = \mathrm{const}$:



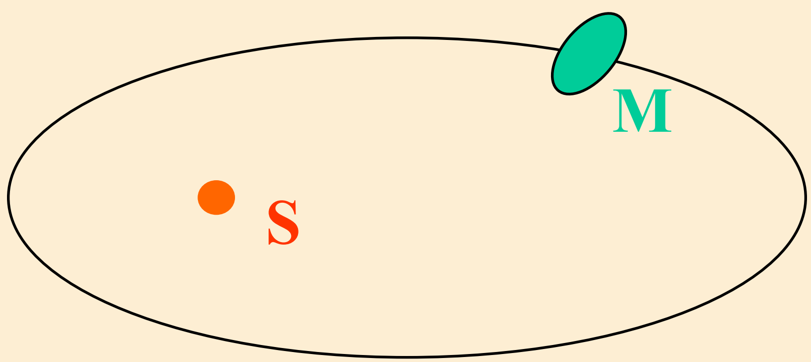


Вероятность захвата в колебательный режим (из режима прямого вращения):

$$\mathrm{P} = \frac{8(\omega' + K\omega)}{4(\omega' + K\omega) + \pi L}, \quad \text{если} \quad L > 4(\omega' + K\omega)/\pi$$

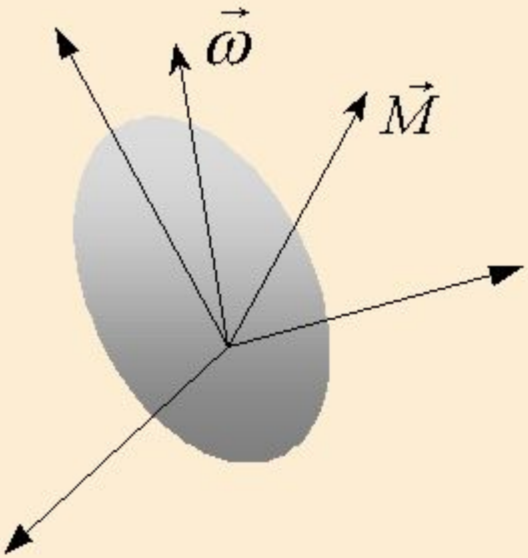
$$\mathrm{P} = 1, \quad \text{если} \quad L \le 4(\omega' + K\omega)/\pi$$

Исследование приливного механизма захвата Меркурия в резонанс приводит к задаче о захвате маятника в режим колебаний (P.Goldreich, S.Peale, 1966):



$$\frac{T_{ax}}{T_{orb}} \approx \frac{2}{3}$$

Пример: кувыркание твердого тела (А.Н., М.Л.Пивоваров, 1978)



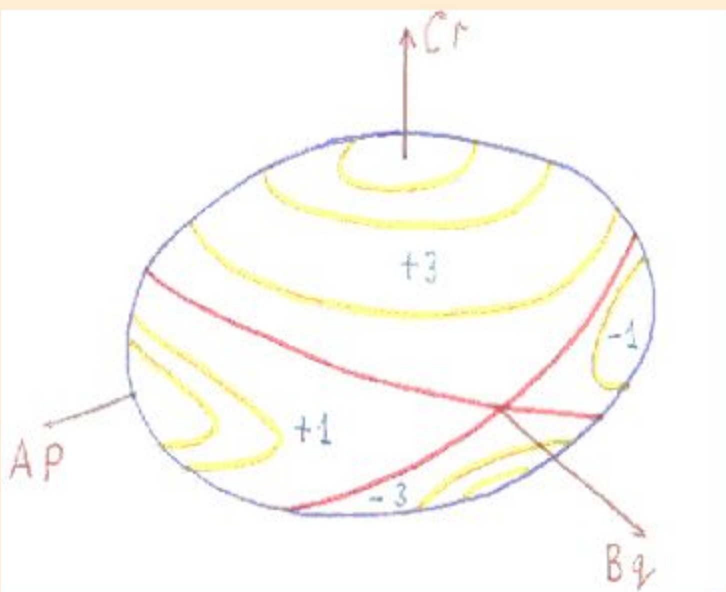
$$\vec{\omega} = (p, q, r)\,, \quad A > B > C, \qquad M_1 > 0,\ M_3 > 0$$

$$A\dot{p} + (C - B)qr = \varepsilon M_1$$

$$B\dot{q} + (A - C)pr = \varepsilon M_2$$

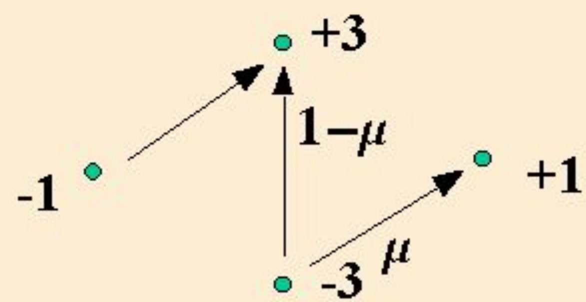
$$C\dot{r} + (B - A)pq = \varepsilon M_3$$

$$E = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad L^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$$

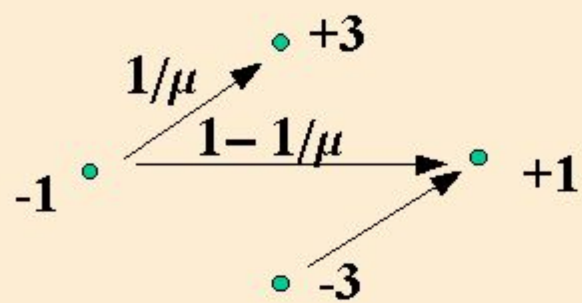


$$\mu = \frac{M_1}{M_3}\sqrt{\frac{(A-B)C}{(B-C)A}}$$

$\mu < 1,$



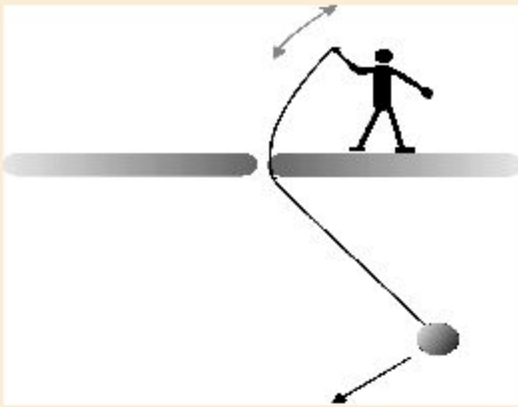
$\mu > 1,$

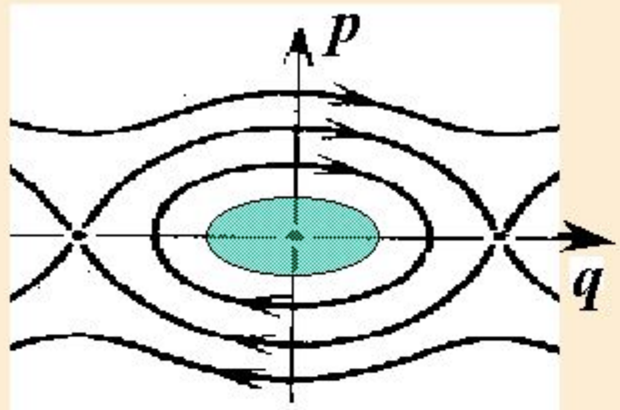


Общая теория:

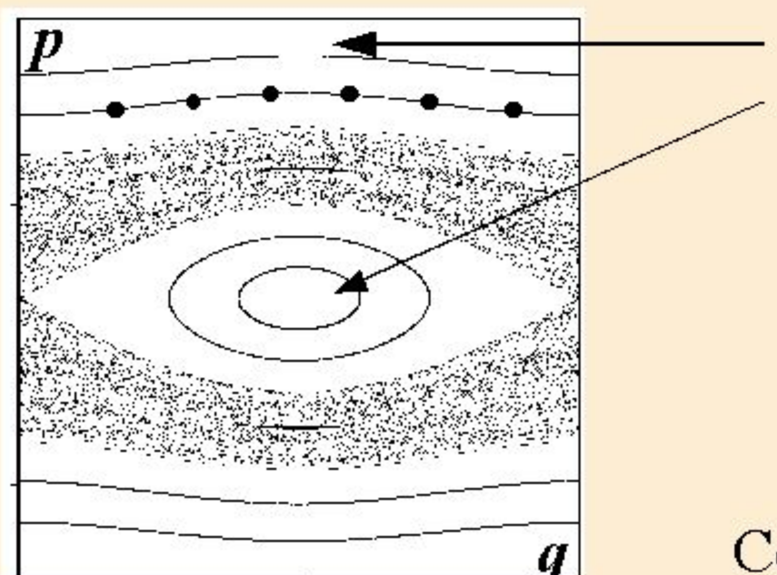
Возмущенная система $=$ Система в R^l, имеющая $(l\text{-}1)$ интегралов $+\varepsilon$ Возмущение

II. Скачки адиабатического инварианта при переходах через сепаратрису





Действие $I = \frac{1}{2\pi} \oint p\, \mathrm{d}q$ - адиабатический инвариант



Области вечной адиабатической инвариантности (В.И.Арнольд, 1961)

Сечение Пуанкаре

Скачок адиабатического инварианта при переходе маятника через сепаратрису (А.В.Тимофеев, 1978) **:**

$$\Delta I = -\varepsilon\, a \Theta \ln(2\sin\pi\xi), \quad \xi \in (C\sqrt{\varepsilon},\ 1 - C\sqrt{\varepsilon})$$

x - квазислучайная величина, распределенная равномерно на (0,1)

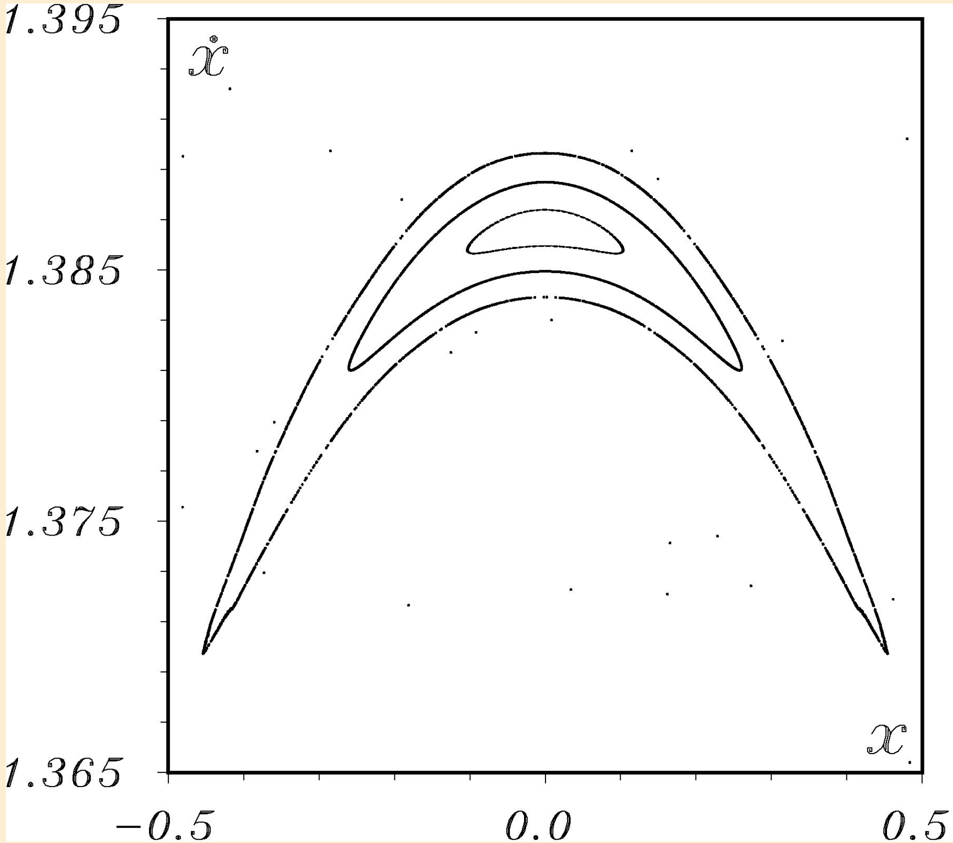
$$\langle \Delta I \rangle = 0, \ \langle \Delta I^2 \rangle = \varepsilon^2 a^2 \Theta^2 \pi^2 / 12$$

Общая формула: А.Н. (1986); J.Cary, D.Escande, J.Tennyson (1986).

Примеры:

- Происхождение люка Кирквуда на резонансе 3:1 (J.Wisdom, 1985)
- Движение заряженных частиц в хвосте магнитосферы Земли (Й. Бюхнер, Л.М.Зеленый, 1989)

Остров устойчивости:



Суммарная мера островов устойчивости ~1 (А.Н., В.В.Сидоренко, Д.В. Трещев, 1997)

III. Рассеяние на резонансах, захват в резонанс

Система с вращающимися фазами:

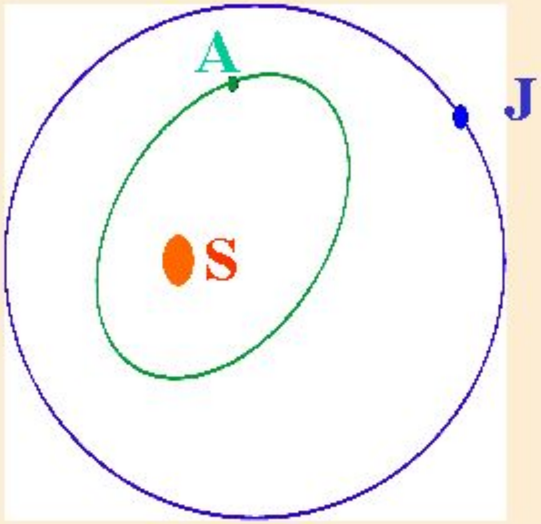
$$\dot{I} = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \quad I \in R^n$$

$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), \quad \varphi \in R^m / 2\pi Z^m = T^m$$

Усредненная система:

$$\dot{J} = \varepsilon F(J), \quad F(J) = \frac{1}{(2\pi)^m} \oint_{T^m} f(J, \varphi, 0)\, d\varphi$$

Пример:

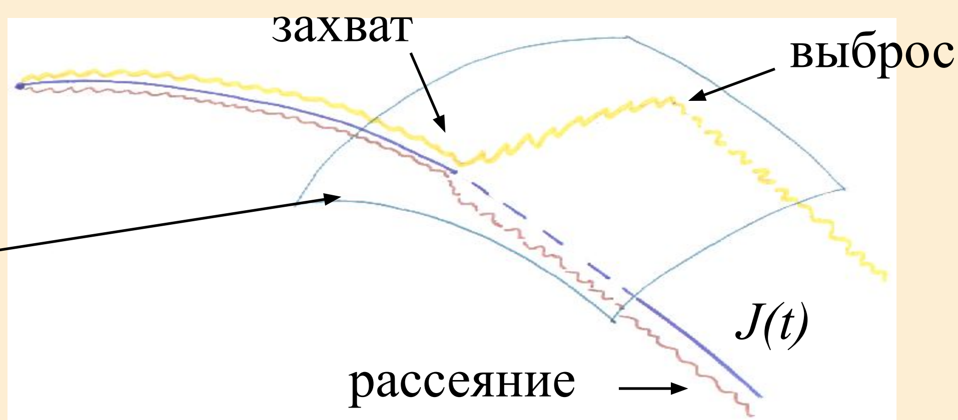


Принцип усреднения заменяет точную систему усредненной.

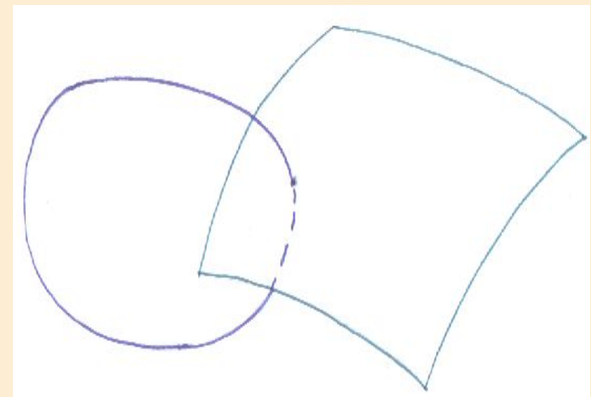
Влияние резонансов

$$f(I,\varphi,0) = F(I) + \sum f_k e^{i(k,\varphi)}, \quad (k \in Z^m, k \neq 0)$$

Вблизи резонанса ($\boldsymbol{k}$, $\mathbf{w}(\boldsymbol{I})$) = 0 гармоника $e^{i(k,j)}$ не осциллирует.



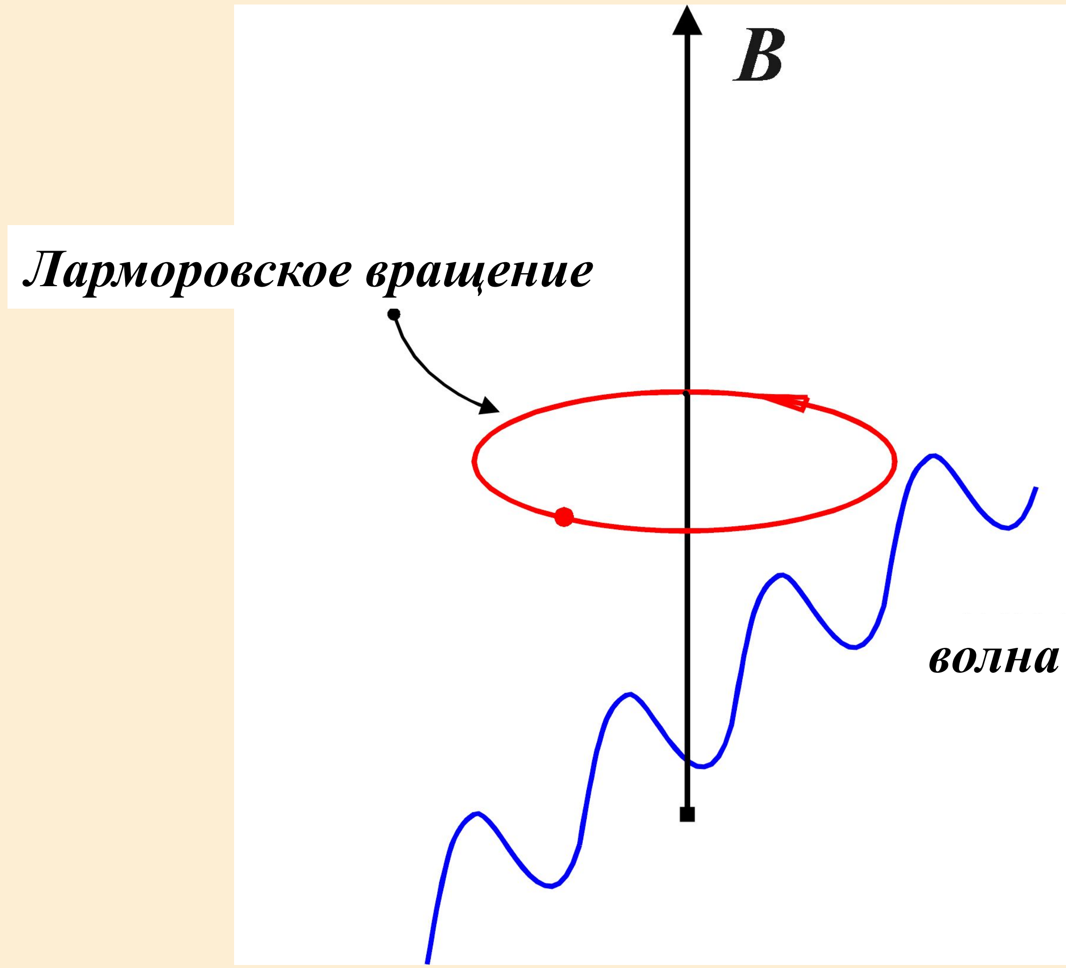
($\boldsymbol{k}$, $\mathbf{w}(\boldsymbol{I})$) = 0
- резонансная поверхность



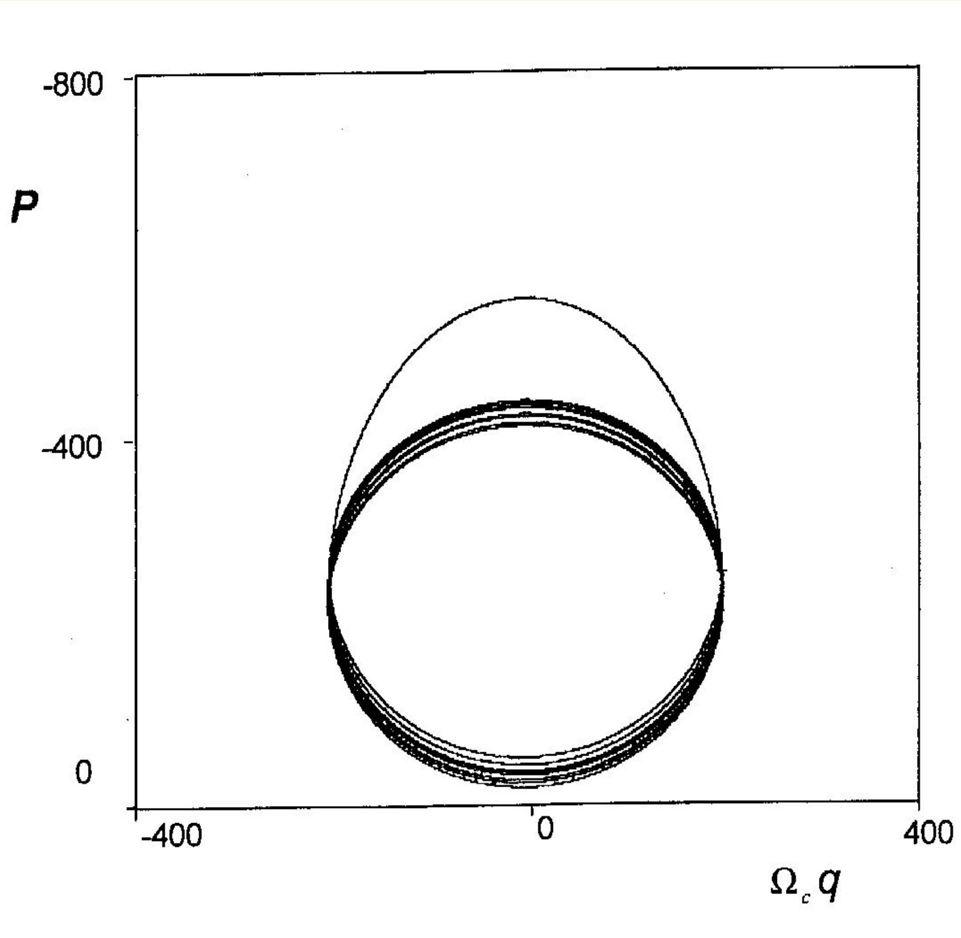
	$t \sim {}^{1}/_{\varepsilon}$	$t \sim {}^{1}/_{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}$	$t \sim {}^{1}/_{\varepsilon^2}$
Вероятность захвата ~	$\sqrt{\varepsilon}$	1	1
Смещение ~	$\sqrt{\varepsilon}$	1	1
Амплитуда рассеяния ~	$\sqrt{\varepsilon}$	$\varepsilon^{1/4}$	1

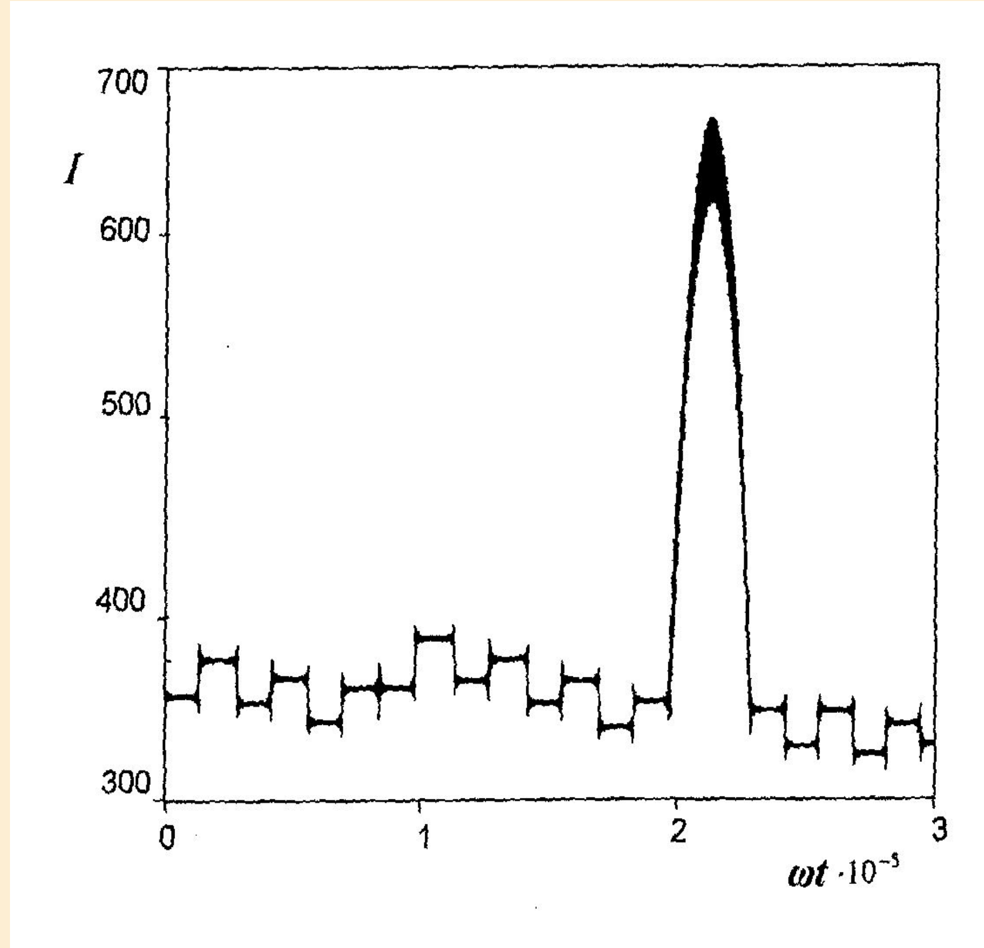
<u>Пример</u>: движение заряженных частиц в однородном магнитном поле и поле электростатической волны (А.А.Васильев, А.П.Итин, А. Н., 1999)

Конфигурация полей:

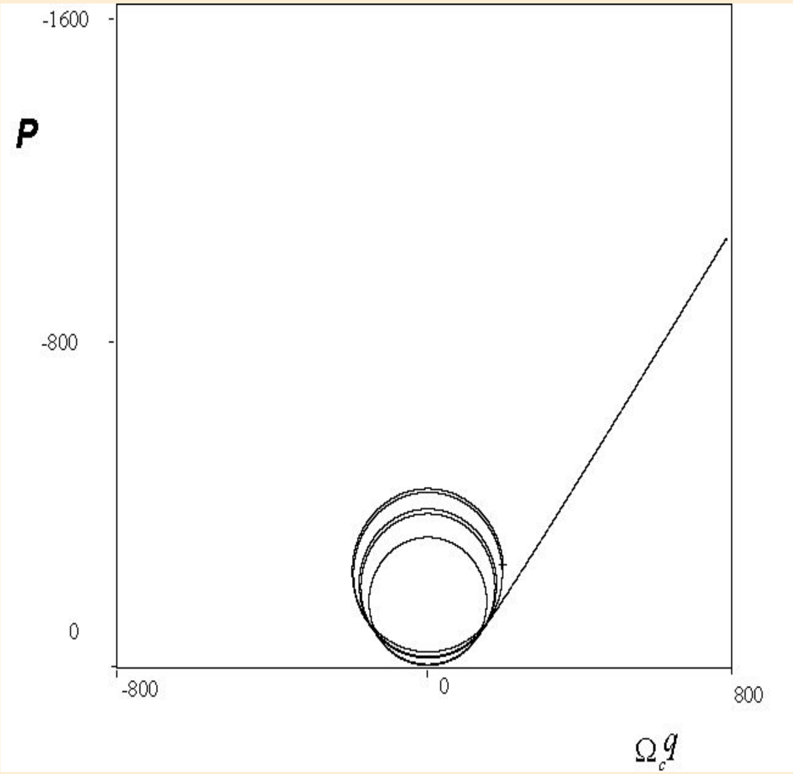


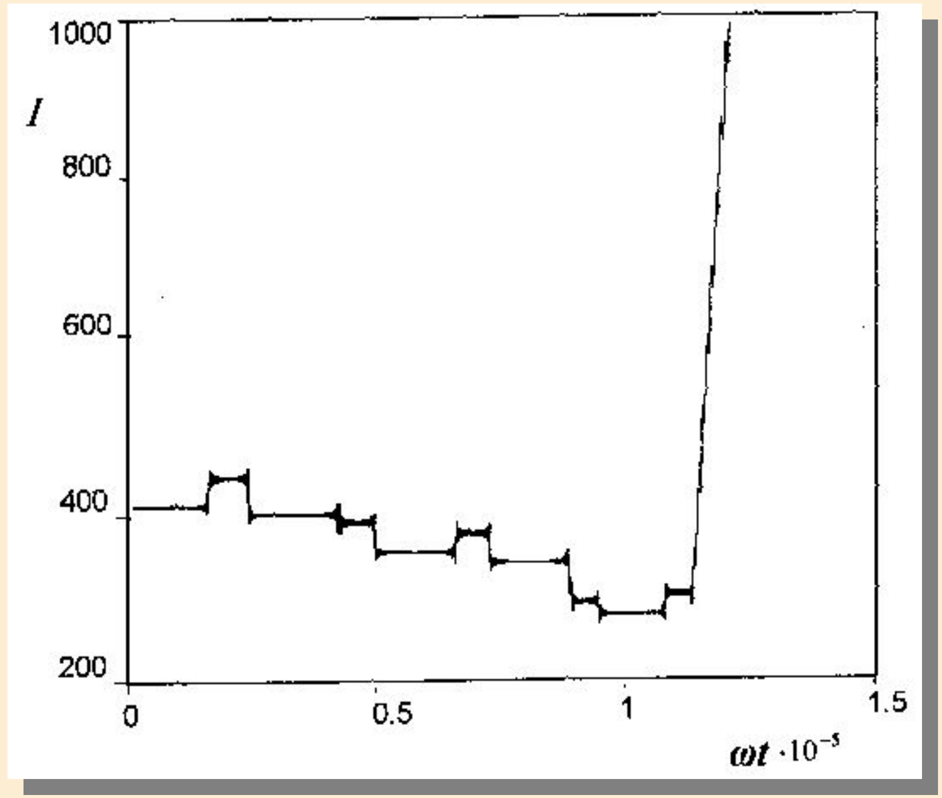
Захват в резонанс и выброс из резонанса:



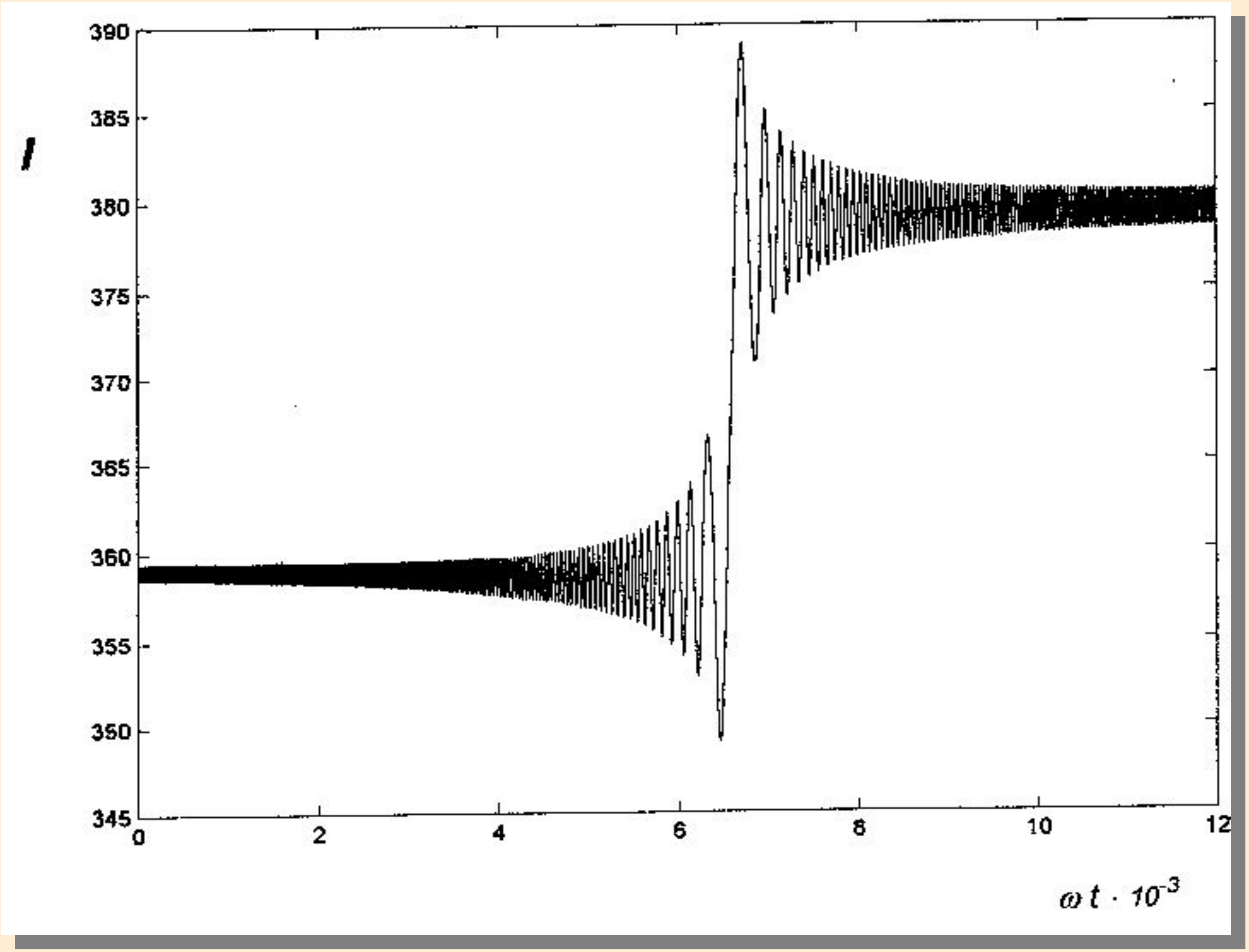


Захват в резонанс (режим неограниченного серфотронного ускорения):

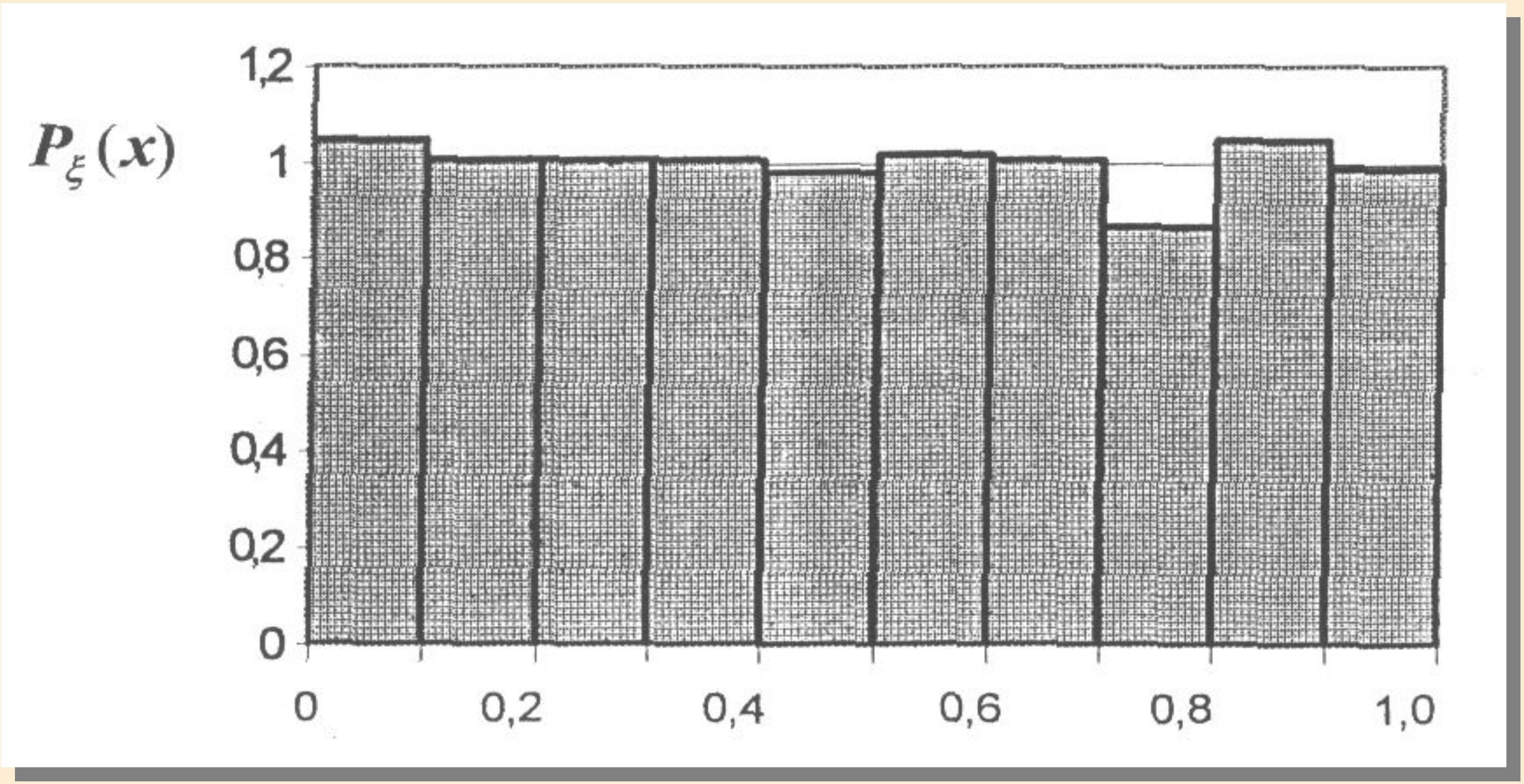




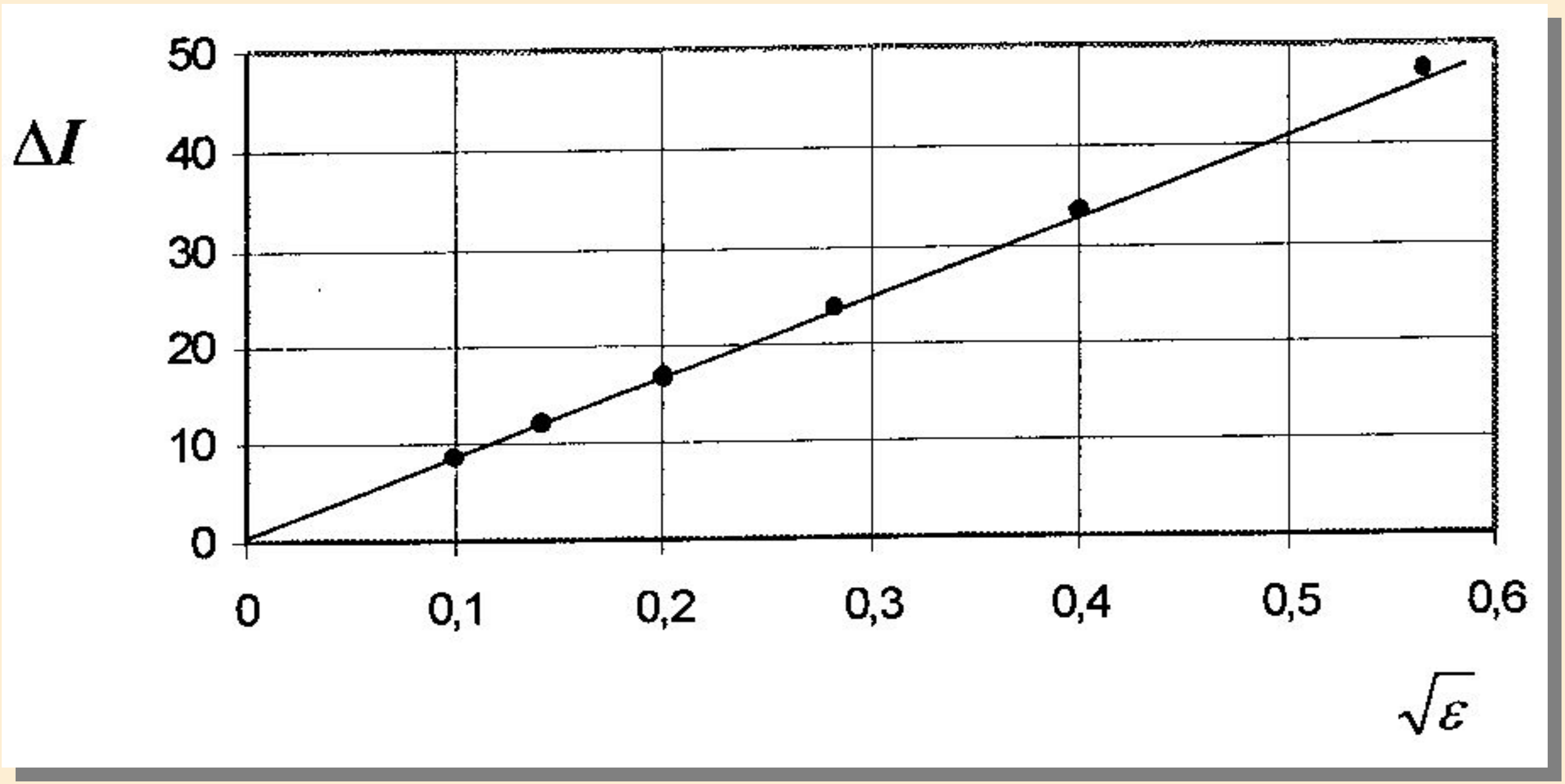
Рассеяние на резонансе:



Распределение фазы попадания на резонанс:



Амплитуда рассеяния (при заданной фазе):



Диффузия при многократных прохождениях через резонанс: