

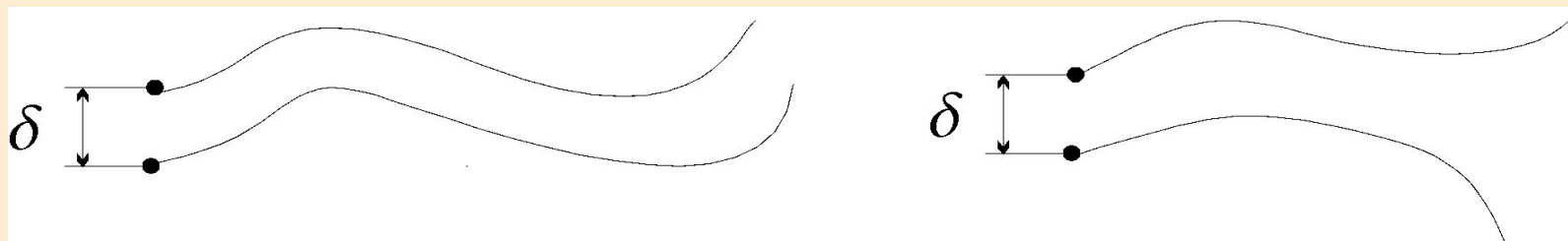
# Вероятностные явления в возмущенных динамических системах

А.И.Нейштадт, ИКИ РАН

*Электронная версия подготовлена А.А.Васильевым и М.Л.  
Пивоваровым*

# Вероятностные явления связаны с неперестановочностью пределов:

$$0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} |x_1(t) - x_2(t)| \neq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |x_1(t) - x_2(t)|$$



$\delta$ - неточность знания начальных условий

$T$ - время движения

Возмущенная  
система

=

Интегрируемая  
система

+  $\varepsilon$

Возмущение

$$\underline{T \gtrsim 1/\varepsilon}$$

$$0 < \varepsilon \ll 1$$

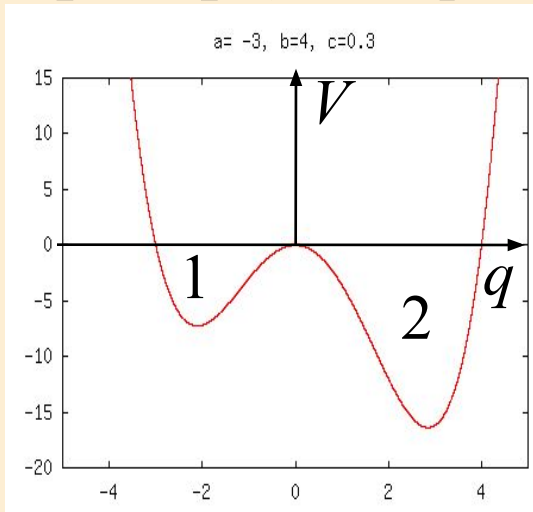
$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1/\varepsilon} |x_1(t) - x_2(t)| \neq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1/\varepsilon} |x_1(t) - x_2(t)|$$

# Темы:

- Вероятностное рассеяние при переходах через сепаратрису
- Скачки адиабатического инварианта при переходах через сепаратрису
- Рассеяние на резонансах, захват в резонанс

# I. Вероятностное рассеяние при переходах через сепаратрису

Пример (В.И. Арнольд, 1963)

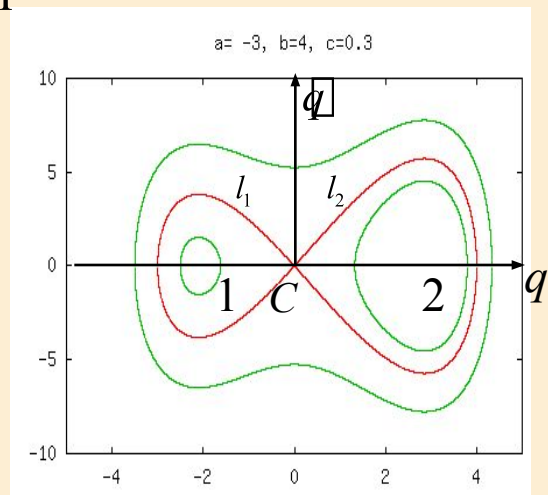


+ малое трение  $\varepsilon f(q, \dot{q})$

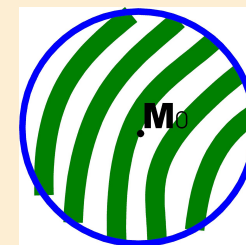
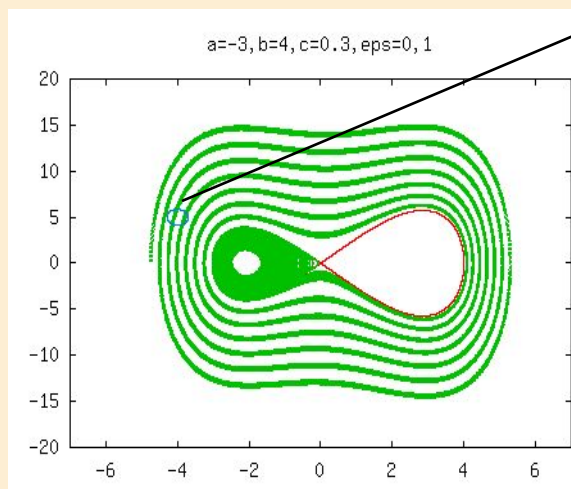
$$m \ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = -\varepsilon f(q, \dot{q})$$

Фазовые портреты:

при  $\varepsilon = 0$



при  $\varepsilon \neq 0$



$$U^\delta = U_1^{\delta, \varepsilon} \square U_2^{\delta, \varepsilon} \square v$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 (1)                      (2)

**Определение.** Вероятность захвата точки  $M_0$  в яму «1» есть

$$P_1(M_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{mes } U_1^{\delta, \varepsilon}}{\text{mes } U^\delta}$$

**Теорема.** (В.И. Арнольд)

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\oint_{l_1} f dq}{\oint_{l_2} f dq}, \quad P_1 + P_2 = 1$$

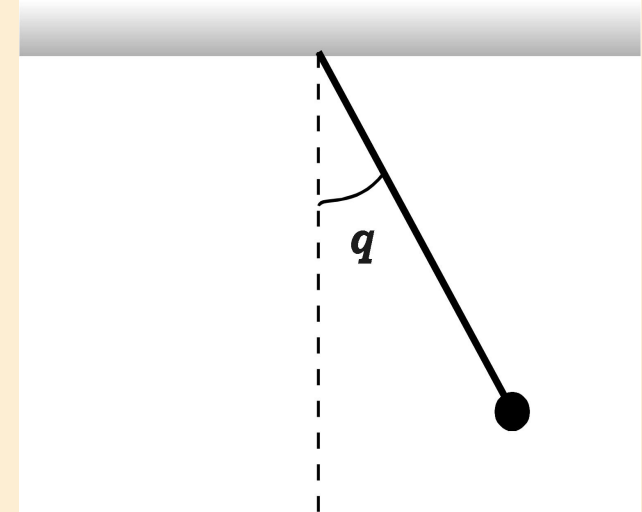
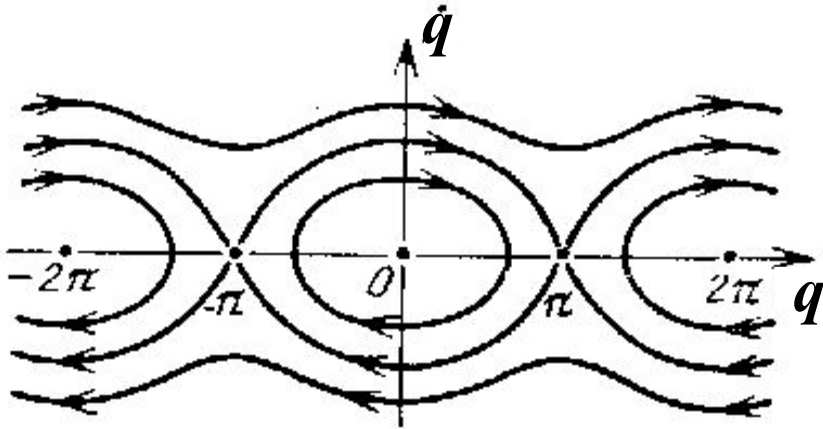
## Вероятностный подход:

- И.М.Лифшиц, А.А.Слуцкий, В.М.Набутовский (1961) - движение заряженных квазичастиц
- В.И.Арнольд (1963) - математическое определение вероятности
- P.Goldreich, S.Peale (1966) - приливная эволюция вращения планет
- А.В.Гуревич, Е.Е.Цидилина (1979) - распространение радиоволн в ионосферных волноводных каналах
- G.Wolansky(1990), М.Брин, М.Фрейдлин (1999) - другое определение вероятности (+малая случайная сила) - «ответ» тот же

**Пример:** маятник

$$\ddot{q} + \omega^2(\tau) \sin q = -\varepsilon [K + L\dot{q}], \quad L, K > 0, \quad \tau = \varepsilon t$$

Фазовый портрет при  $\varepsilon = 0, \tau = \text{const}$ :

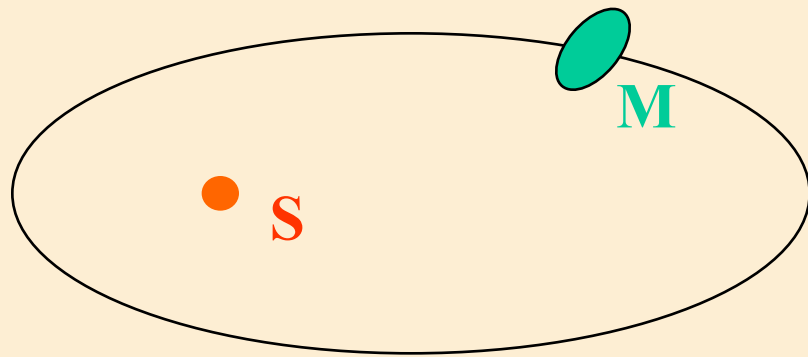


Вероятность захвата в колебательный режим (из режима прямого вращения):

$$P = \frac{8(\omega' + K\omega)}{4(\omega' + K\omega) + \pi L}, \quad \text{если} \quad L > 4(\omega' + K\omega) / \pi$$

$$P = 1, \quad \text{если} \quad L \leq 4(\omega' + K\omega) / \pi$$

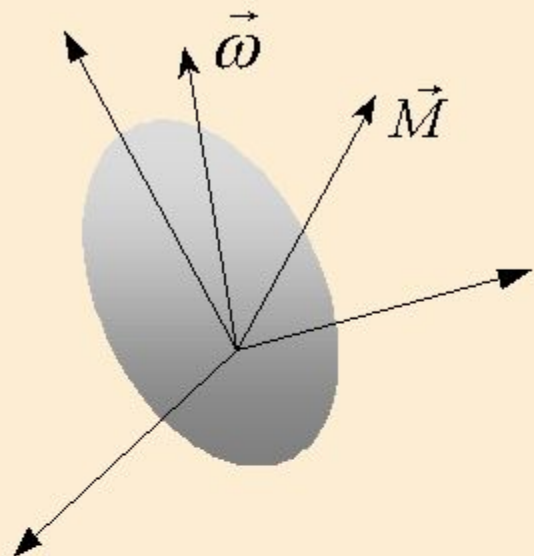
Исследование приливного механизма захвата Меркурия в резонанс приводит к задаче о захвате маятника в режим колебаний (P.Goldreich, S.Peale, 1966 ):



$$\frac{T_{ax}}{T_{orb}} \approx \frac{2}{3}$$



**Пример:** кувыркание твёрдого тела (А.Н., М.Л.Пивоваров, 1978)



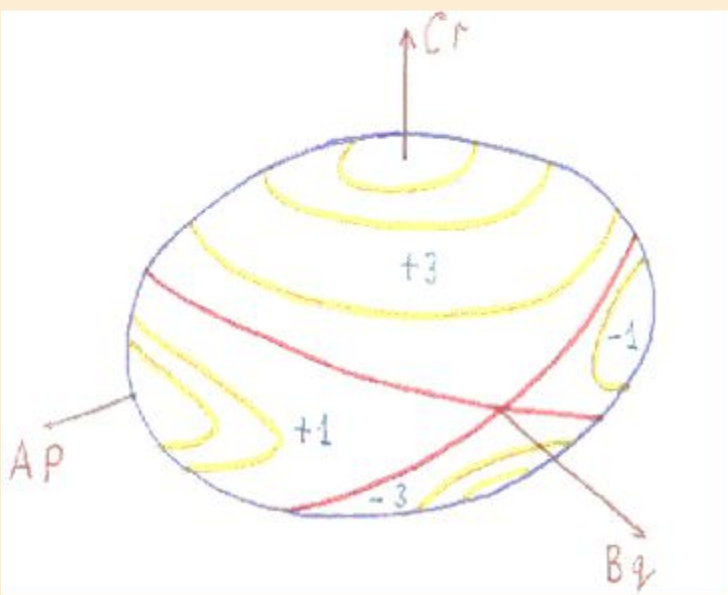
$$\vec{\omega} = (p, q, r), \quad A > B > C, \quad M_1 > 0, \quad M_3 > 0$$

$$A\dot{p} + (C - B)qr = \varepsilon M_1$$

$$B\dot{q} + (A - C)pr = \varepsilon M_2$$

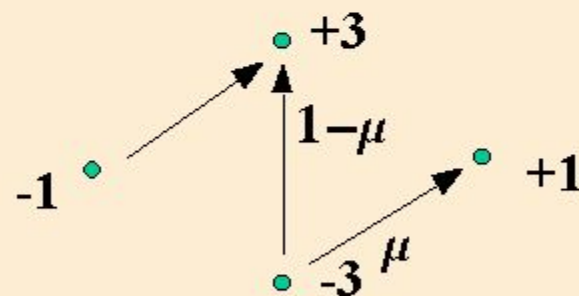
$$C\dot{r} + (B - A)pq = \varepsilon M_3$$

$$E = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad L^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$$

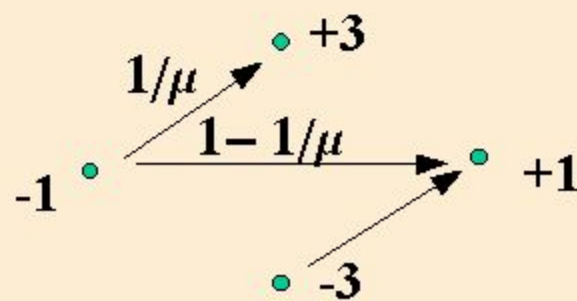


$$\mu = \frac{M_1}{M_3} \sqrt{\frac{(A - B)C}{(B - C)A}}$$

$$\mu < 1,$$



$$\mu > 1,$$



# Общая теория:

Возмущенная  
система

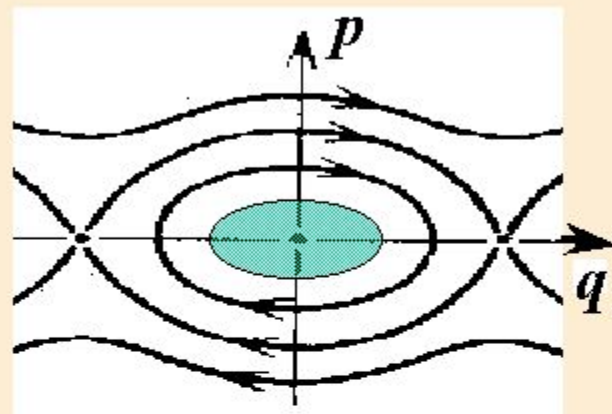
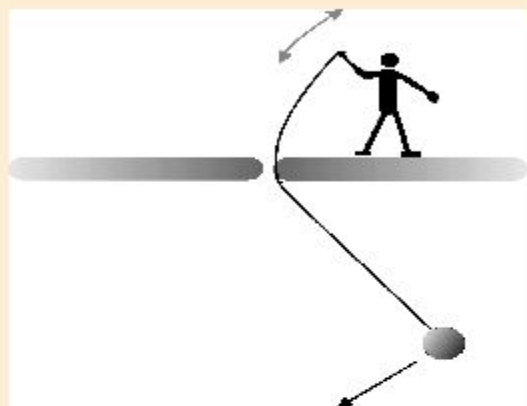
=

Система в  $\mathbb{R}^l$ ,  
имеющая  $(l-1)$  интегралов

+  $\varepsilon$

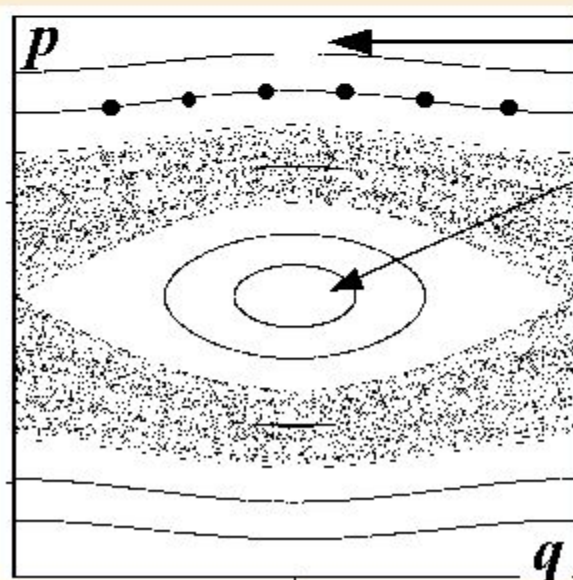
Возмущение

## II. Скачки адиабатического инварианта при переходах через сепаратрису



Действие  $I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq$  - адиабатический инвариант

Области вечной адиабатической инвариантности (В.И. Арнольд, 1961)



Сечение Пуанкаре

**Скачок адиабатического инварианта при переходе маятника через сепаратрису (А.В.Тимофеев, 1978) :**

$$\Delta I = -\varepsilon a \Theta \ln(2 \sin \pi \xi), \quad \xi \in (C\sqrt{\varepsilon}, 1 - C\sqrt{\varepsilon})$$

X - квазислучайная величина, распределенная равномерно на (0,1)

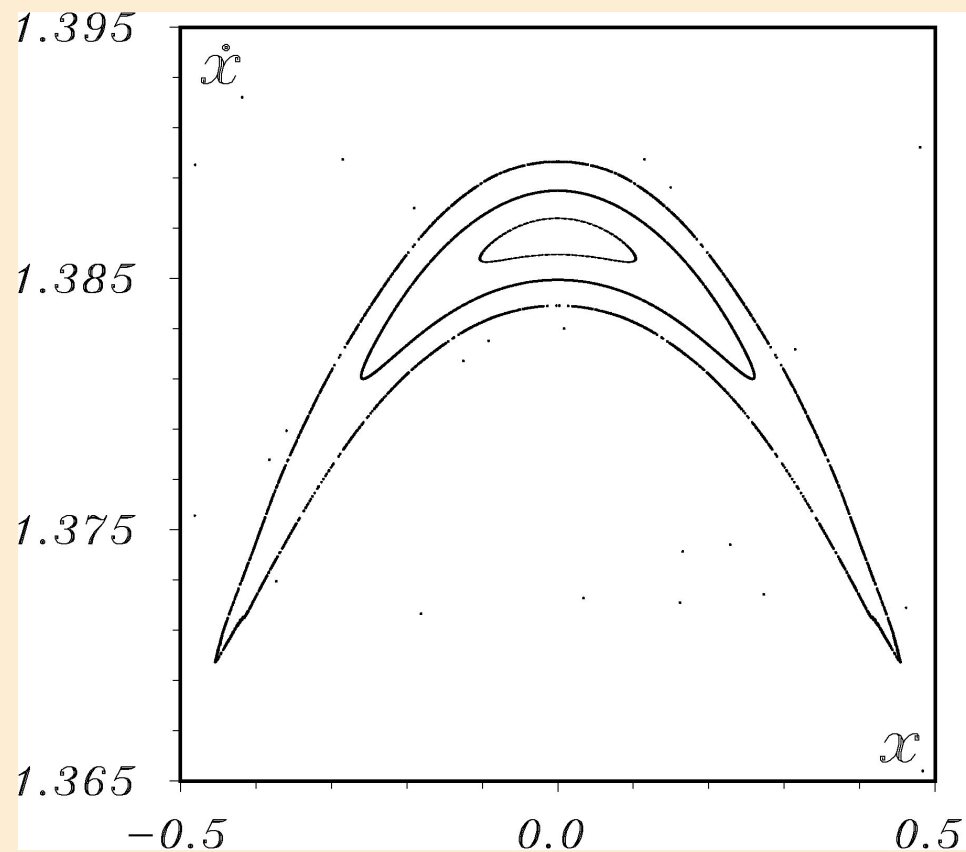
$$\langle \Delta I \rangle = 0, \quad \langle \Delta I^2 \rangle = \varepsilon^2 a^2 \Theta^2 \pi^2 / 12$$

**Общая формула:** А.Н. (1986); J.Cary, D.Escande, J.Tennyson (1986).

**Примеры:**

- Происхождение люка Кирквуда на резонансе 3:1 (J.Wisdom, 1985)
- Движение заряженных частиц в хвосте магнитосферы Земли (Й. Бюхнер, Л.М.Зеленый, 1989)

## Остров устойчивости:



Суммарная мера островов устойчивости  $\sim 1$  (А.Н., В.В.Сидоренко, Д.В. Трещев, 1997)

### III. Рассеяние на резонансах, захват в резонанс

Система с вращающимися фазами:

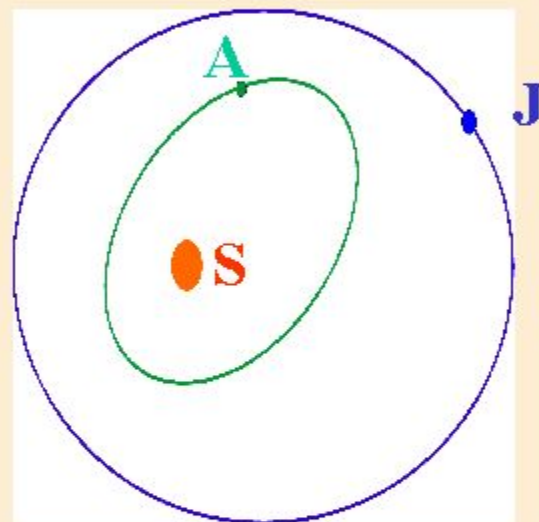
$$\dot{I} = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \quad I \in \mathbb{R}^n$$

$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), \quad \varphi \in \mathbb{R}^m / 2\pi\mathbb{Z}^m = T^m$$

Усредненная система:

$$\dot{J} = \varepsilon F(J), \quad F(J) = \frac{1}{(2\pi)^m} \oint_{T^m} f(J, \varphi, \mathbf{0}) d\varphi$$

Пример:

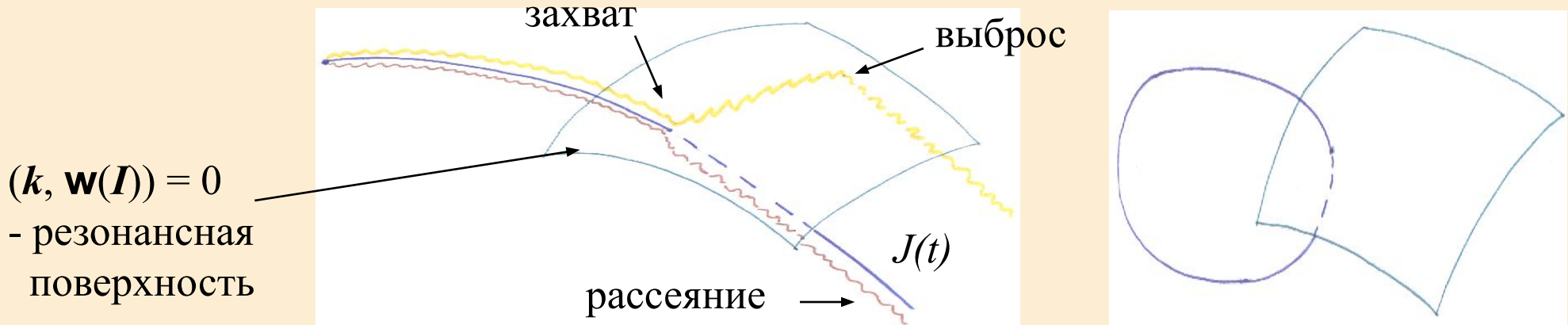


Принцип усреднения заменяет точную систему усредненной.

# Влияние резонансов

$$f(I, \varphi, 0) = F(I) + \sum f_k e^{i(k, \varphi)}, \quad (k \in \mathbb{Z}^m, k \neq 0)$$

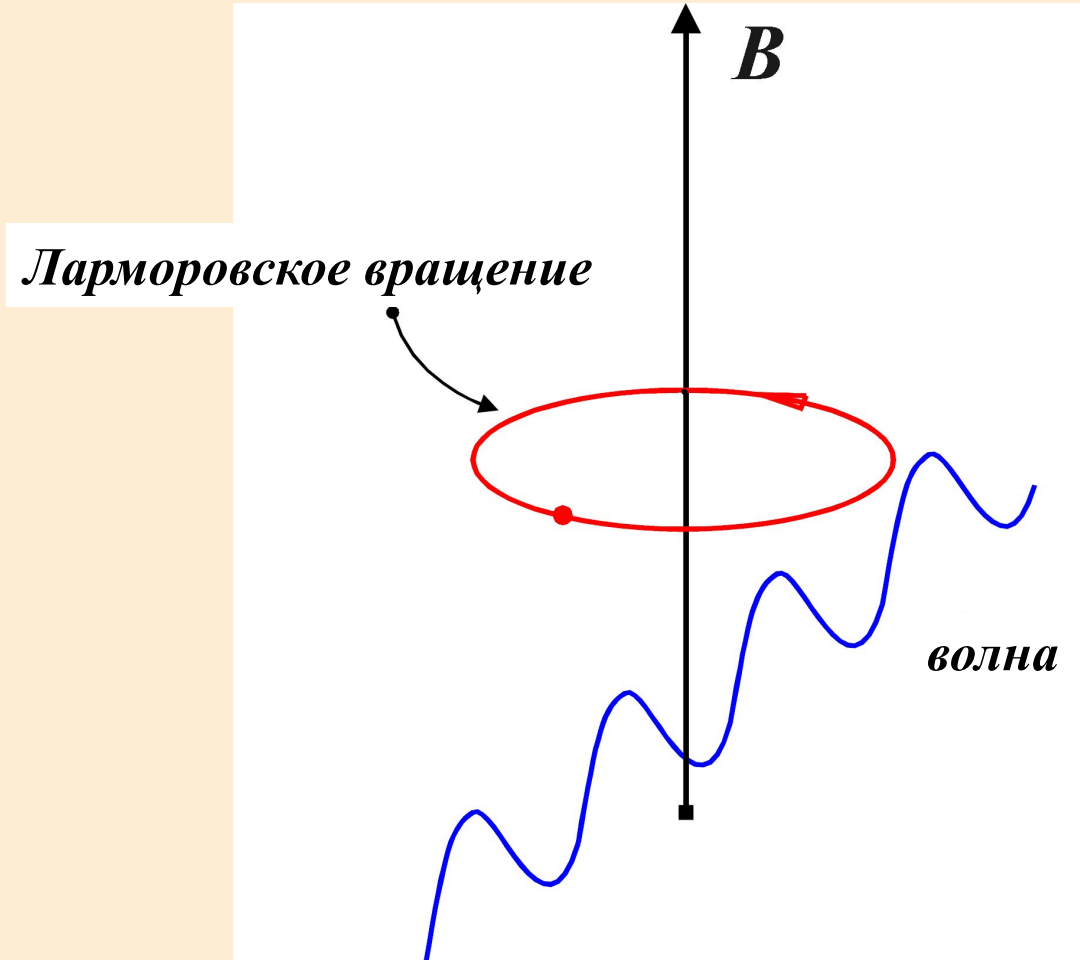
Вблизи резонанса  $(k, \mathbf{w}(I)) = 0$  гармоника  $e^{i(k, \varphi)}$  не осциллирует.



	$t \sim 1/\varepsilon$	$t \sim 1/\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$	$t \sim 1/\varepsilon^2$
Вероятность захвата $\sim$	$\sqrt{\varepsilon}$	1	1
Смещение $\sim$	$\sqrt{\varepsilon}$	1	1
Амплитуда рассеяния $\sim$	$\sqrt{\varepsilon}$	$\varepsilon^{1/4}$	1

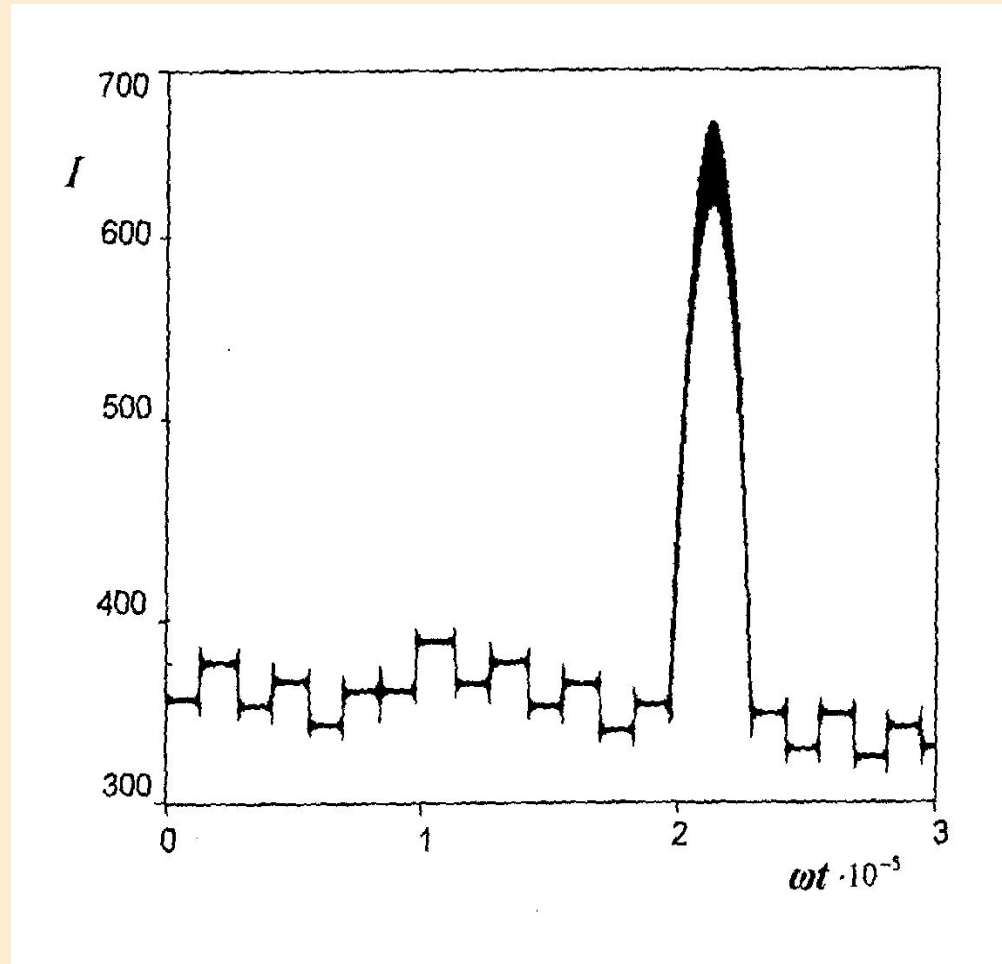
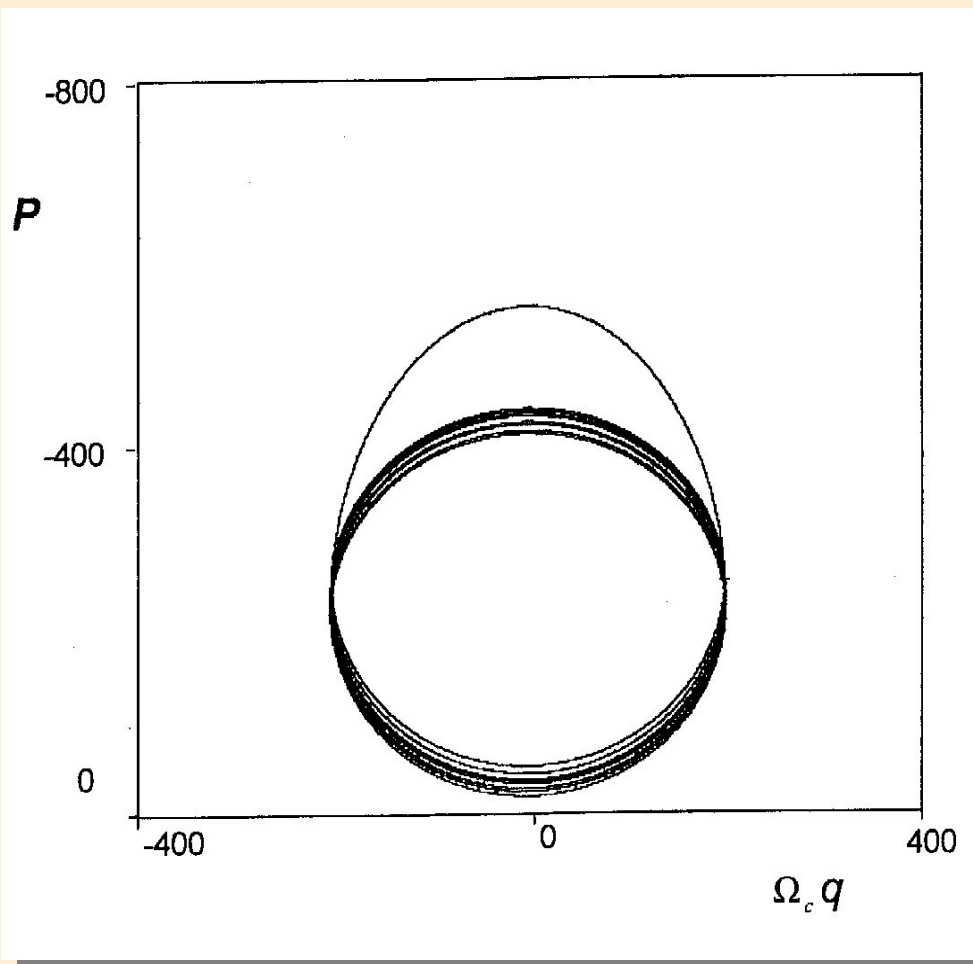
**Пример**: движение заряженных частиц в однородном магнитном поле и поле электростатической волны (А.А.Васильев, А.П.Итин, А. Н., 1999)

Конфигурация полей:

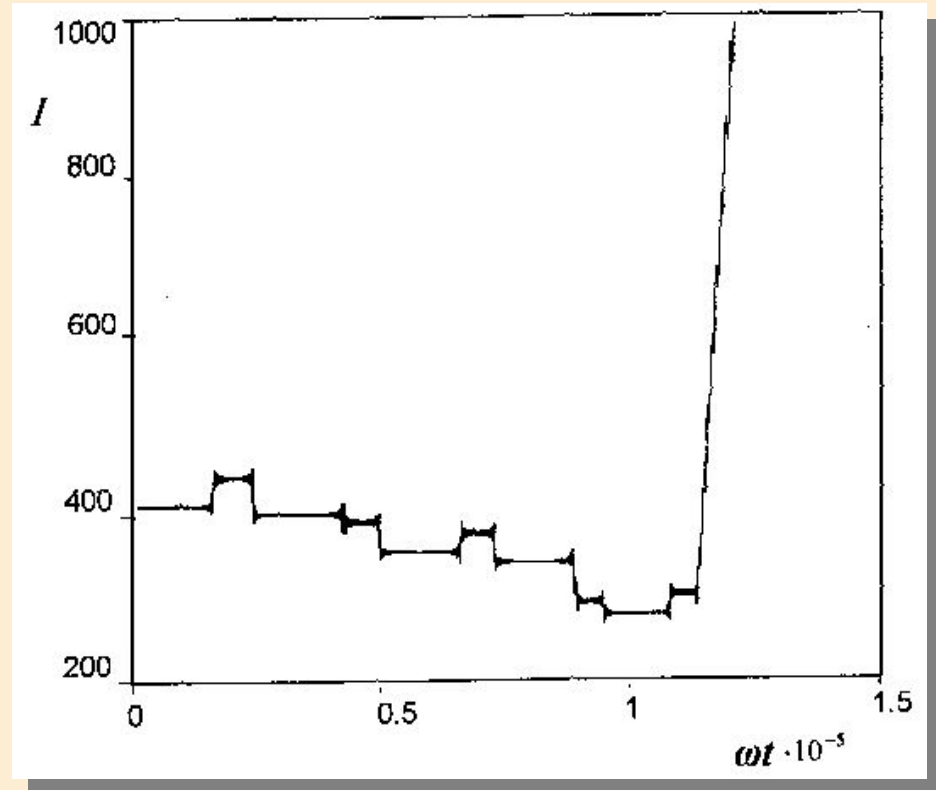
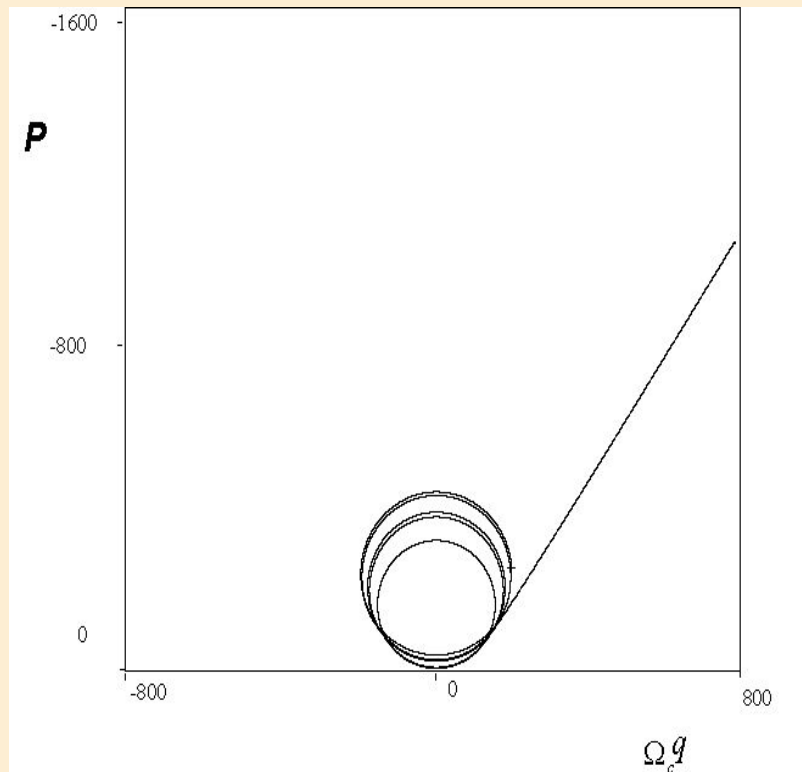




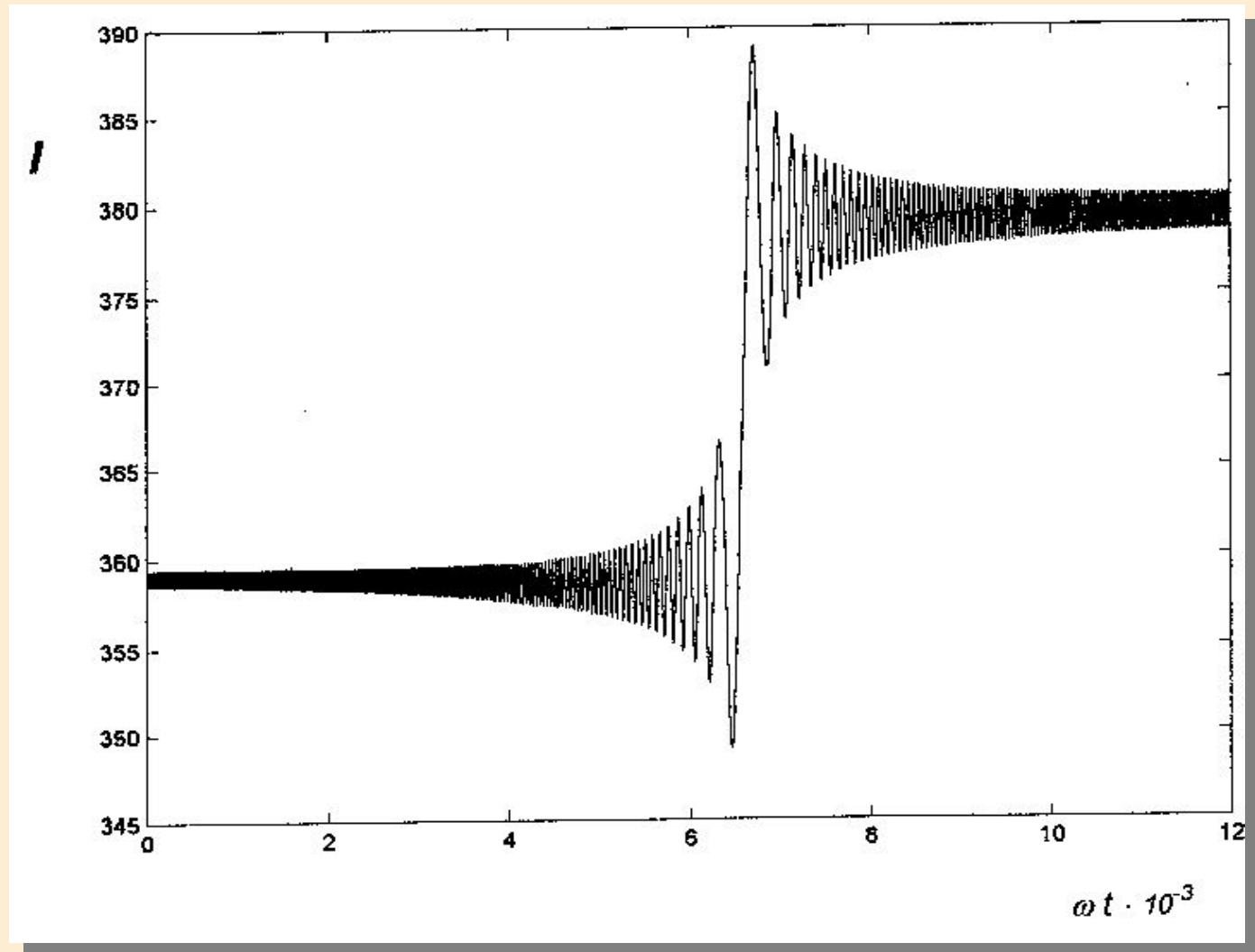
## Захват в резонанс и выброс из резонанса:



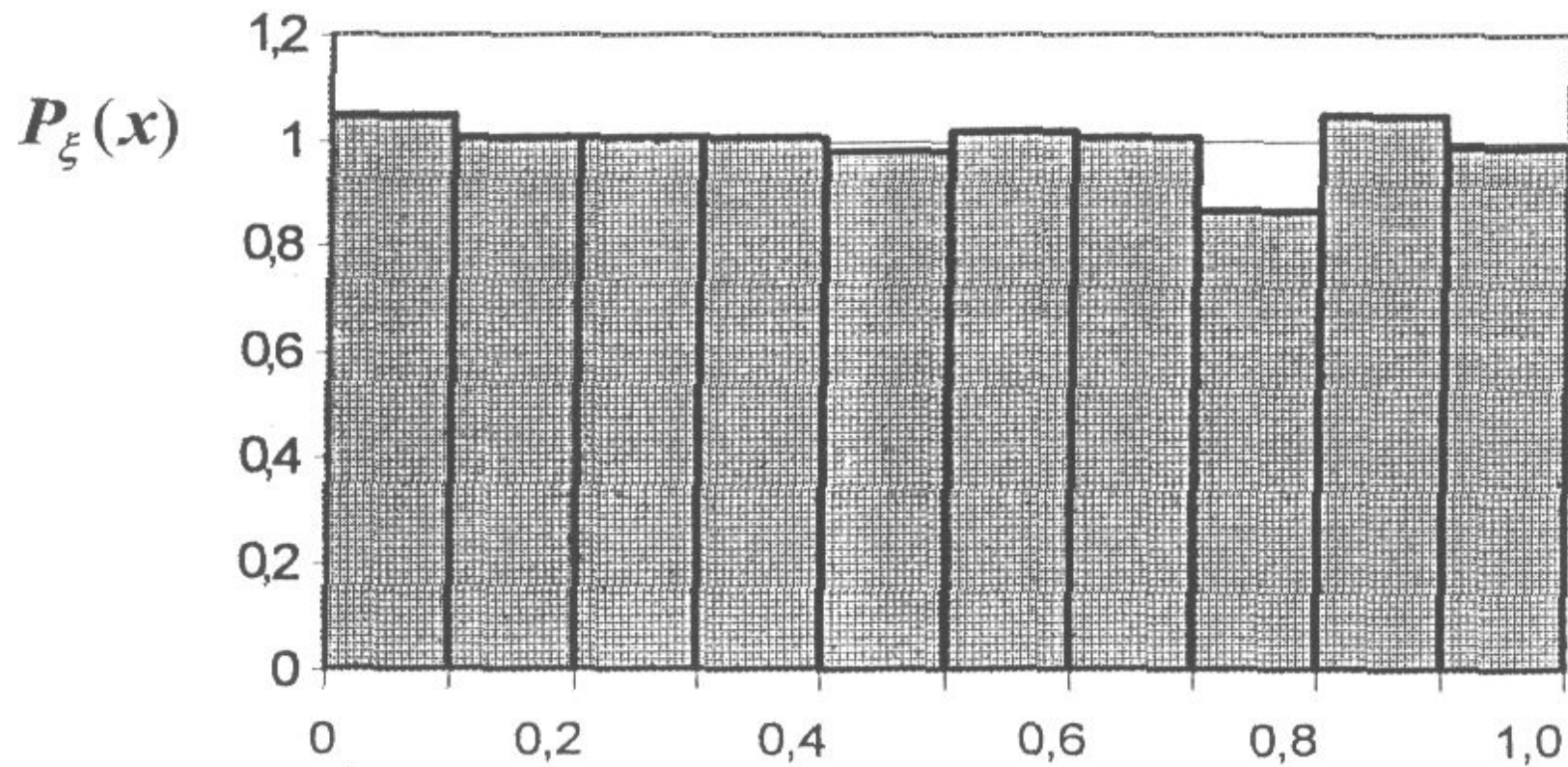
# Захват в резонанс (режим неограниченного серфотронного ускорения):



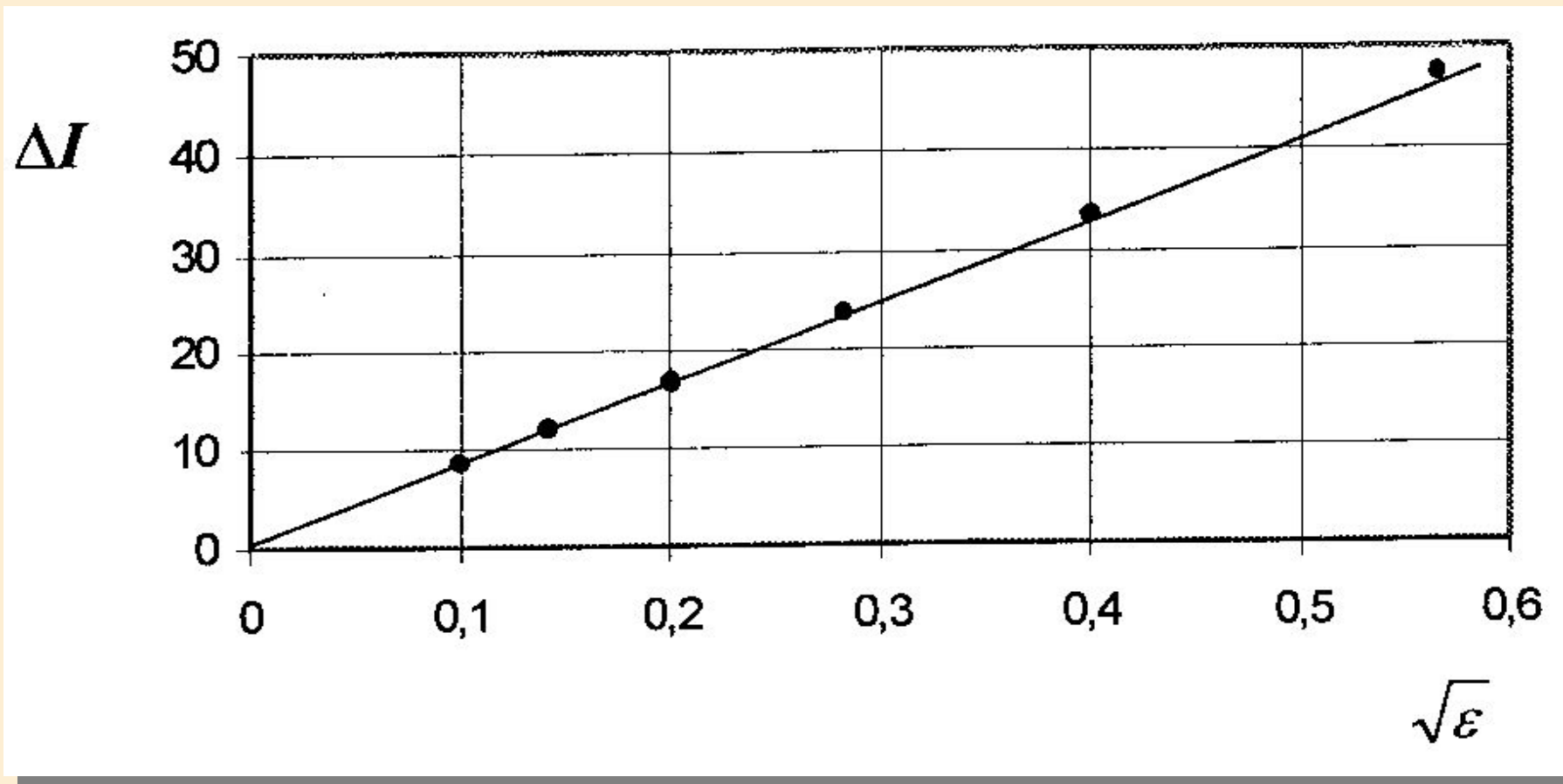
# Рассеяние на резонансе:



## Распределение фазы попадания на резонанс:



Амплитуда рассеяния (при заданной фазе):



# Диффузия при многократных проходах через резонанс:

