Волновое уравнение для электромагнитных и звуковых волн

Электромагнитные волны

Исходной системой уравнений для ЭМ поля являются уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\ ; \tag{2.1}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\ ; \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho\ ; \tag{2.3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \tag{2.4}$$

где $\boldsymbol{j}$ - плотности токов и, ρ- электрических зарядов; $\boldsymbol{E}$ -напряженности электрического и, $\boldsymbol{H}$ - магнитного полей; $\boldsymbol{D}$ - векторы электрической и $\boldsymbol{B}$ - магнитной индукции; $\boldsymbol{j}$ и ρ связаны с уравнением непрерывности

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{2.5}$$

которое выражает закон сохранения заряда в замкнутом объеме.

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}j\ ; \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\ ; \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho\ ; \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \quad (2.4)$$

Уравнения (2.1 - 2.5) дополняются материальными уравнениями

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E};\ \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H};\ \boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}, \quad (2.6)$$

где ε - электрическая, μ - магнитная проницаемость и, σ - проводимость среды. Исключим из системы вектор $\boldsymbol{B}$, для чего применим операцию rot к обеим частям уравнения (2.2). Учитывая, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - \Delta\boldsymbol{E},$$

получим

$$\Delta\boldsymbol{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = 0. \quad (2.7)$$

Если $\sigma = 0$, то есть среда не обладает проводимостью, то вектор $\boldsymbol{E}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\boldsymbol{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.8)$$

Такому же уравнению удовлетворяет и вектор $\boldsymbol{H}$.

Упругие волны в твердом теле

Пусть положение частицы твердого тела характеризуется вектором $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}$ - перемещение частицы. Запишем второй закон Ньютона

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2} = \boldsymbol{F} \qquad \text{или} \qquad \rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial a_k}, \tag{2.9.1}$$

где $a_k = x, y, z$ - координаты, σ_{ik} - тензор упругих напряжений. Здесь и далее по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование, то есть в правой части (2.9.1) сила, действующая на частицу среды в направлении оси a_i, определяется производными элемента тензора напряжений по всем трем осям. В свою очередь, упругие напряжения σ_{ik} определяются деформацией среды. Линейный тензор деформаций имеет вид

$$U_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial a_k} + \frac{\partial U_k}{\partial a_i}\right). \tag{2.9.2}$$

$$U_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial a_k} + \frac{\partial U_k}{\partial a_i}\right). \qquad (2.9.2)$$

Элементы матрицы U_{ik} с повторяющимися индексами $(i = k)$ определяют продольные деформации (деформации сжатия и растяжения), а $(i \neq k)$ - поперечные сдвиговые деформации (изгибные деформации). Связь между элементами тензора напряжений и деформаций носит название закона Гука:

$$\sigma_{ik} = kU_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(U_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}U_{ll}\right), \qquad (2.9.3)$$

где δ_{ik} - символ Кронекера (единичная диагональная матрица $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$). Величины k и μ характеризуют упругие свойства твердого тела и носят соответственно названия модуля всестороннего сжатия и модуля сдвига. Подставляя (2.9.3) в (2.9.1), получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \left(k + \frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial^2 U_l}{\partial a_i \partial a_l} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_k \partial a_k}. \qquad (2.9.4)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \left(k + \frac{\mu}{3}\right) \frac{\partial^2 U_l}{\partial a_i \partial a_l} + \mu \frac{\partial^2 U_l}{\partial a_k \partial a_k}\ . \qquad (2.9.4)$$

Если направление смещения частиц среды U_l совпадает с направлением распространения волны ξ, из (2.9.4) получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_l}{\partial t^2} = \left(k + \frac{4}{3}\mu\right) \frac{\partial^2 U_l}{\partial \xi^2}\ . \qquad (2.9.5)$$

Если U_t направлено перпендикулярно к ξ, (2.9.4) принимает вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}_t}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}_t}{\partial \xi^2}\ . \qquad (2.9.6)$$

Таким образом, мы получили волновые уравнения для продольных и поперечных упругих волн в твердом теле с соответствующими скоростями:

$$c_l = \sqrt{\frac{1}{\rho_0}\left(k + \frac{4}{3}\mu\right)}\ ; \qquad c_t = \sqrt{\mu / \rho_0}\ .$$

Для продольных и сдвиговых волн всегда выполняется соотношение $c_l > c_t$.