

Волновое уравнение для электромагнитных и звуковых волн

Электромагнитные волны

Исходной системой уравнений для ЭМ поля являются уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho; \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.4)$$

где \mathbf{j} - плотности токов и, ρ - электрических зарядов; \mathbf{E} - напряженности электрического и, \mathbf{H} - магнитного полей; \mathbf{D} - векторы электрической и \mathbf{B} - магнитной индукции; \mathbf{j} и ρ связаны с уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (2.5)$$

которое выражает закон сохранения заряда в замкнутом объеме.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho; \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.4)$$

Уравнения (2.1 - 2.5) дополняются материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.6)$$

где ε - электрическая, μ - магнитная проницаемость и, σ - проводимость среды. Исключим из системы вектор \mathbf{B} , для чего применим операцию rot к обеим частям уравнения (2.2). Учитывая, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E},$$

получим

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (2.7)$$

Если $\sigma = 0$, то есть среда не обладает проводимостью, то вектор \mathbf{E} удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.8)$$

Такому же уравнению удовлетворяет и вектор \mathbf{H} .

Упругие волны в твердом теле

Пусть положение частицы твердого тела характеризуется вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{U}$, \mathbf{U} - перемещение частицы. Запишем второй закон Ньютона

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = \mathbf{F} \quad \text{или} \quad \rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial a_k}, \quad (2.9.1)$$

где $\mathbf{a}_k = x, y, z$ - координаты, σ_{ik} - тензор упругих напряжений. Здесь и далее по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование, то есть в правой части (2.9.1) сила, действующая на частицу среды в направлении оси \mathbf{a}_i , определяется производными элемента тензора напряжений по всем трем осям. В свою очередь, упругие напряжения σ_{ik} определяются деформацией среды. Линейный тензор деформаций имеет вид

$$U_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial a_k} + \frac{\partial U_k}{\partial a_i} \right). \quad (2.9.2)$$

$$U_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial a_k} + \frac{\partial U_k}{\partial a_i} \right). \quad (2.9.2)$$

Элементы матрицы U_{ik} с повторяющимися индексами ($i = k$) определяют продольные деформации (деформации сжатия и растяжения), а ($i \neq k$) - поперечные сдвиговые деформации (изгибные деформации). Связь между элементами тензора напряжений и деформаций носит название закона Гука:

$$\sigma_{ik} = kU_{||} \delta_{ik} + 2\mu \left(U_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} U_{||} \right), \quad (2.9.3)$$

где δ_{ik} - символ Кронекера (единичная диагональная матрица $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$). Величины k и μ характеризуют упругие свойства твердого тела и носят соответственно названия модуля всестороннего сжатия и модуля сдвига. Подставляя (2.9.3) в (2.9.1), получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \left(k + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_i \partial a_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_k \partial a_k}. \quad (2.9.4)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \left(k + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_i \partial a_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_k \partial a_k}. \quad (2.9.4)$$

Если направление смещения частиц среды U_i совпадает с направлением распространения волны ξ , из (2.9.4) получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \left(k + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial^2 U_i}{\partial \xi^2}. \quad (2.9.5)$$

Если U_t направлено перпендикулярно к ξ , (2.9.4) принимает вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 U_t}{\partial \xi^2}. \quad (2.9.6)$$

Таким образом, мы получили волновые уравнения для продольных и поперечных упругих волн в твердом теле с соответствующими скоростями:

$$c_l = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \left(k + \frac{4}{3} \mu \right)}; \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}.$$

Для продольных и сдвиговых волн всегда выполняется соотношение $c_l > c_t$.