

# Лекция № 10

## Вращение твердого тела

Алексей Викторович  
Гуденко

10/04/2012

# План лекции

- Уравнение движения и равновесия твёрдого тела.
- Вращение тела вокруг неподвижной оси.
- Момент инерции. Теорема Гюйгенса-Штейнера.
- Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела.  
Кинетическая энергия тела при плоском движении.
- Применение законов динамики твёрдого тела:  
скатывание тел с наклонной плоскости, маятник  
Максвелла.
- Гироскопы

# Виды движения твёрдого тела. Поступательное движение.

- Абсолютно твёрдое тело – это тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь
- Поступательное движение – это такое движение, при котором тело перемещается параллельно самому себе.
- Все точки тела при этом имеют одинаковую скорость и описывают одинаковые траектории, смещённые по отношению друг к другу.
- Примеры поступательного движения:
  1. стрелка компаса, при перемещении компаса в горизонтальной плоскости;
  2. кабина на колесе обозрения

# Вращательное движение твёрдого тела.

- При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на в плоскости, перпендикулярной оси вращения (ось вращения может находиться и вне тела).
- Угловые скорости всех точек  $\omega$  одинаковы.  $\omega$  направлена вдоль оси вращения в соответствие с правилом буравчика.
- Линейные скорости точек:  $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, проведённый из любой точки оси.

# Плоское движение твёрдого тела

- Любое движение твёрдого тела – это суперпозиция поступательного и вращательного движений.
- При плоском движении все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях.
- Пример плоского движения – качение цилиндра.

Скорость каждой точки цилиндра:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (\mathbf{v}_0 - \text{скорость оси})$$

# Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

- $L_z = \sum r_i m_i v_i = \omega \sum m_i r_i^2 = I_z \omega$
- $I_z = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm$  – момент инерции твёрдого тела относительно оси  $z$ .
- $M_z$  –  $z$ -проекция момента внешних сил
- Основное уравнение динамики вращательного движения тела вокруг неподвижной оси  
$$L_z d\omega/dt = M_z$$

# Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела. Работа момента сил

- Кинетическая энергия вращающегося тела  
$$K = \sum m_i v_i^2 / 2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\omega r_i)^2 = I_z \omega^2 / 2 = L_z^2 / 2I = \frac{1}{2} L_z \omega.$$
- В общем случае  $K = \frac{1}{2} (\mathbf{L}\boldsymbol{\omega})$
- Работа внешней силы при повороте:  
$$dA = (\mathbf{F}d\mathbf{s}) = Frd\varphi = M_z d\varphi$$

# Плоское движение твёрдого тела

- Плоское движение есть суперпозиция движения центра масс и вращательного в системе центра масс
- Движение центра масс определяется внешними силами по закону Ньютона.
- Вращательное движение определяется моментом внешних сил



# Свойства момента инерции

- Момент инерции – скалярная аддитивная величина.
- **Теорема Гюйгенса – Штейнера:** момент инерции  $I$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $I_c$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния  $a$  до центра масс:  $I = I_c + ma^2$
- Доказательство:  
по теореме Кёнига для кинетической энергии:  
$$K = I\omega^2/2 = mv_c^2/2 + I_c\omega^2/2 = m(\omega a)^2/2 + I_c\omega^2/2 = \frac{1}{2}(ma^2 + I_c)\omega^2 \Rightarrow I = I_c + ma^2$$

## Теорема о взаимно перпендикулярных осях

- Момент инерции плоского тела относительно произвольной оси  $z$ , перпендикулярной его плоскости, равен сумме моментов относительно двух взаимно перпендикулярных осей  $x$  и  $y$ , лежащих в плоскости тела и пересекающихся с осью  $z$ :  $I_z = I_x + I_y$

# Моменты инерции различных тел

- Тонкий обруч, полый цилиндр (относительно оси симметрии):  $I = mr^2$
- Диск:  $I = \frac{1}{2} mr^2$
- Тонкий длинный стержень:  
 $I = \frac{1}{12} mL^2$  – относительно середины;  
 $I = \frac{1}{3} mL^2$  - относительно конца
- Плоский прямоугольник (параллелепипед):  
 $I = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
- Сфера:  $I = \frac{2}{3} mr^2$
- Шар:  $I = \frac{2}{5} mr^2$
- Толстый цилиндр:  $I = \frac{1}{2} m(r^2 + R^2)$

## Скатывание с наклонной плоскости

- С каким ускорением скатывается цилиндр (круглое тело) с наклонной плоскости.
- Решение:  
уравнение моментов относительно мгновенной оси:  $I_A d\omega/dt = M_A \Rightarrow I_A a = M_A r \Rightarrow$   
 $a = mgr^2 \sin\alpha / I_A = g \sin\alpha / (1 + I_C / mr^2)$
- Труба:  $a = \frac{1}{2} g \sin\alpha$
- Сплошной цилиндр:  $a = \frac{2}{3} g \sin\alpha$
- Полый шар:  $a = \frac{3}{5} g \sin\alpha$
- Сплошной шар:  $a = \frac{5}{7} g \sin\alpha$

# Диск Максвелла

- $R = 10$  см;  $r = 0,5$  см. С каким ускорением опускается диск.

- Решение:

$$I_A d\omega/dt = M_A r \Rightarrow I_A d\omega r/dt = M_A r \Rightarrow I_A dv_0/dt = M_A r \Rightarrow$$
$$a = mgr^2/I_A = g/(1 + R^2/2r^2) \approx g/200 \approx 5 \text{ см/с}^2$$

# Свободные оси. Главные оси.

- Ось вращения, направление которой в пространстве остаётся неизменным без действия на неё внешних сил, называется **свободной осью**.
- **Главные оси - три свободных взаимно перпендикулярных оси, проходящие через центр масс.**
- При вращении вокруг главной оси  $\mathbf{L}_1 = I_1 \boldsymbol{\omega}_1$
- Для произвольной оси:  $\mathbf{L} = I_1 \boldsymbol{\omega}_1 + I_2 \boldsymbol{\omega}_2 + I_3 \boldsymbol{\omega}_3$
- Все оси симметрии твёрдого тела являются главными осями инерции.

# Особенности вращения шаровых, симметричных и асимметричных волчков.

- Главными называются моменты инерции относительно главных осей.
- Шаровой волчок:  $I_1 = I_2 = I_3$ . Любая ось, проходящая через центр масс – свободная (шар, куб)
- $I_1 = I_2 \neq I_3$  – симметричный волчок (диск, стержень) – при внешнем воздействии устойчиво вращается вокруг оси с наибольшим  $I$
- $I_1 \neq I_2 \neq I_3$  - асимметричный волчок (параллелепипед) – устойчиво вращается вокруг осей с  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$
- $I = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma$  - момент инерции относительно произвольной оси.

# Гироскоп

- Гироскоп – твёрдое тело, быстро вращающееся относительно оси симметрии.
- Гироскопическое приближение:  $\mathbf{L} = I_0 \boldsymbol{\omega}$  или скорость прецессии  $\Omega \ll \omega$ .
- Уравновешенный гироскоп ( $M = 0$ ) сохраняет своё направление в пространстве.
- Вынужденная прецессия:  $M \neq 0 \Rightarrow d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt \Rightarrow L \sin\theta d\varphi = mga \sin\theta dt \Rightarrow$  скорость прецессии  $\Omega = d\varphi/dt = mga/I_0\omega$  – не зависит от угла наклона оси гироскопа.



# Применение гироскопов

- В морской и авиа навигации:  
гирогоризонт, гирокомпас – гироскоп в кардановом подвесе сохраняет своё направление.
- Стабилизация артиллерийского снаряда (в нарезном оружии) – вращающийся снаряд не кувыркается.

# Условие равновесие твёрдого тела

Тело будет оставаться в покое, если:

1. Равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равна нулю:
2. Суммарный момент сил относительно любой точки равен нулю:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i = 0$$

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i = 0$$

# Вращение твёрдого тела. Кинетическая энергия вращающегося тела.

## Поступательное движение

$\mathbf{v}$  – линейная скорость

$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$  – линейное ускорение

$m$  – масса

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  – импульс

$\mathbf{F}$  - сила

$d\mathbf{p}/dt = m\mathbf{a} = m d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}$

$K = mv^2/2 = p^2/2m$

$dA = Fds$

## Вращательное движение

$\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость

$\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$  – угловое ускорение

$I$  – момент инерции

$L_z = I\omega_z$  – момент импульса

$M$  – момент силы

$dL/dt = I\varepsilon = Id\omega/dt = M$

$K = I\omega^2/2 = L_z^2/2I$

$dA = Md\varphi$