Лекция № 10
Вращение твердого тела

Алексей Викторович
Гуденко

10/04/2012

План лекции

- Уравнение движения и равновесия твёрдого тела.
- Вращение тела вокруг неподвижной оси.
- Момент инерции. Теорема Гюйгенса-Штейнера.
- Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела. Кинетическая энергия тела при плоском движении.
- Применение законов динамики твёрдого тела: скатывание тел с наклонной плоскости, маятник Максвелла.
- Гироскопы

Виды движения твёрдого тела. Поступательное движение.

- Абсолютно твёрдое тело – это тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь
- Поступательное движение – это такое движение, при котором тело перемещается параллельно самому себе.
- Все точки тела при этом имеют одинаковую скорость и описывают одинаковые траектории, смещённые по отношению друг к другу.
- Примеры поступательного движения:

1. стрелка компаса, при перемещении компаса в горизонтальной плоскости;
2. кабина на колесе обозрения

Вращательное движение твёрдого тела.

- При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на в плоскости, перпендикулярной оси вращения (ось вращения может находиться и вне тела).
- Угловые скорости всех точек **ω** одинаковы. **ω** направлена вдоль оси вращения в соответствие с правилом буравчика.
- Линейные скорости точек: **v** = **ω** x **r**, где **r** – радиус-вектор, проведённый из любой точки оси.

Плоское движение твёрдого тела

- Любое движение твёрдого тела – это суперпозиция поступательного и вращательного движений.
- При плоском движении все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях.
- Пример плоского движения – качение цилиндра.
  Скорость каждой точки цилиндра:
  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \mathrm{x} \mathbf{r}$ ($\mathbf{v}_0$ – скорость оси)

Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

- $L_z = \Sigma r_i m_i v_i = \omega \Sigma m_i r_i^2 = I_z \omega$
- $I_z = \Sigma m_i r_i^2 = \int r^2 dm$ – момент инерции твёрдого тела относительно оси z.
- M_z – z-проекция момента внешних сил
- Основное уравнение динамики вращательного движения тела вокруг неподвижной оси
  $L_z d\omega/dt = M_z$

Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела. Работа момента сил

- Кинетическая энергия вращающегося тела $K = \Sigma m_i v_i^2/2 = \frac{1}{2}\Sigma m_i(\omega r_i)^2 = I_z\omega^2/2 = L_z^2/2I = \frac{1}{2} L_z\,\omega$.
- В общем случае $K = \frac{1}{2}(\mathbf{L}\boldsymbol{\omega})$
- Работа внешней силы при повороте: $dA = (\mathbf{F}d\mathbf{s}) = Frd\varphi = M_z d\varphi$

Плоское движение твёрдого тела

- Плоское движение есть суперпозиция движения центра масс и вращательного в системе центра масс
- Движение центра масс определяется внешними силами по закону Ньютона.
- Вращательное движение определяется моментом внешних сил

Свойства момента инерции

- Момент инерции – скалярная аддитивная величина.
- **Теорема Гюйгенса – Штейнера**: момент инерции I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_C относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния a до центра масс: $I = I_c + ma^2$
- Доказательство:
  по теореме Кёнига для кинетической энергии:
  $K = I\omega^2/2 = mv_c^2/2 + I_c\omega^2/2 = m(\omega a)^2/2 + I_c\omega^2/2 =$
  $½\,(ma^2 + I_c)\omega^2 \Rightarrow I = I_c + ma^2$

Теорема о взаимно перпендикулярных осях

- Момент инерции плоского тела относительно произвольной оси z, перпендикулярной его плоскости, равен сумме моментов относительно двух взаимно перпендикулярных осей x и y, лежащих в плоскости тела и пересекающихся с осью z: $I_z = I_x + I_y$

Моменты инерции различных тел

- Тонкий обруч, полый цилиндр (относительно оси симметрии): $I = mr^2$
- Диск: $I = ½\ mr^2$
- Тонкий длинный стержень:
  $I = 1/12\ mL^2$ – относительно середины;
  $I = 1/3\ mL^2$ - относительно конца
- Плоский прямоугольник (параллелепипед):
  $I = 1/12\ m(a^2 + b^2)$
- Сфера: $I = 2/3\ mr^2$
- Шар: $I = 2/5\ mr^2$
- Толстый цилиндр: $I = ½\ m(r^2 + R^2)$

Скатывание с наклонной плоскости

- С каким ускорением скатывается цилиндр (круглое тело) с наклонной плоскости.
- Решение:
  уравнение моментов относительно мгновенной оси: $I_A d\omega/dt = M_A \Rightarrow I_A a = M_A r \Rightarrow$
  $a = mgr^2 \sin\alpha / I_A = g\sin\alpha/(1 + I_c/mr^2)$
- Труба: $a = \frac{1}{2} g\sin\alpha$
- Сплошной цилиндр: $a = 2/3\ g\sin\alpha$
- Полый шар: $a = 3/5\ g\sin\alpha$
- Сплошной шар: $a = 5/7\ g\sin\alpha$

Диск Максвелла

- R = 10 см; r = 0,5 см. С каким ускорением опускается диск.
- Решение:
  $I_A d\omega/dt = M_A \Rightarrow I_A d\omega r/dt = M_A r \Rightarrow I_A dv_0/dt = M_A r \Rightarrow$
  $a = mgr^2/I_A = g/(1 + R^2/2r^2) \approx g/200 \approx 5$ см/с^2

Свободные оси. Главные оси.

- Ось вращения, направление которой в пространстве остаётся неизменным без действия на неё внешних сил, называется **свободной осью.**
- **Главные оси - три свободных взаимно перпендикулярных оси, проходящие через центр масс.**
- При вращении вокруг главной оси $\mathbf{L_1} = \mathbf{I\omega_1}$
- Для произвольной оси: $\mathbf{L} = \mathbf{I}_1\boldsymbol{\omega}_\mathbf{1} + \mathbf{I}_2\boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{I}_3\boldsymbol{\omega}_3$
- Все оси симметрии твёрдого тела являются главными осями инерции.

Особенности вращения шаровых, симметричных и асимметричных волчков.

- Главными называются моменты инерции относительно главных осей.
- Шаровой волчок: $I_1 = I_2 = I_3$. Любая ось, проходящая через центр масс – свободная (шар, куб)
- $I_1 = I_2 \neq I_3$ – симметричный волчок (диск, стержень) – при внешнем воздействии устойчиво вращается вокруг оси с наибольшим I
- $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ - асимметричный волчок (параллелепипед) – устойчиво вращается вокруг осей с I_{max} и I_{min}
- $I = I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma$ - момент инерции относительно произвольной оси.

Гироскоп

- Гироскоп – твёрдое тело, быстро вращающееся относительно оси симметрии.
- Гироскопическое приближение: $\mathbf{L} = I_0\boldsymbol{\omega}$ или скорость прецессии $\Omega << \omega$.
- Уравновешенный гироскоп ($M = 0$) сохраняет своё направление в пространстве.
- Вынужденная прецессия: $M \neq 0 \Rightarrow d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt \Rightarrow L\sin\theta d\varphi = mga \sin\theta\ dt \Rightarrow$ скорость прецессии $\Omega = d\varphi/dt = mga/I_0\omega$ – не зависит от угла наклона оси гироскопа.

Применение гироскопов

- В морской и авиа навигиции: гирогоризонт, гирокомпас – гироскоп в кардановом подвесе сохраняет своё направление.
- Стабилизация артиллеристского снаряда (в нарезном орудии) – вращающийся снаряд не кувыркается.

Условие равновесие твёрдого тела

Тело будет оставаться в покое, если:

1. Равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равна нулю:
   $\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_i = 0$
2. Суммарный момент сил относительно любой точки равен нулю:
   $\mathbf{M} = \Sigma \mathbf{M}_i = 0$

Вращение твёрдого тела. Кинетическая энергия вращающегося тела.

Поступательное движение	**Вращательное движение**
$\mathbf{v}$ – линейная скорость	$\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость
$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ – линейное ускорение	$\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ – угловое ускорение
m – масса	I – момент инерции
$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс	$L_z = I\omega_z$ – момент импульса
$\mathbf{F}$ - сила	M – момент силы
$d\mathbf{p}/dt = m\mathbf{a} = md\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}$	$dL/dt = I\varepsilon = Id\omega/dt = M$
$K = mv^2/2 = p^2/2m$	$K = I\omega^2/2 = L_z^2/2I$
$dA = Fds$	$dA = Md\varphi$