

Лекция № 10

Вращение твердого тела

Алексей Викторович
Гуденко

10/04/2012

План лекции

- Уравнение движения и равновесия твёрдого тела.
- Вращение тела вокруг неподвижной оси.
- Момент инерции. Теорема Гюйгенса-Штейнера.
- Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела.
Кинетическая энергия тела при плоском движении.
- Применение законов динамики твёрдого тела:
скатывание тел с наклонной плоскости, маятник
Максвелла.
- Гироскопы

Виды движения твёрдого тела.

Поступательное движение.

- Абсолютно твёрдое тело – это тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь
- Поступательное движение – это такое движение, при котором тело перемещается параллельно самому себе.
- Все точки тела при этом имеют одинаковую скорость и описывают одинаковые траектории, смещённые по отношению друг к другу.
- Примеры поступательного движения:
 1. стрелка компаса, при перемещении компаса в горизонтальной плоскости;
 2. кабина на колесе обозрения

Вращательное движение твёрдого тела.

- При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на в плоскости, перпендикулярной оси вращения (ось вращения может находиться и вне тела).
- Угловые скорости всех точек ω одинаковы. ω направлена вдоль оси вращения в соответствие с правилом буравчика.
- Линейные скорости точек: $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, где \mathbf{r} – радиус-вектор, проведённый из любой точки оси.

Плоское движение твёрдого тела

- Любое движение твёрдого тела – это суперпозиция поступательного и вращательного движений.
- При плоском движении все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях.
- Пример плоского движения – качение цилиндра.

Скорость каждой точки цилиндра:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (\mathbf{v}_0 - \text{скорость оси})$$

Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

- $L_z = \sum r_i m_i v_i = \omega \sum m_i r_i^2 = I_z \omega$
- $I_z = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm$ – момент инерции твёрдого тела относительно оси z.
- M_z – z-проекция момента внешних сил
- Основное уравнение динамики вращательного движения тела вокруг неподвижной оси
$$L_z d\omega/dt = M_z$$

Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела. Работа момента сил

- Кинетическая энергия вращающегося тела
$$K = \sum m_i v_i^2 / 2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\omega r_i)^2 = I_z \omega^2 / 2 = L_z^2 / 2I = \frac{1}{2} L_z \omega.$$
- В общем случае $K = \frac{1}{2} (\mathbf{L}\boldsymbol{\omega})$
- Работа внешней силы при повороте:
$$dA = (\mathbf{F}d\mathbf{s}) = Frd\varphi = M_z d\varphi$$

Плоское движение твёрдого тела

- Плоское движение есть суперпозиция движения центра масс и вращательного в системе центра масс
- Движение центра масс определяется внешними силами по закону Ньютона.
- Вращательное движение определяется моментом внешних сил

Свойства момента инерции

- Момент инерции – скалярная аддитивная величина.
- **Теорема Гюйгенса – Штейнера:** момент инерции I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния a до центра масс: $I = I_c + ma^2$
- Доказательство:
по теореме Кёнига для кинетической энергии:
$$K = I\omega^2/2 = mv_c^2/2 + I_c\omega^2/2 = m(\omega a)^2/2 + I_c\omega^2/2 = \frac{1}{2}(ma^2 + I_c)\omega^2 \Rightarrow I = I_c + ma^2$$

Теорема о взаимно перпендикулярных осях

- Момент инерции плоского тела относительно произвольной оси z , перпендикулярной его плоскости, равен сумме моментов относительно двух взаимно перпендикулярных осей x и y , лежащих в плоскости тела и пересекающихся с осью z : $I_z = I_x + I_y$

Моменты инерции различных тел

- Тонкий обруч, полый цилиндр (относительно оси симметрии): $I = mr^2$
- Диск: $I = \frac{1}{2} mr^2$
- Тонкий длинный стержень:
 $I = \frac{1}{12} mL^2$ – относительно середины;
 $I = \frac{1}{3} mL^2$ - относительно конца
- Плоский прямоугольник (параллелепипед):
 $I = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
- Сфера: $I = \frac{2}{3} mr^2$
- Шар: $I = \frac{2}{5} mr^2$
- Толстый цилиндр: $I = \frac{1}{2} m(r^2 + R^2)$

Скатывание с наклонной плоскости

- С каким ускорением скатывается цилиндр (круглое тело) с наклонной плоскости.
- Решение:
уравнение моментов относительно мгновенной оси: $I_A d\omega/dt = M_A \Rightarrow I_A a = M_A r \Rightarrow$
 $a = mgr^2 \sin\alpha / I_A = g \sin\alpha / (1 + I_C / mr^2)$
- Труба: $a = \frac{1}{2} g \sin\alpha$
- Сплошной цилиндр: $a = \frac{2}{3} g \sin\alpha$
- Полый шар: $a = \frac{3}{5} g \sin\alpha$
- Сплошной шар: $a = \frac{5}{7} g \sin\alpha$

Диск Максвелла

- $R = 10$ см; $r = 0,5$ см. С каким ускорением опускается диск.

- Решение:

$$I_A d\omega/dt = M_A r \Rightarrow I_A d\omega r/dt = M_A r \Rightarrow I_A dv_0/dt = M_A r \Rightarrow$$
$$a = mgr^2/I_A = g/(1 + R^2/2r^2) \approx g/200 \approx 5 \text{ см/с}^2$$

Свободные оси. Главные оси.

- Ось вращения, направление которой в пространстве остаётся неизменным без действия на неё внешних сил, называется **свободной осью**.
- **Главные оси - три свободных взаимно перпендикулярных оси, проходящие через центр масс.**
- При вращении вокруг главной оси $\mathbf{L}_1 = I_1 \boldsymbol{\omega}_1$
- Для произвольной оси: $\mathbf{L} = I_1 \boldsymbol{\omega}_1 + I_2 \boldsymbol{\omega}_2 + I_3 \boldsymbol{\omega}_3$
- Все оси симметрии твёрдого тела являются главными осями инерции.

Особенности вращения шаровых, симметричных и асимметричных волчков.

- Главными называются моменты инерции относительно главных осей.
- Шаровой волчок: $I_1 = I_2 = I_3$. Любая ось, проходящая через центр масс – свободная (шар, куб)
- $I_1 = I_2 \neq I_3$ – симметричный волчок (диск, стержень) – при внешнем воздействии устойчиво вращается вокруг оси с наибольшим I
- $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ - асимметричный волчок (параллелепипед) – устойчиво вращается вокруг осей с I_{\max} и I_{\min}
- $I = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma$ - момент инерции относительно произвольной оси.

Гироскоп

- Гироскоп – твёрдое тело, быстро вращающееся относительно оси симметрии.
- Гироскопическое приближение: $\mathbf{L} = I_0 \boldsymbol{\omega}$ или скорость прецессии $\Omega \ll \omega$.
- Уравновешенный гироскоп ($M = 0$) сохраняет своё направление в пространстве.
- Вынужденная прецессия: $M \neq 0 \Rightarrow d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt \Rightarrow L \sin\theta d\varphi = m g a \sin\theta dt \Rightarrow$ скорость прецессии $\Omega = d\varphi/dt = m g a / I_0 \omega$ – не зависит от угла наклона оси гироскопа.

Применение гироскопов

- В морской и авиа навигации:
гирогоризонт, гирокомпас – гироскоп в кардановом подвесе сохраняет своё направление.
- Стабилизация артиллерийского снаряда (в нарезном оружии) – вращающийся снаряд не кувыркается.

Условие равновесие твёрдого тела

Тело будет оставаться в покое, если:

1. Равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равна нулю:
2. Суммарный момент сил относительно любой точки равен нулю:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i = 0$$

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i = 0$$

Вращение твёрдого тела. Кинетическая энергия вращающегося тела.

Поступательное движение

\mathbf{v} – линейная скорость

$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ – линейное ускорение

m – масса

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс

\mathbf{F} - сила

$d\mathbf{p}/dt = m\mathbf{a} = m d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}$

$K = mv^2/2 = p^2/2m$

$dA = Fds$

Вращательное движение

$\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость

$\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ – угловое ускорение

I – момент инерции

$L_z = I\omega_z$ – момент импульса

M – момент силы

$dL/dt = I\varepsilon = Id\omega/dt = M$

$K = I\omega^2/2 = L_z^2/2I$

$dA = Md\varphi$