

# ГИДРОДИНАМИКА

- ◆ Вязкость жидкости. Уравнение Ньютона
- ◆ Закон Пуазейля
- ◆ Число Рейнольдса
- ◆ Методы определения вязкости жидкости
- ◆ Механическая работа и мощность сердца

# Вязкость жидкости. Уравнение Ньютона

В реальной жидкости между молекулами действуют силы взаимного притяжения, обуславливающие **внутреннее трение**. Внутреннее трение, например, вызывает силу сопротивления при помешивании жидкости, замедление скорости падения брошенных в нее тел, а также определенных условиях — ламинарное течение.

Ньютон установил, что сила  $F_B$  внутреннего трения между двумя слоями жидкости, движущимися с различными скоростями, зависит от природы жидкости и прямо пропорциональна площади  $S$  соприкасающихся слоев и градиенту скорости  $dv/dz$  между ними:

$$F_B = \eta S dv/dz ,$$

где  $\eta$  — коэффициент пропорциональности, называемый **коэффициентом вязкости** или просто **вязкостью** жидкости и зависящий от ее природы.

Сила  $F_v$  действует касательно к поверхности соприкасающихся слоев жидкости и направлена так, что ускоряет слой, движущийся более медленно, и замедляет слой, движущийся более быстро.

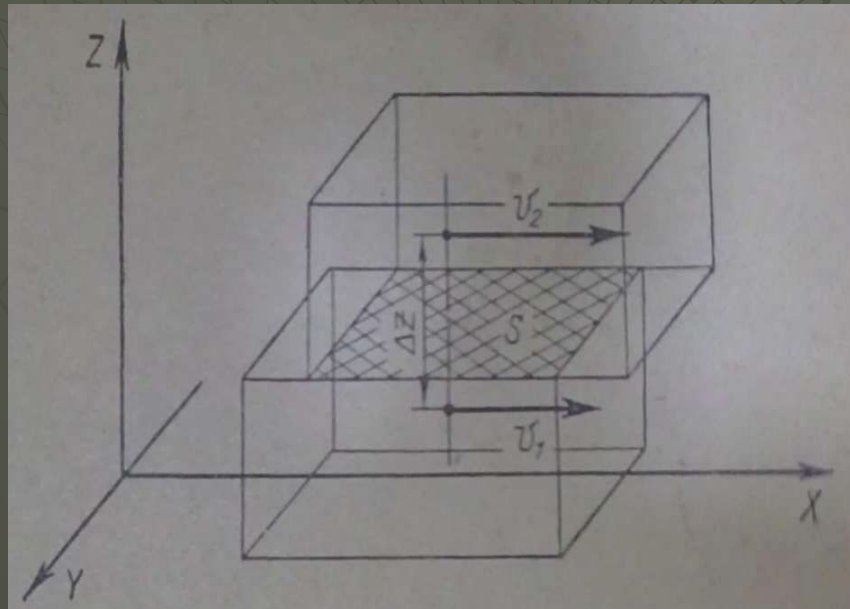
Градиент скорости в данном случае характеризует быстроту изменения скорости между слоями жидкости, т.е. в направлении, перпендикулярном - направлению течения жидкости. Для конечных значений он равен

$$\Delta v / \Delta z = (v_2 - v_1) / \Delta z$$

Единица коэффициента вязкости в СИ — Н·с/м<sup>2</sup>, в системе СГС динс/см<sup>2</sup>, эта единица называется **пуазом** (П). Соотношение между ними: 1 П = 0,1 Н·с/м<sup>2</sup>.

На практике вязкость жидкости характеризуют **относительной вязкостью**  $\eta_{отп}$ , под которой понимают отношение коэффициента вязкости данной жидкости  $\eta$  к коэффициенту вязкости воды  $\eta_v$  при той же температуре:  $\eta_{отп} = \eta / \eta_v$  (при  $t = 20^\circ \text{C}$   $\eta_v = 0,01 \text{ П}$ ).

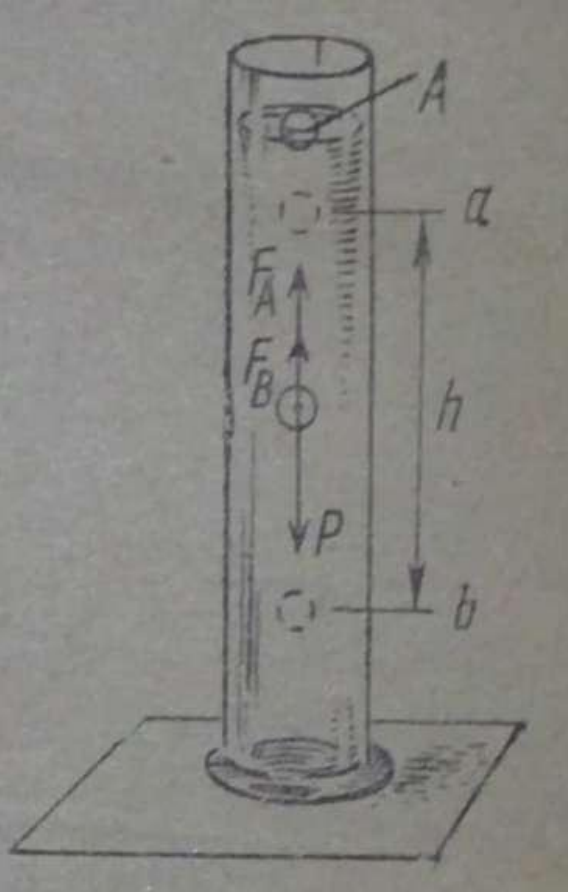
У большинства жидкостей (вода, низкомолекулярные органические соединения, истинные растворы, расплавленные металлы и их соли) коэффициент вязкости зависит только от природы жидкости и температуры (с повышением температуры коэффициент вязкости понижается). Такие жидкости называются **НЬЮТОНОВСКИМИ**.



У некоторых жидкостей, преимущественно высокомолекулярных (например, растворы полимеров) или представляющих дисперсные системы (суспензии и имульсии), коэффициент вязкости зависит также от режима течения — давления и градиента скорости. При их увеличении вязкость жидкости уменьшается вследствие нарушения внутренней структуры потока жидкости. Такие жидкости называются **структурно вязкими** или **не ньютоновскими**. Их вязкость характеризуют так называемым условным коэффициентом вязкости, который относится к определенным условиям течения жидкости (давление, скорость).

Для более вязких жидкостей применяется метод, основанный на измерении скорости падения в жидкости небольших тел сферической формы (**метод Стокса**). Стоке эмпирически установил, что при не слишком быстром движении тела сферической формы в вязкой жидкости сила **F<sub>B</sub>** сопротивления движению прямо пропорциональна скорости **v**, радиусу **r** тела и коэффициенту вязкости **η** жидкости:

$$F_B = 6\pi r\eta v$$

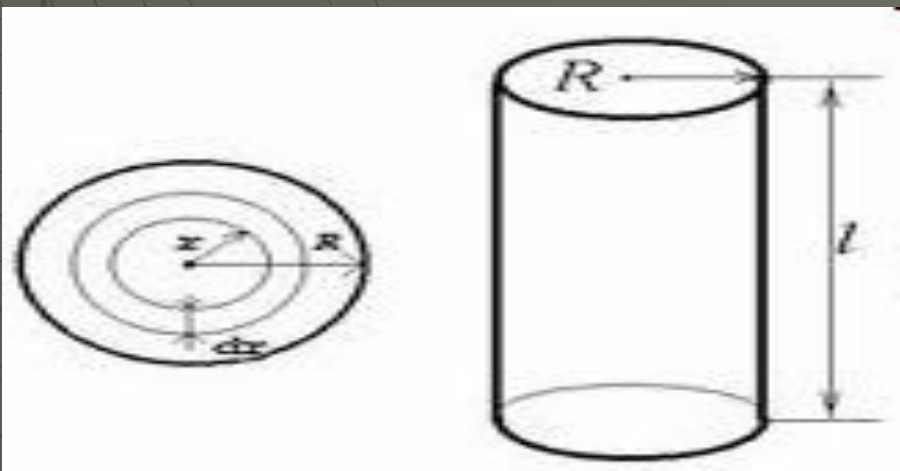
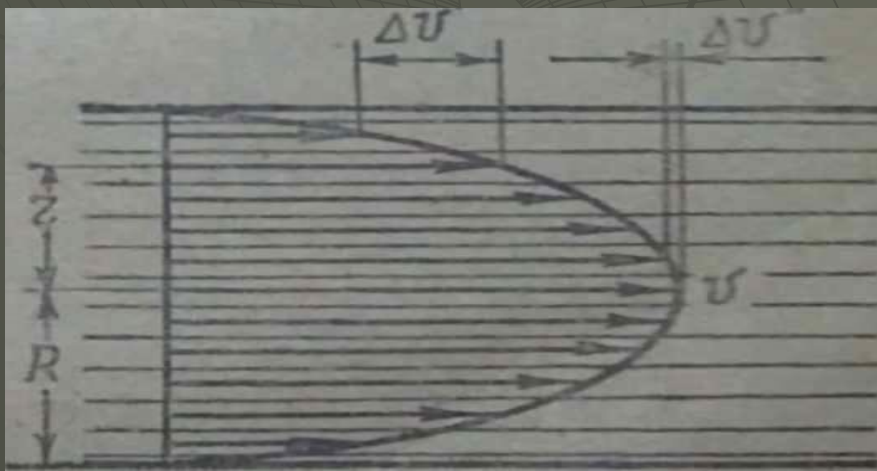


Определение делается путем измерения скорости **v** падения шарика небольшого радиуса **r** узком цилиндре, наполненном исследуемой жидкостью. При падении шарика, состоящего из вещества с плотностью **ρ** в жидкости с плотностью **ρ<sub>0</sub>** на него действуют три силы: сила тяжести **P = (4/3)nr<sup>3</sup>ρg** выталкивающая сила **F<sub>A</sub> = (4/3)nr<sup>3</sup>ρ<sub>0</sub>g** и сила сопротивления **F<sub>B</sub>**. При равномерном движении шарика **P = F<sub>A</sub> + F<sub>B</sub>**, откуда **F<sub>B</sub> = P - F<sub>A</sub>** или **6πrηv = (4/3)πr<sup>3</sup>(ρ - ρ<sub>0</sub>)g**. Отсюда коэффициент вязкости жидкости

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot gr^2 \frac{\rho - \rho_0}{v}$$

# Закон Пуазейля

Подходя к физическим основам системы кровообращения, рассмотрим течение вязкой, смачивающей стенки жидкости по горизонтальной трубе постоянного сечения. При относительно невысокой скорости течения при этом имеет ламинарный характер: слой молекул, прилегающий к стенке трубы, прилипает к ней и остается неподвижным. Следующий слой молекул под действием силы давления и при противодействии силы внутреннего трения между слоями смещается относительно пристеночного слоя и движется по отношению к стенкам трубы с некоторой небольшой скоростью. Каждый последующий слой молекул, смещаясь относительно предыдущего слоя, движется по отношению к стенке трубы с постепенно возрастающей скоростью, которая достигает наибольшего значения в центре трубы.



Математический анализ этого явления показывает, что распределение скоростей по сечению круглой трубы имеет параболический характер:

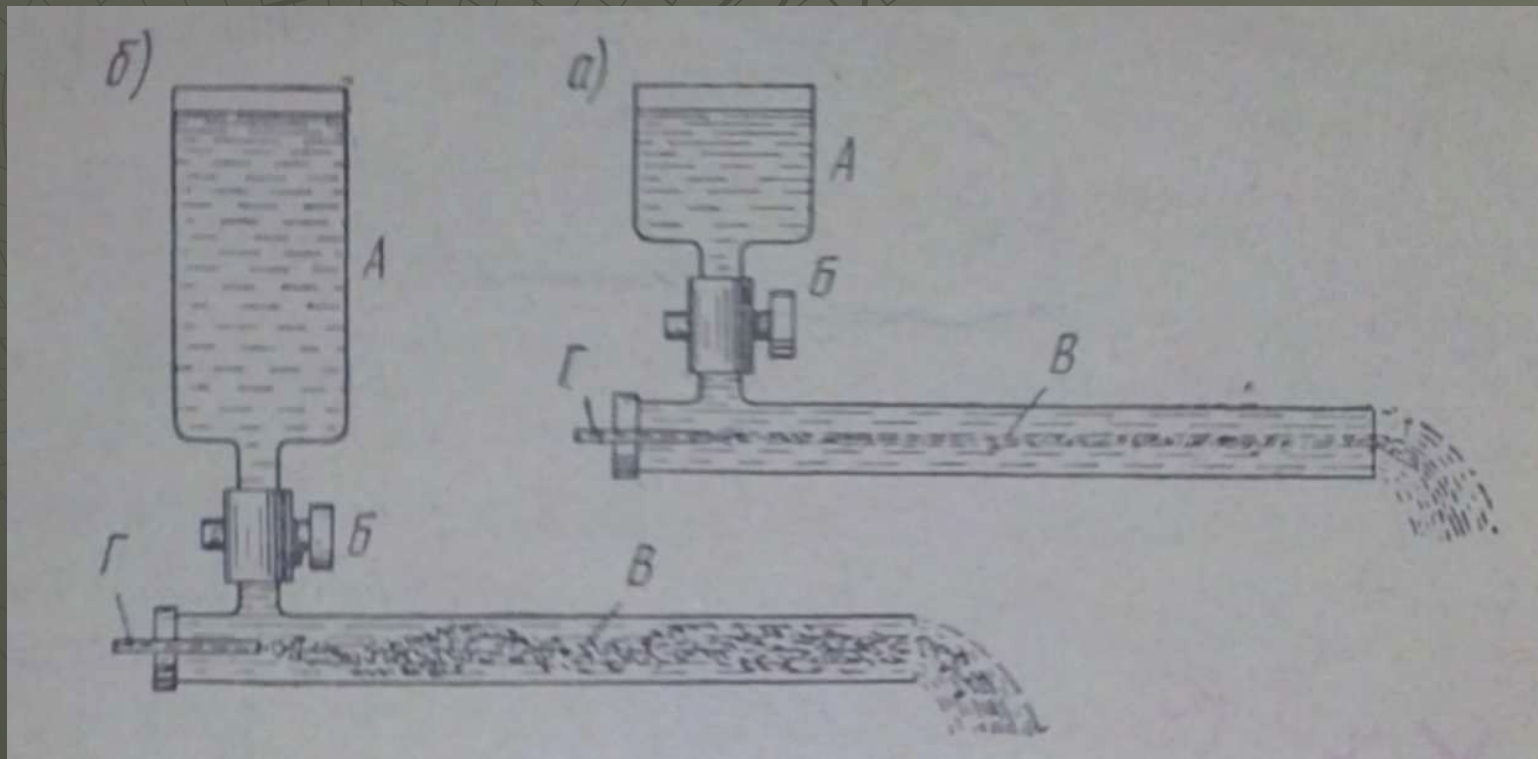
$$v = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} (R^2 - r^2)$$

Максимальная скорость в центре трубы

$$v_M = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} R^2$$

В этих формулах:  $p_1$  и  $p_2$  — давления в начале и в конце участка трубы длиной  $l$ ,  $\eta$  — коэффициент вязкости жидкости,  $R$  — радиус трубы и  $r$  — радиус рассматриваемого слоя жидкости. Градиент скорости, по абсолютной величине равный наоборот, максимален в пристеночном слое, затем постепенно уменьшается и обращается в ноль на оси трубы.

Ламинарное течение устанавливается в трубах с гладкими стенками, без резких изменений площади сечения или изгибов трубы, а также при отсутствии множественных разветвлений. При нарушении этих условий и особенно при высоких скоростях течение переходит в турбулентное: скорости частиц жидкости при этом беспорядочно меняются, образуются местные завихрения — происходит перемешивание частиц жидкости.





Это можно наблюдать на следующем опыте (рис.). В стеклянную трубку **В**, соединенную с наполненным водой резервуаром **А**, с торца вставлен стержень **Г** из легкорастворяющейся краски, от которого в общий поток воды поступает окрашенная струйка. Скорость течения воды регулируется краном **Б**. При небольшой скорости течения окрашенная струйка не смешивается с основным потоком (рис. а) — течение ламинарное. При повышении скорости течения воды окрашенная струйка начинает колебаться, теряет резкую границу, образует завихрения и при еще большей скорости разрывается на части и смешивается с общим потоком (рис. б) — течение становится турбулентным.

Характерным для турбулентного течения являются местные изменения давления в жидкости, вызывающие колебательное движение частиц, сопровождающееся звуковыми явлениями (шум, журчание и т.п.), благодаря которым турбулентное течение легко обнаруживается.

Пуазеиль опытным путем установил, что средняя скорость  $V_{\text{ср}}$  ламинарного течения жидкости по неширокой горизонтальной круглой трубе постоянного сечения прямо пропорциональна разности давлений  $p_1$  и  $p_2$  при входе и выходе из трубы, квадрату радиуса  $R$  трубы и обратно пропорциональна длине  $l$  трубы и коэффициенту вязкости  $\eta$  жидкости (закон Пуазейля):

$$V_{\text{ср}} = \frac{R^2}{8\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l}.$$

Средняя скорость  $V_{\text{ср}}$  течения жидкости определяет количество жидкости  $Q$ , протекающее через поперечное сечение  $S$  трубы в единицу времени:

$$Q = V_{\text{ср}} S, \text{ где } S = \pi R^2.$$

Следовательно,

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l}$$

# Число Рейнольдса

Скорость  $V_{кр}$  перехода ламинарного течения в турбулентное можно определить, пользуясь определенным из опыта критерием — числом Рейнольдса  $Re$  (безразмерная величина), которое связывает ее с плотностью  $\rho$ , вязкостью  $\eta$  жидкости и диаметром  $D$  трубы:

$$Re = v_{кр} \rho D / \eta.$$

Для прямой гладкой трубы  $Re_{кр} = 2300$ .

Если  $Re \geq Re_{кр}$ , то течение переходит в турбулентное.

Число Рейнольдса является критерием подобия. При моделировании гидро- и аэродинамических систем, в частности кровенос-ной системы, модель должна иметь такое же число Рейнольдса, как и натура, в противном случае не будет соответствия между ними. Это относится также и к моделированию обтекания тел при движении их в жидкости или газе.

# Методы определения вязкости жидкости

- ◆ **Капиллярный вискозиметр.**

Для определения коэффициента вязкости по этому методу применяется прибор — **капиллярный вискозиметр**. Этот прибор представляет собой двух коленчатую изогнутую трубку, одно колено которой имеет капиллярный канал и шарик в верхней части. Пипеткой наливают определенное количество эталонной жидкости в правое колено, а затем с помощью груши, засасывают жидкость в левое колено, выше метки **a**. После этого предоставляют жидкости под действием собственного веса вытекать через капилляр в расширенную часть правого колена. В тот момент, когда мениск будет проходить мимо метки **a**, нужно включить секундомер, а при прохождении мениска мимо метки **b**, секундомер следует остановить. При этом секундомер покажет время  **$t_0$** , за которое протек через капилляр объем жидкости, заключенный между метками **a** и **b**.

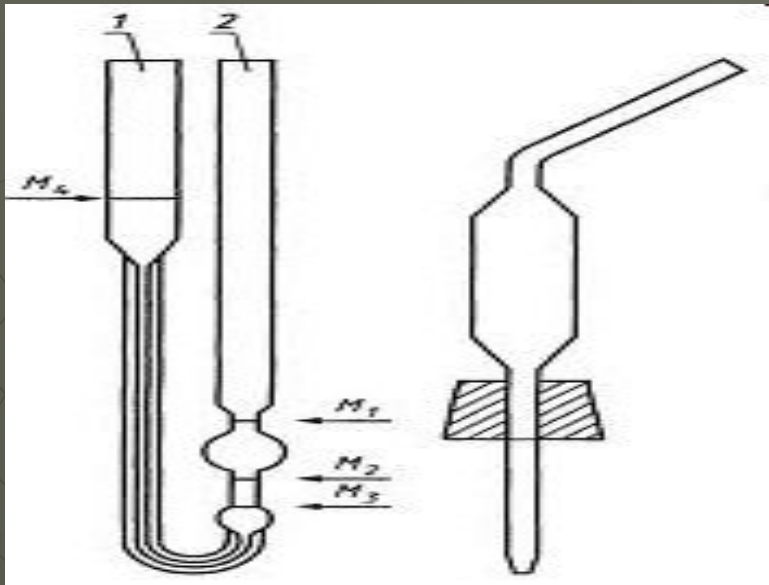
Таким же образом можно измерить  $t_x$  — время протекания такого же объема исследуемой жидкости., Для того, чтобы по формуле найти коэффициент внутреннего трения исследуемой жидкости  $\eta_x$ , нужно знать разности давлений  $\Delta p_x$  и  $\Delta p_o$ . Величина  $\Delta p$  в вискозиметре зависит от разности уровней жидкости в коленах вискозиметра:

$$\Delta p = \rho h g$$

где  $\rho$  — плотность жидкости, а  $h$  — разность уровней жидкости в коленах вискозиметра. При одинаковых разностях уровней  $h$  исследуемой и эталонной жидкостей, отношение давлений  $\frac{\Delta p_x}{\Delta p_o}$  равно отношению плотностей этих жидкостей.

Величина  $\Delta p$  уменьшается по мере вытекания жидкости, но отношение разностей давлений при равных условиях остается постоянным. Поэтому формулу можно написать следующим образом:

$$\eta_x = \eta_o \frac{\rho_x t_x}{\rho_o t_o}$$



Плотность исследуемой жидкости  $\rho_x$  можно измерить с помощью ареометра. В качестве эталонной жидкости обычно берется вода. Ее плотность  $\rho_0$  и коэффициент внутреннего трения находят по таблицам. Так как коэффициент внутреннего трения сильно зависит от температуры, измерения производят в условиях термостатирования. Для этого помещают вискозиметр в банку с водой, которая является термостатом.

## ◆ ИЗМЕРЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПО МЕТОДУ ПАДАЮЩЕГО ШАРИКА.

Этот метод широко применяется для определения коэффициента внутреннего трения сильно вязких жидкостей, таких как глицерин и различные масла. Недостатком этого метода является то, что он требует значительного количества исследуемой жидкости. При движении шарика в вязкой жидкости возникает сила трения, величина которой зависит от коэффициента внутреннего трения жидкости. Формула для вычисления этой силы была выведена Стоксом, поэтому данный метод часто называют методом Стокса. На шарик, падающий в вязкой жидкости, действуют три силы:

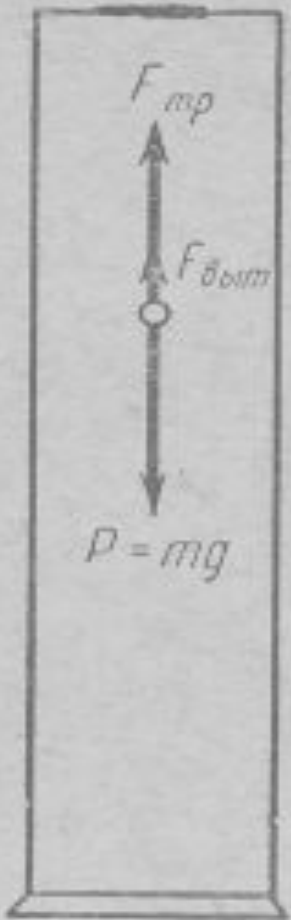
1. Направленная вниз сила тяжести  $P = mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g$

где  $r$  — радиус шарика, а  $\rho$  — плотность вещества, из которого сделан шарик.

2. Направленная вверх выталкивающая сила (**архимедова сила**), равная весу жидкости в объеме шарика

$$F_{\text{выт}} = m_1 g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{ж}} g$$

Где  $r$  — радиус шарика, а  $\rho_{\text{ж}}$  — плотность жидкости.



3. Сила трения  $F_{тр}$ . Эта сила также направлена вверх, а ее численное значение находится по формуле Стокса

$F_{тр} = 6\pi\eta r v$ , где  $r$  — радиус шарика,  $\eta$  — коэффициент внутреннего трения жидкости, а  $v$  — скорость движения шарика. Формула Стокса справедлива только для маленьких шариков, движущихся с небольшой скоростью. При увеличении размеров шариков и при возрастании скорости их движения возможно образование завихрений. В этом случае сила трения становится пропорциональной более высокой степени, скорости.

При движении шарика силы  $P$  и  $F_{выт}$  все время остаются постоянными, а сила трения возрастает по мере увеличения скорости. В начале движения сила  $F_{тр}$  очень

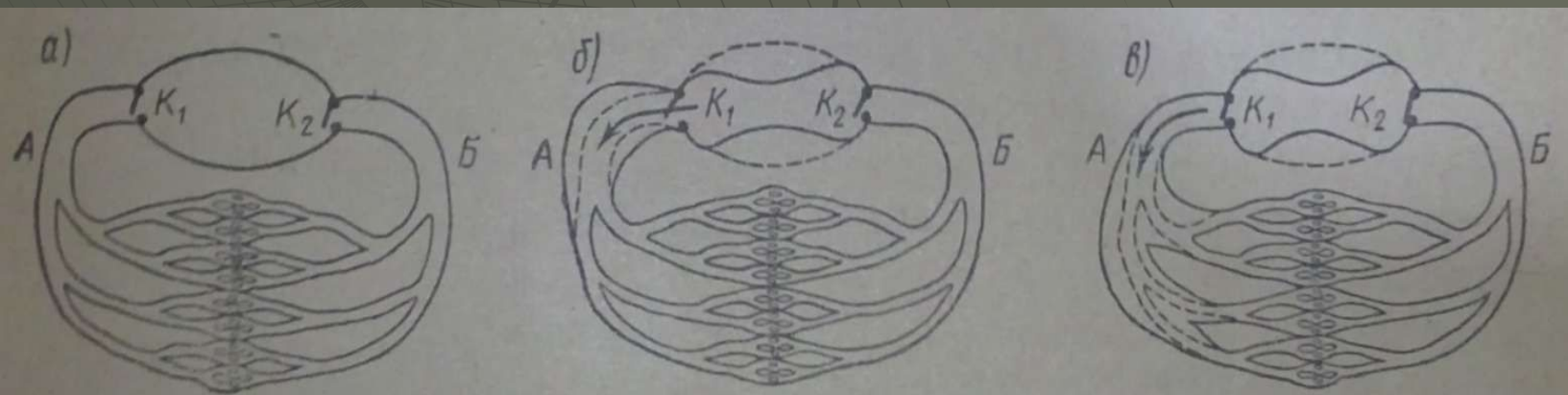
мала и шарик движется ускоренно под действием силы, равной  $P - F_{выт} - F_{тр}$ . С увеличением скорости увеличивается и сила  $F_{тр}$  и наступает такой момент, что направленные вверх силы  $F_{тр}$  и  $F_{выт}$  уравновесят направленную вниз силу тяжести  $P$ :

$$P = F_{выт} + F_{тр}$$



# Механическая работа и мощность сердца

Физическую модель сердечно-сосудистой системы можно представить в виде замкнутой (т. е. не имеющей сообщения с атмосферой), многократно разветвленной и заполненной жидкостью системы трубок с эластичными стенками (рис. а), движение жидкости в которой происходит под действием ритмически работающего нагнетательного насоса (на рис. в виде резиновой груши). При сжатии груши содержащийся в ней объем жидкости проталкивается через отверстие клапана  $K_1$  в систему трубок со стороны **А**, вызывая в них продвижение жидкости в сторону **Б**, затем клапан  $K_1$  запирается, груша расширяется и через клапан  $K_2$  в нее поступает соответствующий объем жидкости со стороны **Б** системы.



Особенностью данной системы является прежде всего постепенное и множественное разветвление трубок, особенно в ее средней части. Последняя состоит из весьма большого числа коротких параллельных трубок малого сечения, общий просвет которых имеет настолько большое сечение, что скорость жидкости здесь снижается почти до нуля. Однако внутреннее трение в пристеночных слоях этих трубок настолько велико, что именно эта средняя часть системы представляет наибольшее сопротивление течению жидкости и обуславливает максимальное падение давления.

Другой особенностью системы является эластичность стенок трубок, благодаря которой при ритмической работе насоса ток жидкости в ней принимает равномерный характер. Допустим, что при сжатии груши некоторое количество жидкости поступает в трубку А, уже за полную жидкостью под некоторым давлением. Давление в трубке А повышается, эластичные стенки ее растягиваются и вмещают избыток жидкости (рис. 33, б). Затем стенки трубки А постепенно сокращаются и прогоняют избыток жидкости в следующее звено системы, стенки которого также сначала растягиваются, затем сокращаются и таким образом проталкивают жидкость в последующие звенья системы трубок. В результате течение жидкости постепенно принимает равномерный характер.

Переходим к сосудистой системе. Начальное давление, необходимое для продвижения крови по всей сосудистой системе, создается работой сердца. Рассмотрим схематически явления, происходящие в большом круге кровообращения. При каждом сокращении левого желудочка сердца в аорту, уже заполненную кровью под соответствующим давлением, выталкивается так называемый ударный объем крови, в среднем равный 65—70 мл. Затем клапаны аорты закрываются.

Поступивший в аорту дополнительный объем крови повышает давление в ней и соответственно растягивает ее стенки. Волна повышенного давления, которое называется **систолическим**, вызывает колебания сосудистых стенок, распространяющиеся вдоль более крупных артерий в виде упругой волны. Эта волна давления называется **пульсовой волной**, скорость ее распространения зависит от упругости сосудистых стенок и имеет порядок 6—8 м/с.

Затем в период расслабления сердечной мышцы (**диастола**) стенки аорты постепенно сокращаются до исходного положения и проталкивают поступивший объем крови в более дистальные крупные артерии. Стенки последних в свою очередь растягиваются и затем, сокращаясь, проталкивают кровь в последующие звенья сосудистой системы. В результате ток крови принимает непрерывный характер со скоростью в крупных сосудах порядка **0,3—0,5 м/с**.

Кровь представляет собой суспензию форменных элементов в белковом растворе — плазме. Поэтому, строго говоря, она должна быть отнесена к неньютоновским жидкостям. Кроме того, при течении крови по сосудам наблюдается концентрация форменных элементов в центральной части потока, где вязкость соответственно увеличивается. Но поскольку вязкость крови не так велика, этими явлениями пренебрегают и считают ее коэффициент вязкости постоянной величиной. Относительная вязкость крови в норме составляет 4,2—6. При патологических условиях она может снижаться до 2—3 (при анемии) или повышаться до 15—20 (при полицитемии). Относительная вязкость сыворотки крови в норме 1,64—1,69 и при патологии 1,5—2,0.

При инфекционных заболеваниях вязкость увеличивается. При брюшной тиф, туберкулезе уменьшается вязкость. Веночная кровь обладает более вязкостью чем артерии.

Работа, совершаемая сердцем, затрачивается на преодоление сил давления и сообщение крови кинетической энергии. Рассчитаем работу, совершаемую при однократном сокращении левого желудочка. Изобразим ударный объем крови  $V_y$  в виде цилиндра. Можно считать, что сердце продавливает этот объем по аорте сечением  $S$  на расстояние  $l$  при среднем давлении  $p$ .

Совершаемая при этом работа

$$A_1 = Fl = pSl = pV_y.$$

На сообщение кинетической энергии этому объему крови затрачена Работа

$$A_2 = mv^2/2 = \rho V_y v^2/2,$$

где  $\rho$  — плотность крови,  $v$  — скорость крови в аорте. Таким образом, Работа левого желудочка сердца при сокращении равна

$$A_\Delta = A_1 + A_2 = pV_y + \rho V_y v^2/2.$$

Так как работа правого желудочка принимается равной  $0,2$  от работы левого, то работа всего сердца при однократном сокращении

$$A = A_\Delta + 0,2A_\Delta = 1,2 (pV_y + \rho V_y v^2/2).$$