Закон сохранения энергии в механике

Закон сохранения энергии материальной точки, находящейся в потенциальном поле

Потенциальное поле – поле консервативных сил.

$$E = E_{к} + E_{p} \,(1)$$

полная механическая энергия системы.

$$dA = dE_{к} \,(2)$$

– совершается работа, идущая на увеличение *Ек*.

$$dA = F \cdot dx = -dE_{p} \,(3)$$

– связь силы и потенциальной энергии

$$F = -\frac{dE_{p}}{dx}.$$

$$d\left(E_{к} + E_{p}\right) = d\left(A - A\right) = 0.(4) \Rightarrow dE = 0 \Rightarrow E = const.$$

Полная механическая энергия материальной точки (тела, частицы), находящейся в потенциальном поле (в консервативной системе), есть величина постоянная, т.е. с течением времени не меняется.

Потенциальные кривые

Одномерное движение тела (материальной точки). В этом случае *Ep* является функцией лишь одной переменной (например, координаты *x*) – *Ep* (*x*).

График зависимости *Ep* от некоторого аргумента называется *потенциальной кривой*.

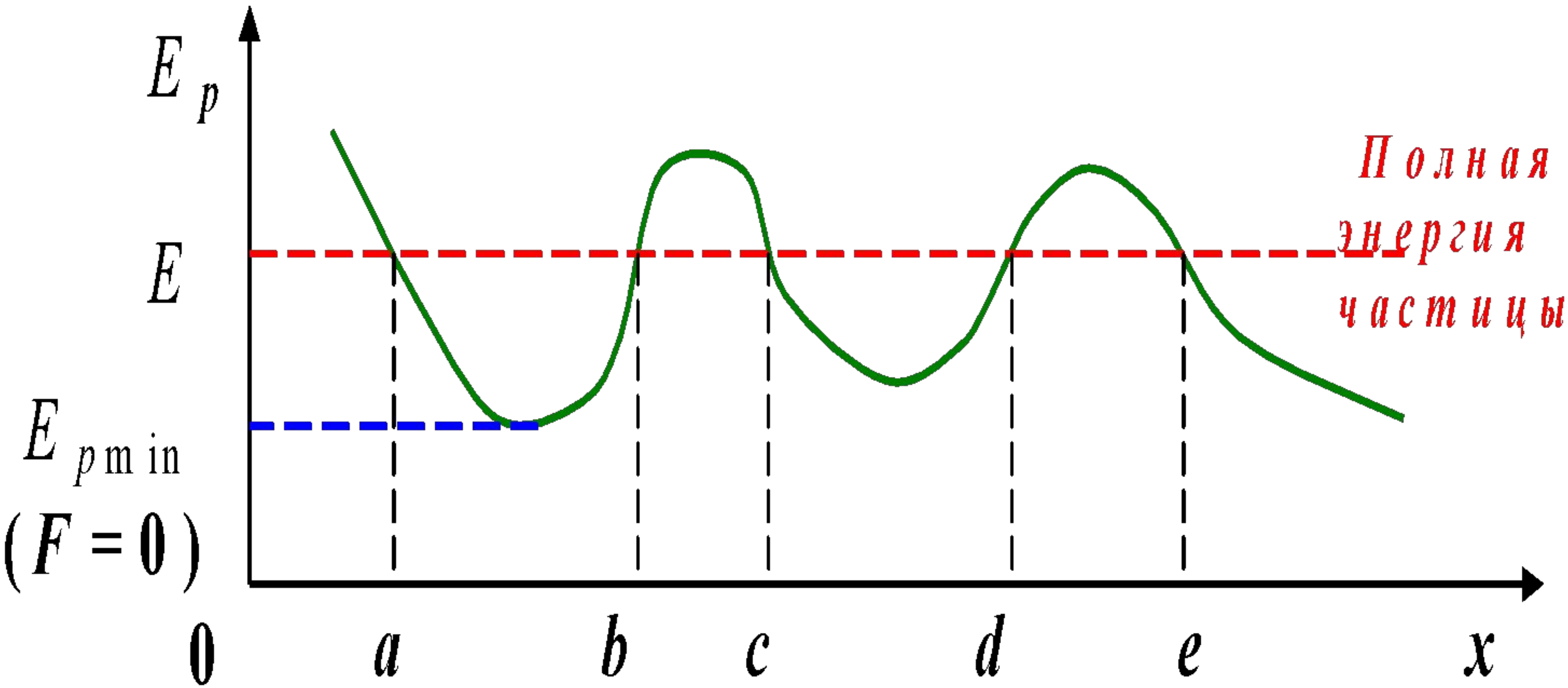
Анализ потенциальных кривых определяет характер движения тел.

Рассмотрим консервативную систему, т.е. систему, в которой превращение механической
энергии в другие виды отсутствует.
В ней действует закон сохранения энергии:

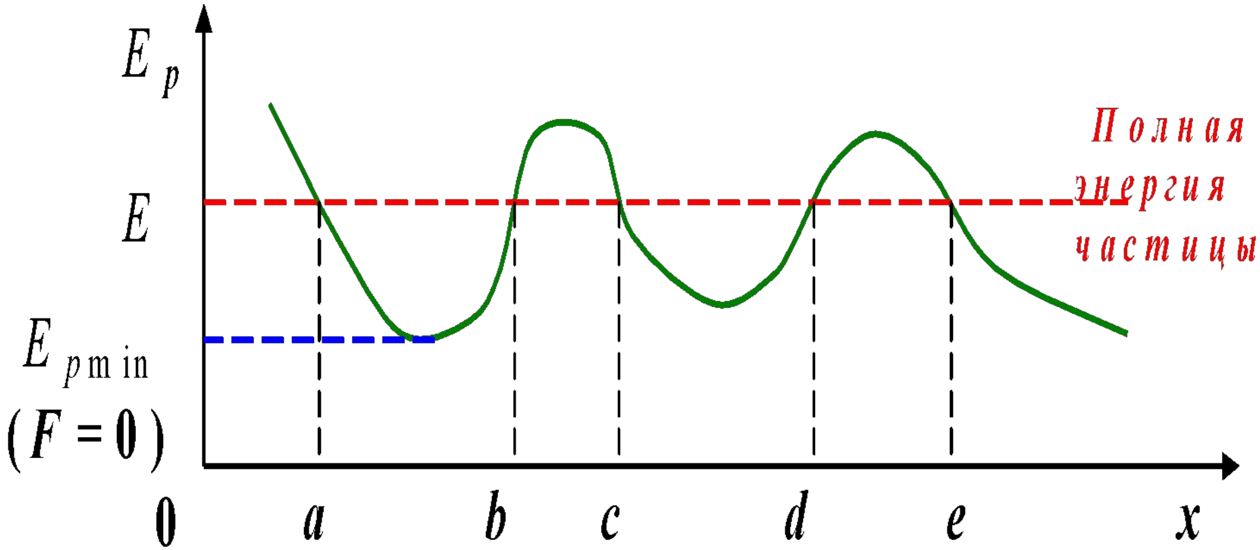
$$E = E_{к} + E_{p}.$$

Кинетическая энергия не может быть
отрицательной, потому $E_{к\,\min} = 0.$

Для частиц (материальных точек) $E_{p}(x) \le E.$



E_p
Полная энергия частицы
E
$E_{p\,min}$
$(F = 0)$
0
a
b
c
d
e
x



• Области (*ab*); (*cd*): частица находится в *потенциальной яме* и совершает движение в ограниченной области пространства – *финитное движение (ограниченное)*.

• Области (*bc*); (*de*) содержат *потенциальный барьер*. Частица в этой области находиться не может.

Т.е. классическая частица потенциальный барьер преодолеть не может.

• Область (е +∞): частица может уйти как угодно далеко – *инфинитное движение (неограниченное)*.

Закон сохранения энергии в механике

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек массой m_i, движущихся со скоростями v_i.

$F_{i\ конс}^{внутр}$ – внутренние консервативные силы.

$F_{i\ конс}^{внеш}$ – внешние консервативные силы.

$F_{i\ неконс}^{внеш}$ – внешние неконсервативные силы.

Второй закон Ньютона для *i* точки:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{i\ конс}^{внутр} + \vec{F}_{i\ конс}^{внеш} + \vec{F}_{i\ неконс}^{внеш}.(1)$$

Под действием силы точка за время *dt* совершает перемещение dr_i:

$$m_i d\vec{v}_i \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{\vec{v}_i} = \left(\vec{F}_{i\ конс}^{внутр} + \vec{F}_{i\ конс}^{внеш} + \vec{F}_{i\ неконс}^{внеш}\right) d\vec{r}_i.(2)$$

$$m_i\left(\vec{v}_i d\vec{v}_i\right) - \left(\vec{F}_{i\ конс}^{внутр} + \vec{F}_{i\ конс}^{внеш}\right) d\vec{r}_i = \vec{F}_{i\ неконс}^{внеш} d\vec{r}_i.(3)$$

Суммируя по всем точкам, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i(\vec{v}_i d\vec{v}_i)}_{\substack{m_i \frac{dv_i^2}{2} = d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) \\ \sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dE_к}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_{i\ конс}^{\,внутр} + \vec{F}_{i\ конс}^{\,внеш}\right) d\vec{r}_i}_{\substack{работа\ \ конс-х\ \ сил \\ dA_{конс} = -dE_p}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\ неконс}^{\,внеш}\, d\vec{r}_i}_{\substack{работа\ \ внеш-х \\ неконс-х\ \ сил}} . (4) \Rightarrow$$

$$\underbrace{d\left(E_к + E_p\right)}_{\substack{изменение\ \ полной \\ мех.\ \ энергии\ \ сист.}} = dA. (5)$$

При переходе системы из одного состояния в другое:

$$\int_1^2 d\underbrace{\left(E_к + E_p\right)}_{E} = A_{12}$$ работа, совершаемая внешними неконсервативными силами.

Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, т.е. $A_{12} = 0 \Rightarrow dE = 0, (6) \Rightarrow E = const. (7)$

Полная механическая энергия консервативной системы есть величина постоянная, с течением времени не меняется.

Консервативной системой называется механическая система, внутренние силы которой консервативны, а внешние силы – консервативны и стационарны.

Закон сохранения механической энергии связан с *однородностью времени*, т.е. физические законы инвариантны относительно начала отсчета времени.

- Замкнутая система – частный случай.

В этом случае внешние силы не рассматриваются, т.е.

$F_{внеш} = 0 \Rightarrow E = const$ – полная механическая энергия системы. Происходит превращение *Ep* → *Eк*, и обратно *Eк* → *Ep* .

Наряду с консервативными силами в системе могут существовать неконсервативные силы (диссипативные, например, $F_{тр}$). В этом случае с течением времени полная механическая энергия системы уменьшается. Но механическая энергия не исчезает, она переходит в другие виды энергии, например, при $F_{тр}$ во внутреннюю энергию.

Закон сохранения энергии в механике является частным случаем *фундаментального (всеобщего) закона сохранения энергии*:

сумма всех видов энергии в замкнутой системе постоянна

$$\sum E_i = const.$$

Применение законов сохранения импульса и энергии для анализа упругого и неупругого ударов шаров
Понятие об ударе в физике

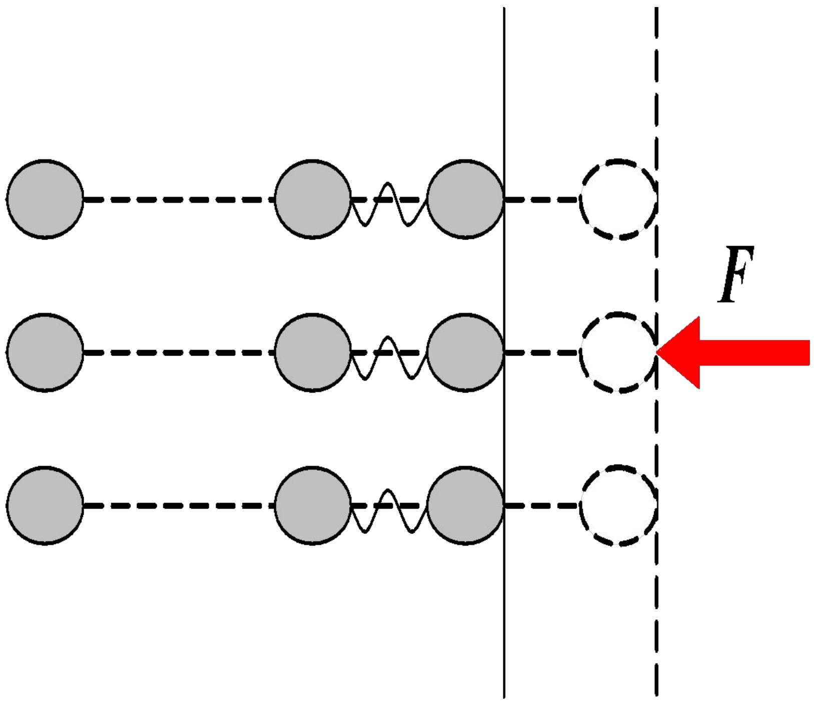
Удар – кратковременное взаимодействие двух или более тел.

Центральный удар (двух шаров) – удар, при котором движение происходит по прямой, соединяющей центры тел.

Сила взаимодействия при ударе тел велика $\Delta t \to 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} \to \infty; m\frac{dv}{dt} = F - \textit{велика}$

следовательно, внешними силами, действующими на тело, можно пренебречь. Поэтому систему тел в процессе удара можно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

Тело во время удара претерпевает деформацию. Кинетическая энергия во время удара переходит в энергию деформации.



- Если деформация упругая, то тело стремится принять прежнюю форму. Следователь, имеем *упругий удар*.
- Если деформация неупругая, то тело не принимает прежнюю форму – *неупругий удар*.

Во время удара происходит перераспределение энергии между соударяющимися телами.

В общем случае относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения, т.к. нет идеально упругих тел.

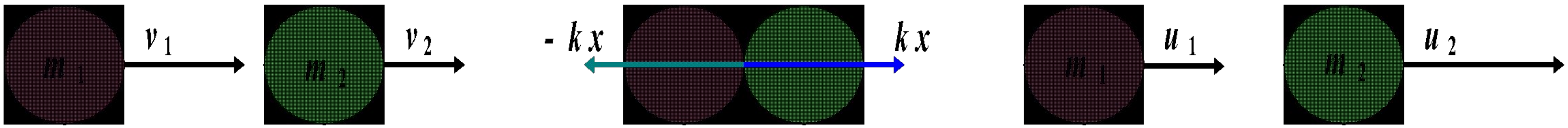
Коэффициент восстановления – отношение нормальных составляющих относительной скорости после удара u_n и до удара v_n:

$$\varepsilon = \frac{u_n}{v_n}.$$

$\varepsilon = 1$ – абсолютно упругий удар.

$\varepsilon = 0$ – абсолютно неупругий удар.

Абсолютно упругий удар – удар, при котором внутренняя энергия соударяющихся тел не изменяется.



Возникает $F_{упр} = -kx$, шары раздвигаются и $E_к$ восстанавливается.

Закон сохранения импульса:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 . (1)$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} . (2)$$

$$\left.\begin{aligned} &m_1\left(v_1 - u_1\right) = m_2\left(u_2 - v_2\right).(3) \\ &\frac{m_1}{2}\left(v_1^2 - u_1^2\right) = \frac{m_2}{2}\left(u_2^2 - v_2^2\right).(4) \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\text{Уравнение}(4)}{(3)} \Rightarrow v_1 + u_1 = u_2 + v_2.(5) \Rightarrow$$

$$u_2 = v_1 + u_1 - v_2.(6)$$

$$\text{Уравнение}(6) \rightarrow (1):$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 v_1 + m_2 u_1 - m_2 v_2.(7) \Rightarrow$$

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + \left(m_1 - m_2\right)v_1}{m_1 + m_2}.(8)$$

$$\textit{Уравнение}(8) \to (6) \quad \Rightarrow$$

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2} . (9)$$

$$\bullet\; m_2 >> m_1; v_2 = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{2m_2 \overset{=0}{v_2} - m_2 v_1}{m_2} = -v_1,$$

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - 0)\overset{0}{v_2}}{m_2} = 2\frac{m_1}{m_2} v_1 \approx 0.$$

$$p_2 = m_2 u_2 = 2m_1 v_1.$$

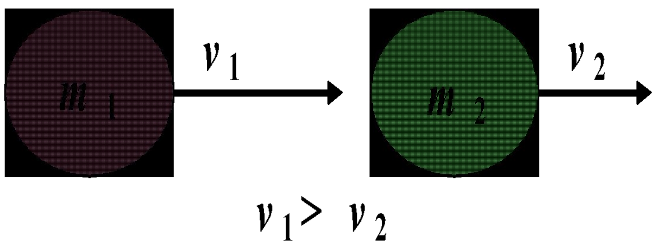
- $m_2 >> m_1; v_2 < 0 \Rightarrow u_1 = \dfrac{-2m_2v_2 - m_2v_1}{m_2} = -(2v_2 + v_1).$

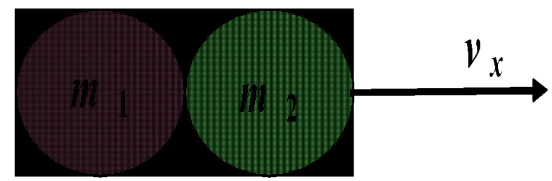
- $m_2 >> m_1; v_2 > 0 \Rightarrow u_1 = 2v_2 - v_1; \quad u_1 = 0\, если \qquad v_2 = \dfrac{v_1}{2}.$

- $m_2 = m_1 \Rightarrow u_1 = v_2; u_2 = v_1.$

При одинаковых массах происходит обмен скоростями.

Абсолютно неупругий удар – удар, при котором полная механическая энергия соударяющихся тел не сохраняется, частично переходит во внутреннюю энергию; импульс сохраняется.





При абсолютно неупругом ударе тела после удара двигаются с одинаковой скоростью.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_x . (1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v_x^2}{2} = Q . (2)$$

$$Из \quad уравнения (1) \Rightarrow v_x = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. (3)$$

- Наковальня

$$m_2 >> m_1; v_2 = 0 \Rightarrow v_x = \frac{m_1 v_1 + 0}{0 + m_2} \cong 0.$$

Вся энергия переходит в теплоту или деформацию.

$$v_x = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. (3)$$

● Удар молотка по гвоздю.

$$m_1 >> m_2; v_2 = 0 \Rightarrow v_x = v_1.$$

Вся энергия переходит в механическую энергию.