

# **Закон сохранения энергии в механике**

**Закон сохранения энергии  
материальной точки,  
находящейся в потенциальном  
поле**

Потенциальное поле – поле консервативных сил.

$$E = E_k + E_p \quad (1) \quad \text{полная механическая энергия системы.}$$

$$dA = dE_k \quad (2) \quad \text{– совершается работа, идущая на увеличение } E_k.$$

$$dA = F \cdot dx = -dE_p \quad (3) \quad \text{– связь силы и потенциальной энергии}$$

$$F = -\frac{dE_p}{dx}.$$

$$d(E_k + E_p) = d(A - A) = 0. \quad (4) \Rightarrow dE = 0 \Rightarrow E = \text{const.}$$

Полная механическая энергия материальной точки (тела, частицы), находящейся в потенциальном поле (в консервативной системе), есть величина постоянная, т.е. с течением времени не меняется.

# Потенциальные кривые

Одномерное движение тела (материальной точки). В этом случае  $E_p$  является функцией лишь одной переменной (например, координаты  $x$ ) –  $E_p(x)$ .

График зависимости  $E_p$  от некоторого аргумента называется *потенциальной кривой*.

Анализ потенциальных кривых определяет характер движения тел.

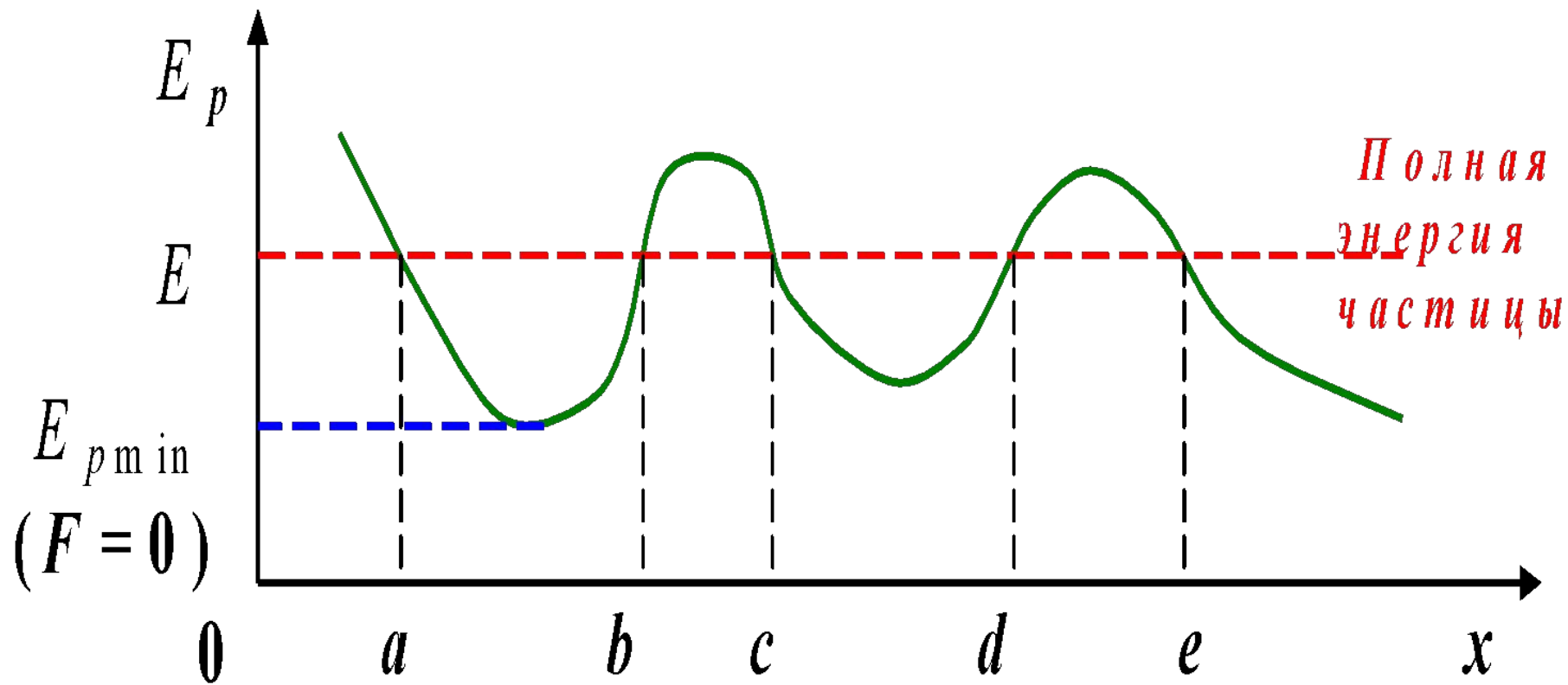
Рассмотрим консервативную систему, т.е. систему, в которой превращение механической энергии в другие виды отсутствует.

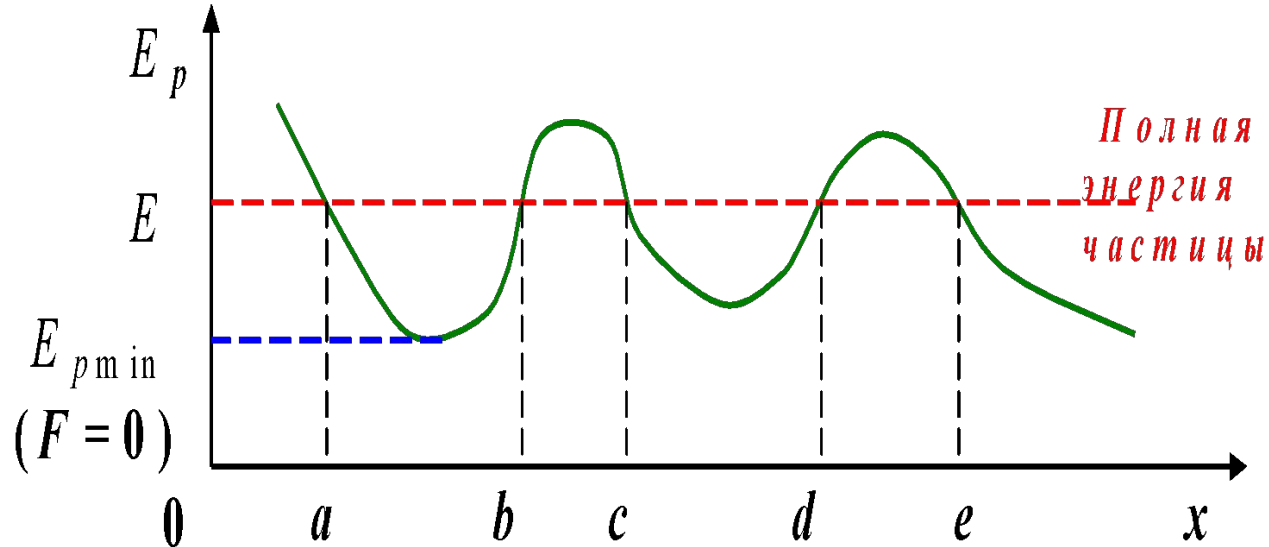
В ней действует закон сохранения энергии:

$$E = E_k + E_p.$$

Кинетическая энергия не может быть отрицательной, потому  $E_{k \min} = 0$ .

Для частиц (материальных точек)  $E_p(x) \leq E$ .





- Области  $(ab)$ ;  $(cd)$ : частица находится в *потенциальной яме* и совершает движение в ограниченной области пространства – *финитное движение* (ограниченное).
  - Области  $(bc)$ ;  $(de)$  содержат *потенциальный барьер*. Частица в этой области находиться не может.
- Т.е. классическая частица потенциальный барьер преодолеть не может.
- Область  $(e + \infty)$ : частица может уйти как угодно далеко – *инфинитное движение* (неограниченное).

# Закон сохранения энергии в механике

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $n$  материальных точек массой  $m_i$ , движущихся со скоростями  $v_i$ .

$F_{i \text{ конс}}^{\text{внутр}}$  – внутренние консервативные силы.

$F_{i \text{ конс}}^{\text{внеш}}$  – внешние консервативные силы.

$F_{i \text{ неконс}}^{\text{внеш}}$  – внешние неконсервативные силы.



Второй закон Ньютона для  $i$  точки:

$$m_i \frac{dv_i^{\square}}{dt} = F_{i \text{ конс}}^{\square \text{ внутр}} + F_{i \text{ конс}}^{\square \text{ внеш}} + F_{i \text{ неконс}}^{\square \text{ внеш}}. (1)$$

Под действием силы точка за время  $dt$  совершает перемещение  $dr_i^{\square}$ :

$$m_i dv_i^{\square} \frac{dr_i^{\square}}{dt} = \left( F_{i \text{ конс}}^{\square \text{ внутр}} + F_{i \text{ конс}}^{\square \text{ внеш}} + F_{i \text{ неконс}}^{\square \text{ внеш}} \right) dr_i^{\square}. (2)$$

$$m_i \left( v_i^{\square} dv_i^{\square} \right) - \left( F_{i \text{ конс}}^{\square \text{ внутр}} + F_{i \text{ конс}}^{\square \text{ внеш}} \right) dr_i^{\square} = F_{i \text{ неконс}}^{\square \text{ внеш}} dr_i^{\square}. (3)$$

Суммируя по всем точкам, получаем:

$$\sum_{i=1}^n m_i (v_i dv_i) - \sum_{i=1}^n (F_{i \text{ конс}}^{\text{внутр}} + F_{i \text{ конс}}^{\text{внеш}}) dr_i = \sum_{i=1}^n F_{i \text{ неконс}}^{\text{внеш}} dr_i. (4) \Rightarrow$$

$m_i \frac{dv_i^2}{2} = d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)$   
*работа конс-х сил*  
 $dA_{\text{конс}} = -dE_p$

*работа внеш-х неконс-х сил*

$$\sum_{i=1}^m d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dE_k$$

$$d(E_k + E_p) = dA. (5)$$

*изменение полной мех. энергии сист.*

При переходе системы из одного состояния в другое:

$$\int_1^2 d(E_k + E_p) = A_{12} \text{ работа, совершаемая внешними неконсервативными силами.}$$

$E$

Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, т.е.  $A_{12} = 0 \Rightarrow dE = 0, (6) \Rightarrow E = const.(7)$

Полная механическая энергия консервативной системы есть величина постоянная, с течением времени не меняется.

Консервативной системой называется механическая система, внутренние силы которой консервативны, а внешние силы – консервативны и стационарны.

Закон сохранения механической энергии связан с *однородностью времени*, т.е. физические законы инвариантны относительно начала отсчета времени.

- Замкнутая система – частный случай.

В этом случае внешние силы не рассматриваются, т.е.

$F_{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow E = \text{const}$  – полная механическая энергия системы. Происходит превращение  $E_p \rightarrow E_k$ , и обратно  $E_k \rightarrow E_p$ .

Наряду с консервативными силами в системе могут существовать неконсервативные силы (диссипативные, например,  $F_{тр}$ ). В этом случае с течением времени полная механическая энергия системы уменьшается. Но механическая энергия не исчезает, она переходит в другие виды энергии, например, при  $F_{тр}$  во внутреннюю энергию.

Закон сохранения энергии в механике является частным случаем *фундаментального (всеобщего) закона сохранения энергии*:

сумма всех видов энергии в замкнутой системе постоянна

$$\sum E_i = \textit{const.}$$

**Применение законов сохранения импульса и энергии для анализа упругого и неупругого ударов шаров**  
**Понятие об ударе в физике**

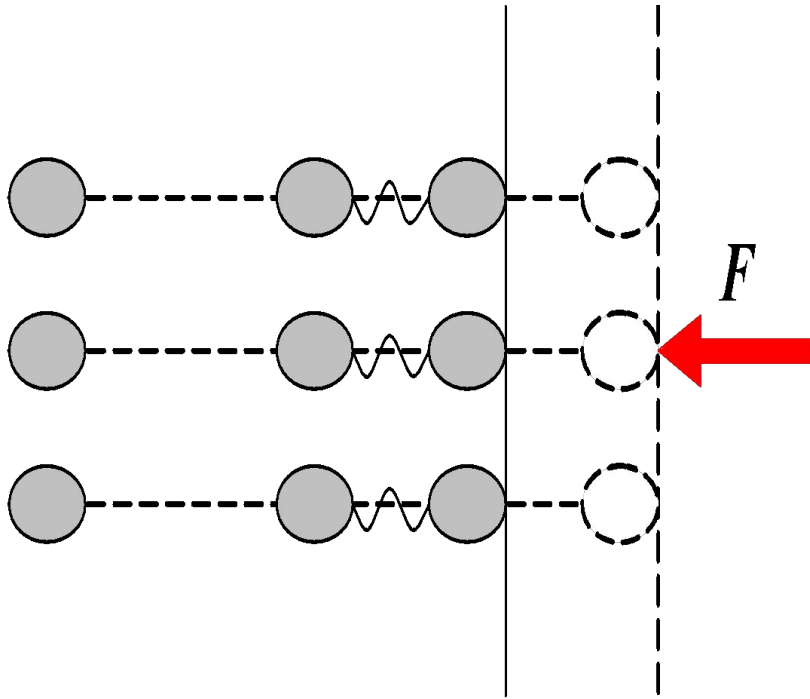
**Удар** – кратковременное взаимодействие двух или более тел.

**Центральный удар** (двух шаров) – удар, при котором движение происходит по прямой, соединяющей центры тел.

Сила взаимодействия при ударе тел велика  $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} \rightarrow \infty; m \frac{dv}{dt} = F$  – велика следовательно, внешними силами, действующими на тело, можно пренебречь. Поэтому систему тел в процессе удара можно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

Тело во время удара претерпевает деформацию. Кинетическая энергия во время удара переходит в энергию деформации.





- Если деформация упругая, то тело стремится принять прежнюю форму. Следовательно, имеем *упругий удар*.
- Если деформация неупругая, то тело не принимает прежнюю форму – *неупругий удар*.

Во время удара происходит перераспределение энергии между соударяющимися телами.

В общем случае относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения, т.к. нет идеально упругих тел.

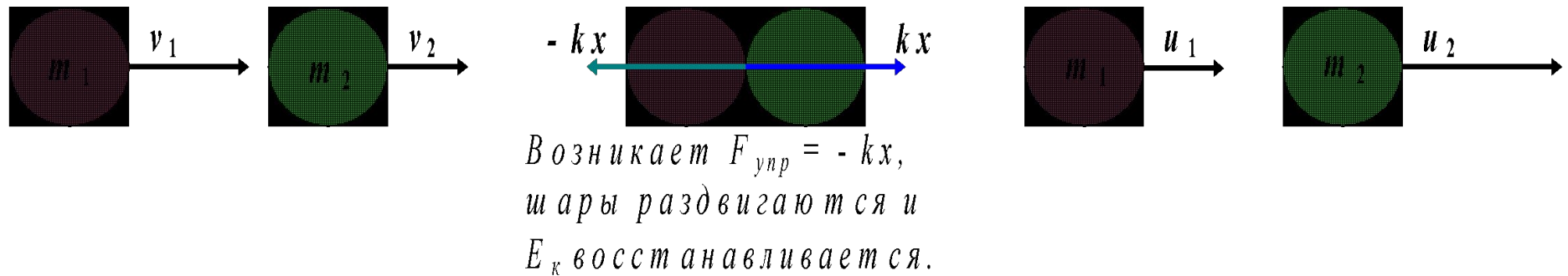
**Коэффициент восстановления** – отношение нормальных составляющих относительной скорости после удара  $u_n$  и до удара  $v_n$ :

$$\varepsilon = \frac{u_n}{v_n}.$$

$\varepsilon = 1$  – абсолютно упругий удар.

$\varepsilon = 0$  – абсолютно неупругий удар.

**Абсолютно упругий удар** – удар, при котором внутренняя энергия соударяющихся тел не изменяется.



Закон сохранения импульса:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. (1)$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. (2)$$

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2). (3)$$

$$\frac{m_1}{2}(v_1^2 - u_1^2) = \frac{m_2}{2}(u_2^2 - v_2^2). (4)$$

$$\frac{\text{Уравнение(4)}}{(3)} \Rightarrow v_1 + u_1 = u_2 + v_2. (5) \Rightarrow$$

$$u_2 = v_1 + u_1 - v_2. (6)$$

Уравнение(6)  $\rightarrow$  (1):

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2v_1 + m_2u_1 - m_2v_2. (7) \Rightarrow$$

$$u_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}. (8)$$

*Уравнение(8) → (6) ⇒*

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}. (9)$$

$$\bullet m_2 \gg m_1; v_2 = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{2m_2 v_2 - m_2 v_1}{m_2} = -v_1,$$

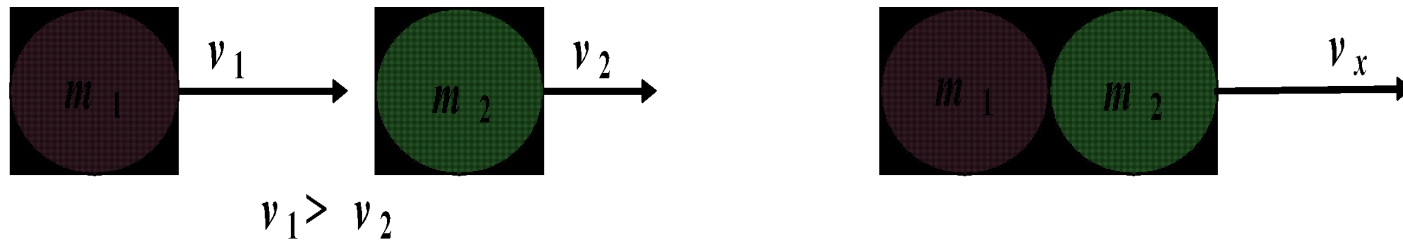
$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - 0)v_2}{m_2} = 2 \frac{m_1}{m_2} v_1 \approx 0.$$

$$p_2 = m_2 u_2 = 2m_1 v_1.$$

- $m_2 \gg m_1; v_2 < 0 \Rightarrow u_1 = \frac{-2m_2 v_2 - m_2 v_1}{m_2} = -(2v_2 + v_1)$ .
- $m_2 \gg m_1; v_2 > 0 \Rightarrow u_1 = 2v_2 - v_1; u_1 = 0$  если  $v_2 = \frac{v_1}{2}$ .
- $m_2 = m_1 \Rightarrow u_1 = v_2; u_2 = v_1$ .

При одинаковых массах происходит обмен скоростями.

**Абсолютно неупругий удар** – удар, при котором полная механическая энергия соударяющихся тел не сохраняется, частично переходит во внутреннюю энергию; импульс сохраняется.



При абсолютно неупругом ударе тела после удара двигаются с одинаковой скоростью.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_x. (1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v_x^2}{2} = Q. (2)$$



Из уравнения(1)  $\Rightarrow v_x = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$ (3)

- Наковальня

$$m_2 \gg m_1; v_2 = 0 \Rightarrow v_x = \frac{m_1 v_1 + 0}{0 + m_2} \cong 0.$$

Вся энергия переходит в теплоту или деформацию.

$$v_x = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. (3)$$

- Удар молотка по гвоздю.

$$m_1 \gg m_2; v_2 = 0 \Rightarrow v_x = v_1.$$

Вся энергия переходит в механическую энергию.