

ГЛАВА 3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

3.1 Импульс частицы и системы частиц. Закон сохранения импульса

Законы сохранения

- Существуют величины, обладающие важным свойством **оставаться в процессе движения механической системы неизменными (т.е. сохраняться)**:
 - импульс
 - энергия
 - момент импульса

Законы сохранения этих величин являются фундаментальными принципами физики (они выполняются для любых, а не только механических, систем)

Импульс частицы

- **Импульсом частицы** (количеством движения) называется вектор, равный произведению массы частицы на ее скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- Запишем уравнение движения частицы (II закон Ньютона через импульс):

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

«Импульсная» форма записи II закона Ньютона

- Таким образом, *производная по времени импульса частицы равна действующей на нее силе:*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

- Если на частицу никакие силы не действуют, то ее импульс сохраняется:

$$\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$$

Импульс силы

- Пусть зависимость силы от времени $\mathbf{F}(t)$ известна:

$$\mathbf{F}(t) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Leftrightarrow d\mathbf{p} = \mathbf{F}(t)dt$$

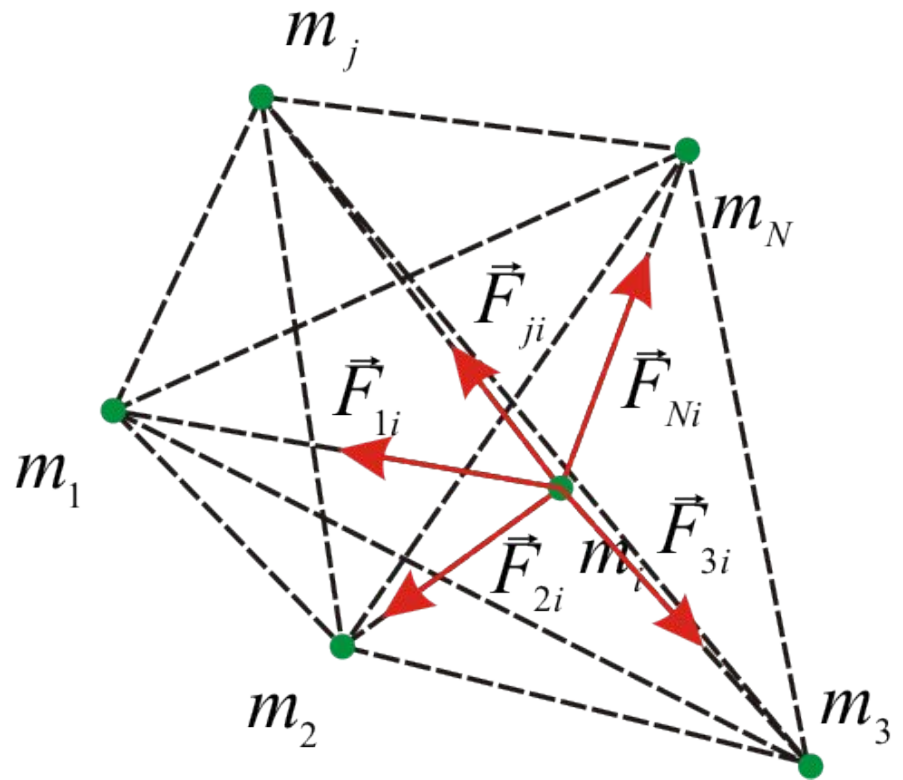
$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{кон}} - \mathbf{p}_{\text{нач}} = \int_0^t \mathbf{F}(t)dt$$

- **Импульсом силы** называется вектор, равный произведению средней силы $\langle \mathbf{F} \rangle$ на промежуток времени t ее действия:

$$\langle \mathbf{F} \rangle \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$$

Импульс системы частиц

- Рассмотрим произвольную систему частиц.
- **Внутренние силы** – силы взаимодействия между частицами системы (на рисунке показаны силы взаимодействия i -й частицы системы с остальными)
- **Внешние силы** – силы взаимодействия частиц системы с телами, не входящими в систему.



Импульс системы частиц

- Пусть на каждую частицу системы действуют как внутренние, так и внешние силы.
- Обозначим: i – порядковый номер частицы, $\mathbf{F}_{i \text{ внутр}}$ и $\mathbf{F}_{i \text{ внеш}}$ – равнодействующие всех внутренних и внешних сил, приложенных к i -й частице системы.
- **Импульс системы** – это векторная сумма импульсов всех входящих в систему частиц:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i$$

Вывод закона изменения импульса системы

- Найдем физическую величину, которая определяет скорость изменения импульса системы. Для этого запишем уравнение движения i -й частицы:

$$\frac{dp_i}{dt} = F_{i\text{внутр}} + F_{i\text{внеш}}$$

- Сложим аналогичные уравнения для всех N частиц:

$$\sum_{i=1}^N \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N p_i = \frac{dp}{dt} = \sum_{i=1}^N F_{i\text{внутр}} + \sum_{i=1}^N F_{i\text{внеш}}$$

Вывод закона изменения импульса системы

- По III закону Ньютона силы взаимодействия частицы системы друг с другом попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Поэтому *сумма всех внутренних сил равна нулю:*

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{i\text{внутр}} = 0$$

- Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

Закон изменения импульса системы частиц

- Производная по времени импульса системы частиц равна сумме всех внешних сил (т.е. изменить импульс системы могут только внешние силы):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

- Приращение импульса системы равно импульсу внешних сил:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\text{кон}} - \vec{p}_{\text{нач}} = \int_0^t \vec{F}_{\text{внеш}} dt$$

Закон сохранения импульса

- **Замкнутая система** тел (частиц) – система, не взаимодействующая с внешними (не входящими в систему) телами:

$$\sum F_{i\text{внеш}} = 0$$

- **Закон сохранения импульса системы:** *импульс замкнутой системы частиц с течением времени не изменяется (сохраняется):*

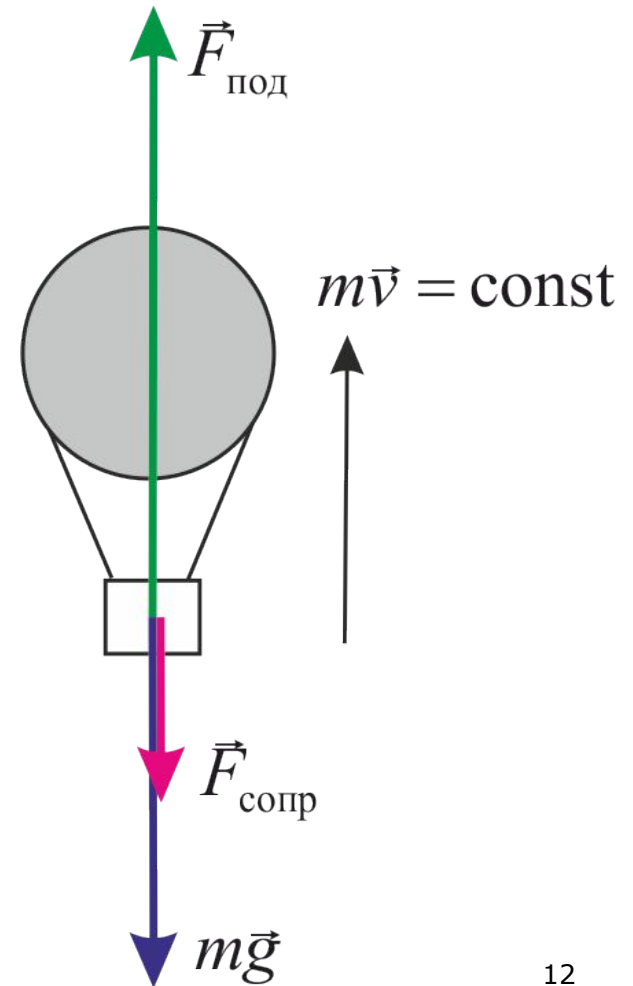
$$F_{i\text{внеш}} = 0, \sum_{i=1}^N F_{i\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \text{const}$$

Частные случаи закона сохранения импульса незамкнутой системы частиц

1. Если система не замкнута, но сумма внешних сил равна нулю, импульс системы сохраняется:

$$\vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0, \sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \text{const}$$

Пример. Воздушный шар поднимается с постоянной скоростью вверх. На него действуют: сила тяжести, сила сопротивления воздуха, подъемная сила. Однако сумма этих сил равна нулю и скорость воздушного шара в процессе движения не изменяется.

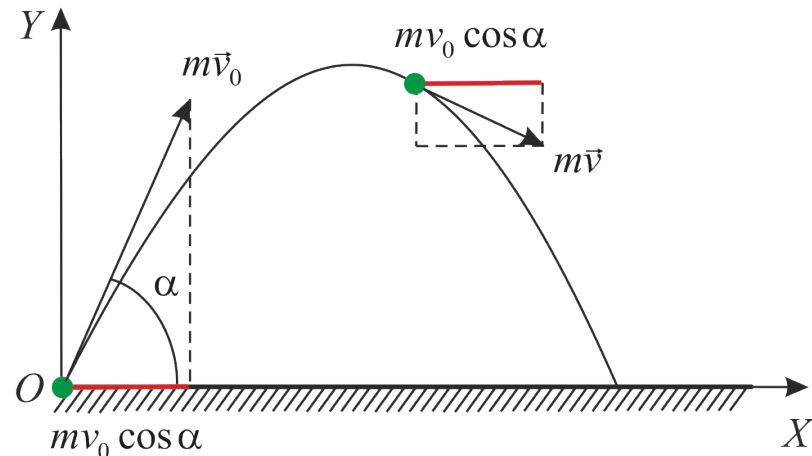


Частные случаи закона сохранения импульса незамкнутой системы частиц

2. Если проекция на некоторое направление суммы внешних сил равна нулю, проекция на это же направление импульса системы сохраняется:

$$F_{\text{внешх}} = 0, \Rightarrow \frac{dp_x}{dt} = 0 \Leftrightarrow p_x = \text{const}$$

Пример. Тело массой m брошено с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то проекция на горизонтальную ось X действующей на тело внешней силы – силы тяжести – равна нулю. Проекция на ось X импульса тела, равна в начальный момент движения $mv_0 \cos \alpha = \text{const}$ в любой момент полета.

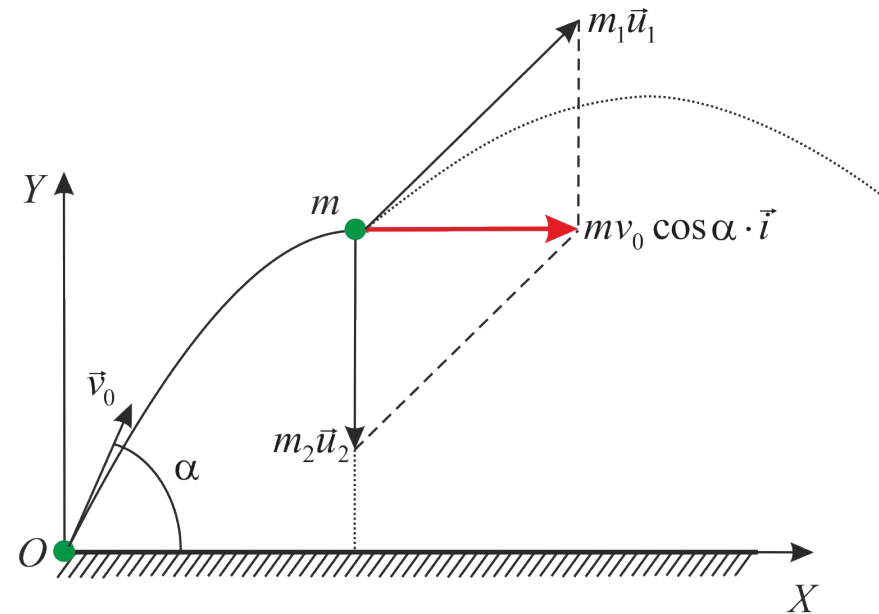


Частные случаи закона сохранения импульса незамкнутой системы частиц

3. Импульс системы приблизительно сохраняется, если ограниченная по модулю внешняя сила действует в течение очень короткого промежутка времени:

$$\Delta \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{внеш}} dt = \langle \vec{F}_{\text{внеш}} \rangle \Delta t \approx 0 \Rightarrow \vec{p} \approx \text{const}$$

Пример. Во время взрыва в воздухе снаряда на него действует внешняя сила – сила тяжести. Время взрыва мало, так что импульсом силы тяжести можно пренебречь. Следовательно, импульс снаряда непосредственно перед взрывом равен суммарному импульсу его осколков сразу после взрыва.



разрыв снаряда в верхней точке траектории

$$m v_0 \cos \alpha \cdot \vec{i} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

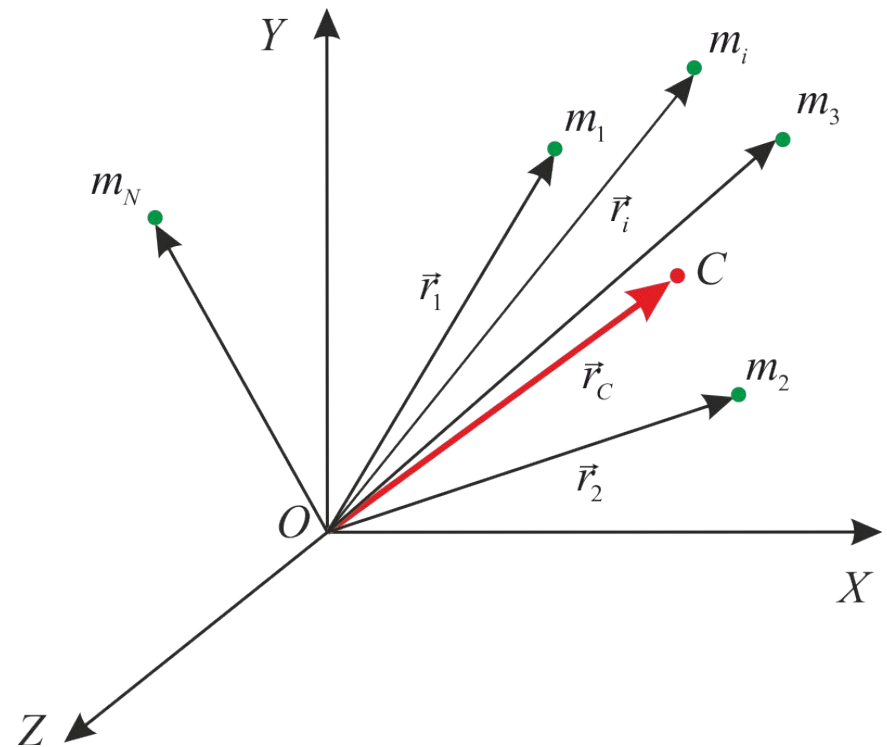
ГЛАВА 3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

3.2 Движение центра масс системы частиц

Центр масс системы

- Рассмотрим систему частиц с массами $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_N$. Пусть положения частиц в пространстве заданы радиусами-векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N$.
- **Центром масс (центром инерции)** системы частиц называется точка C в пространстве, положение которой определяется радиусом-вектором:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{m}$$



Свойства центра масс

1. Импульс \mathbf{p} системы частиц равен произведению массы m системы на скорость \mathbf{v}_C ее центра масс:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$$

Доказательство:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = m \cdot \frac{d}{dt} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{m} = m \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = m\mathbf{v}_C$$

Свойства центра масс

2. Центр масс замкнутой системы частиц движется равномерно и прямолинейно (или покоится).

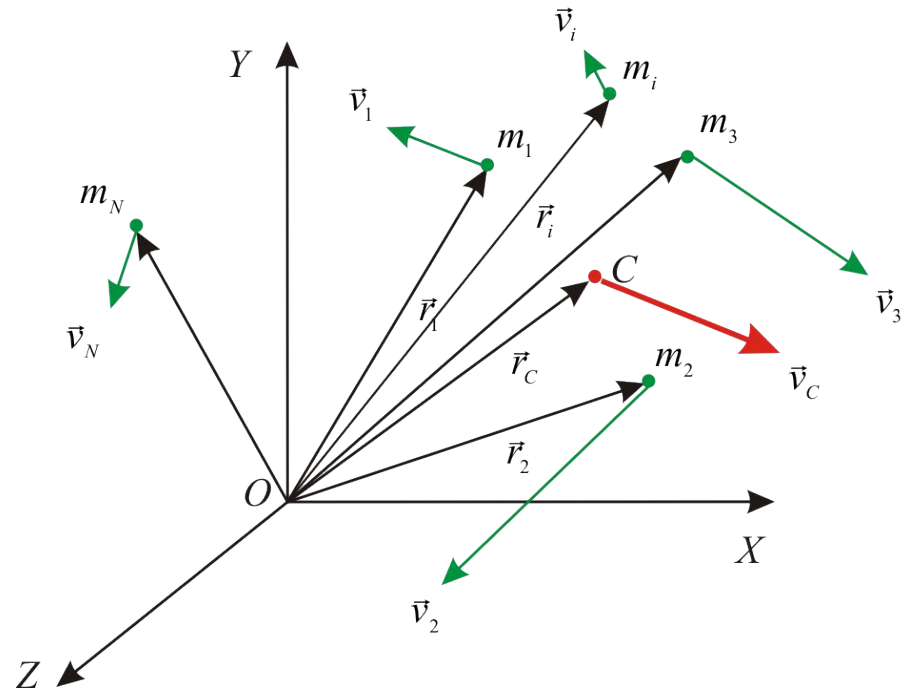
Доказательство: если система замкнута, то $\mathbf{p} = \text{const}$, следовательно, из первого свойства следует, что $\mathbf{v}_C = \text{const}$.

Свойства центра масс

3. Теорема о движении центра масс. *Центр масс системы частиц движется как материальная точка, в которой заключена масса всей системы, и к которой приложена сила, равна сумме всех внешних сил:*

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

Здесь $\vec{F}_{\text{внеш}}$ – сумма всех внешних сил, приложенных ко всем частицам системы.



Система центра масс

- Для описания движения иногда удобно использовать систему отсчета, в которой центр масс покоится.
- **Системой центра масс** называется жестко связанная с центром масс система отсчета, которая движется поступательно по отношению к инерциальной системе отчета.

Свойства системы центра масс

1. Импульс системы частиц в системе центра масс равен нулю:

$$\underline{\mathbf{p}} = 0$$

Доказательство. Поскольку в системе центра масс скорость центра масс равна нулю, $\mathbf{v}_C = 0$, то в соответствии со вторым свойством центра масс, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C = 0$.

Свойства системы центра масс

2. Если система состоит из двух частиц, то их импульсы \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 в системе центра масс равны по величине и противоположны по направлению:

$$\underline{\underline{p}}_1 = -\underline{\underline{p}}_2$$

Доказательство. Импульс системы частиц в системе центра масс равен нулю:

$$\underline{\underline{p}} = \underline{\underline{p}}_1 + \underline{\underline{p}}_2 = 0 \Rightarrow p_1 = -p_2$$

ГЛАВА 3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

3.3 Движение тела с переменной массой

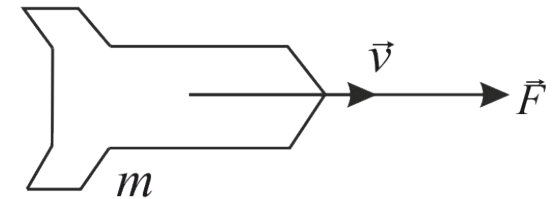
Уравнение Мещерского

- Уравнение движения тела с переменной массой было впервые получено русским механиком И.В. Мещерским (1859 – 1935), и носит его имя. Выведем его на примере движения ракеты.
- **Принцип действия ракеты:** ракета с большой скоростью выбрасывает вещество (газообразные продукты сгорания топлива), которое с силой воздействует на ракету и сообщает ей ускорение. Пусть на ракету действует внешняя сила F (это может быть сила тяготения, сила сопротивления среды, в которой движется ракета и т.д.)

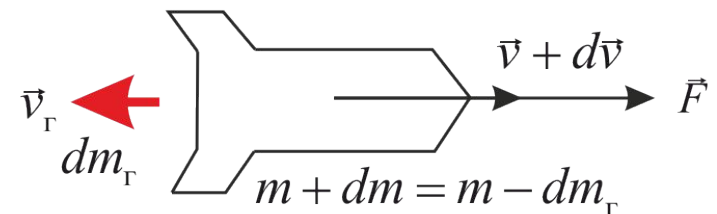
Вывод уравнения Мещерского

- Рассмотрим движение ракеты относительно неподвижной системы отсчета.
- Пусть в момент времени t $m(t)$ – масса ракеты, $\mathbf{v}(t)$ – ее скорость, $m\mathbf{v}(t)$ – импульс ракеты.
- Спустя промежуток времени dt : масса и скорость ракеты получают приращения dm и $d\mathbf{v}$, при этом $dm < 0$, т.к. масса ракеты уменьшается за счет сгорания топлива.
- Импульс ракеты станет равным $(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$.
- Импульс образовавшихся за промежуток времени dt газов равен $dm_{\Gamma} \mathbf{v}_{\Gamma}$, где dm_{Γ} – масса газов, \mathbf{v}_{Γ} – скорость газов в неподвижной системе отсчета.
- Масса образовавшихся газов равна убыли массы ракеты: $dm_{\Gamma} = -dm$.

В момент времени t



В момент времени $t + dt$



Вывод уравнения Мещерского

- Приращение импульсы системы «ракета - топливо» за промежуток времени dt :

$$d\vec{p} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_{\Gamma}\vec{v}_{\Gamma} - m\vec{v} = \vec{F}dt$$

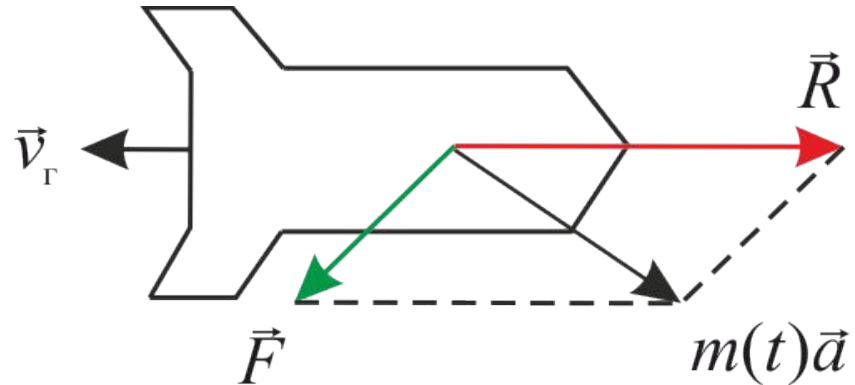
- Раскроем скобки и пренебрежем малой величиной $dm d\vec{v}$, заменим dm_{Γ} на $-dm$, тогда получим:

$$m\vec{v} + m d\vec{v} + \vec{v} dm - dm\vec{v}_{\Gamma} - m\vec{v} = m d\vec{v} + \vec{v} dm - dm\vec{v}_{\Gamma} = \vec{F}dt$$

- Обозначим $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{\Gamma} - \mathbf{v}$ – относительная скорость истечения газов из ракеты; разделим обе части уравнения на dt

Вывод уравнения Мещерского

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} + F$$



В этом уравнении масса является функцией времени:
 $m = m(t)$.

- Слагаемое $u(dm/dt)$ называется **реактивной силой** (сила, с которой действуют на ракету вытекающие из нее газы)

Формула Циолковского

- В качестве примера использования уравнения Мещерского применим его к движению ракеты, на которую внешние силы не действуют ($\mathbf{F} = 0$):

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u} \frac{dm}{dt} \Leftrightarrow m d\mathbf{v} = \mathbf{u} dm$$

- Пусть ракета движется прямолинейно. Учтем, что $\mathbf{u} \uparrow \downarrow \mathbf{v}$, тогда уравнение примет вид:

$$m dv = -u dm$$

Формула Циолковского

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u} \Leftrightarrow \ln m = -\frac{v}{u} + \ln C$$

- Для определения постоянной C рассмотрим начальные условия: $m(t = 0) = m_0$ – начальная масса ракеты, когда ее скорость равна нулю: $v(t = 0) = 0$. Тогда $C = m_0$.
- **Формула Циолковского:**

$$m = m_0 e^{-\frac{v}{u}}$$

Формула Циолковского

- Формула Циолковского позволяет оценить относительный запас топлива, необходимый для сообщения ракете определенной скорости v .
- *Пример.* Допустим, ракете необходимо сообщить первую космическую скорость $v \approx 8$ км/с. Если скорость газовой струи составляет $u \approx 1$ км/с, то из уравнения Циолковского следует, что $m_0/m = e^8 \approx 2980$, т.е. необходимо, чтобы начальная масса ракеты была примерно в 3000 раз больше ее массы в тот момент, когда она достигнет необходимой скорости. Таким образом, практически вся масса ракеты приходится на топливо.