ГЛАВА 3.
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

3.1 Импульс частицы и системы частиц. Закон сохранения импульса

Законы сохранения

- Существуют величины, обладающие важным свойством **оставаться в процессе движения механической системы неизменными (т.е. сохраняться)**:
  - импульс
  - энергия
  - момент импульса

Законы сохранения этих величин являются фундаментальными принципами физики

(они выполняются для любых, а не только механических, систем)

Импульс частицы

- **Импульсом частицы** (количеством движения) называется вектор, равный произведению массы частицы на ее скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- Запишем уравнение движения частицы (II закон Ньютона через импульс):

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

«Импульсная» форма записи II закона Ньютона

- Таким образом, *производная по времени импульса частицы равна действующей на нее силе*:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

- Если на частицу никакие силы не действуют, то ее импульс сохраняется:

$$\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$$

Импульс силы

- Пусть зависимость силы от времени **F**(*t*) известна:

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} \Leftrightarrow d\vec{p} = \vec{F}(t)dt$$

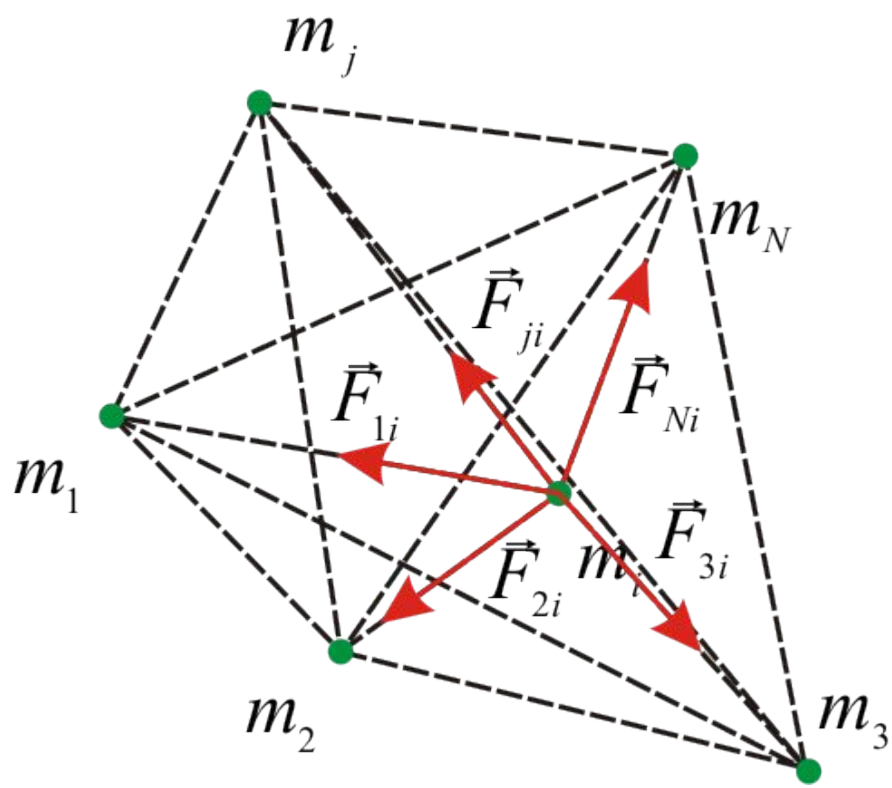
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\text{кон}} - \vec{p}_{\text{нач}} = \int_0^t \vec{F}(t)dt$$

- **Импульсом силы** называется вектор, равный произведению средней силы **<F>** на промежуток времени *t* ее действия:

$$\langle\vec{F}\rangle\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

Импульс системы частиц

- Рассмотрим произвольную систему частиц.
- **Внутренние силы** – силы взаимодействия между частицами системы (на рисунке показаны силы взаимодействия *i*-й частицы системы с остальными)
- **Внешние силы** – силы взаимодействия частиц системы с телами, не входящими в систему.



Импульс системы частиц

- Пусть на каждую частицу системы действуют как внутренние, так и внешние силы.
- Обозначим: i – порядковый номер частицы, $\mathbf{F}_{i\ \text{внутр}}$ и $\mathbf{F}_{i\ \text{внеш}}$ – равнодействующие всех внутренних и внешних сил, приложенных к i-й частице системы.
- **Импульс системы** – это векторная сумма импульсов всех входящих в систему частиц:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

Вывод закона изменения импульса системы

- Найдем физическую величину, которая определяет скорость изменения импульса системы. Для этого запишем уравнение движения *i*-й частицы:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{i\text{внутр}} + \vec{F}_{i\text{внеш}}$$

- Сложим аналогичные уравнения для всех *N* частиц:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} p_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i\text{внутр}} + \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i\text{внеш}}$$

Вывод закона изменения импульса системы

- По III закону Ньютона силы взаимодействия частицы системы друг с другом попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Поэтому *сумма всех внутренних сил равна нулю*:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\,\text{внутр}} = 0$$

- Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

Закон изменения импульса системы частиц

- *Производная по времени импульса системы частиц равна сумме всех внешних сил* (т.е. изменить импульс системы могут только внешние силы):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

- Приращение импульса системы равно импульсу внешних сил:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{кон} - \vec{p}_{нач} = \int_0^t \vec{F}_{внеш}\,dt$$

Закон сохранения импульса

- **Замкнутая система** тел (частиц) – система, не взаимодействующая с внешними (не входящими в систему) телами:

$$\vec{F}_{i\text{внеш}} = 0$$

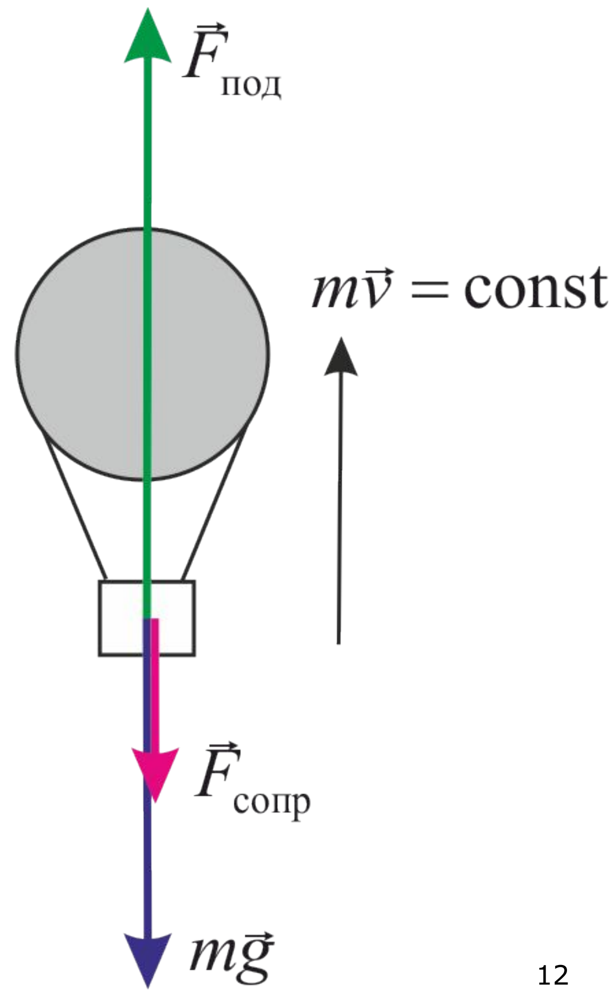
- **Закон сохранения импульса системы**: *импульс замкнутой системы частиц с течением времени не изменяется (сохраняется)*:

$$\vec{F}_{i\text{внеш}} = 0, \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \text{const}$$

Частные случаи закона сохранения импульса незамкнутой системы частиц

1. *Если система не замкнута, но сумма внешних сил равна нулю, импульс системы сохраняется:*

$$\vec{F}_{i\text{внеш}} \neq 0, \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \text{const}$$



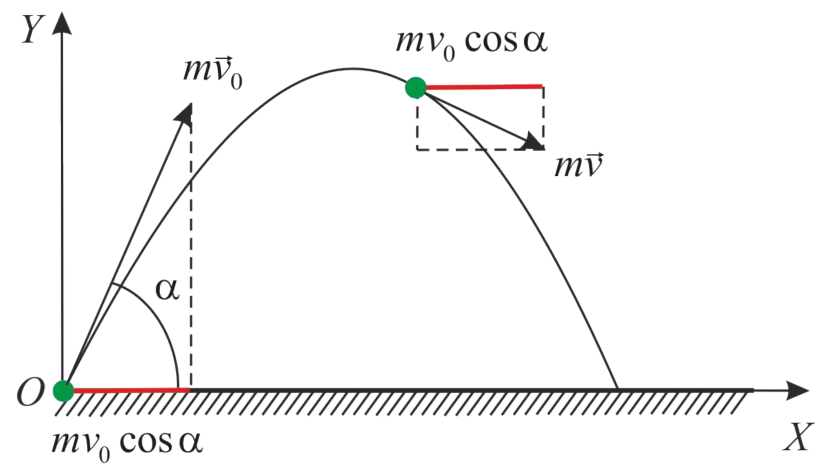
Пример. Воздушный шар поднимается с постоянной скоростью вверх. На него действуют: сила тяжести, сила сопротивления воздуха, подъемная сила. Однако сумма этих сил равна нулю и скорость воздушного шара в процессе движения не изменяется.

Частные случаи закона сохранения импульса незамкнутой системы частиц

2. *Если проекция на некоторое направление суммы внешних сил равна нулю, проекция на это же направление импульса системы сохраняется:*

$$F_{\text{внеш}x} = 0, \Rightarrow \frac{dp_x}{dt} = 0 \Leftrightarrow p_x = \text{const}$$

Пример. Тело массой m брошено с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то проекция на горизонтальную ось X действующей на тело внешней силы – силы тяжести – равна нулю. Проекция на ось X импульса тела, равна в начальный момент движения $mv_0\cos\alpha$ = const в любой момент полета.

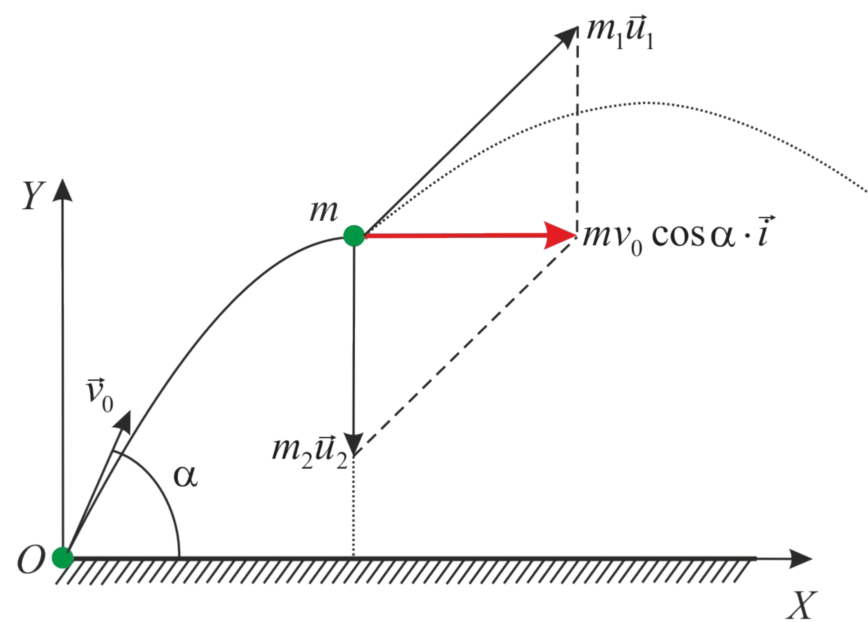


Частные случаи закона сохранения импульса незамкнутой системы частиц

3. *Импульс системы приблизительно сохраняется, если ограниченная по модулю внешняя сила действует в течение очень короткого промежутка времени:*

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{внеш}}\,dt = \left\langle \vec{F}_{\text{внеш}} \right\rangle \Delta t \approx 0 \Rightarrow \vec{p} \approx \text{const}$$

Пример. Во время взрыва в воздухе снаряда на него действует внешняя сила – сила тяжести. Время взрыва мало, так что импульсом силы тяжести можно пренебречь. Следовательно, импульс снаряда *непосредственно перед* взрывом равен суммарному импульсу его осколков *сразу* после взрыва.



разрыв снаряда в верхней точке траектории

$$mv_0\cos\alpha\cdot\vec{i} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

ГЛАВА 3.
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

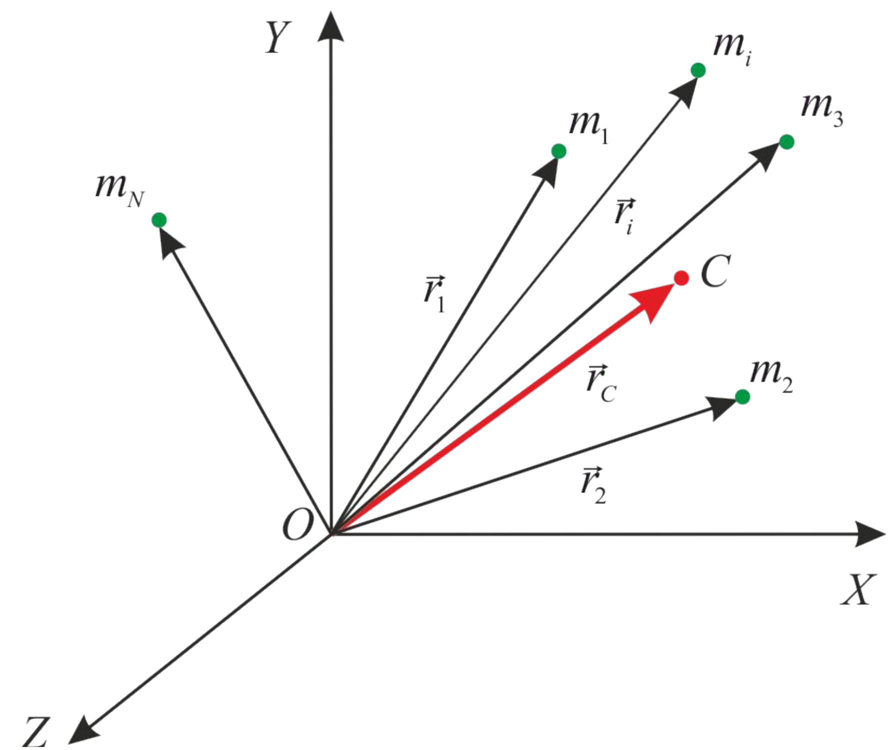
3.2 Движение центра масс системы частиц

Центр масс системы

- Рассмотрим систему частиц с массами $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_N$. Пусть положения частиц в пространстве заданы радиусами-векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_N$.

- **Центром масс (центром инерции)** системы частиц называется точка C в пространстве, положение которой определяется радиусом-вектором:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}$$



Свойства центра масс

1. Импульс **p** системы частиц равен произведению массы m системы на скорость $\mathbf{v}_C$ ее центра масс:

$$\vec{p} = m\vec{v}_C$$

Доказательство:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = m \cdot \frac{d}{dt}\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m} = m\frac{d\vec{r}_C}{dt} = m\vec{v}_C$$

Свойства центра масс

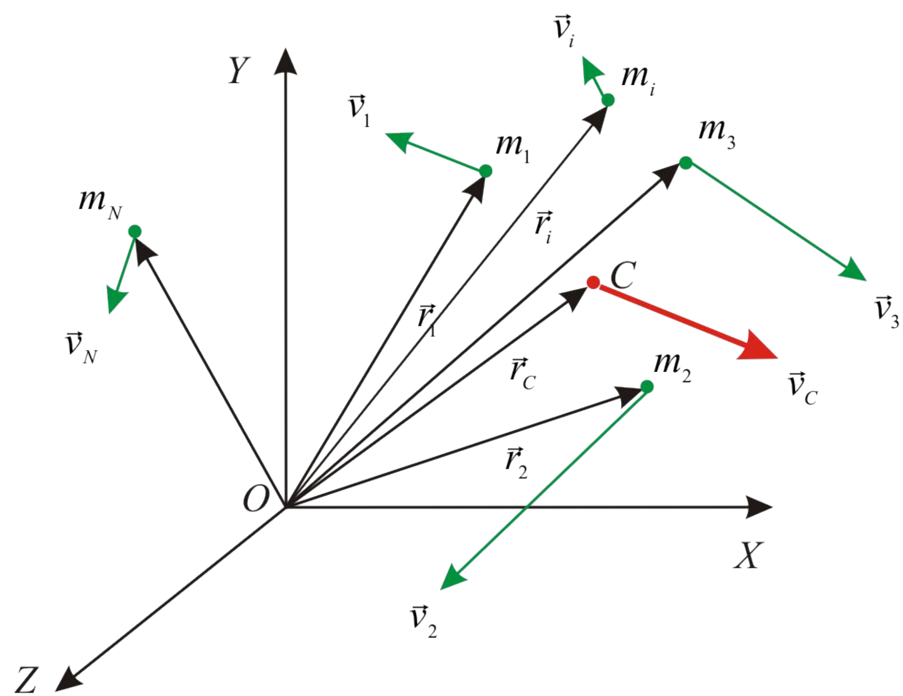
2. Центр масс замкнутой системы частиц движется равномерно и прямолинейно (или покоится).

Доказательство: если система замкнута, то $\mathbf{p}$ = const, следовательно, из первого свойства следует, что $\mathbf{v}_C$ = const.

Свойства центра масс

3. **Теорема о движении центра масс**. *Центр масс системы частиц движется как материальная точка, в которой заключена масса всей системы, и к которой приложена сила, равна сумме всех внешних сил:*

$$m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}$$



Здесь $\mathbf{F}_{\text{внеш}}$ – сумма всех внешних сил, приложенных ко всем частицам системы.

Система центра масс

- Для описания движения иногда удобно использовать систему отсчета, в которой центр масс покоится.

- **Системой центра масс** называется жестко связанная с центром масс система отсчета, которая движется поступательно по отношению к инерциальной системе отчета.

Свойства системы центра масс

1. Импульс системы частиц в системе центра масс равен нулю:

$$\vec{p} = 0$$

Доказательство. Поскольку в системе центра масс скорость центра масс равна нулю, $\mathbf{v}_C = 0$, то в соответствии со вторым свойством центра масс, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C = 0$.

Свойства системы центра масс

2. Если система состоит из двух частиц, то их импульсы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ в системе центра масс равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

Доказательство. Импульс системы частиц в системе центра масс равен нулю:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Rightarrow p_1 = -p_2$$

ГЛАВА 3.
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

3.3 Движение тела с переменной массой

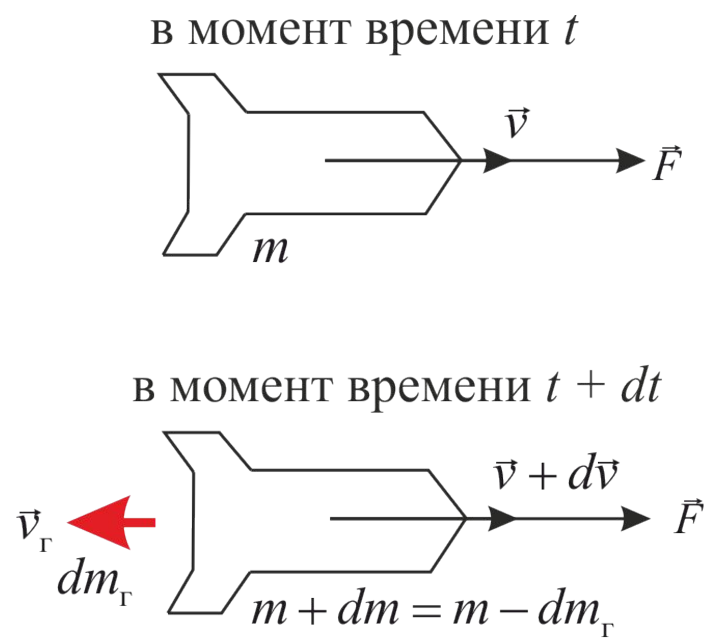
Уравнение Мещерского

- Уравнение движения тела с переменной массой было впервые получено русским механиком И.В. Мещерским (1859 – 1935), и носит его имя. Выведем его на примере движения ракеты.

- **Принцип действия ракеты:** ракета с большой скоростью выбрасывает вещество (газообразные продукты сгорания топлива), которое с силой воздействует на ракету и сообщает ей ускорение. Пусть на ракету действует внешняя сила **F** (это может быть сила тяготения, сила сопротивления среды, в которой движется ракета и т.д.)

Вывод уравнения Мещерского

- Рассмотрим движение ракеты относительно неподвижной системы отсчета.



- Пусть в момент времени t $m(t)$ – масса ракеты, $\mathbf{v}(t)$ – ее скорость, $m\mathbf{v}(t)$ – импульс ракеты.
- Спустя промежуток времени dt: масса и скорость ракеты получат приращения dm и $d\mathbf{v}$, при этом $dm < 0$, т.к. масса ракеты уменьшается за счета сгорания топлива.
- Импульс ракеты станет равным $(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$.
- Импульс образовавшихся за промежуток времени dt газов равен $dm_г\mathbf{v}_г$, где $dm_г$ – масса газов, $\mathbf{v}_г$ – скорость газов в неподвижной системе отсчета.
- Масса образовавшихся газов равна убыли массы ракеты: $dm_г = – dm$.

Вывод уравнения Мещерского

- Приращение импульсы системы «ракета - топливо» за промежуток времени *dt*:

$$d\vec{p} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_{г}\vec{v}_{г} - m\vec{v} = \vec{F}dt$$

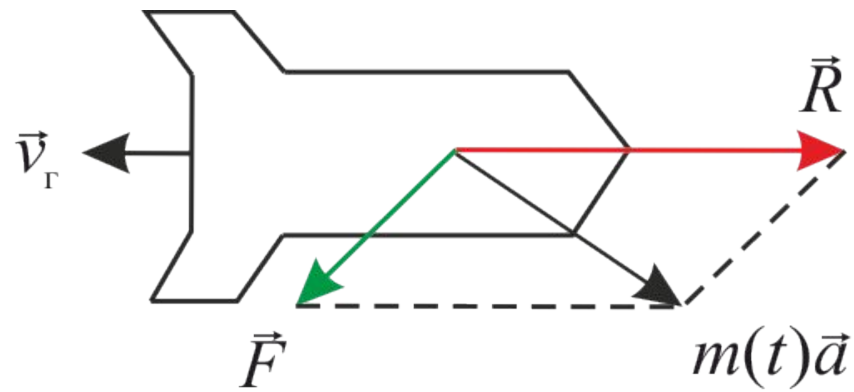
- Раскроем скобки и пренебрежем малой величиной $dmd\mathbf{v}$, заменим $dm_{г}$ на $-dm$, тогда получим:

$$mv + md\vec{v} + \vec{v}dm - dm\vec{v}_{г} - m\vec{v} = md\vec{v} + \vec{v}dm - dm\vec{v}_{г} = \vec{F}dt$$

- Обозначим $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{г} - \mathbf{v}$ – относительная скорость истечения газов из ракеты; разделим обе части уравнения на *dt*

Вывод уравнения Мещерского

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}\frac{dm}{dt} + \vec{F}$$



В этом уравнении масса является функцией времени: $m = m(t)$.

- Слагаемое **u**(dm/dt) называется **реактивной силой** (сила, с которой действуют на ракету вытекающие из нее газы)

Формула Циолковского

- В качестве примера использования уравнения Мещерского применим его к движению ракеты, на которую внешние силы не действуют (**F** = 0):

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}\frac{dm}{dt} \Leftrightarrow m d\vec{v} = \vec{u} dm$$

- Пусть ракета движется прямолинейно. Учтем, что **u**↑↓**v**, тогда уравнение примет вид:

$$mdv = -udm$$

Формула Циолковского

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u} \Leftrightarrow \ln m = -\frac{v}{u} + \ln C$$

- Для определения постоянной C рассмотрим начальные условия: $m(t = 0) = m_0$ – начальная масса ракеты, когда ее скорость равна нулю: $\mathbf{v}(t = 0) = 0$. Тогда $C = m_0$.
- **Формула Циолковского**:

$$m = m_0 e^{-\frac{v}{u}}$$

Формула Циолковского

- Формула Циолковского позволяет оценить относительный запас топлива, необходимый для сообщения ракете определенной скорости v.

- *Пример*. Допустим, ракете необходимо сообщить первую космическую скорость $v \approx 8$ км/с. Если скорость газовой струи составляет $u \approx 1$ км/с, то из уравнения Циолковского следует, что $m_0/m = e^8 \approx 2980$, т.е. необходимо, чтобы начальная масса ракеты была примерно в 3000 раз больше ее массы в тот момент, когда она достигнет необходимой скорости. Таким образом, практически вся масса ракеты приходится на топливо.