

# Лекция 3

## Закон сохранения импульса

# Закон сохранения импульса

- Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса относятся к числу фундаментальных принципов физики.
- Они далеко выходят за рамки механики и представляют собой универсальные законы природы.
- Они действуют и в области элементарных частиц, и в области космических объектов, в физике атома, в физике твердого тела и т.д

# Закон сохранения импульса

- Законы сохранения являются эффективным инструментом исследования, которым повседневно пользуются физики. Например, если выясняется, что какой-то процесс противоречит законам сохранения, то он невозможен и не стоит пробовать его осуществить.
- При помощи законов сохранения очень часто можно получить решение физической задачи простым и изящным путем. Поэтому при решении новых задач обычно принято придерживаться следующего порядка: прежде всего применяют законы сохранения, и только в случае, если этого недостаточно, переходят к решению уравнений движения.
- Мы начнем изучение законов сохранения с закона сохранения импульса.

# Импульс частицы

- Напомним, что по определению импульс частицы равен

- 

- $\vec{p} = m\vec{v}$ ,

- 

- где  $m$  – масса,  $v$  – скорость. Основное уравнение динамики в этом случае выглядит так:

- 

- $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

- В частности, если  $\vec{F} = 0$ , то  $\vec{p} = const$ .

# Импульс частицы

- Уравнение позволяет найти приращение импульса частицы за любой промежуток времени, если известна зависимость силы  $\vec{F}$  от времени. А именно:

- $$\Delta\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt$$

# Импульс системы

Импульс системы есть векторная сумма импульсов ее отдельных частиц:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i;$$

Где  $\vec{p}_i$  — импульс  $i$ -той частицы.

Продифференцируем это уравнение по времени:

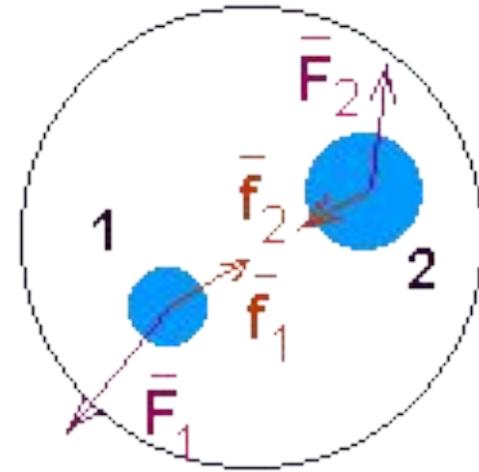
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

# Силы, действующие на частицу

- Согласно второму закону Ньютона

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_k \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i$$

где  $\vec{F}_{ik}$  - силы, действующие на  $i$  - ю частицу со стороны других частиц системы (внутренние силы),  $\vec{F}_i$  - сила, действующая на эту же частицу со стороны других тел, не входящих в рассматриваемую систему (внешние силы).



# Силы, действующие на систему

В результате второй закон Ньютона для системы частиц будет выглядеть так:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \sum_k \vec{F}_{ik} + \sum_i \vec{F}_i$$

Двойная сумма справа – это сумма всех внутренних сил. В соответствии с третьим законом Ньютона силы взаимодействия между частицами системы попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Поэтому результирующая сила в каждой паре взаимодействия равна нулю, а значит,

**Равна нулю векторная сумма всех внутренних сил.**

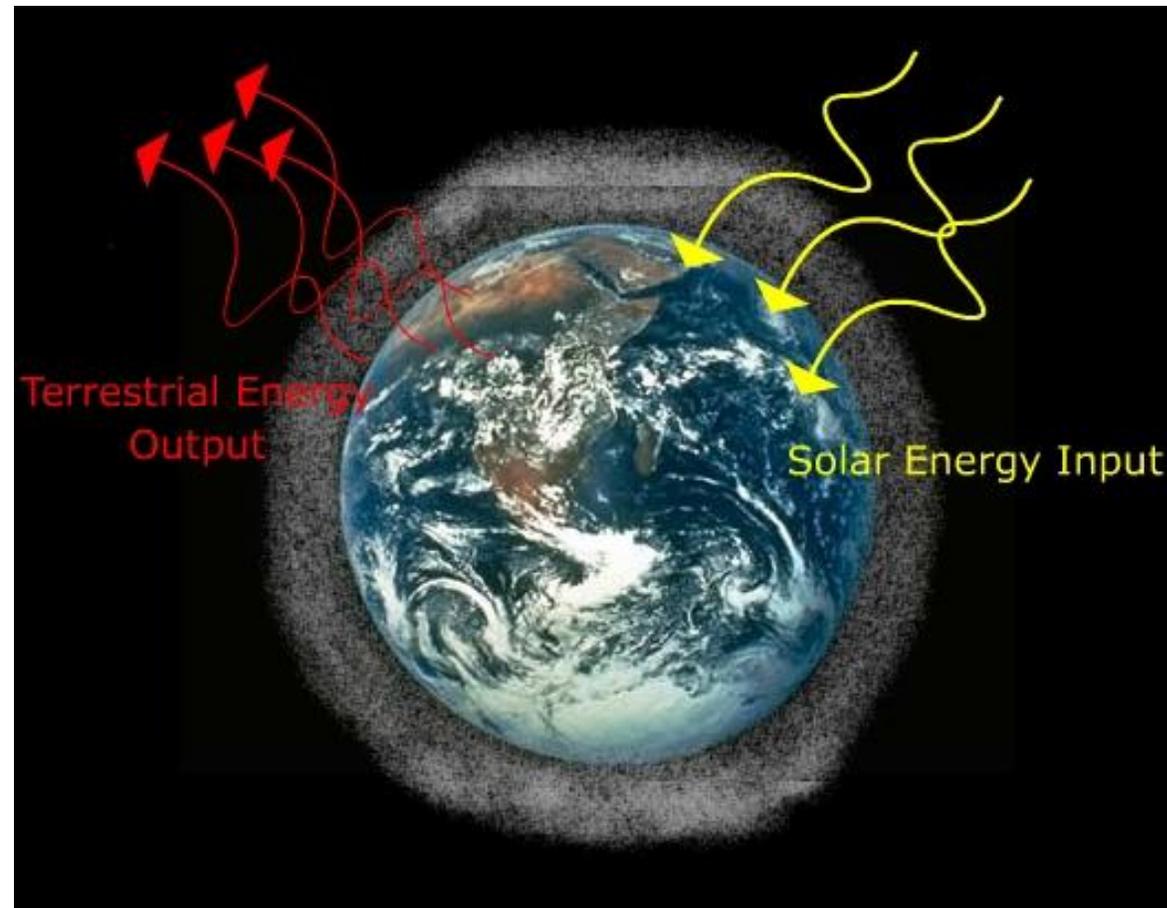
В итоге получаем:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{внешн}}$$

# Замкнутая система

Замкнутой (или изолированной) системы называют систему частиц, на которую не действуют никакие посторонние тела (или их воздействие пренебрежимо мало).

Система замкнута, если внешние силы отсутствуют.



# Закон сохранения импульса



- Импульс замкнутой системы остается постоянным (не меняется со временем)

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i(t) = const$$

У незамкнутой системы может сохраняться не сам импульс, а его проекция на направления, перпендикулярные к направлению внешней силы. Например, при движении системы в однородном поле сил тяжести, сохраняется проекция ее импульса на любое горизонтальное направление.

# Закон сохранения импульса – Пример 1

- Движущаяся частица распалась на две частицы с импульсами  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ , угол между которыми равен  $\theta$ .
- Найдем модуль импульса  $p$  распавшейся частицы

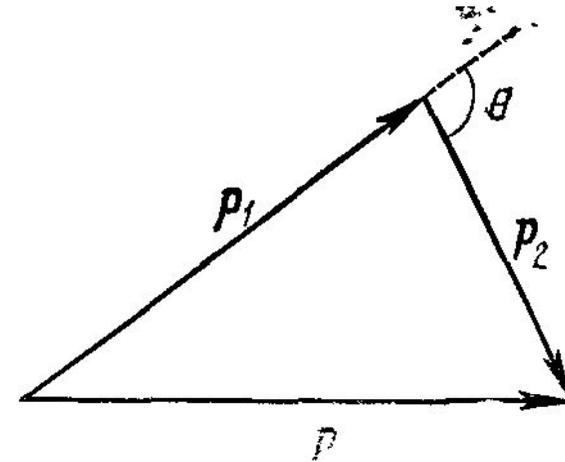


Рис. 3.2

# Закон сохранения импульса – Пример 1

- Подобного рода вопросы проще всего решать с помощью треугольника импульсов, который выражает закон сохранения импульса:  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ .
- Остается воспользоваться теоремой косинусов, и мы сразу можем записать, что
- 

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta}.$$

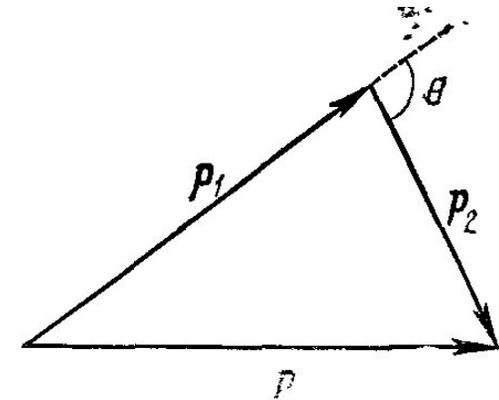
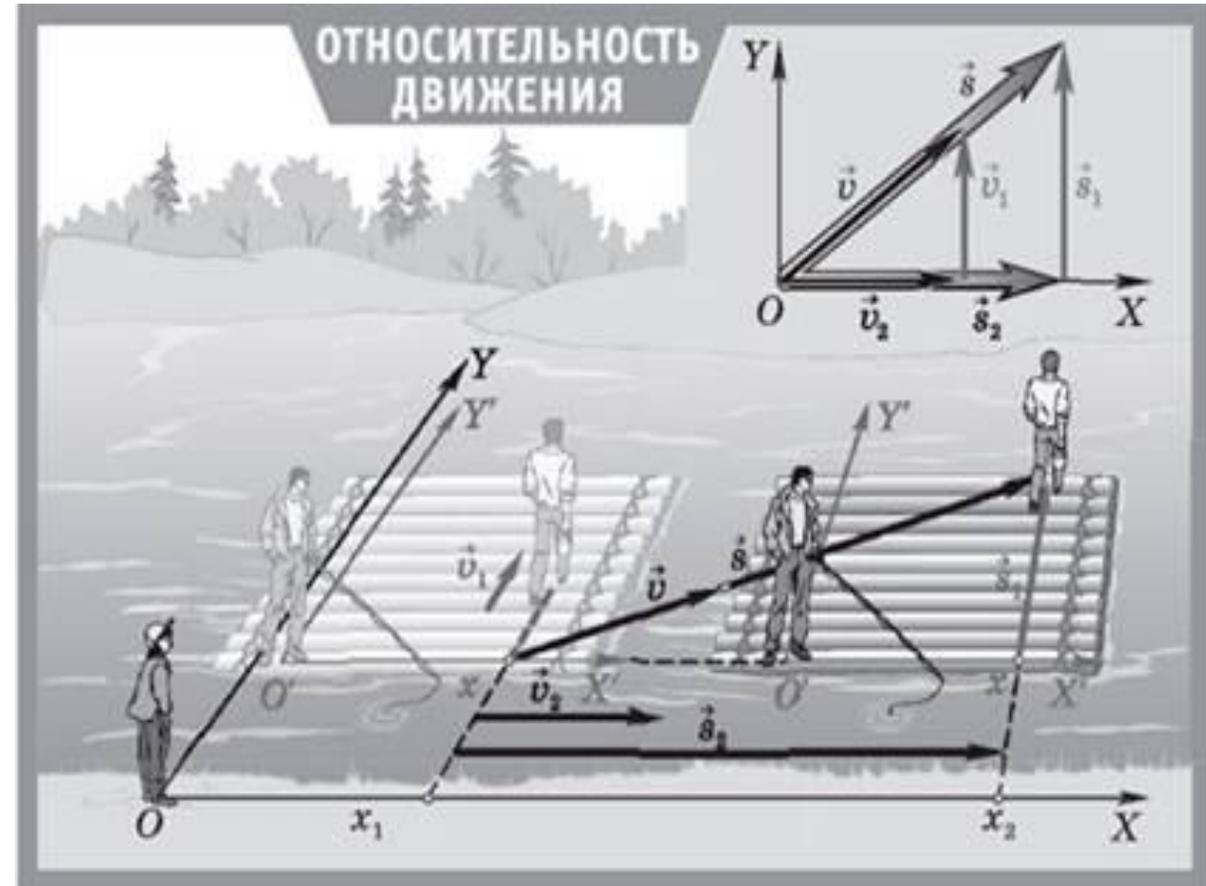


Рис. 3.2

# Закон сохранения импульса – Пример 2

- Человек массы  $m_1$  находится на узком плоту, который покоится на поверхности озера. Человек совершил перемещение  $\Delta r'$  относительно плота и остановился. Сопротивление воды пренебрежимо мало. Найдем соответствующее перемещение  $\Delta r_2$  плота относительно берега.



# Закон сохранения импульса – Пример 2

- В данном случае результирующая всех внешних сил, действующих на систему человек – плот, равна нулю, поэтому импульс этой системы меняться не будет, оставаясь равным нулю в процессе движения:

- - $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0,$
- 
- где  $v_1$  и  $v_2$  – скорости человека и плота относительно берега.

# Закон сохранения импульса – Пример 2

- Но скорость человека относительно берега можно представить в виде  $v_1 = v_2 + v'$ , где  $v'$  – скорость человека относительно плота. Исключив  $v_1$  из этих двух уравнений, получим

- $$v_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2} v'.$$

- Умножив обе части на  $dt$ , найдем связь между элементарными перемещениями плота  $dr_2$  и человека  $dr'$  относительно плота. Такая же связь будет, очевидно, и для конечных перемещений:

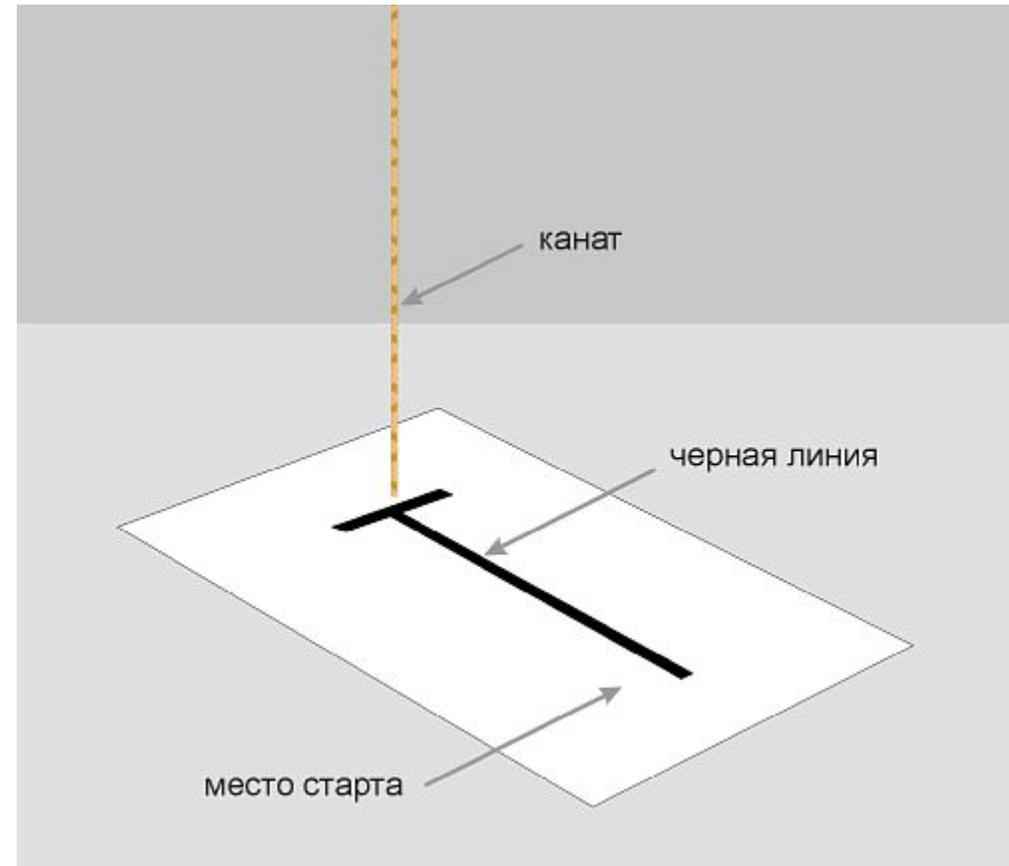
- $$\Delta r_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2} \Delta r'.$$

- Отсюда видно, что перемещение плота  $dr_2$  не зависит от характера движения человека, т. е. не зависит от закона  $v'(t)$ .

# Закон сохранения импульса – Пример 3

Кусок однородного каната висит вертикально, причем нижний конец каната доходит до горизонтального стола.

Показать, что если верхний конец каната освободить, то в любой момент падения каната сила его давления на стол будет в три раза больше веса части каната, уже лежащей на столе.



# Закон сохранения импульса – Пример 3

- Дополнительное давление на стол (сверх веса части каната, уже лежащей на столе) вызвано потерей импульса падающими элементами каната при их ударе о стол.
- Пусть за элемент времени  $dt$  на стол падает элемент каната с массой  $dm = \mu dx$ ,
- где  $\mu$  – масса, приходящаяся на единицу длины каната, а  $dx$  – элемент длины каната.

# Закон сохранения импульса – Пример 3

- Сила, действующая со стороны этого элемента на стол, будет

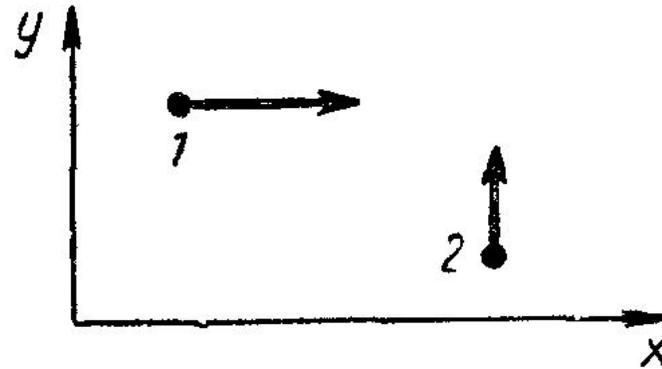
- 

$$\bullet \Delta F = \frac{dm \cdot v}{dt} = \frac{\mu dx \cdot v}{dt} = \mu v^2,$$

- 

- где  $v$  – скорость, с которой элемент  $dm$  достигает стола. Но, как нетрудно заметить,  $v^2 = 2gx$ , где  $x$  – длина части каната, лежащей на столе. Отсюда  $\Delta F = 2\mu gx$ . Таким образом, полная сила, действующая на стол, будет равна  $3\mu gx$ .

# Закон сохранения импульса – Пример 4



122. Частицы 1 и 2 с массами  $m_1$  и  $m_2$  и скоростями  $v_1$  и  $v_2$  движутся, как показано на рис. 52. При столкновении частиц происходит неупругий удар, в результате которого частицы начинают двигаться вместе. Найти скорость частиц после удара.



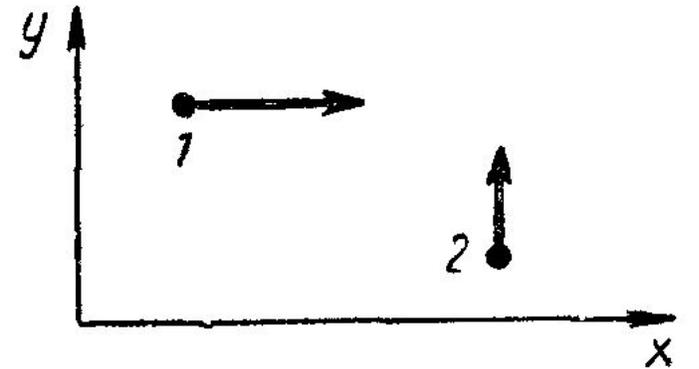
# Закон сохранения импульса – Пример 4

122. Так как на систему, состоящую из частиц 1 и 2, не действуют внешние силы, то количество движения этой системы сохраняется как в направлении оси  $x$ , так и в направлении оси  $y$ . Поэтому

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u_x, \quad m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u_y,$$

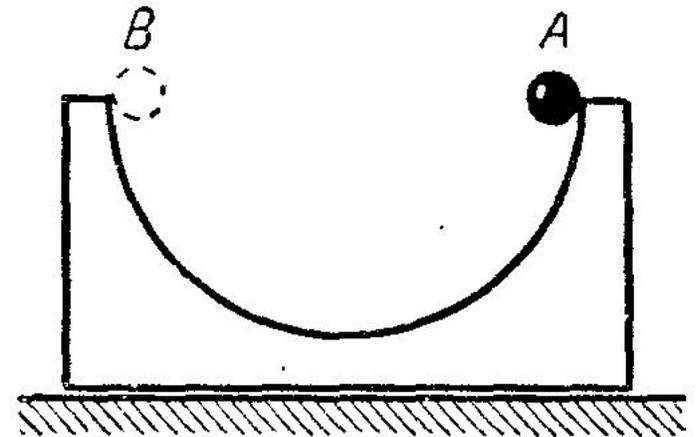
где  $u_x$  и  $u_y$  — составляющие искомой скорости. Следовательно,

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2}.$$



# Закон сохранения импульса – Пример 5

132. Сферическая чашка стоит на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 55). По внутренней поверхности чашки скатывается шарик, начинающий движение из точки  $A$  (без начальной скорости). Масса чашки  $M$ , масса шарика  $m$ , радиус чашки  $R$ , радиус шарика  $r$ . На сколько переместится чашка, когда шарик придет в положение  $B$ ?



# Закон сохранения импульса – Пример 5

$$\frac{v_{1x}}{v_{2x}} = \frac{M}{m}, \quad \frac{s_{1x}}{s_{2x}} = \frac{M}{m},$$

где  $v_{1x}$  и  $s_{1x}$  — абсолютные значения горизонтальной скорости и горизонтального перемещения шарика, а  $v_{2x}$  и  $s_{2x}$  — чашки. Но так как

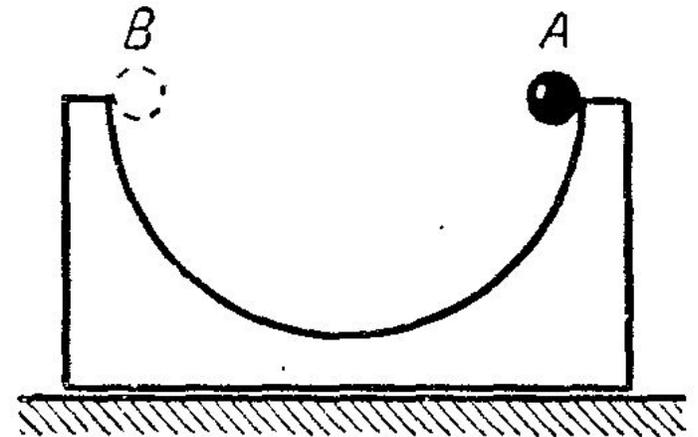
$$s_{1x} = 2(R - r) - s_{2x}$$

(чашка смещается вправо), то

$$\frac{2(R - r) - s_{2x}}{s_{2x}} = \frac{M}{m},$$

откуда

$$s_{2x} = 2(R - r) \frac{m}{M + m}.$$

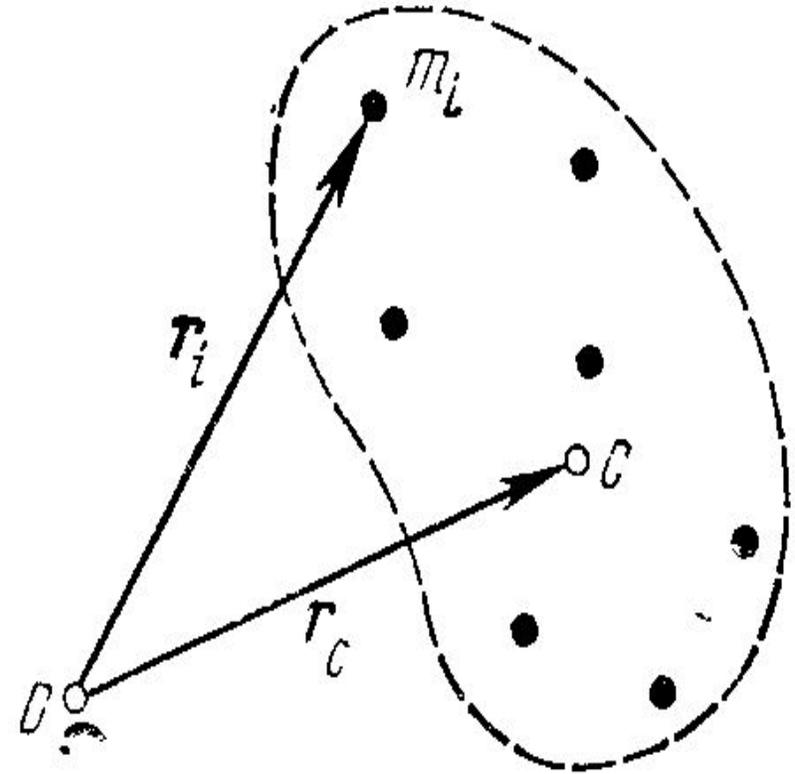


# Центр масс

В любой системе частиц имеется одна замечательная точка  $C$ , называемая центром масс. Ее положение относительно начала данной системы отсчета  $O$  (рис. 3.2) характеризуется радиус-вектором  $\vec{r}_C$  -

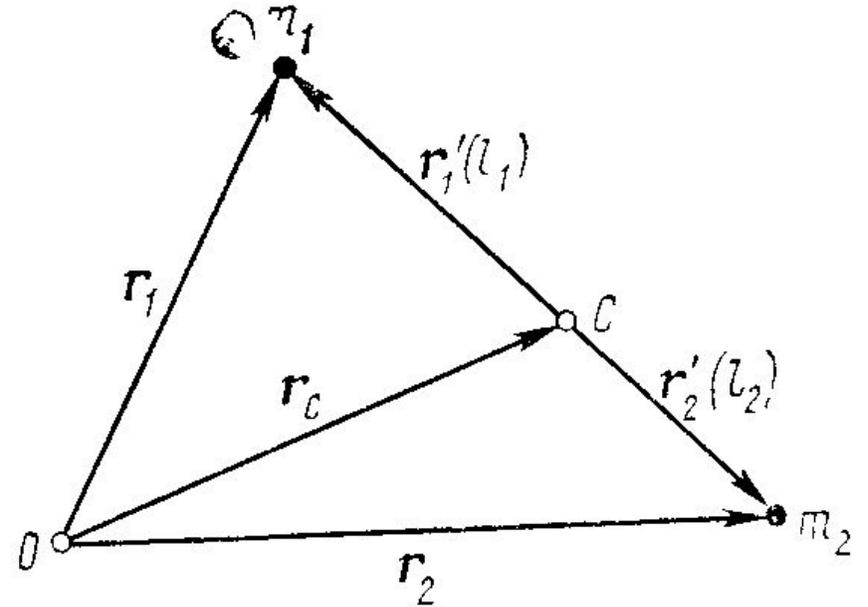
$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

Здесь  $m_i$  и  $\vec{r}_i$  - масса и радиус-вектор  $i$  - той частицы,  $m$  - масса всей системы.



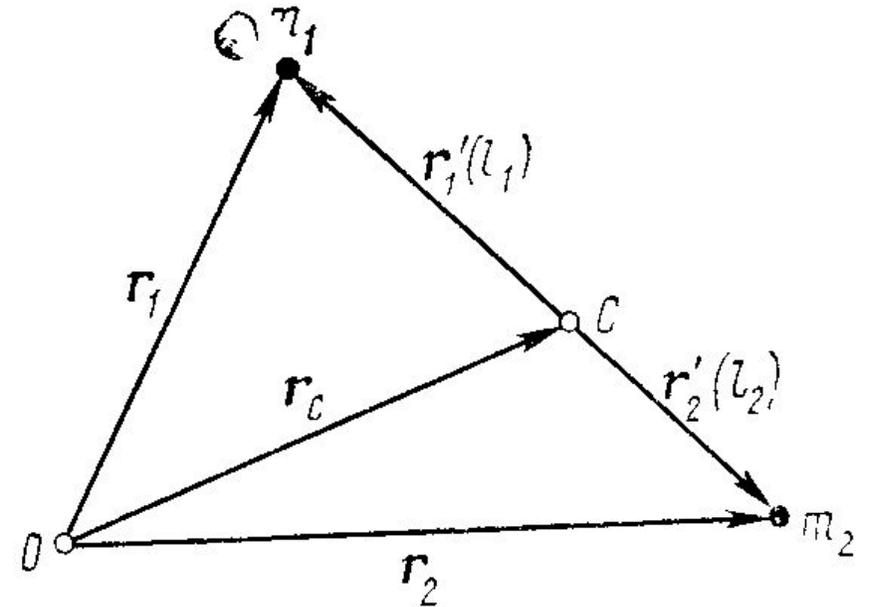
# Центр масс - Пример

- Покажем, что центр масс системы из двух частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$  находится на прямой, их соединяющей, в точке  $C$ , которая делит расстояние между частицами в отношении  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}$ .



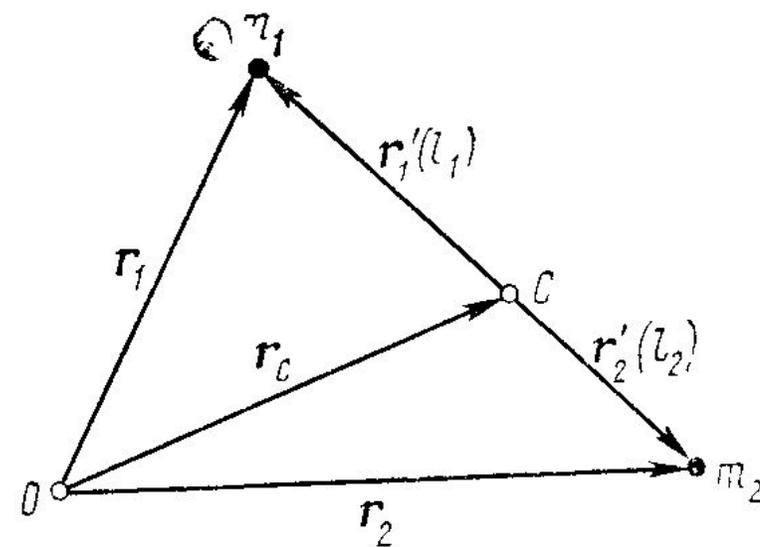
# Центр масс - Пример

- Пусть  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_C$  – радиусы-векторы частиц 1, 2 и точки  $C$ .
- Тогда положения этих частиц относительно точки  $C$  характеризуются радиусами-векторами
- 
- $\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_C, \vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_C$ .



# Центр масс - Пример

- После подстановки в эти равенства
- выражения  $\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$  получим
- 
- $\vec{r}'_1 = \frac{m_2}{m_1}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ ,  $\vec{r}'_2 = -\frac{m_1}{m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ .
- 
- Отсюда следует, что векторы  $\vec{r}'_1$  и  $\vec{r}'_2$  коллинеарны и точка С лежит на прямой, проходящей через частицы.



# Скорость центра масс

- Скорость Центра масс равна

$$\vec{V}_C = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}$$

Импульс системы, как целого

$$\vec{p} = m \vec{V}_C$$

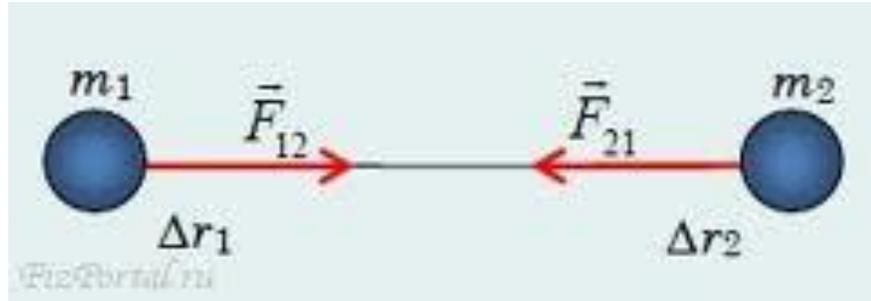
Второй закон Ньютона для системы

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{V}_C}{dt}$$

# Система центра масс (Ц-система)

Когда нас интересует лишь относительное движение частиц внутри системы, а не ее движение как целого, целесообразно пользоваться системой отсчета, в которой центр масс покоится. Эту систему называют системой **центра масс** или **Ц – системой**. Отличительной особенностью этой системы является то, что полный импульс частиц в ней всегда равен нулю.

# Относительное движение двух частиц



Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух взаимодействующих частиц, сила взаимодействия которых зависит только от расстояния между ними. Движения этих частиц можно описать уравнениями:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

# Относительное движение двух частиц

- Радиус-вектор центра масс

$$R = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Радиус вектор относительного расстояния

$$r = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Скорость центра масс

$$V = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

# Приведенная масса

- Внутренние силы не влияют на движение центра масс, и он движется с постоянной скоростью

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}t$$

Уравнение относительного движения

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}}{m_2} + \frac{\vec{F}}{m_1} = \frac{\vec{F}}{\mu}$$

Приведенная масса

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

# Расстояния от частиц до центра масс

Зная относительное расстояние, мы можем найти расстояния  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  от каждой частицы до центра масс, перейдя в Ц – систему и используя для этого уравнения:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0,$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}.$$

Отсюда получаем:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r},$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

# Полное решение задачи двух тел

- Теперь мы можем получить полное решение задачи двух тел:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}'_1 = \vec{R}_0 + \vec{V}t - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r},$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}'_2 = \vec{R}_0 + \vec{V}t + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

# Движение тела переменной массы

Условия задачи: найти уравнение движения тела, масса которого тела изменяется в процессе движения. Пусть в некоторый момент  $t$  масса движущегося тела равна  $m$ , а присоединяемое (или отделяемое) вещество имеет скорость  $\vec{u}$  относительно данного тела.



# Уравнение Мещерского

Введем вспомогательную инерциальную  $K$  систему отсчета, скорость которой такова же, как и скорость тела в данный момент  $t$ . В этот момент тело покоится в этой системе.

За промежуток времени от  $t$  до  $t+dt$  тело приобретает в  $K$  – системе импульс  $md\vec{v}$ . Тогда

$$md\vec{v} = \vec{F} dt \pm \delta m \vec{u}$$

где знак плюс соответствует присоединению массы, а знак минус – отделению. Поделив полученное выражение на  $dt$  получим:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

# Иван Всеволодович Мещерский

## русский и советский ученый-механик



Уравнение движения материальной точки переменной массы для случая присоединения (или отделения) частиц было получено и основательно исследовано в магистерской диссертации [И. В. Мещерского](#), защищенной в Петербургском Университете 10 декабря 1897 года

Дата рождения:

29 июля ([10 августа](#)) [1859](#)

Место рождения:

[Архангельск](#)

Дата смерти:

[7 января 1935](#)

Место смерти:

[Ленинград](#)

# Уравнение Мещерского-Частные случаи

- Если  $\vec{u} = 0$ , т. е. масса присоединяется или отделяется без скорости относительно тела, то  $\vec{R} = 0$  и уравнение приобретает вид

- 

$$\bullet m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

- где  $m(t)$  – масса тела в данный момент времени. Это уравнение описывает, например, движение платформы, из которой свободно сыплется песок.

# Уравнение Мещерского-Частные случаи

- Если  $u = -v$  т. е. присоединяемая масса неподвижна в выбранной системе отсчета или отделяемая масса становится неподвижной в этой системе, то уравнение принимает другой вид:

$$\bullet \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

- Иначе говоря, в этом частном случае – и только в этом – действие силы  $\vec{F}$  определяет изменение импульса тела с переменной массой. Данный случай реализуется, например, при движении платформы, нагружаемой песком из неподвижного бункера.

# Уравнение Мещерского – Задача 1

- Ракета движется в инерциальной  $K$ -системе отсчета в отсутствие внешнего силового поля, причем газовая струя вылетает с постоянной относительно ракеты скоростью  $u$ .
- Найдем зависимость скорости  $v$  ракеты от ее массы  $m$ , если в момент старта ее масса была равна  $m_0$ .
- В данном случае  $\vec{F} = 0$  откуда следует
- 

$$\bullet \quad d\vec{v} = \vec{u} \frac{dm}{m}.$$

# Уравнение Мещерского – Задача 1

- Проинтегрировав это выражение с учетом начальных условий, получим

- 

- $\vec{v} = -\ln(m_0/m),$

- 

- где знак минус показывает, что вектор  $\vec{v}$  (скорость ракеты) противоположен по направлению вектору  $\vec{u}$ . Отсюда видно, что скорость ракеты в данном случае ( $u = const$ ) не зависит от времени сгорания топлива:  $\vec{v}$  определяется только отношением начальной массы  $m_0$  ракеты к оставшейся массе  $m$ .

# Уравнение Мещерского – Задача 2

- Железнодорожная платформа в момент  $t = 0$  начинает двигаться под действием постоянной силы тяги  $F$ . Пренебрегая трением в осях, найти зависимость от времени скорости платформы  $v(t)$  если:
  - 1). Платформа нагружена песком, который высыпается через отверстие в ее дне с постоянной скоростью  $\mu$  (кг/с), а в момент  $t = 0$  масса платформы с песком равна  $m_0$ ;
  - 2). На платформу, масса которой  $m_0$ , в момент  $t = 0$  начинает высыпаться песок из неподвижного бункера так, что скорость погрузки постоянна и равна  $\mu$  (кг/с).

# Уравнение Мещерского – Задача 2

- *Решение. 1.* В этом случае реактивная сила равна нулю и уравнение имеет вид  $(m_0 - \mu t) \frac{dv}{dt} = F$ , откуда

- 

- $dv = F \frac{dt}{(m_0 - \mu t)}$ .

- 

- Проинтегрировав это уравнение с учетом начальных условий, получим

- 

- $v = \frac{F}{\mu} \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}$ .

# Уравнение Мещерского – Задача 2

- *Решение 2.* Здесь горизонтальная составляющая реактивной силы (а только эта составляющая нас и интересует)  $R = -\mu v$ , где  $v$  – скорость платформы. Поэтому уравнение приводится к виду

$$d(mv) = Fdt.$$

- Интегрирование с учетом начальных условий дает

- 

- $mv = Ft,$

- 

- где  $m = m_0 + \mu t$ . Отсюда

- 

- $v = \frac{Ft}{m_0 + \mu t}.$

# Уравнение Мещерского – Задача 3

- Ракета поддерживается в воздухе на постоянной высоте, выбрасывая вертикально вниз струю газа со скоростью  $u$ .  
Найти:
- 1). Сколько времени ракета сможет оставаться на этой высоте, если начальная масса топлива составляет  $\eta$ -ю часть ее массы (без топлива);
- 2) Какую массу  $\mu(t)$  газов должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться на постоянной высоте, если начальная масса ракеты (с топливом) равна  $m_0$ .

# Уравнение Мещерского – Задача 3

• *Решение 1.* В данном случае  $\frac{dv}{dt} = 0$  и уравнение примет вид

•

$$\bullet \quad mg + \frac{dm}{dt}u = 0,$$

•

• или после разделения переменных

•

$$\bullet \quad \frac{dm}{m} = -\frac{g}{u} dt.$$

•

# Уравнение Мещерского – Задача 3

- Интегрирование этого уравнения дает

- 

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{g}{u} t.$$

- 

- Отсюда

- 

$$t = \frac{u}{g} \ln \frac{m_0}{m} = \frac{u}{g} \ln(1 + \eta),$$

- 

- где учтено, что  $\eta = \frac{m_0 - m}{m}$ .

# Уравнение Мещерского – Задача 3

- *Решение 2.* Из предыдущего пункта следует, что

- 

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = \frac{g}{u} m,$$

где  $m = m_0 \exp\left(-\frac{gt}{u}\right)$ . В результате

$$\mu = -\frac{g}{u} m_0 \exp\left(-\frac{gt}{u}\right).$$

- 

- По такому закону  $\mu$  меняется со временем в течение промежутка времени, найденного в п. 1.

# Уравнение Мещерского – Задача 4

- Ракета поднимается с нулевой начальной скоростью вертикально вверх в однородном поле тяжести.
- Первоначальная масса ракеты (с топливом) равна  $m_0$ . Скорость газовой струи постоянна и равна  $u$  относительно ракеты.
- Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость  $v$  ракеты в зависимости от ее массы  $m$  и времени подъема  $t$ .

# Уравнение Мещерского – Задача 4

- *Решение.* Запишем уравнение движения ракеты – уравнение в проекции на вертикальную ось с положительным направлением вверх:

- $$m \frac{dv}{dt} = -mg - u \frac{dm}{dt}.$$

- Перепишем это уравнение так:

- $$m \frac{d}{dt} (v + gt) = -u \frac{dm}{dt}.$$

- Откуда

- $$d(v + gt) = -u \frac{dm}{dt}.$$

# Уравнение Мещерского – Задача 4

- Проинтегрировав с учетом начальных условий последнее уравнение, получим

- 

$$\bullet v + gt = -uln\left(\frac{m}{m_0}\right).$$

- 

- Искомая скорость ракеты

- 

$$\bullet v = uln\left(\frac{m}{m_0}\right) - gt.$$

До следующей лекции

