# Лекция 3

## Закон сохранения импульса

# Закон сохранения импульса

- Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса относятся к числу фундаментальных принципов физики.
- Они далеко выходят за рамки механики и представляют собой универсальные законы природы.
- Они действуют и в области элементарных частиц, и в области космических объектов, в физике атома, в физике твердого тела и т.д

# Закон сохранения импульса

- Законы сохранения являются эффективным инструментом исследования, которым повседневно пользуются физики. Например, если выясняется, что какой-то процесс противоречит законам сохранения, то он невозможен и не стоит пробовать его осуществить.
- При помощи законов сохранения очень часто можно получить решение физической задачи простым и изящным путем. Поэтому при решении новых задач обычно принято придерживаться следующего порядка: прежде всего применяют законы сохранения, и только в случае, если этого недостаточно, переходят к решению уравнений движения.
- Мы начнем изучение законов сохранения с закона сохранения импульса.

# Импульс частицы

- Напомним, что по определению импульс частицы равен
-
- $\vec{p} = m\vec{v},$
-
- где $m$ – масса, $v$ – скорость. Основное уравнение динамики в этом случае выглядит так:
-
- $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
- В частности, если $\vec{F} = 0,$ то $\vec{p} = const.$

# Импульс частицы

- Уравнение позволяет найти приращение импульса частицы за любой промежуток времени, если известна зависимость силы $\vec{F}$ от времени. А именно:
- $$\Delta\vec{p} = \int_0^t \vec{F}dt$$

# Импульс системы

- Импульс системы есть векторная сумма импульсов ее отдельных частиц:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i;$$

Где $\vec{p}_i$ $-$ импульс $i$- той частицы.

Продифференцируем это уравнение по времени:

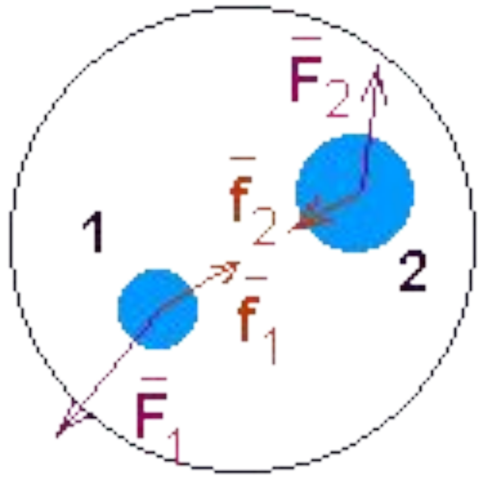
$$\frac{\overrightarrow{dp}}{dt} = \sum \frac{d\overrightarrow{p_i}}{dt}$$

# Силы, действующие на частицу

- • Согласно второму закону Ньютона

$$\frac{d\vec{p_i}}{dt} = \sum_k \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i$$

где $\vec{F}_{ik}$- силы, действующие на $i$ – ю частицу со стороны других частиц системы (внутренние силы) , $\vec{F}_i$ - сила, действующая на эту же частицу со стороны других тел, не входящих в рассматриваемую систему (внешние силы).



# Силы, действующие на систему

- В результате второй закон Ньютона для системы частиц будет выглядеть так:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \sum_k \vec{F}_{ik} + \sum_i \vec{F}_i$$

Двойная сумма справа – это сумма всех внутренних сил. В соответствии с третьим законом Ньютона силы взаимодействия между частицами системы попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Поэтому результирующая сила в каждой паре взаимодействия равна нулю, а значит,

**Равна нулю  векторная сумма всех внутренних сил.**

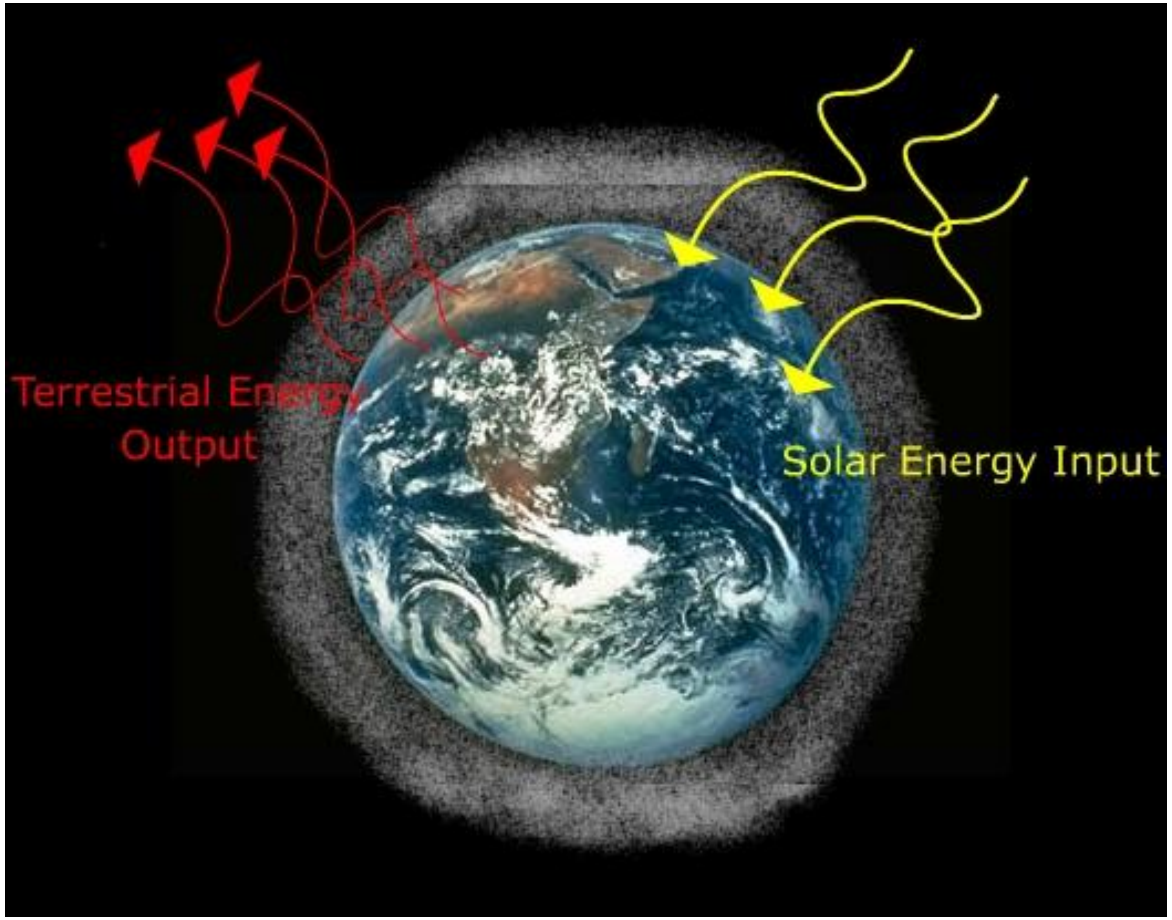
В итоге получаем:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{внешн}}$$

# Замкнутая система

Замкнутой (или изолированной) системы называют систему частиц, на которую не действуют никакие посторонние тела (или их воздействие пренебрежимо мало).

Система замкнута, если внешние силы отсутствуют.



# Закон сохранения импульса

- • *Импульс замкнутой системы остается постоянным (не меняется со временем)*

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i(t) = const$$

У незамкнутой системы может сохраняться не сам импульс, а его проекция на направления, перпендикулярные к направлению внешней силы. Например, при движении системы в однородном поле сил тяжести, сохраняется проекция ее импульса на любое горизонтальное направление.

# Закон сохранения импульса – Пример 1

- Движущаяся частица распалась на две частицы с импульсами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, угол между которыми равен $\theta$.
- Найдем модуль импульса *p* распавшейся частицы

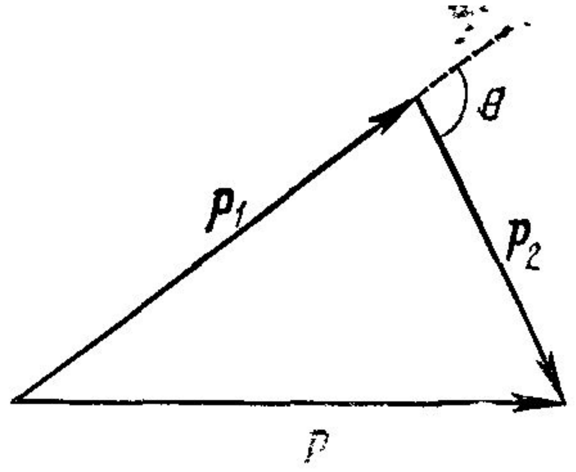


Рис. 3.2

# Закон сохранения импульса – Пример 1

- Подобного рода вопросы проще всего решать с помощью треугольника импульсов, который выражает закон сохранения импульса: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.
- Остается воспользоваться теоремой косинусов, и мы сразу можем записать, что
- 

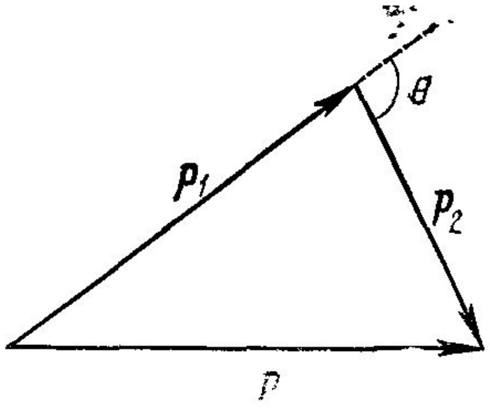
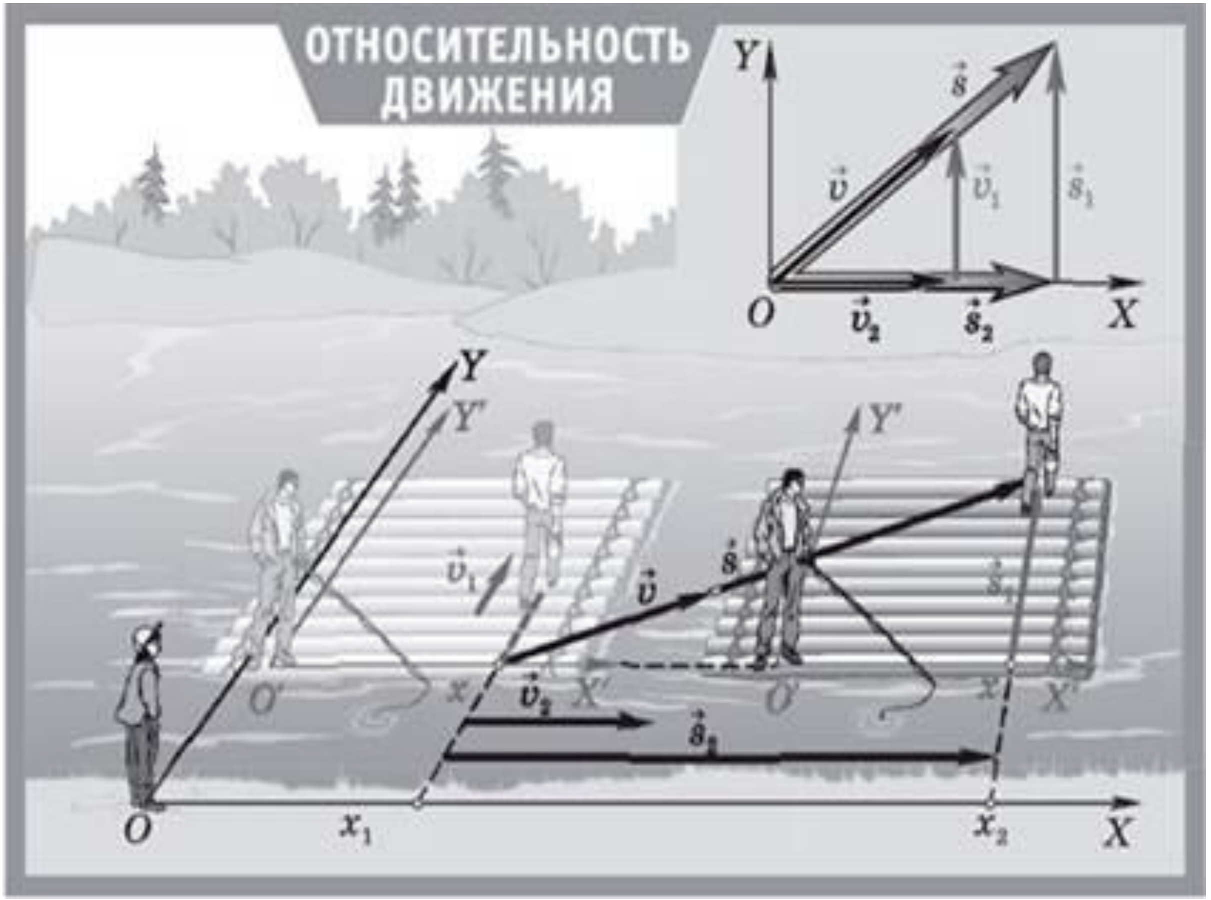



Рис. 3.2

- $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2cos\theta}.$

# Закон сохранения импульса – Пример 2

- Человек массы $m_1$ находится на узком плоту, который покоится на поверхности озера. Человек совершил перемещение $\Delta r'$ относительно плота и остановился. Сопротивление воды пренебрежимо мало. Найдем соответствующее перемещение $\Delta r_2$ плота относительно берега.



# Закон сохранения импульса – Пример 2

- В данном случае результирующая всех внешних сил, действующих на систему человек – плот, равна нулю, поэтому импульс этой системы меняться не будет, оставаясь равным нулю в процессе движения:
- 
- $$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0,$$
- 
- где $v_1$ и $v_2$ – скорости человека и плота относительно берега.

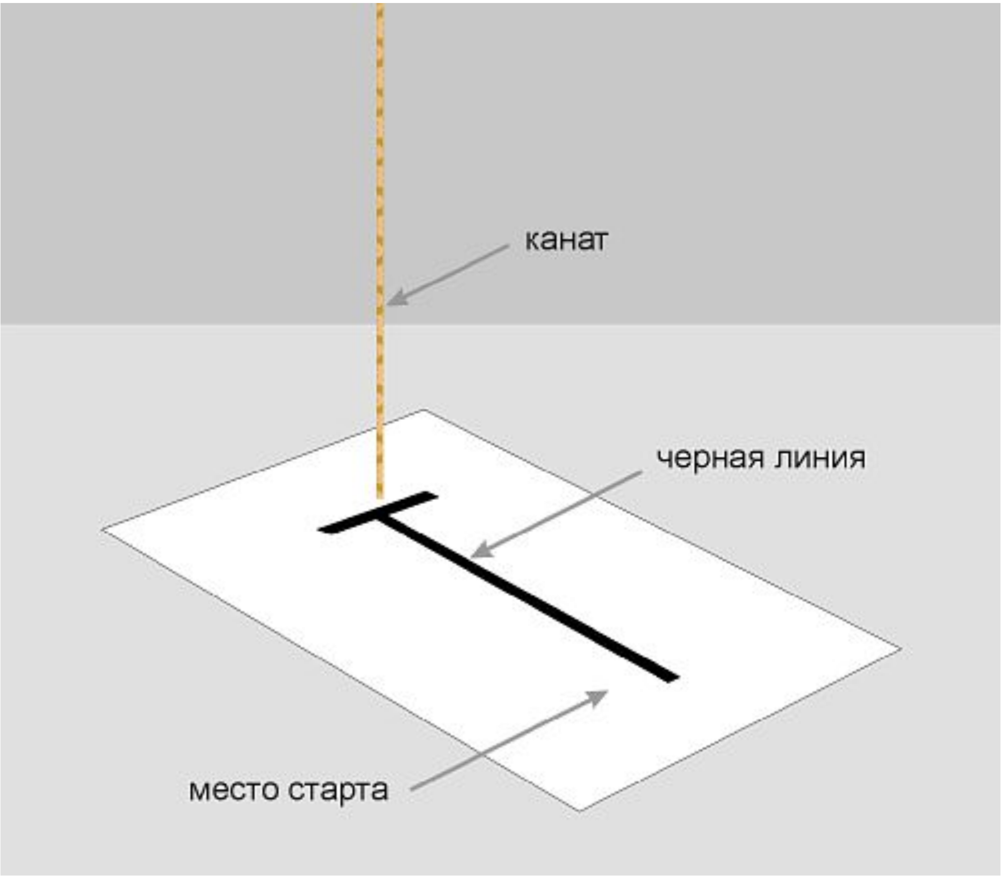
# Закон сохранения импульса – Пример 2

- Но скорость человека относительно берега можно представить в виде $v_1 = v_2 + v'$, где $v'$ – скорость человека относительно плота. Исключив $v_1$ из этих двух уравнений, получим
-
  - $v_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}v'$.
-
- Умножив обе части на $dt$, найдем связь между элементарными перемещениями плота $dr_2$ и человека $dr'$ относительно плота. Такая же связь будет, очевидно, и для конечных перемещений:
  - $\Delta r_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\Delta r'$.
-
- Отсюда видно, что перемещение плота $dr_2$ не зависит от характера движения человека, т. е. не зависит от закона $v'(t)$.

# Закон сохранения импульса – Пример 3

Кусок однородного каната висит вертикально, причем нижний конец каната доходит до горизонтального стола.

Показать, что если верхний конец каната освободить, то в любой момент падения каната сила его давления на стол будет в три раза больше веса части каната, уже лежащей на столе.



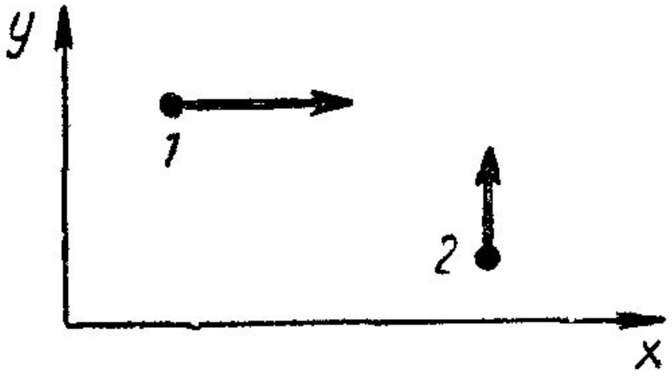
# Закон сохранения импульса – Пример 3

- Дополнительное давление на стол (сверх веса части каната, уже лежащей на столе) вызвано потерей импульса падающими элементами каната при их ударе о стол.
- Пусть за элемент времени $dt$ на стол падает элемент каната с массой $dm = \mu dx$,
- где μ – масса, приходящаяся на единицу длины каната, а $dx$ – элемент длины каната.

# Закон сохранения импульса – Пример 3

- Сила, действующая со стороны этого элемента на стол, будет
- 
- $\Delta F = {}^{dm \cdot v}/_{dt} = {}^{\mu dx \cdot v}/_{dt} = \mu v^2,$
- 
- где $v$ – скорость, с которой элемент *dm* достигает стола. Но, как нетрудно заметить, $v^2 = 2gx$, где *x* – длина части каната, лежащей на столе. Отсюда $\Delta F = 2\mu gx$. Таким образом, полная сила, действующая на стол, будет равна $3\mu gx$.

# Закон сохранения импульса – Пример 4




**122.** Частицы *1* и *2* с массами $m_1$ и $m_2$ и скоростями $v_1$ и $v_2$ движутся, как показано на рис. 52. При столкновении частиц происходит неупругий удар, в результате которого частицы начинают двигаться вместе. Найти скорость частиц после удара.

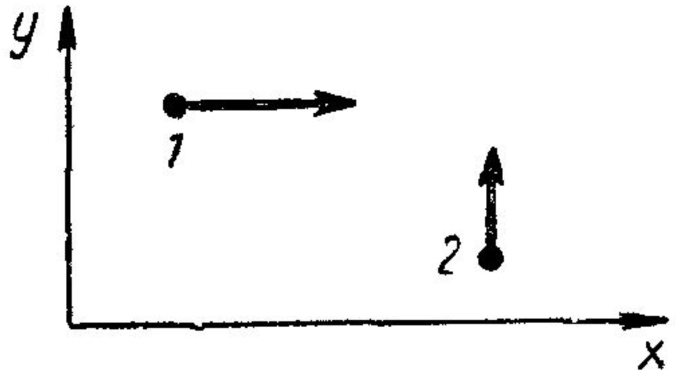
# Закон сохранения импульса – Пример 4

**122.** Так как на систему, состоящую из частиц *1* и *2*, не действуют внешние силы, то количество движения этой системы сохраняется как в направлении оси $x$, так и в направлении оси $y$. Поэтому

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, u_x, \quad m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, u_y,$$

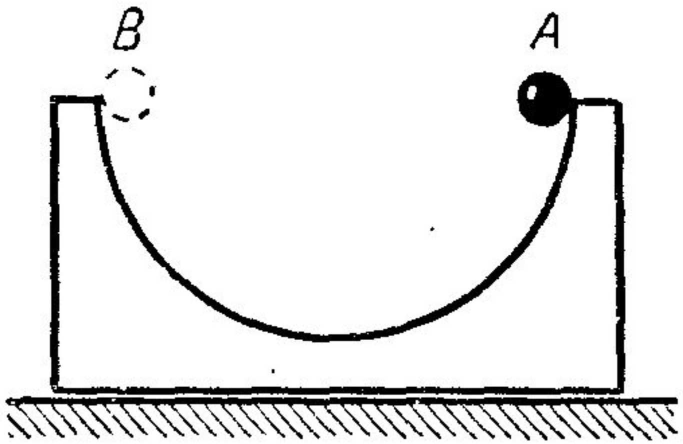
где $u_x$ и $u_y$ — составляющие искомой скорости. Следовательно,

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2}.$$



# Закон сохранения импульса – Пример 5

**132.** Сферическая чашка стоит на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 55). По внутренней поверхности чашки скатывается шарик, начинающий движение из точки $A$ (без начальной скорости). Масса чашки $M$, масса шарика $m$, радиус чашки $R$, радиус шарика $r$. На сколько переместится чашка, когда шарик придет в положение $B$?



# Закон сохранения импульса – Пример 5

$$\frac{v_{1x}}{v_{2x}} = \frac{M}{m}, \quad \frac{s_{1x}}{s_{2x}} = \frac{M}{m},$$

где $v_{1x}$ и $s_{1x}$ — абсолютные значения горизонтальной скорости и горизонтального перемещения шарика, а $v_{2x}$ и $s_{2x}$ — чашки. Но так как

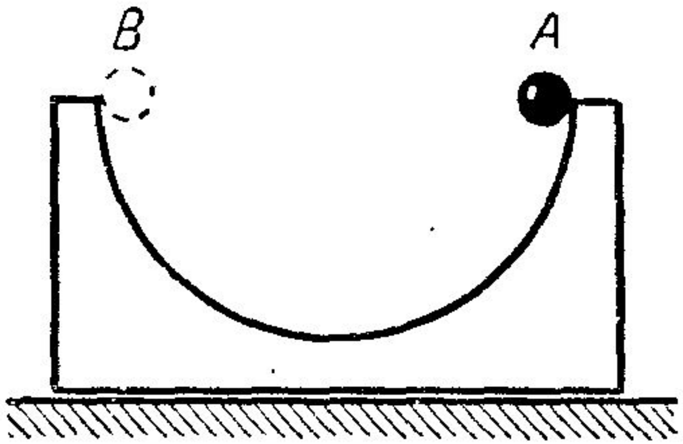
$$s_{1x} = 2(R - r) - s_{2x}$$

(чашка смещается вправо), то

$$\frac{2(R - r) - s_{2x}}{s_{2x}} = \frac{M}{m},$$

откуда

$$s_{2x} = 2(R - r)\frac{m}{M + m}.$$

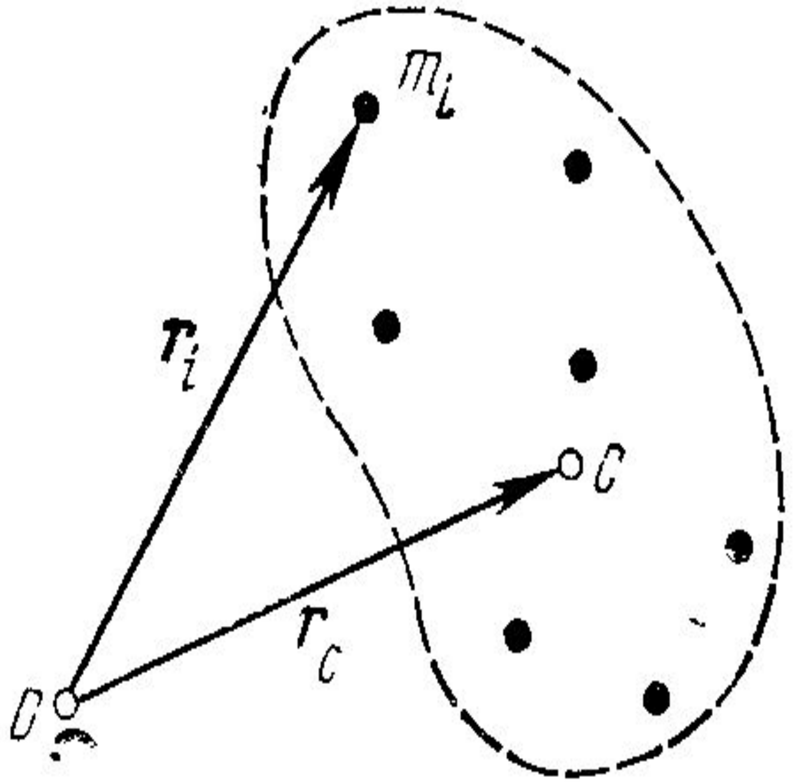


# Центр масс

- В любой системе частиц имеется одна замечательная точка *C*, называемая <u>центром масс</u>. Ее положение относительно начала данной системы отсчета *O* (рис. 3.2)характеризуется радиус-вектором $\vec{r}_C$ -

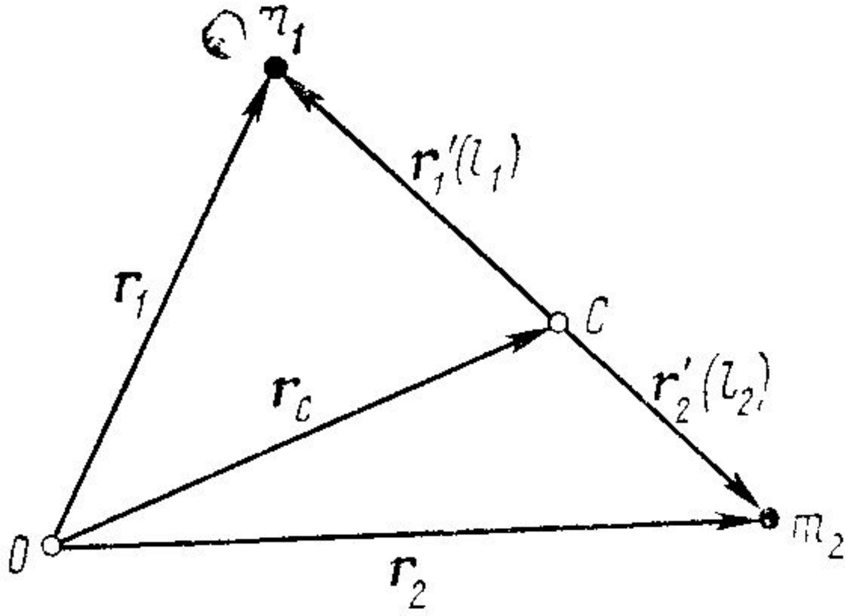
$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

Здесь $m_i$ и $\vec{r}_i$ - масса и радиус-вектор *i* – той частицы, *m* – масса всей системы.



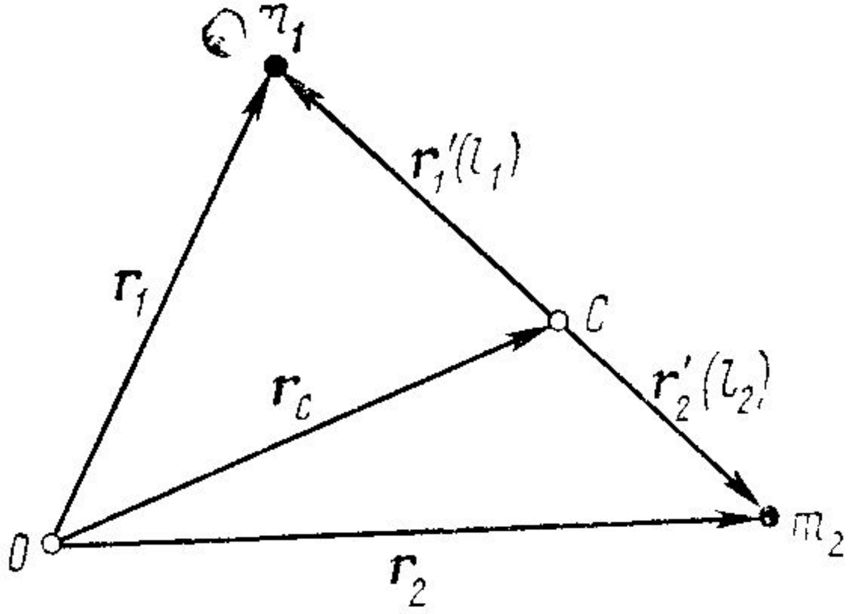
# Центр масс - Пример

- Покажем, что центр масс системы из двух частиц с массами $m_1$ и $m_2$ находится на прямой, их соединяющей, в точке $C$, которая делит расстояние между частицами в отношении $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}$.



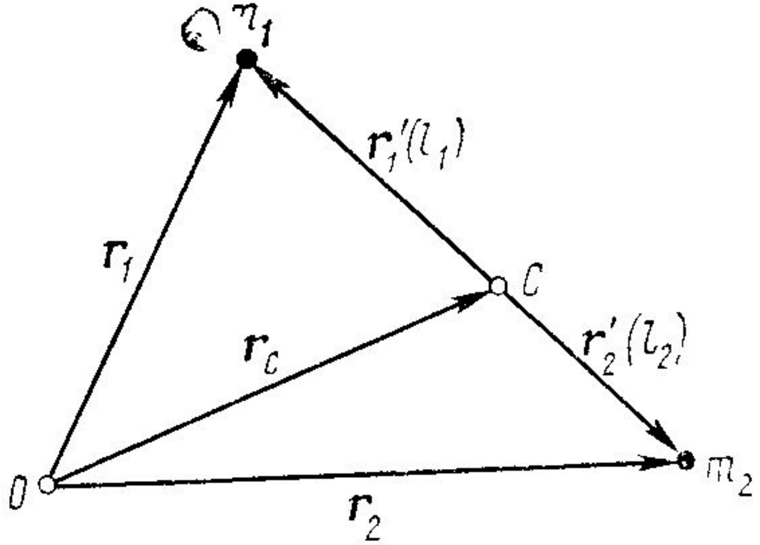
# Центр масс - Пример

- Пусть $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_C$ – радиусы-векторы частиц 1, 2 и точки *C*.
- Тогда положения этих частиц относительно точки *C* характеризуются радиусами-векторами
- 
- $\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_C, \vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_C.$



# Центр масс - Пример

- После подстановки в эти равенства
- выражения $\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ получим
- 
- $\overrightarrow{r'}_1 = \frac{m_2}{m_1}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2),\ \overrightarrow{r'}_2 = -\frac{m_1}{m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$
- 
- Отсюда следует, что векторы $\vec{r}'_1$ и $\vec{r}'_2$ коллинеарны и точка $C$ лежит на прямой, проходящей через частицы.



# Скорость центра масс

- 
  - Скорость Центра масс равна

$$\vec{V}_C = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}$$

Импульс системы, как целого

$$\vec{p} = m\vec{V}_c$$

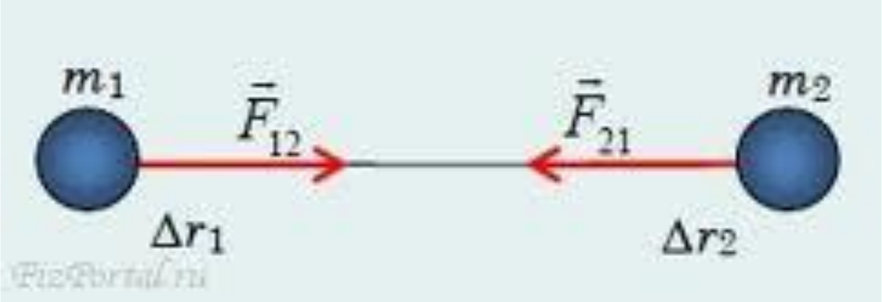
Второй закон Ньютона для системы

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{V}_C}{dt}$$

# Система центра масс (Ц-система)

Когда нас интересует лишь относительное движение частиц внутри системы, а не ее движение как целого, целесообразно пользоваться системой отсчета, в которой центр масс покоится. Эту систему называют системой центра масс или Ц – системой. Отличительной особенностью этой системы является то, что полный импульс частиц в ней всегда равен нулю.

# Относительное движение двух частиц




- Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух взаимодействующих частиц, сила взаимодействия которых зависит только от расстояния между ними. Движения этих частиц можно описать уравнениями:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -\vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

# Относительное движение двух частиц

- Радиус-вектор центра масс

$$R = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Радиус вектор относительного расстояния

$$r = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Скорость центра масс

$$\mathrm{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

# Приведенная масса

- Внутренние силы не влияют на движение центра масс, и он движется с постоянной скоростью

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \overrightarrow{V t}$$

Уравнение относительного движения

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}}{m_2} + \frac{\vec{F}}{m_1} = \frac{\vec{F}}{\mu}$$

Приведенная масса

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

# Расстояния от частиц до центра масс

Зная относительное расстояние, мы можем найти расстояния $\grave{\vec{r}}_1$, $\grave{\vec{r}}_2$ от каждой частицы до центра масс, перейдя в Ц – систему и используя для этого уравнения:

$$m_1\acute{\vec{r}}_1 + m_2\grave{\vec{r}}_2 = 0,$$

$$\acute{\vec{r}}_2 - \grave{\vec{r}}_1 = \vec{r}.$$

Отсюда получаем:

$$\acute{\vec{r}}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r},$$

$$\acute{\vec{r}}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}.$$

# Полное решение задачи двух тел

- Теперь мы можем получить полное решение задачи двух тел:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1' = \vec{R}_0 + \vec{V}t - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r},$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_2' = \vec{R}_0 + \vec{V}t + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}.$$

# Движение тела переменной массы

- Условия задачи: найти уравнение движения тела, масса которого тела изменяется в процессе движения. Пусть в некоторый момент $t$ масса движущегося тела равна $m$, а присоединяемое (или отделяемое ) вещество имеет скорость $\vec{u}$ относительно данного тела.

# Уравнение Мещерского

- Введем вспомогательную инерциальную *K* систему отсчета, скорость которой такова же, как и скорость тела в данный момент *t*. В этот момент тело покоится в этой системе.

За промежуток времени от *t* до *t+dt* тело приобретает в *K* – системе импульс $md\overrightarrow{v}$ . Тогда

$$md\vec{v} = \vec{F}dt \pm \delta m\vec{u}$$

где знак плюс соответствует присоединению массы, а знак минус – отделению. Поделив полученное выражение на *dt* получим:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u}$$

# Иван Всеволодович Мещерский

# русский и советский ученый-механик

Уравнение движения материальной точки переменной массы для случая присоединения (или отделения) частиц было получено и основательно исследовано в магистерской диссертации И. В. Мещерского, защищенной в Петербургском Университете 10 декабря 1897 года

| | |
|---|---|
| Дата рождения: | 29 июля (10 августа) 1859 |
| Место рождения: | Архангельск |
| Дата смерти: | 7 января 1935 |
| Место смерти: | Ленинград |

# Уравнение Мещерского-Частные случаи

- Если $\vec{u} = 0$, т. е. масса присоединяется или отделяется без скорости относительно тела, то $\vec{R} = 0$ и уравнение приобретает вид
-
- $$m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$
- где *m(t)* – масса тела в данный момент времени. Это уравнение описывает, например, движение платформы, из которой свободно сыплется песок.

# Уравнение Мещерского-Частные случаи

- Если $u = -v$ т. е. присоединяемая масса неподвижна в выбранной системе отсчета или отделяемая масса становится неподвижной в этой системе, то уравнение принимает другой вид:
  - $$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$
- Иначе говоря, в этом частном случае – и только в этом – действие силы $\vec{F}$ определяет изменение импульса тела с переменной массой. Данный случай реализуется, например, при движении платформы, нагружаемой песком из неподвижного бункера.

# Уравнение Мещерского – Задача 1

- Ракета движется в инерциальной *K*-системе отсчета в отсутствие внешнего силового поля, причем газовая струя вылетает с постоянной относительно ракеты скоростью *u*.
- Найдем зависимость скорости $v$ ракеты от ее массы *m*, если в момент старта ее масса была равна $m_0$.
- В данном случае $\vec{F} = 0$ откуда следует
- 

$$d\vec{v} = \vec{u}\frac{dm}{m}.$$

# Уравнение Мещерского – Задача 1

- Проинтегрировав это выражение с учетом начальных условий, получим
-
- $$\vec{v} = -ln(m_0/m),$$
-
- где знак минус показывает, что вектор $\vec{v}$ (скорость ракеты) противоположен по направлению вектору $\vec{u}$. Отсюда видно, что скорость ракеты в данном случае ($u = const$) не зависит от времени сгорания топлива: $\vec{v}$ определяется только отношением начальной массы $m_0$ ракеты к оставшейся массе $m$.

# Уравнение Мещерского – Задача 2

- Железнодорожная платформа в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием постоянной силы тяги $F$. Пренебрегая трением в осях, найти зависимость от времени скорости платформы $v(t)$ если:
- 1). Платформа нагружена песком, который высыпается через отверстие в ее дне с постоянной скоростью $\mu$ (кг/с), а в момент $t = 0$ масса платформы с песком равна $m_0$;
- 2). На платформу, масса которой $m_0$, в момент $t = 0$ начинает высыпаться песок из неподвижного бункера так, что скорость погрузки постоянна и равна $\mu$(кг/с).

# Уравнение Мещерского – Задача 2

- *Решение. 1*. В этом случае реактивная сила равна нулю и уравнение имеет вид $(m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt} = F$, откуда
- 
- $dv = F\frac{dt}{(m_0-\mu t)}$.
- 
- Проинтегрировав это уравнение с учетом начальных условий, получим
- 
- $v = \frac{F}{\mu} ln\frac{m_0}{m_0-\mu t}$.

# Уравнение Мещерского – Задача 2

- *Решение 2*. Здесь горизонтальная составляющая реактивной силы (а только эта составляющая нас и интересует) $R = -\mu v$, где $v$ – скорость платформы. Поэтому уравнение приводится к виду
$$d(mv) = Fdt.$$
- Интегрирование с учетом начальных условий дает
-
- $$mv = Ft,$$
-
- где $m = m_0 + \mu t$. Отсюда
-
- $$v = \frac{Ft}{m_0+\mu t}.$$

# Уравнение Мещерского – Задача 3

- Ракета поддерживается в воздухе на постоянной высоте, выбрасывая вертикально вниз струю газа со скоростью $u$. Найти:
- 1). Сколько времени ракета сможет оставаться на этой высоте, если начальная масса топлива составляет $\eta$-ю часть ее массы (без топлива);
- 2) Какую массу $\mu(t)$ газов должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться на постоянной высоте, если начальная масса ракеты (с топливом) равна $m_0$.

# Уравнение Мещерского – Задача 3

- *Решение 1*. В данном случае $dv/_{dt} = 0$ и уравнение примет вид
- 
  - $mg + \frac{dm}{dt}u = 0,$
- 
- или после разделения переменных
- 
  - $\frac{dm}{m} = -\frac{g}{u}dt.$
- 

# Уравнение Мещерского – Задача 3

- Интегрирование этого уравнения дает
- $$ln\frac{m}{m_0} = -\frac{g}{u}t.$$
- 
- Отсюда
- $$t = \frac{u}{g}ln\frac{m_0}{m} = \frac{u}{g}ln(1+\eta),$$
- 
- где учтено, что $\eta = \frac{m_0 - m}{m}$.

# Уравнение Мещерского – Задача 3

- *Решение 2*. Из предыдущего пункта следует, что
- 

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = \frac{g}{u}m,$$

где $m = m_0 exp\left(-\frac{gt}{u}\right)$. В результате

$$\mu = -\frac{g}{u}m_0 exp\left(-\frac{gt}{u}\right).$$

- 
- По такому закону $\mu$ меняется со временем в течение промежутка времени, найденного в п. 1.

# Уравнение Мещерского – Задача 4

- Ракета поднимается с нулевой начальной скоростью вертикально вверх в однородном поле тяжести.
- Первоначальная масса ракеты (с топливом) равна $m_0$. Скорость газовой струя постоянна и равна $u$ относительно ракеты.
- Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость $v$ ракеты в зависимости от ее массы $m$ и времени подъема $t$.

# Уравнение Мещерского – Задача 4

- *Решение*. Запишем уравнение движения ракеты – уравнение в проекции на вертикальную ось с положительным направлением вверх:
- $$m\frac{dv}{dt} = -mg - u\frac{dm}{dt}.$$
- Перепишем это уравнение так:
- $$m\frac{d}{dt}(v + gt) = -u\frac{dm}{dt}.$$
- Откуда
- $$d(v + gt) = -u\frac{dm}{dt}.$$

# Уравнение Мещерского – Задача 4

- Проинтегрировав с учетом начальных условий последнее уравнение, получим
- 
- $v + gt = -uln\left(\frac{m}{m_0}\right).$
- 
- Искомая скорость ракеты
- 
- $v = uln\left(\frac{m}{m_0}\right) - gt.$

# До следующей лекции