

Лекция 3

Закон сохранения импульса

Закон сохранения импульса

- Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса относятся к числу фундаментальных принципов физики.
- Они далеко выходят за рамки механики и представляют собой универсальные законы природы.
- Они действуют и в области элементарных частиц, и в области космических объектов, в физике атома, в физике твердого тела и т.д

Закон сохранения импульса

- Законы сохранения являются эффективным инструментом исследования, которым повседневно пользуются физики. Например, если выясняется, что какой-то процесс противоречит законам сохранения, то он невозможен и не стоит пробовать его осуществить.
- При помощи законов сохранения очень часто можно получить решение физической задачи простым и изящным путем. Поэтому при решении новых задач обычно принято придерживаться следующего порядка: прежде всего применяют законы сохранения, и только в случае, если этого недостаточно, переходят к решению уравнений движения.
- Мы начнем изучение законов сохранения с закона сохранения импульса.

Импульс частицы

- Напомним, что по определению импульс частицы равен

-

- $\vec{p} = m\vec{v}$,

-

- где m – масса, v – скорость. Основное уравнение динамики в этом случае выглядит так:

-

- $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

- В частности, если $\vec{F} = 0$, то $\vec{p} = const$.

Импульс частицы

- Уравнение позволяет найти приращение импульса частицы за любой промежуток времени, если известна зависимость силы \vec{F} от времени. А именно:

- $$\Delta\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt$$

Импульс системы

Импульс системы есть векторная сумма импульсов ее отдельных частиц:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i;$$

Где \vec{p}_i — импульс i -той частицы.

Продифференцируем это уравнение по времени:

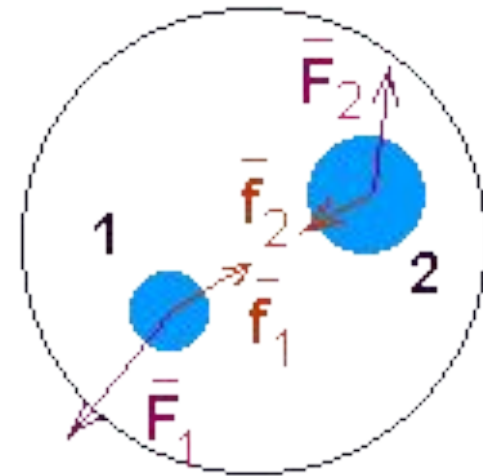
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Силы, действующие на частицу

- Согласно второму закону Ньютона

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_k \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i$$

где \vec{F}_{ik} - силы, действующие на i - ю частицу со стороны других частиц системы (внутренние силы), \vec{F}_i - сила, действующая на эту же частицу со стороны других тел, не входящих в рассматриваемую систему (внешние силы).



Силы, действующие на систему

В результате второй закон Ньютона для системы частиц будет выглядеть так:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \sum_k \vec{F}_{ik} + \sum_i \vec{F}_i$$

Двойная сумма справа – это сумма всех внутренних сил. В соответствии с третьим законом Ньютона силы взаимодействия между частицами системы попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Поэтому результирующая сила в каждой паре взаимодействия равна нулю, а значит,

Равна нулю векторная сумма всех внутренних сил.

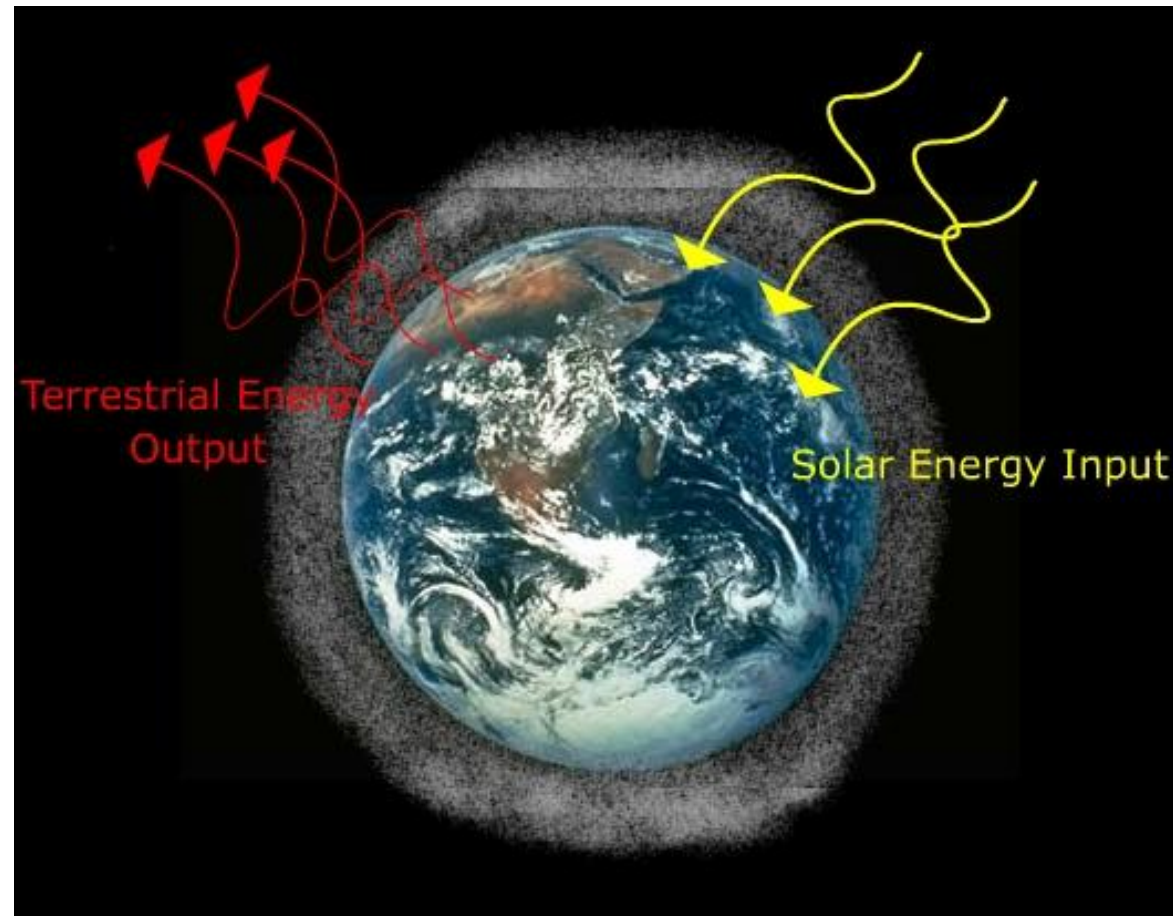
В итоге получаем:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{внешн}}$$

Замкнутая система

Замкнутой (или изолированной) системы называют систему частиц, на которую не действуют никакие посторонние тела (или их воздействие пренебрежимо мало).

Система замкнута, если внешние силы отсутствуют.



Закон сохранения импульса



- Импульс замкнутой системы остается постоянным (не меняется со временем)

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i(t) = const$$

У незамкнутой системы может сохраняться не сам импульс, а его проекция на направления, перпендикулярные к направлению внешней силы. Например, при движении системы в однородном поле сил тяжести, сохраняется проекция ее импульса на любое горизонтальное направление.

Закон сохранения импульса – Пример 1

- Движущаяся частица распалась на две частицы с импульсами \vec{p}_1 и \vec{p}_2 , угол между которыми равен θ .
- Найдем модуль импульса p распавшейся частицы

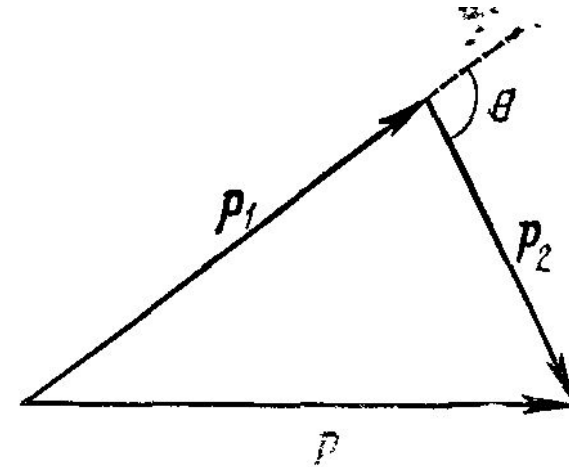


Рис. 3.2

Закон сохранения импульса – Пример 1

- Подобного рода вопросы проще всего решать с помощью треугольника импульсов, который выражает закон сохранения импульса: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.
- Остается воспользоваться теоремой косинусов, и мы сразу можем записать, что
-

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta}.$$

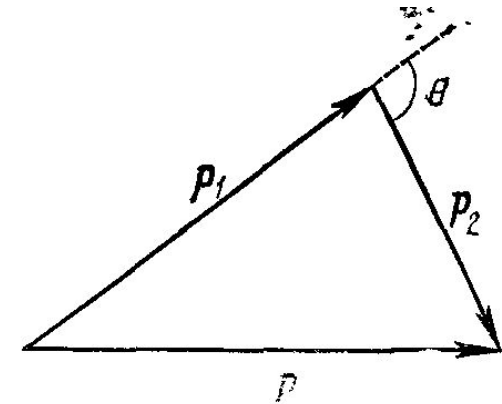
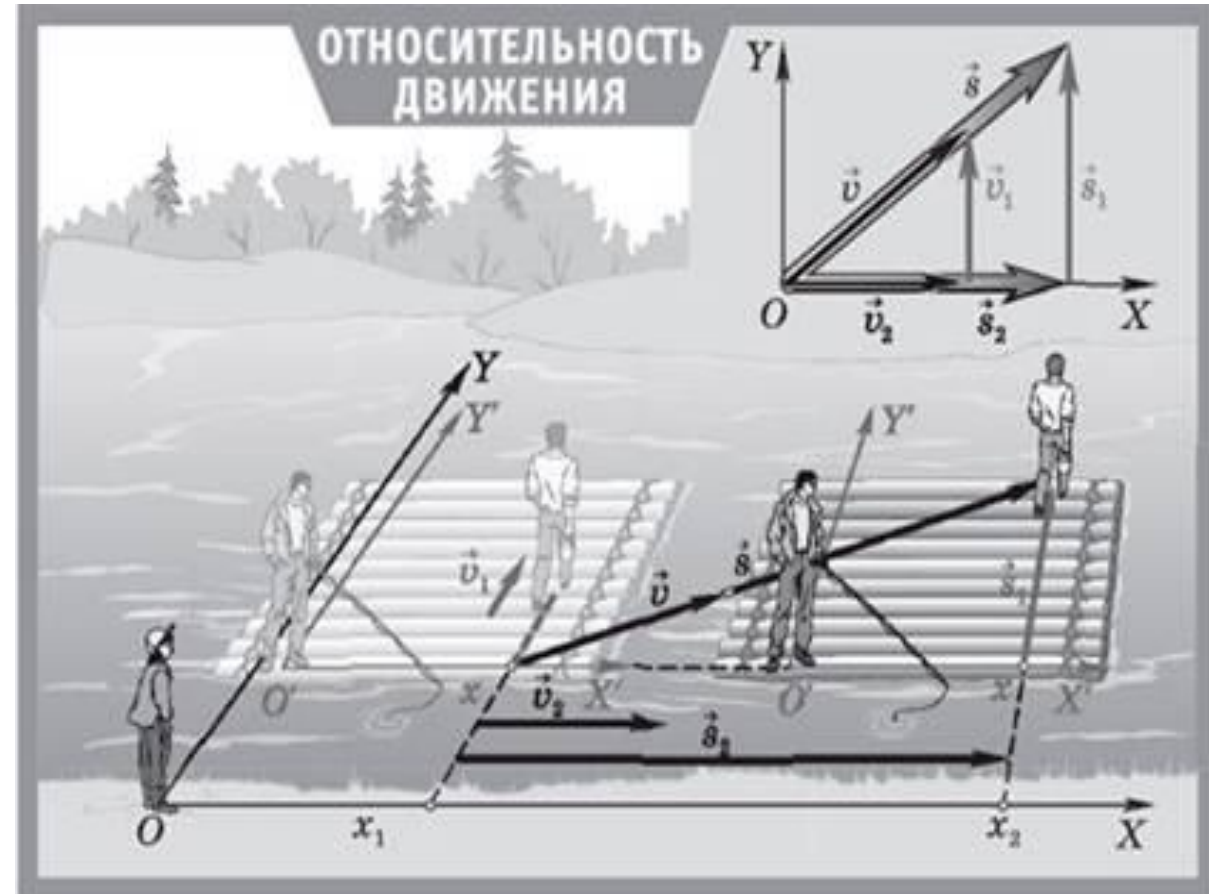


Рис. 3.2

Закон сохранения импульса – Пример 2

- Человек массы m_1 находится на узком плоту, который покоится на поверхности озера. Человек совершил перемещение $\Delta r'$ относительно плота и остановился. Сопротивление воды пренебрежимо мало. Найдем соответствующее перемещение Δr_2 плота относительно берега.



Закон сохранения импульса – Пример 2

- В данном случае результирующая всех внешних сил, действующих на систему человек – плот, равна нулю, поэтому импульс этой системы меняться не будет, оставаясь равным нулю в процессе движения:

- - $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0,$
-
- где v_1 и v_2 – скорости человека и плота относительно берега.

Закон сохранения импульса – Пример 2

- Но скорость человека относительно берега можно представить в виде $v_1 = v_2 + v'$, где v' – скорость человека относительно плота. Исключив v_1 из этих двух уравнений, получим

- $$v_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2} v'.$$

- Умножив обе части на dt , найдем связь между элементарными перемещениями плота dr_2 и человека dr' относительно плота. Такая же связь будет, очевидно, и для конечных перемещений:

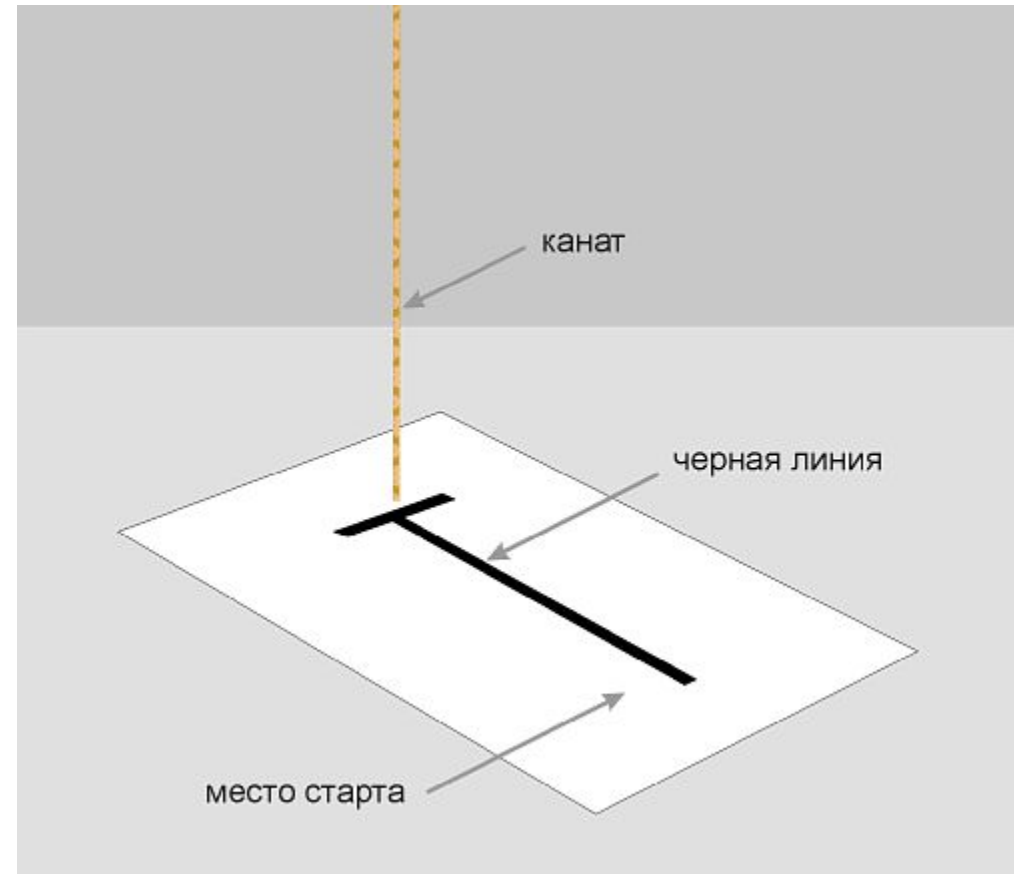
- $$\Delta r_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2} \Delta r'.$$

- Отсюда видно, что перемещение плота dr_2 не зависит от характера движения человека, т. е. не зависит от закона $v'(t)$.

Закон сохранения импульса – Пример 3

Кусок однородного каната висит вертикально, причем нижний конец каната доходит до горизонтального стола.

Показать, что если верхний конец каната освободить, то в любой момент падения каната сила его давления на стол будет в три раза больше веса части каната, уже лежащей на столе.



Закон сохранения импульса – Пример 3

- Дополнительное давление на стол (сверх веса части каната, уже лежащей на столе) вызвано потерей импульса падающими элементами каната при их ударе о стол.
- Пусть за элемент времени dt на стол падает элемент каната с массой $dm = \mu dx$,
- где μ – масса, приходящаяся на единицу длины каната, а dx – элемент длины каната.

Закон сохранения импульса – Пример 3

- Сила, действующая со стороны этого элемента на стол, будет

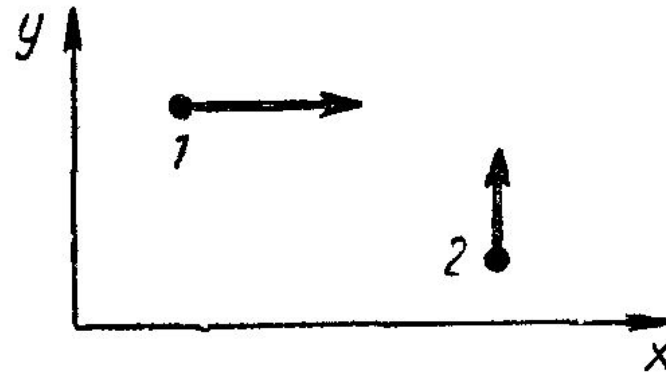
-

$$\bullet \Delta F = \frac{dm \cdot v}{dt} = \frac{\mu dx \cdot v}{dt} = \mu v^2,$$

-

- где v – скорость, с которой элемент dm достигает стола. Но, как нетрудно заметить, $v^2 = 2gx$, где x – длина части каната, лежащей на столе. Отсюда $\Delta F = 2\mu gx$. Таким образом, полная сила, действующая на стол, будет равна $3\mu gx$.

Закон сохранения импульса – Пример 4



122. Частицы 1 и 2 с массами m_1 и m_2 и скоростями v_1 и v_2 движутся, как показано на рис. 52. При столкновении частиц происходит неупругий удар, в результате которого частицы начинают двигаться вместе. Найти скорость частиц после удара.



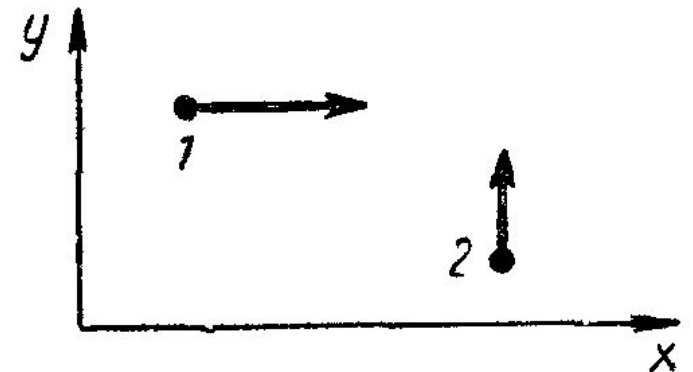
Закон сохранения импульса – Пример 4

122. Так как на систему, состоящую из частиц 1 и 2, не действуют внешние силы, то количество движения этой системы сохраняется как в направлении оси x , так и в направлении оси y . Поэтому

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u_x, \quad m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u_y,$$

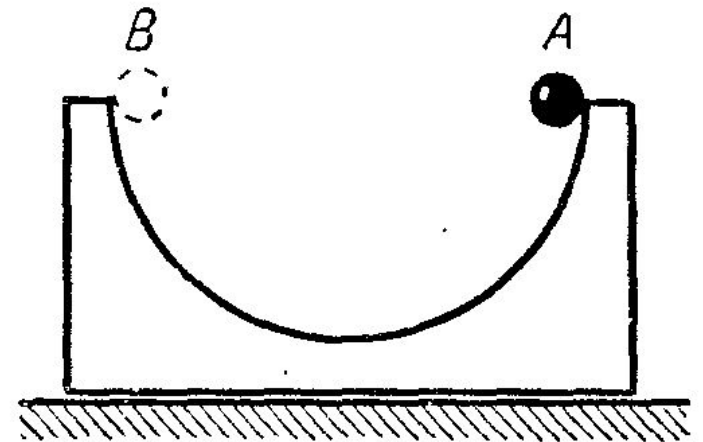
где u_x и u_y — составляющие искомой скорости. Следовательно,

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2}.$$



Закон сохранения импульса – Пример 5

132. Сферическая чашка стоит на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 55). По внутренней поверхности чашки скатывается шарик, начинающий движение из точки A (без начальной скорости). Масса чашки M , масса шарика m , радиус чашки R , радиус шарика r . На сколько переместится чашка, когда шарик придет в положение B ?



Закон сохранения импульса – Пример 5

$$\frac{v_{1x}}{v_{2x}} = \frac{M}{m}, \quad \frac{s_{1x}}{s_{2x}} = \frac{M}{m},$$

где v_{1x} и s_{1x} — абсолютные значения горизонтальной скорости и горизонтального перемещения шарика, а v_{2x} и s_{2x} — чашки. Но так как

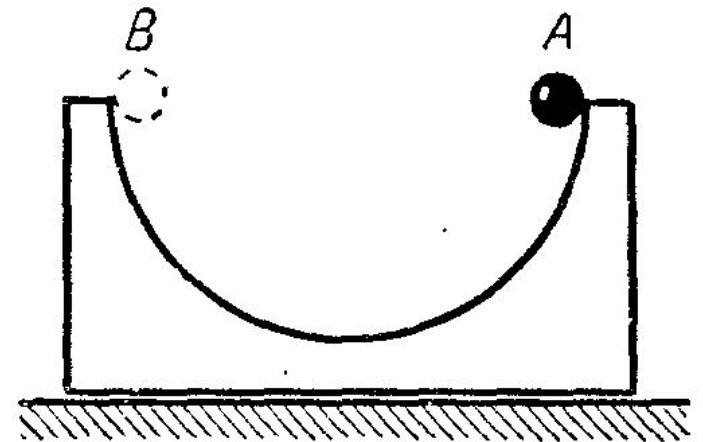
$$s_{1x} = 2(R - r) - s_{2x}$$

(чашка смещается вправо), то

$$\frac{2(R - r) - s_{2x}}{s_{2x}} = \frac{M}{m},$$

откуда

$$s_{2x} = 2(R - r) \frac{m}{M + m}.$$

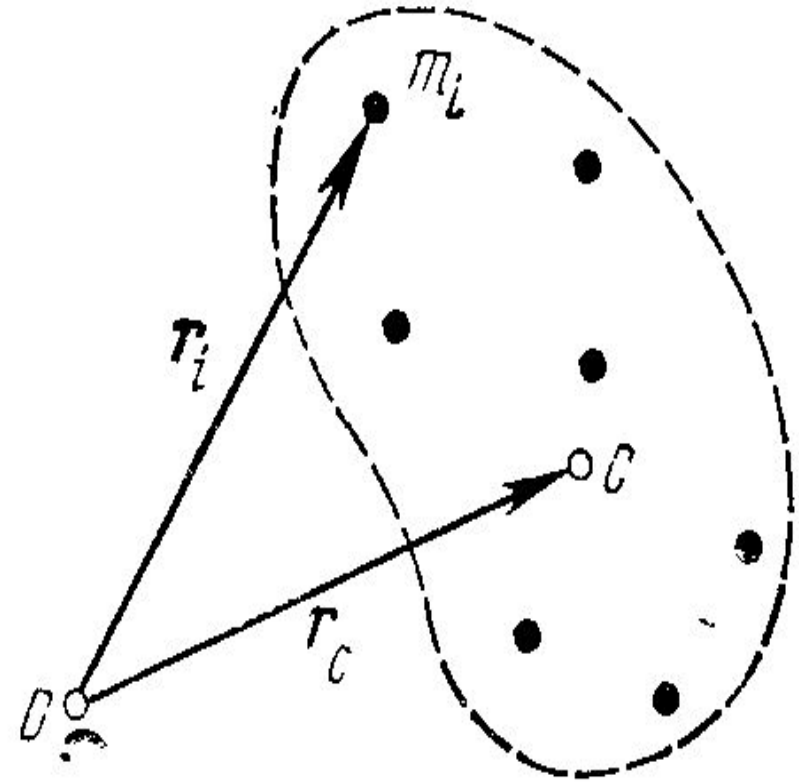


Центр масс

В любой системе частиц имеется одна замечательная точка C , называемая центром масс. Ее положение относительно начала данной системы отсчета O (рис. 3.2) характеризуется радиус-вектором \vec{r}_C -

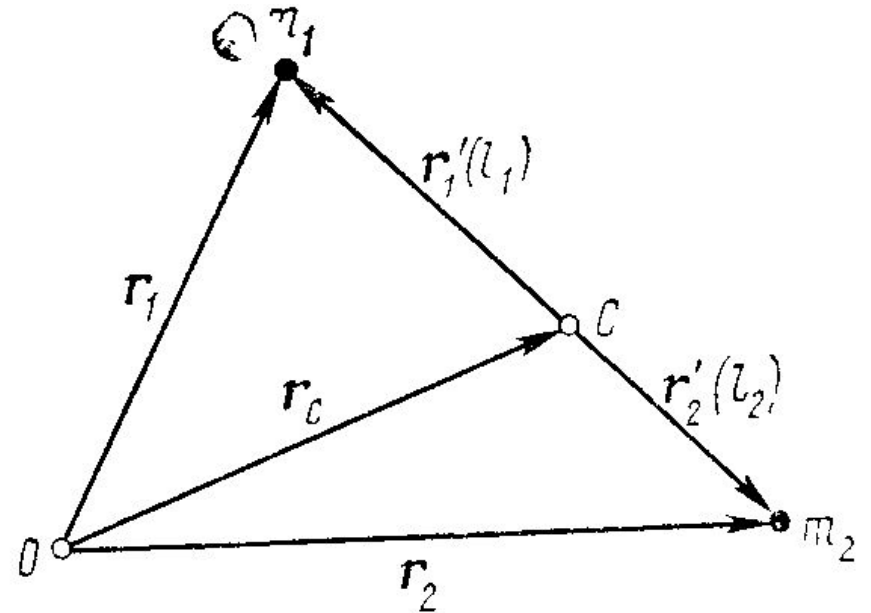
$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

Здесь m_i и \vec{r}_i - масса и радиус-вектор i - той частицы, m - масса всей системы.



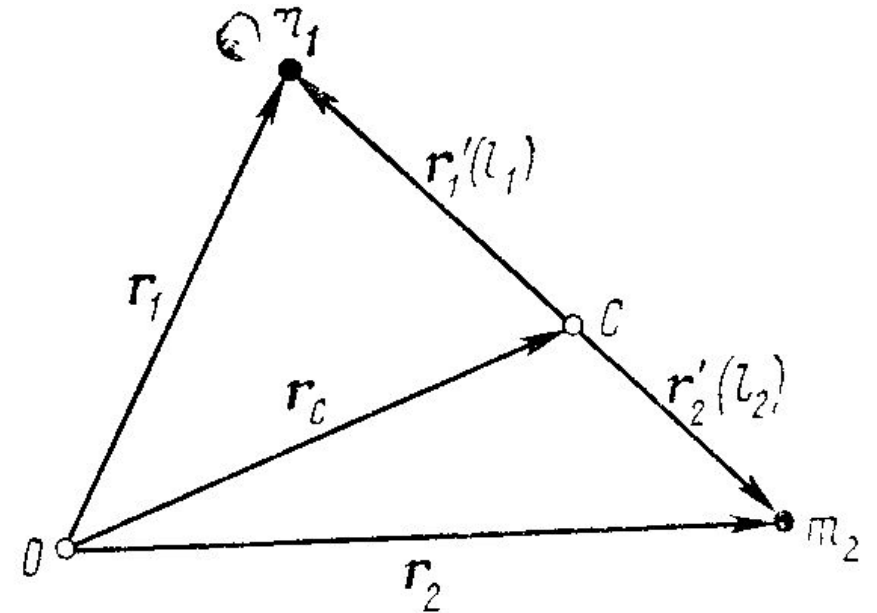
Центр масс - Пример

- Покажем, что центр масс системы из двух частиц с массами m_1 и m_2 находится на прямой, их соединяющей, в точке C , которая делит расстояние между частицами в отношении $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}$.



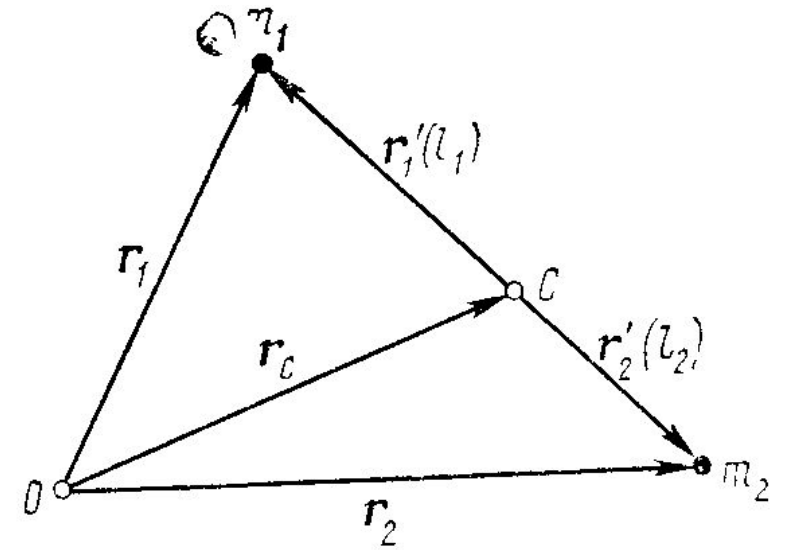
Центр масс - Пример

- Пусть $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_C$ – радиусы-векторы частиц 1, 2 и точки C .
- Тогда положения этих частиц относительно точки C характеризуются радиусами-векторами
-
- $\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_C, \vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_C.$



Центр масс - Пример

- После подстановки в эти равенства
- выражения $\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ получим
-
- $\vec{r}'_1 = \frac{m_2}{m_1}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, $\vec{r}'_2 = -\frac{m_1}{m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.
-
- Отсюда следует, что векторы \vec{r}'_1 и \vec{r}'_2 коллинеарны и точка С лежит на прямой, проходящей через частицы.



Скорость центра масс

- Скорость Центра масс равна

$$\vec{V}_C = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}$$

Импульс системы, как целого

$$\vec{p} = m \vec{V}_C$$

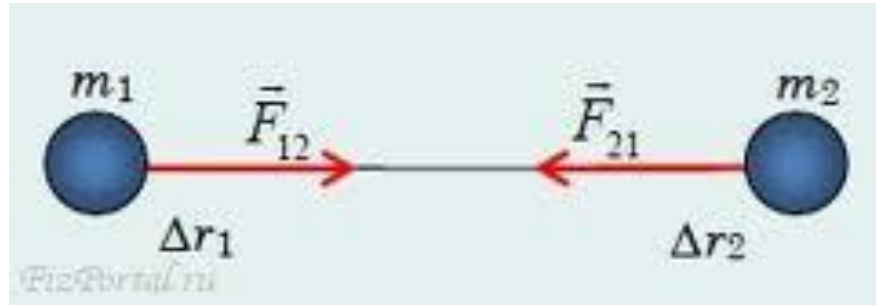
Второй закон Ньютона для системы

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{V}_C}{dt}$$

Система центра масс (Ц-система)

Когда нас интересует лишь относительное движение частиц внутри системы, а не ее движение как целого, целесообразно пользоваться системой отсчета, в которой центр масс покоится. Эту систему называют системой **центра масс** или **Ц – системой**. Отличительной особенностью этой системы является то, что полный импульс частиц в ней всегда равен нулю.

Относительное движение двух частиц



Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух взаимодействующих частиц, сила взаимодействия которых зависит только от расстояния между ними. Движения этих частиц можно описать уравнениями:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Относительное движение двух частиц

- Радиус-вектор центра масс

$$R = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Радиус вектор относительного расстояния

$$r = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Скорость центра масс

$$V = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Приведенная масса

- Внутренние силы не влияют на движение центра масс, и он движется с постоянной скоростью

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}t$$

Уравнение относительного движения

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}}{m_2} + \frac{\vec{F}}{m_1} = \frac{\vec{F}}{\mu}$$

Приведенная масса

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Расстояния от частиц до центра масс

Зная относительное расстояние, мы можем найти расстояния \vec{r}_1 , \vec{r}_2 от каждой частицы до центра масс, перейдя в Ц – систему и используя для этого уравнения:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0,$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}.$$

Отсюда получаем:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r},$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

Полное решение задачи двух тел

- Теперь мы можем получить полное решение задачи двух тел:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}'_1 = \vec{R}_0 + \vec{V}t - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r},$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}'_2 = \vec{R}_0 + \vec{V}t + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

Движение тела переменной массы

Условия задачи: найти уравнение движения тела, масса которого тела изменяется в процессе движения. Пусть в некоторый момент t масса движущегося тела равна m , а присоединяемое (или отделяемое) вещество имеет скорость \vec{u} относительно данного тела.



Уравнение Мещерского

Введем вспомогательную инерциальную K систему отсчета, скорость которой такова же, как и скорость тела в данный момент t . В этот момент тело покоится в этой системе.

За промежуток времени от t до $t+dt$ тело приобретает в K – системе импульс $md\vec{v}$. Тогда

$$md\vec{v} = \vec{F} dt \pm \delta m \vec{u}$$

где знак плюс соответствует присоединению массы, а знак минус – отделению. Поделив полученное выражение на dt получим:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

Иван Всеволодович Мещерский

русский и советский ученый-механик



Уравнение движения материальной точки переменной массы для случая присоединения (или отделения) частиц было получено и основательно исследовано в магистерской диссертации [И. В. Мещерского](#), защищенной в Петербургском Университете 10 декабря 1897 года

Дата рождения: 29 июля ([10 августа](#)) [1859](#)
Место рождения: [Архангельск](#)
Дата смерти: [7 января 1935](#)
Место смерти: [Ленинград](#)

Уравнение Мещерского-Частные случаи

- Если $\vec{u} = 0$, т. е. масса присоединяется или отделяется без скорости относительно тела, то $\vec{R} = 0$ и уравнение приобретает вид

-

$$\bullet m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

- где $m(t)$ – масса тела в данный момент времени. Это уравнение описывает, например, движение платформы, из которой свободно сыплется песок.

Уравнение Мещерского-Частные случаи

- Если $u = -v$ т. е. присоединяемая масса неподвижна в выбранной системе отсчета или отделяемая масса становится неподвижной в этой системе, то уравнение принимает другой вид:

$$\bullet \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

- Иначе говоря, в этом частном случае – и только в этом – действие силы \vec{F} определяет изменение импульса тела с переменной массой. Данный случай реализуется, например, при движении платформы, нагружаемой песком из неподвижного бункера.

Уравнение Мещерского – Задача 1

- Ракета движется в инерциальной K -системе отсчета в отсутствие внешнего силового поля, причем газовая струя вылетает с постоянной относительно ракеты скоростью u .
- Найдем зависимость скорости v ракеты от ее массы m , если в момент старта ее масса была равна m_0 .
- В данном случае $\vec{F} = 0$ откуда следует
-

$$\bullet \quad d\vec{v} = \vec{u} \frac{dm}{m}.$$

Уравнение Мещерского – Задача 1

- Проинтегрировав это выражение с учетом начальных условий, получим

-

- $\vec{v} = -\ln(m_0/m),$

-

- где знак минус показывает, что вектор \vec{v} (скорость ракеты) противоположен по направлению вектору \vec{u} . Отсюда видно, что скорость ракеты в данном случае ($u = const$) не зависит от времени сгорания топлива: \vec{v} определяется только отношением начальной массы m_0 ракеты к оставшейся массе m .

Уравнение Мещерского – Задача 2

- Железнодорожная платформа в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием постоянной силы тяги F . Пренебрегая трением в осях, найти зависимость от времени скорости платформы $v(t)$ если:
 - 1). Платформа нагружена песком, который высыпается через отверстие в ее дне с постоянной скоростью μ (кг/с), а в момент $t = 0$ масса платформы с песком равна m_0 ;
 - 2). На платформу, масса которой m_0 , в момент $t = 0$ начинает высыпаться песок из неподвижного бункера так, что скорость погрузки постоянна и равна μ (кг/с).

Уравнение Мещерского – Задача 2

- *Решение. 1.* В этом случае реактивная сила равна нулю и уравнение имеет вид $(m_0 - \mu t) \frac{dv}{dt} = F$, откуда

-

- $dv = F \frac{dt}{(m_0 - \mu t)}$.

-

- Проинтегрировав это уравнение с учетом начальных условий, получим

-

- $v = \frac{F}{\mu} \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}$.

Уравнение Мещерского – Задача 2

- *Решение 2.* Здесь горизонтальная составляющая реактивной силы (а только эта составляющая нас и интересует) $R = -\mu v$, где v – скорость платформы. Поэтому уравнение приводится к виду

$$d(mv) = Fdt.$$

- Интегрирование с учетом начальных условий дает

-

- $mv = Ft,$

-

- где $m = m_0 + \mu t$. Отсюда

-

- $v = \frac{Ft}{m_0 + \mu t}.$

Уравнение Мещерского – Задача 3

- Ракета поддерживается в воздухе на постоянной высоте, выбрасывая вертикально вниз струю газа со скоростью u .
Найти:
- 1). Сколько времени ракета сможет оставаться на этой высоте, если начальная масса топлива составляет η -ю часть ее массы (без топлива);
- 2) Какую массу $\mu(t)$ газов должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться на постоянной высоте, если начальная масса ракеты (с топливом) равна m_0 .

Уравнение Мещерского – Задача 3

• *Решение 1.* В данном случае $\frac{dv}{dt} = 0$ и уравнение примет вид

•

$$\bullet \quad mg + \frac{dm}{dt}u = 0,$$

•

• или после разделения переменных

•

$$\bullet \quad \frac{dm}{m} = -\frac{g}{u} dt.$$

•

Уравнение Мещерского – Задача 3

- Интегрирование этого уравнения дает

-

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{g}{u} t.$$

-

- Отсюда

-

$$t = \frac{u}{g} \ln \frac{m_0}{m} = \frac{u}{g} \ln(1 + \eta),$$

-

- где учтено, что $\eta = \frac{m_0 - m}{m}$.

Уравнение Мещерского – Задача 3

- *Решение 2.* Из предыдущего пункта следует, что

-

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = \frac{g}{u} m,$$

где $m = m_0 \exp\left(-\frac{gt}{u}\right)$. В результате

$$\mu = -\frac{g}{u} m_0 \exp\left(-\frac{gt}{u}\right).$$

-

- По такому закону μ меняется со временем в течение промежутка времени, найденного в п. 1.

Уравнение Мещерского – Задача 4

- Ракета поднимается с нулевой начальной скоростью вертикально вверх в однородном поле тяжести.
- Первоначальная масса ракеты (с топливом) равна m_0 . Скорость газовой струи постоянна и равна u относительно ракеты.
- Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость v ракеты в зависимости от ее массы m и времени подъема t .

Уравнение Мещерского – Задача 4

- *Решение.* Запишем уравнение движения ракеты – уравнение в проекции на вертикальную ось с положительным направлением вверх:

-
- $$m \frac{dv}{dt} = -mg - u \frac{dm}{dt}.$$
-

- Перепишем это уравнение так:

-
- $$m \frac{d}{dt} (v + gt) = -u \frac{dm}{dt}.$$
-

- Откуда

-
- $$d(v + gt) = -u \frac{dm}{dt}.$$

Уравнение Мещерского – Задача 4

- Проинтегрировав с учетом начальных условий последнее уравнение, получим

-

$$\bullet v + gt = -uln\left(\frac{m}{m_0}\right).$$

-

- Искомая скорость ракеты

-

$$\bullet v = uln\left(\frac{m}{m_0}\right) - gt.$$

До следующей лекции

