

Тема: ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Содержание лекции:

- 1. Упругие напряжения и деформации. Закон Гука.**
- 2. Общие свойства жидкостей и газов.**
- 3. Поток вектора скорости. Уравнение непрерывности.**
- 4. Циркуляция векторного поля. Ротор вектора. Уравнения движения и равновесия жидкости.**
- 5. Уравнение движения и равновесия жидкости.**
- 6. Стационарное движение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли.**
- 7. Стационарное течение вязкой жидкости.**

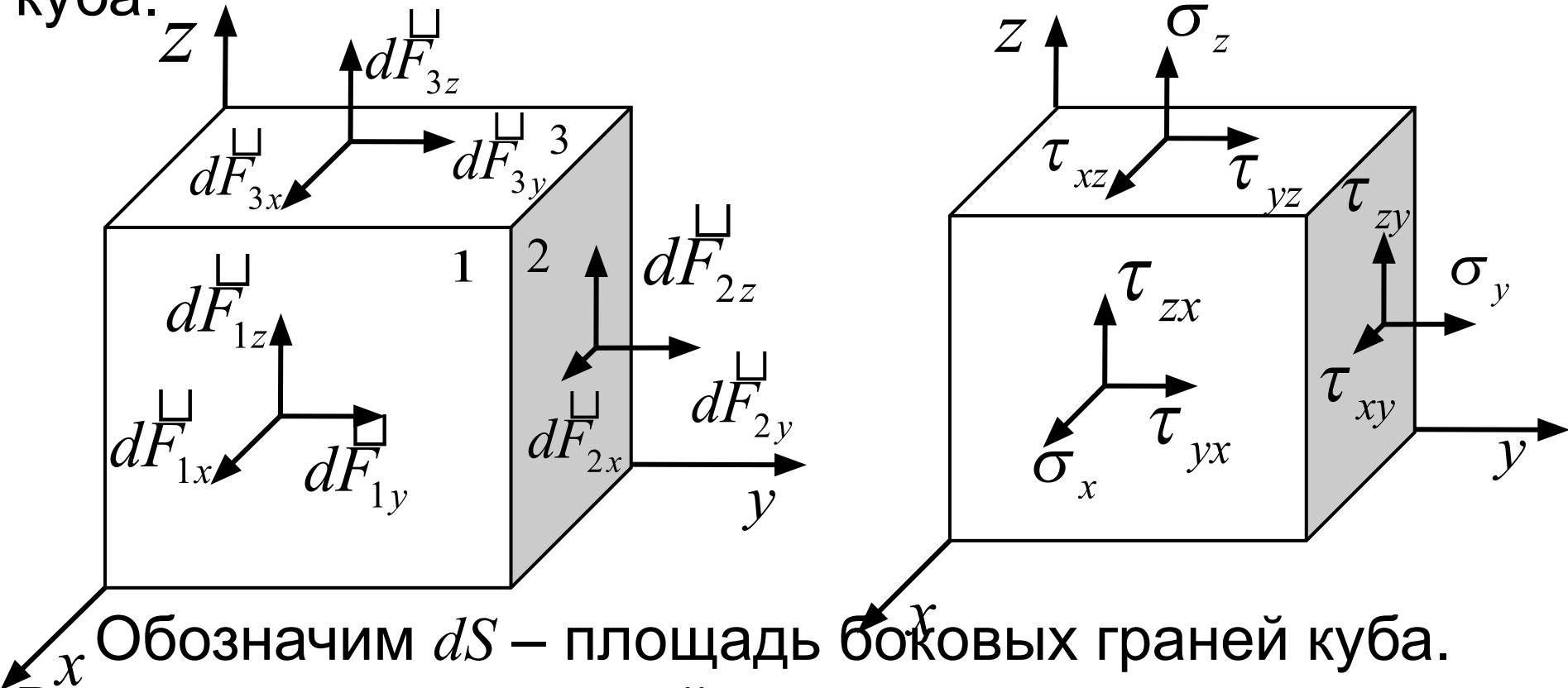
1. Упругие напряжения и деформации. Закон Гука

Идеально (абсолютно) упругим телом называется такое тело, которое обладает свойством восстанавливать свои размеры и форму после того, как деформирующие его силы прекращают свое воздействие.

Рассматриваем не сам процесс деформирования, а конечный результат, после установления равновесия в деформируемом теле.

Рассмотрим некоторое тело, деформированное внешними силами. Внешние силы вызывают смещения частиц тела по сравнению с исходным состоянием. В результате в теле возникают внутренние силы, т.е. тело переходит в напряженное состояние.

Выделим бесконечно малый объем вещества в виде куба.



В равновесии силы, действующие на каждую грань:
 . Должны быть равны по величине и противоположны по направлению;

. Полный момент всех сил, действующих на куб, равен нулю.

$$\sigma_x = \frac{dF_{1x}}{dS}, \quad \tau_{xy} = \frac{dF_{2x}}{dS}, \quad \tau_{xz} = \frac{dF_{3x}}{dS},$$

$$\tau_{yx} = \frac{dF_{1y}}{dS}, \quad \sigma_y = \frac{dF_{2y}}{dS}, \quad \tau_{yz} = \frac{dF_{3y}}{dS},$$

$$\tau_{zx} = \frac{dF_{1z}}{dS}, \quad \tau_{zy} = \frac{dF_{2z}}{dS}, \quad \sigma_z = \frac{dF_{3z}}{dS}.$$

Эти величины называются механическими напряжениями.

Из второго условия равновесия суммарный момент, например, сил dF_{1y} и dF_{2x} равен нулю, если $dF_{1y} = dF_{2x}$, т.е.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Компоненты $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - нормальные напряжения, в зависимости от знака характеризуют растягивающие (сжимающие) усилия.

Напряжения $\tau_{xy}, \tau_{zy}, \tau_{yx}$ касательные (сдвиговые) напряжения, действуют в плоскости соответствующих граней.

При внешнем воздействии в общем случае тело изменяет свои размеры и форму, т.е. испытывает деформацию. При всем разнообразии деформаций оказывается возможным любую из них свести к двум.

Элементарными деформациями являются растяжение (сжатие) и сдвиг.

Деформация растяжения (сжатия) –

характеризуют величиной относительного удлинения.

Если выделенный в теле объем до действия сил имел длину l в некотором направлении, а после приложения сил, эта длина изменилась на Δl , то относительное удлинение будет

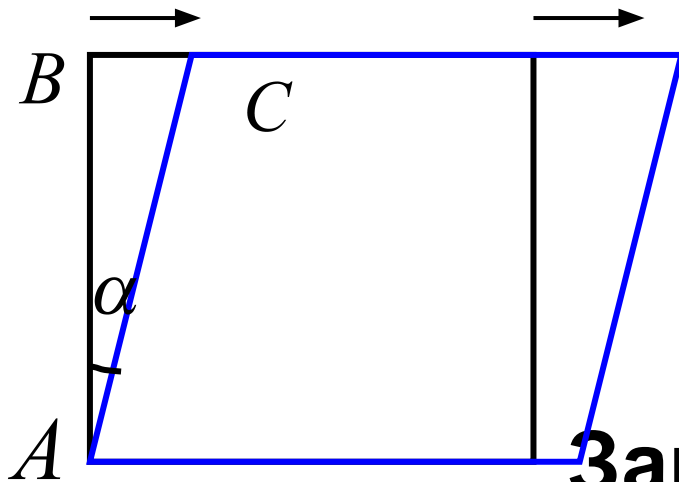
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

При растяжении $\varepsilon > 0$, при сжатии $\varepsilon < 0$.

Как правило $\varepsilon \ll 1$!!!

Деформация сдвига

характеризуется величиной относительного сдвига



$$\gamma = \frac{BC}{BA} = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$$

$$\gamma \ll 1$$

Закон Гука

Относительное растяжение (сжатие) ε
пропорционально растягивающему (сжимающему)
напряжению σ .

$$\sigma = E \varepsilon$$

E – модуль Юнга – напряжение, создающее относительное удлинение тела, равное единице.

Растяжение, например, стержня, сопровождается его поперечным сжатием.

$$\delta = \frac{\Delta b}{b} = -\frac{b' - b}{b}$$

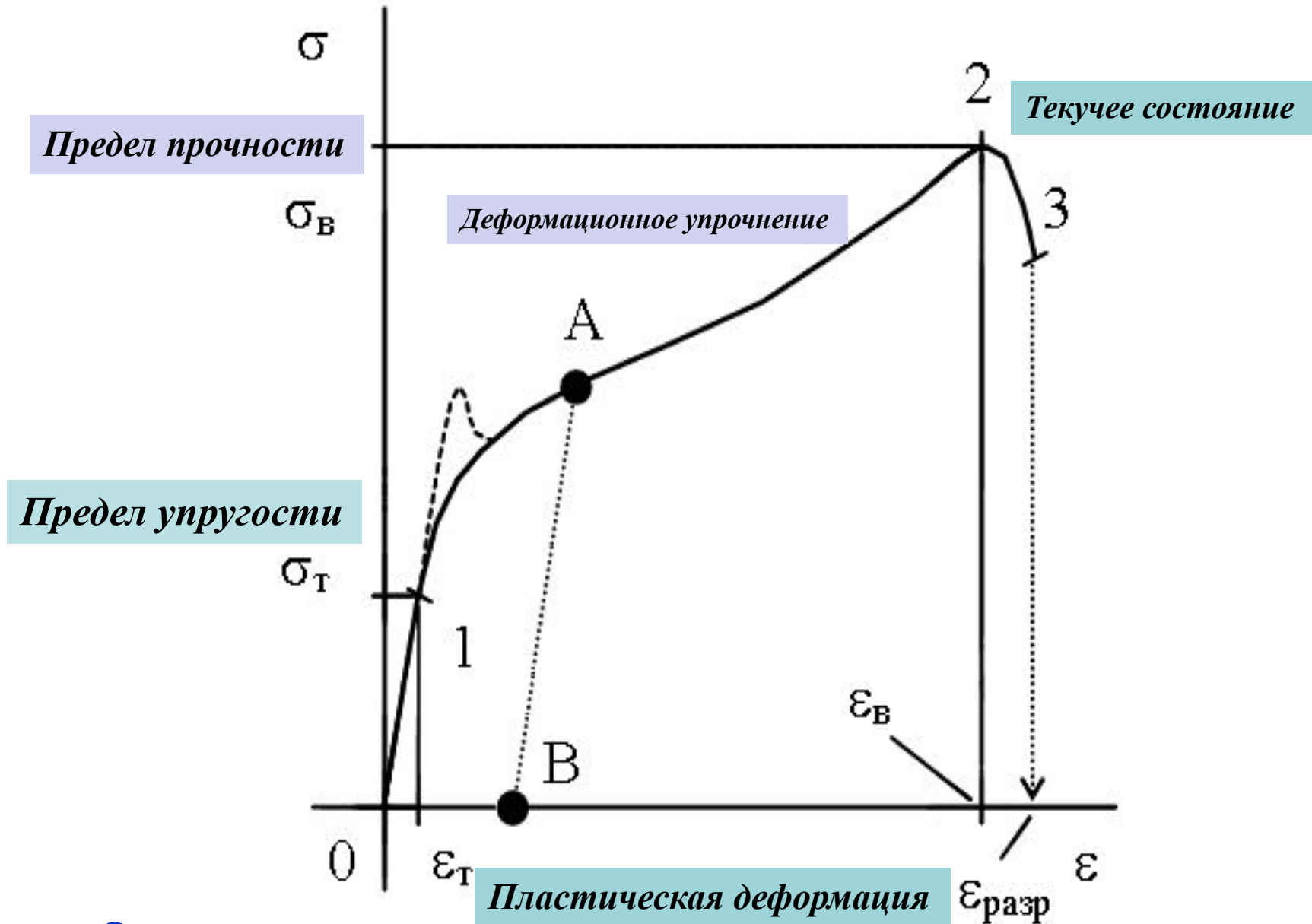
относительное сжатие.

Относительное сжатие связано с относительным растяжением:

$$\delta = -\nu \varepsilon$$

ν - коэффициент Пуассона.

«-» – отражает тот факт, что продольная и поперечная деформации при одноосном растяжении (сжатии) всегда имеют противоположные знаки.



Зависимость напряжения от относительного удлинения при растяжении образца

2. Общие свойства жидкостей и газов

Агрегатное состояния вещества

1. Твердое

2. Жидкое

3. Газообразное

Зависит от соотношения между потенциальной энергией взаимодействия атомов $W_{вз}$, составляющих тело, и их средней кинетической энергией $W_{ср.кин}$.

1. $W_{вз} \gg W_{ср.кин}$, твердое состояние.

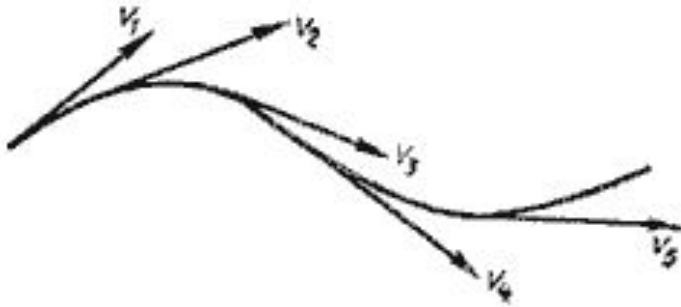
2. $W_{вз} \sim W_{ср.кин}$, жидкое состояние.

3. $W_{вз} \ll W_{ср.кин}$, газообразное состояние.

Способы кинематического описания жидкостей

- 1. Способ Лагранжа.** Выбирается совокупность «жидких» частиц, движение жидкости описывается как движение таких частиц. Вводится понятие скорости и ускорения частиц (трудно учесть изменение формы «жидкой» частицы при движении).
- 2. Способ Эйлера.** Задается векторное поле скоростей движения жидкости, т.е. фиксируем, как ведет себя скорость течения жидкости в точках ее объема с течением времени. Следим за кинематическими характеристиками жидкости в фиксированных точках пространства, не интересуясь тем, какие именно «жидкие» частицы проходят эти точки. Для наглядного представления вводят линии тока.

Линия тока – линия, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной.



Густота , с которой проведены линии тока, пропорциональна величине скорости течения.

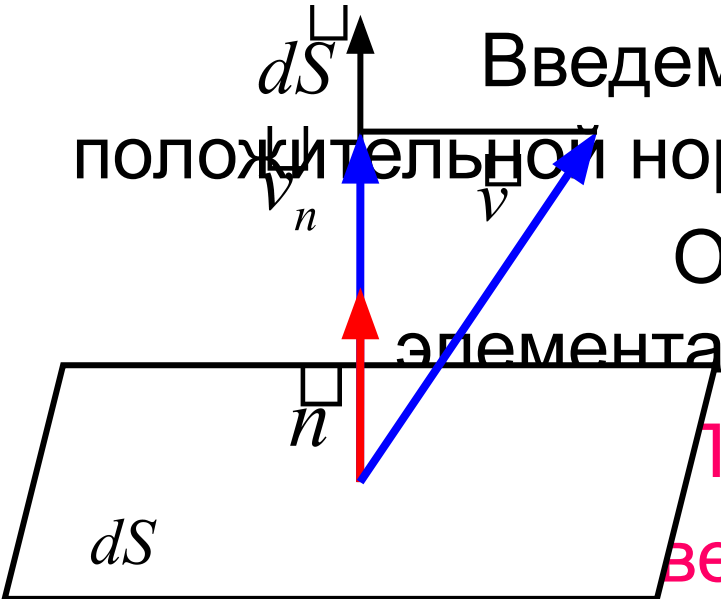
Часть объема жидкости, ограниченная

линиями тока, называется **трубкой тока**.

Жидкость, находящаяся внутри трубки тока, не может покинуть ее пределы, т.к. по определению линий тока вектор скорости течения направлен по касательной к поверхности трубки тока.

3. Поток вектора скорости; уравнение непрерывности

Рассмотрим в поле вектора малый плоский элемент поверхности с площадью dS .



Введем единичный вектор положительной нормали \vec{n} .

Образует вектор площади

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$$

Потоком вектора \vec{v} через поверхность бесконечно малой площади называется величина:

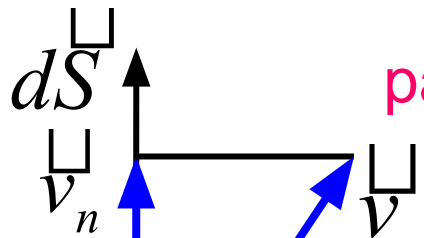
$$d\Phi_v = (\vec{v}, d\vec{S}) = v_n dS$$

объем dV , который успевает наполнять за 1 с поток жидкости, пронизывающий площадку dS

$$d\Phi_m = (\vec{v}\rho, d\vec{S}) = \rho v_n dS$$

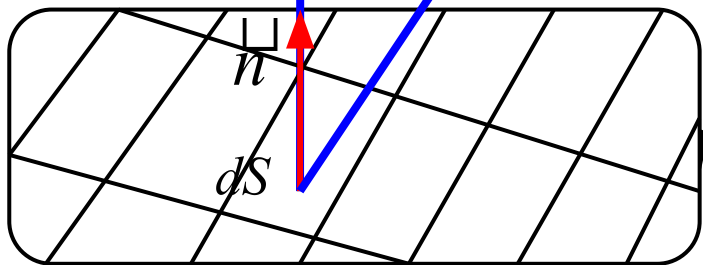
поток массы

Если поверхность имеет конечные размеры S



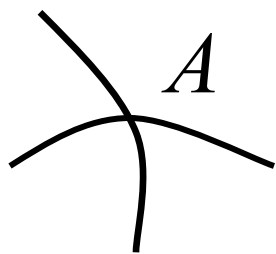
разбить на плоские малые элементы

$$\Phi_v = \int_S (\vec{v}, d\vec{S}) = \int_S v_n dS.$$



ток вектора через всю поверхность.

Здесь и далее считается, что нормаль к каждому из элементов поверхности dS направлена из объема наружу (внешняя нормаль).



если $d\Phi_v > 0$



СТОК

если $d\Phi_v < 0$

ИСТОК

при $d\Phi_v = 0$ источников и стоков нет,

или они имеют одинаковую интенсивность.

Рассмотрим в поле вектора \vec{v} малый объем ΔV , окруженный замкнутой поверхностью ΔS . Тогда

$$\Delta \Phi_v = \oint_{\Delta S} (\vec{v}, d\vec{S})$$

будет характеризовать общую интенсивность источников и стоков, находящихся в объеме ΔV .

$\frac{\oint_{\Delta S} (\vec{v}, d\vec{S})}{\Delta V}$ характеризует удельную интенсивность источников (стоков).

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} (\vec{v}, d\vec{S})}{\Delta V} = \operatorname{div}(\vec{v})$$

Это локальная удельная характеристика интенсивности источников жидкости в точке A поля \vec{v} .

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint (\vec{v}, d\vec{S})}{\Delta V} = \operatorname{div}(\vec{v})$$

Это локальная удельная характеристика интенсивности источников жидкости в точке A поля \vec{v} .

Если $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$, в т. A нет источников (стоков).

Если $\operatorname{div}(\vec{v}) > 0$, т. A является источником.

Если $\operatorname{div}(\vec{v}) < 0$, т. A является стоком.

Чем больше $\operatorname{div}(\vec{v}) > 0$, тем выше интенсивность источника.

$$(\nabla, \vec{v}) \equiv \operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

∇ – набла

Уравнение непрерывности

Выберем в жидкости объем V , ограничим замкнутой поверхностью S . Поток массы через S :

$$\Phi_m = \oint_S \rho v_n dS$$

Масса жидкости, заключенной внутри S , равна

$$m = \int_V \rho dV$$

В отсутствие источников (стоков) жидкости внутри объема масса жидкости, которая вытекает из него, должна быть равна изменению массы объема V в единицу времени, т.е. $-\frac{\partial m}{\partial t}$

$$-\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \rho dV \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \rho dS dt \right) = -\rho dS$$

$$\Phi_m = \oint_S \rho v_n dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV.$$

Уравнение непрерывности жидкости в интегральной форме.

Если течение стационарно, т.е. величины, характеризующие течение жидкости, не зависят явно от времени, то

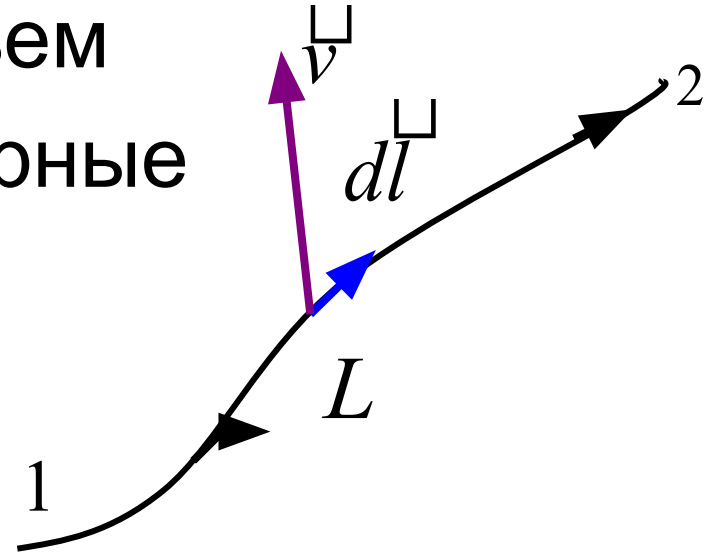
$$\oint_S \rho v_n dS = 0$$

Смысл: в стационарном потоке

сколько жидкости входит в данный объем, столько и выходит из него.

**4. Циркуляция векторного поля.
Ротор вектора. Уравнения
движения и равновесия жидкости.**

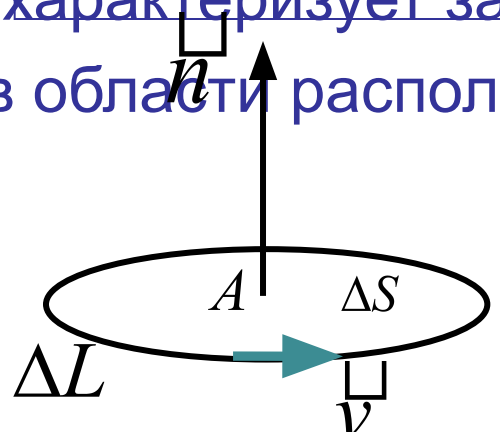
Пусть в поле скоростей $\mathbf{v}(x, y, z)$ задана некоторая кривая L . Разобьем эту кривую на малые векторные элементы $d\mathbf{l}$, направление которых совпадает с направлением обхода L .



$$\oint_L (\mathbf{v}, d\mathbf{l}) = \oint_L v_i dl_i$$

циркуляция вектора скорости
вдоль кривой L

(характеризует завихренность поля вектора в области расположения L).



$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint (\mathbf{v}, d\mathbf{l})}{\Delta S} \cdot \mathbf{n} = \text{rot } \mathbf{v}(x, y, z)$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint (\vec{v}, d\vec{l})}{\Delta S} \cdot \vec{n} = \text{rot} \vec{v}(x, y, z)$$

Это локальная характеристика завихренности потока жидкости в окрестности точки А.

$$\text{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = [\nabla, \vec{v}]$$

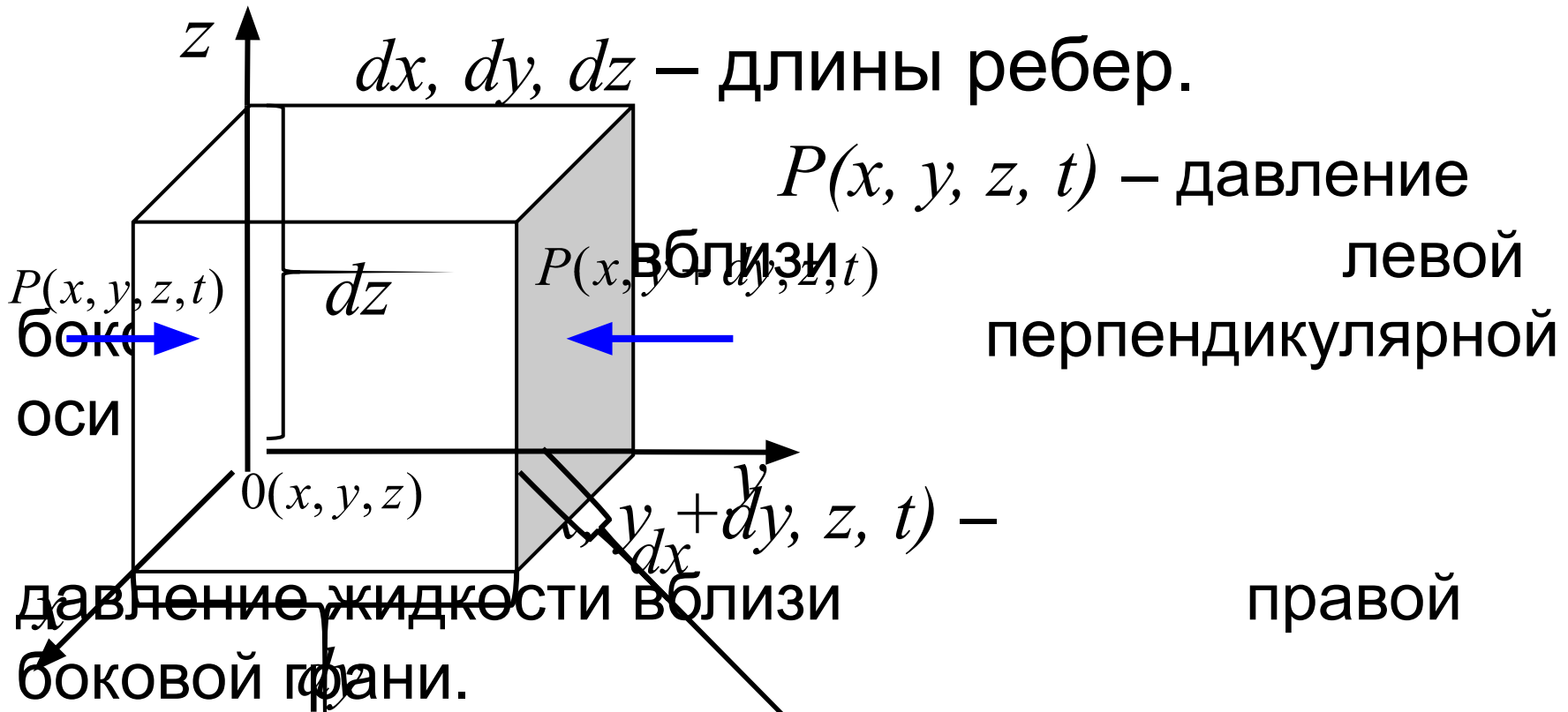
В жидкости отсутствует понятие сдвига. В жидкости могут быть только напряжения всестороннего сжатия, причем

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = P$$

где P – давление – сила, действующая на некоторую площадку, помещенную в жидкость перпендикулярно силе и отнесенной к единице площади:

$$P = \frac{dF}{dS_{\perp}}$$

Выберем в жидкости бесконечно малый объем



Проекция на ось y силы давления жидкости:

$$dF_y = P(x, y, z, t) dx dz - P(x, y + dy, z, t) dx dz = -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz = -\frac{\partial P}{\partial y} dV$$

Воспользуемся определением частной производной, т.е. проекция силы давления, отнесенная к единице объема:

$$\frac{dF_y}{dV} = f_y = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

Аналогично:

$$f_x = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad f_z = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

□ Сила давления, действующая на элемент жидкости.

$$f = -\text{grad}P = -\nabla P$$

Учтем, что жидкость может находиться в гравитационном поле, потенциал которого ϕ , тогда

- сила, действующая со стороны этого поля на единицу массы.

$$J_m = -\nabla \phi$$

-сила, отнесенная к единице объема.

$$f_T = -\rho \nabla \phi$$

Идеальная жидкость – жидкость, вязкостью которой можно пренебречь.

Запишем второй закон Ньютона

$$dm \vec{a} = dm \frac{d\vec{v}(x, y, z, t)}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_m = -\nabla P dV - dm \nabla \varphi$$

$$dm = \rho dV$$

∇ – набла

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v}$$

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

Уравнение движения идеальной жидкости в гравитационном поле

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P - \rho \nabla \varphi$$

гравитационном

В равновесии справедлив закон Паскаля: давление, оказываемое на жидкость, передается ею по всем направлениям одинаковым образом.

$$\nabla P + \rho \nabla \varphi = 0$$

Частный случай: несжимаемая жидкость.

Жидкость находится в однородном поле тяготения.

Выберем положительное направление оси z вертикально вверх. Тогда потенциал будет

$$\varphi = gz + \text{const},$$

где g – ускорение свободного падения. Подставим в уравнение равновесия:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g.$$

$$P = -\rho gz + \text{const}.$$

$$P = P_0 + \rho g(h - z)$$

линейное увеличение
гидростатического давления
с увеличением глубины

Одно из проявлений закона Паскаля можно наблюдать в гидравлическом прессе: два сообщающихся сосуда заполнены жидкостью и закрыты поршнями различной площади.



$$P_1 = P_2$$

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \text{или} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

Таким образом, **сила давления второго поршня больше силы давления первого во столько раз, во сколько площадь больше первого.**

Гидравлический пресс – простой механизм, позволяющий развить колоссальные силы, используемые для прессования различных изделий из металлов и пластмасс.

Обозначим h_1, h_2 - ходы поршней.

Вследствие несжимаемости объемы жидкости, перешедшего из одного цилиндра в другой, одинаковы:

$$S_1 h_1 = S_2 h_2$$

Работы, совершаемые силами за один ход

$$A_1 = S_1 h_1 \text{ и } A_2 = S_2 h_2.$$

Их отношение

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{F_1 h_1}{F_2 h_2} = \frac{S_1 h_1}{S_2 h_2} = 1$$

Как и следовало ожидать,

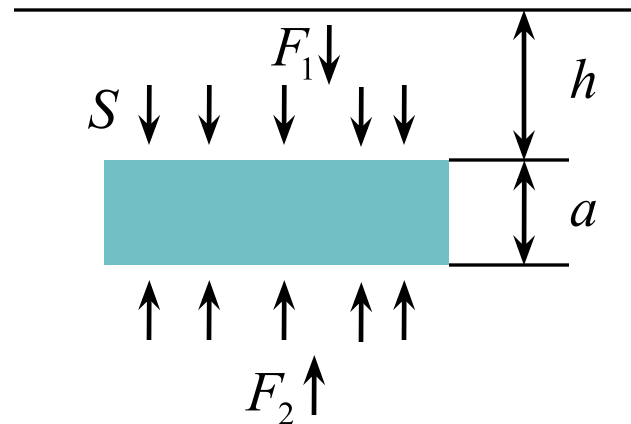
пресс дает выигрыш в силе, но не в совершаемой работе.

Согласно формуле

$$P = P_0 + \rho g(h - z)$$

Сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние. Поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила – **сила Архимеда**.

Погрузим в жидкость на глубину h параллелепипед с площадью основания S и высотой ребра a .



Давление на глубине h равно

$$p(h) = p_0 + \rho gh$$

Поэтому на верхнее основание действует сила

$$F_{\downarrow} = p(h)S = S(p_0 + \rho gh).$$

На глубине $h + a$ давление равно

$$p(h + a) = p_0 + \rho g(h + a)$$

Поэтому на нижнее основание действует сила

$$F_{\uparrow} = p(h + a)S = S(p_0 + \rho gh + \rho ga).$$

Равнодействующая этих двух сил направлена вверх и равна по величине

$$F_A = F_{\uparrow} - F_{\downarrow} = \rho Sa g = \rho V g = mg.$$

Здесь $Sa = V$ - объем погруженной части тела,

$\rho V = m$ - масса жидкости (газа) того же объема.

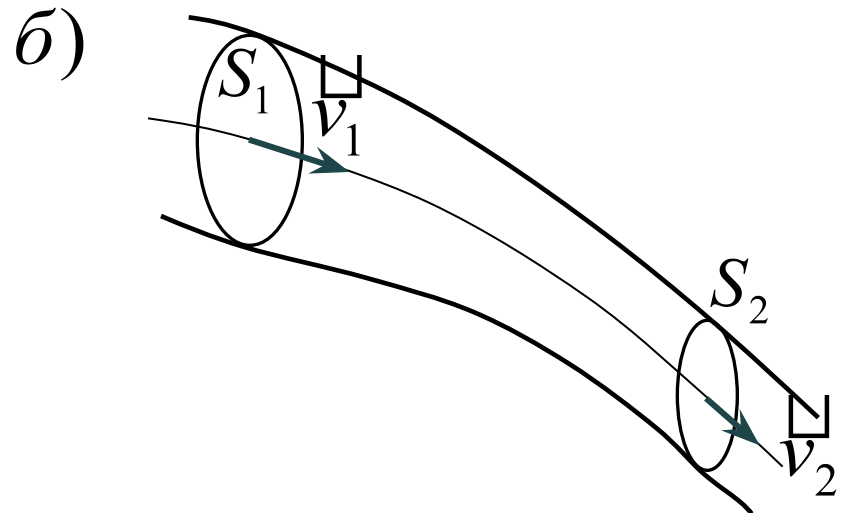
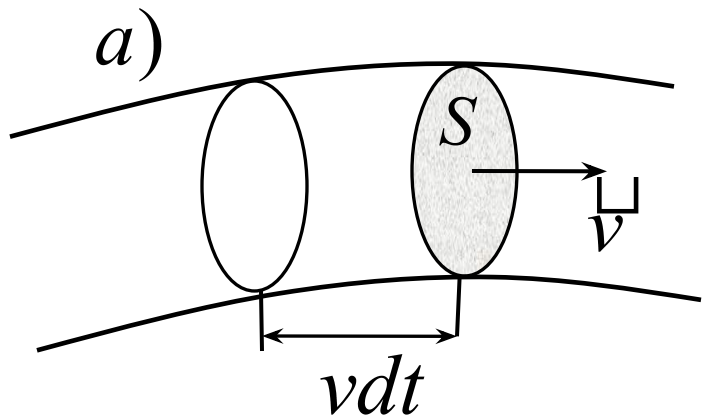
Закон Архимеда: на тело погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая сила, равна весу вытесненной телом жидкости (газа).

6. Стационарное движение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли

Стационарное течение жидкости - это такое течение, при котором скорость жидкости в каждой данной точке остается постоянной как по величине, так и по направлению.

Для стационарного течения форма и расположение линий тока со временем не изменяются.

Рассмотрим какую-либо трубку тока. За время dt через произвольное сечение S ходит объем жидкости $Svdt$. Выберем два ее сечения S_1 и S_2 .



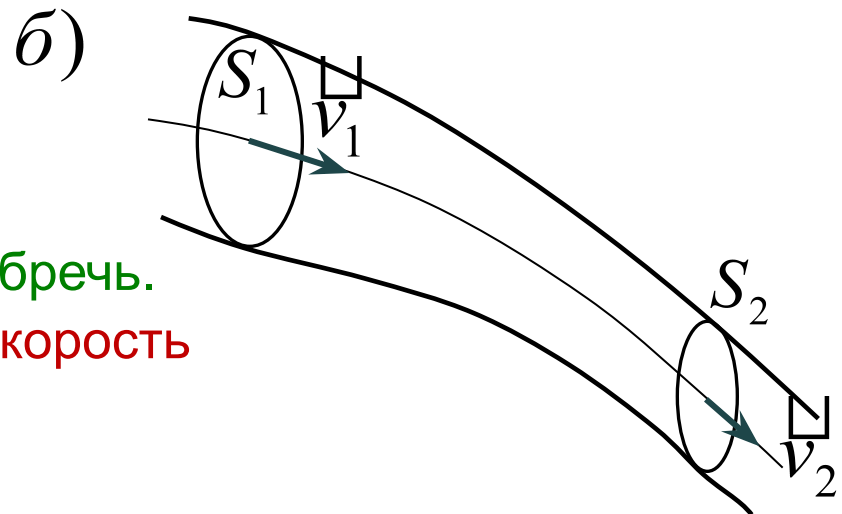
За время dt через сечение S_1 пройдет объем жидкости $V_1 = S_1 v_1 dt$. Аналогично, через сечение S_2 за то же время dt пройдет объем $V_2 = S_2 v_2 dt$.

Из условия несжимаемости жидкости следует равенство объемов, вошедших в область между сечениями S_1 и S_2 и вышедших из нее:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Следовательно, для несжимаемой жидкости величина Sv в любом сечении одной и той же трубки тока одинакова: $Sv = const.$ — теорема о непрерывности струи.

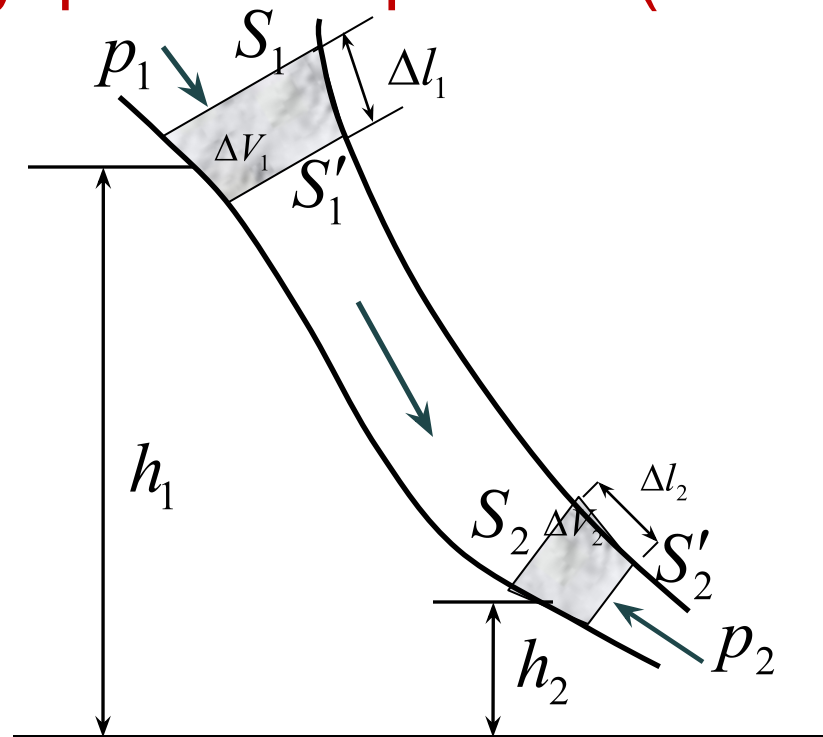
Примечание: Теорема применима к реальным жидкостям и газам, если их сжимаемостью можно пренебречь.
Следствие: в месте сужения трубы скорость потока возрастает.



При течении жидкости ее отдельные слои текут с разными скоростями, скользят друг относительно друга, вследствие чего между ними возникают силы трения. Эти силы называют **силами внутреннего трения** (возникают не только в жидкостях, но и в газах).

Жидкость, в которой внутреннее трение (вязкость) полностью отсутствует, называется идеальной.

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2 , по которой слева направо течет жидкость.



За время Δt объем жидкости переместится вдоль трубки тока. В силу непрерывности струи заштрихованные объемы будут иметь одинаковую величину: $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$.

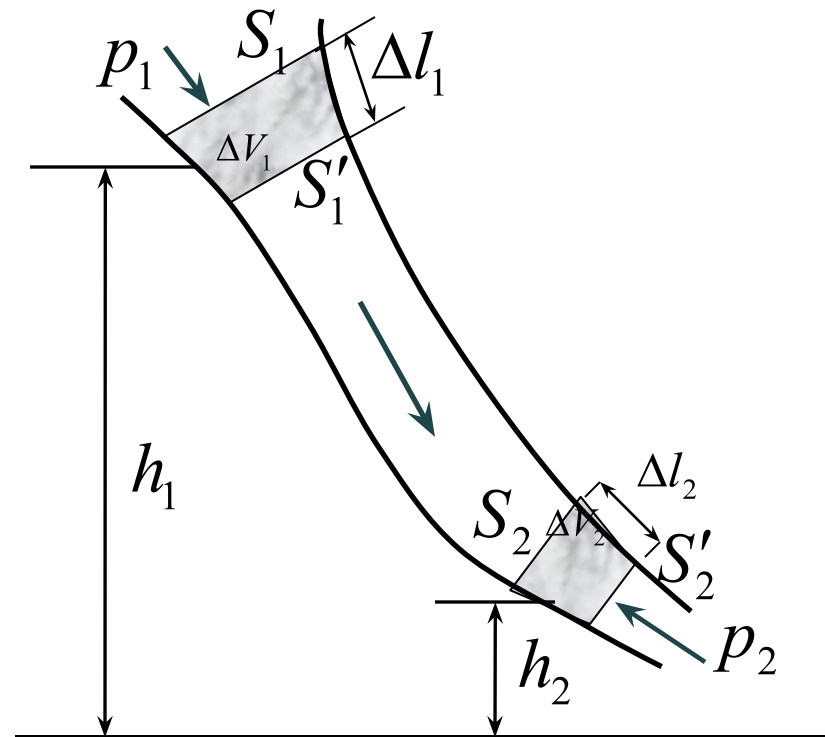
Энергия каждой частицы жидкости $W_i = W_{кин} + W_{пот}$.

Полная энергия потока, протекающего за Δt через сечение S_1

$$W_1 = \left(\frac{\rho \Delta V_1 v_1^2}{2} + \rho \Delta V_1 g h_1 \right) = \Delta V \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 \right).$$

Аналогично для S_2

$$W_2 = \left(\frac{\rho \Delta V_2 v_2^2}{2} + \rho \Delta V_2 g h_2 \right) = \Delta V \left(\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \right).$$



Изменение полной механической энергии

$$W_2 - W_1 = \Delta W = A$$

Силы давления на боковую поверхность трубки тока перпендикулярны в каждой точке к направлению перемещения частиц, поэтому работу не совершают. Отлична от нуля только работа сил, приложенных к сечениям S_1 и S_2 .

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2) \Delta V$$

$$\Delta W = \Delta V \left(\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \right) - \Delta V \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 \right) =$$
$$= A = (p_1 - p_2) \Delta V.$$

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

Сечения S_1 и S_2 были взяты произвольно. Поэтому в стационарно текущей идеальной жидкости в любом сечении трубки выполняется условие:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const.}$$

p – статическое давление

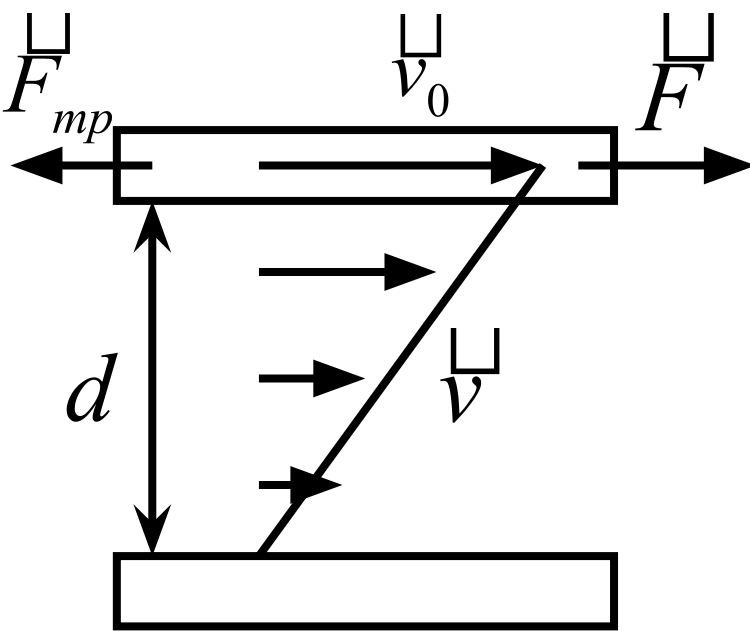
$\rho g h$ – гидростатическое давление

$\frac{\rho v^2}{2}$ – динамическое давление

Уравнение Бернулли: в установившемся движении идеальной жидкости полное давление, слагающееся из динамического, гидростатического и статического, одинаково для всех поперечных сечений трубки тока.

**7. Движение тел в среде с
сопротивлением. Стационарное течение
вязкой жидкости**

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть у нас имеются две большие параллельные пластины, площадью S .



\vec{v}_0 – скорость стационарного движения верхней пластины,
 \vec{F} – внешняя сила действующая на верхнюю пластину,
 $\vec{F}_{тр}$ – сила вязкого трения, действующая со стороны

жидкости на пластину.

Через некоторое время после приложения к верхней пластине силы \vec{F} она приобретает постоянную скорость \vec{v}_0 .

Слои жидкости также станут двигаться, причем величина скорости этих слоев будет линейно возрастать от 0 до ∞ с увеличением расстояния от нижней пластины.

Выводы:

1. Вязкая жидкость «прилипает» к поверхности твердого тела. Скорость жидкости на поверхности тела и скорость тела движущегося в жидкости одинаковы (условие «прилипания»).

2. Так как скорость постоянна, то со стороны жидкости на верхнюю пластину действует сила, которая компенсирует внешнюю силу. Это и есть сила вязкого трения. Она действует не только на твердые тела в жидкости, но и между элементами самой жидкости.

Для величины силы вязкого трения в условиях рассматриваемого опыта справедливо равенство

$$F_{mp} = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S$$

Формула Ньютона

η - коэффициент вязкости – динамическая вязкость

$$[\eta] = 1 \text{ пуаз} = 1 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v}$$

Уравнение движения вязкой жидкости – уравнение Навье-Стокса

Применяется для описания движения реальных жидкостей и газов

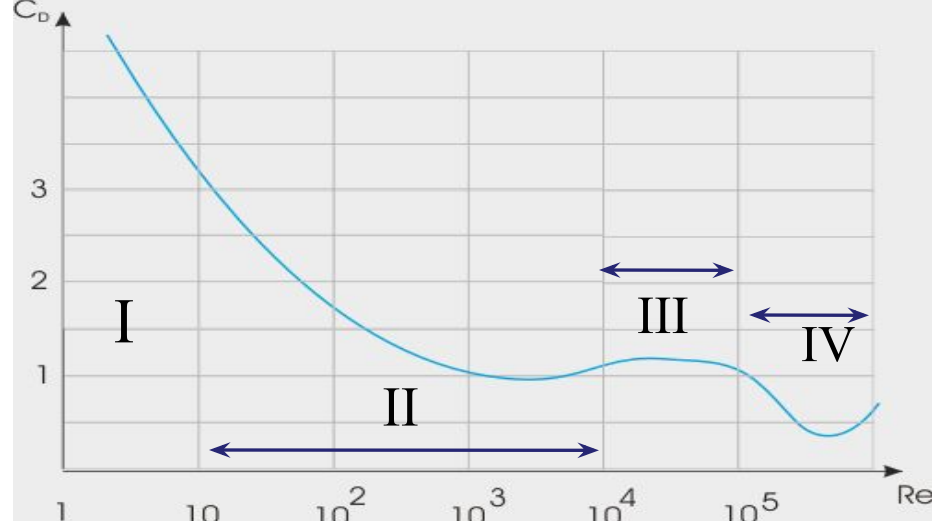
$$\Delta \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа}$$



Вихревая дорожка при обтекании цилиндра

Число Рейнольдса

$$R_e = \frac{\rho R v_{\infty}}{\eta}$$



Если число Рейнольдса мало ($R_e \sim 1 - 10^{-2}$), то течение через некоторое время после начала приобретает характер **послойного, т.е. ламинарного, установившегося (стационарного) течения.**

Если увеличим число Рейнольдса до ($R_e \sim 10$), то первоначальное **неустойчивым**. Т.е. случайные малые возмущения будут возрастать по величине, и течение становится неустойчивым. Это можно наблюдать в процессе течения жидкости со временем, когда происходит переход к режиму более сложного течения.





1199.swf



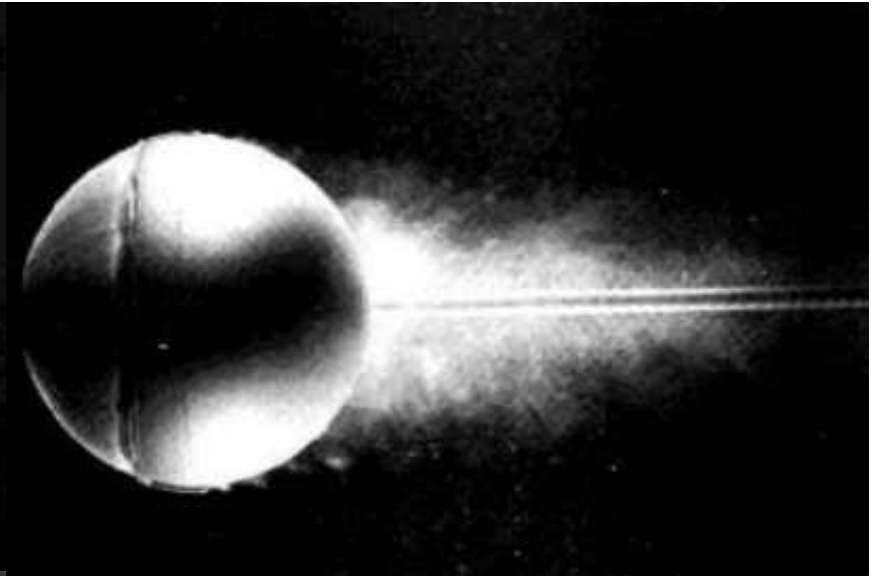
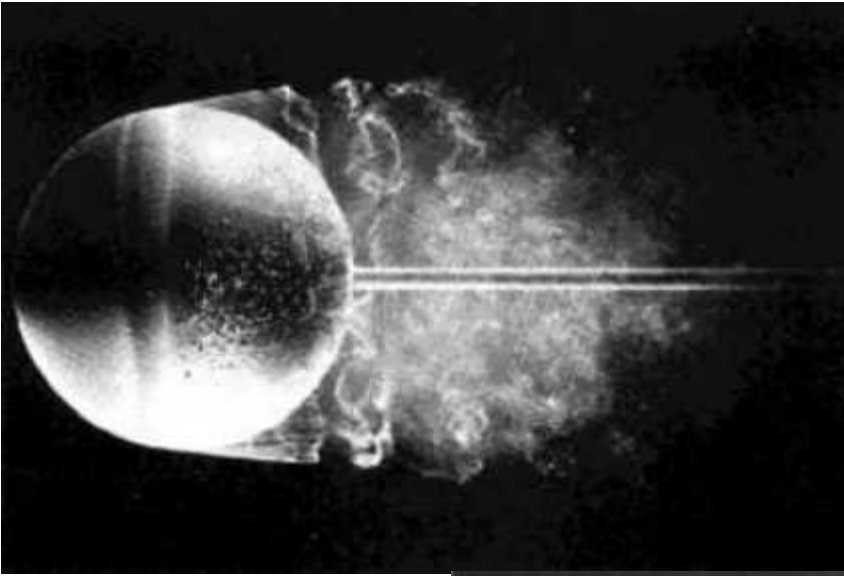
1.swf

3. Если увеличить число Рейнольдса до ($R_e \sim 10^2$), то характер течения снова меняется за счет **НОВОГО ТИПА НЕУСТОЙЧИВОСТИ**: возникает нестационарное обтекание, при котором **вихри отрываются и уносятся по течению**.

4. Если увеличить число Рейнольдса до ($R_e \sim 10^4 - 10^5$), течение становится **полностью неупорядоченным, хаотическим**. Такое течение называют турбулентным.



Ламинарное (на переднем плане) и турбулентное течение вокруг субмарины «Лос-Анджелес»



Лекция окончена

Нажмите клавишу <ESC> для выхода