Содержание

Основные положения

Теоретическая механика – изучает законы механического движения и механического взаимодействия, общие для любых тел.

Основные модели материальных тел и систем:

Материальная точка (МТ) – не имеет размеров, но в отличие от геометрической точки обладает массой, равной массе того тела, которое изображается данной материальной точкой.

Абсолютно твердое тело (АТТ) – система МТ, в которой расстояние между ними не изменяются ни при каких воздействиях.

Механическая система (МС) – совокупность МТ или АТТ, связанных между собой общими законами движения или взаимодействия.

В зависимости от условия задачи и выбора объекта изучения одно и то же физическое тело может быть принято за МТ, АТТ или МС. Например, Земля при изучении ее движения вокруг Солнца принимается за МТ, а при изучении ее вращения вокруг собственной оси – за АТТ. При изучении явлений, происходящих на Земле (приливы и отливы, перемещения коры и т.п.), Земля рассматривается как МС.

Теоретическая механика состоит из трех разделов:

Статика – изучает условия относительного равновесия механических систем. Для осуществления равновесия необходимо определенное соотношение сил, поэтому в статике изучаются общие свойства сил, правила замены сил другими силами, эквивалентными с точки зрения равновесия.

Кинематика –изучает механическое движение без учета сил, вызывающих это движение или влияющих на него. Таким образом, устанавливаются некоторые количественные меры движения с чисто геометрической точки зрения.

Динамика – изучает механическое движение в связи с действующими силами на объект движения. Таким образом, изучается связь между движением и действующими силами.

- **Основные понятия теоретической механики**

Сила – мера механического взаимодействия. Сила моделируется вектором, характеризуемым направлением и величиной (модулем).

Кинематическое состояние тела – состояние покоя или движения с неизменными параметрами.

Система сил – совокупность сил, приложенных к рассматриваемому объекту.

Равнодействующая – сила, эквивалентная системе сил, т.е. не изменяющая кинематическое состояние.

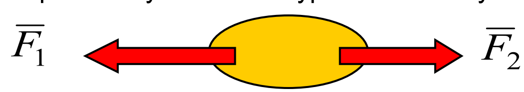
Эквивалентная система сил – заменяет данную систему сил без изменения кинематического состояния объекта.

Взаимно уравновешенная система сил – под ее действием объект находится в равновесии.

- **Аксиомы статики**

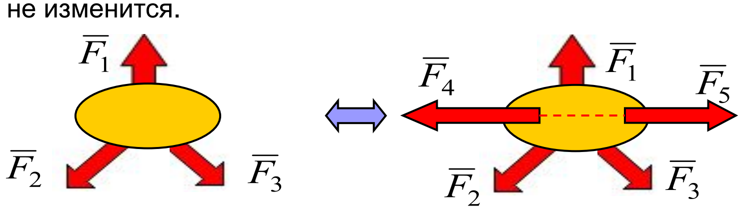
1. Аксиома инерции – Под действием взаимно уравновешенной системы сил тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

2. Аксиома двух сил – Если тело под действием двух сил находится в равновесии, то эти силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Такие две силы представляют собой простейшую взаимно уравновешенную систему сил.



$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$$

3. Аксиома присоединения – Если к заданной системе сил присоединить (или изъять) взаимно уравновешенную систему сил, то кинематическое состояние тела не изменится.



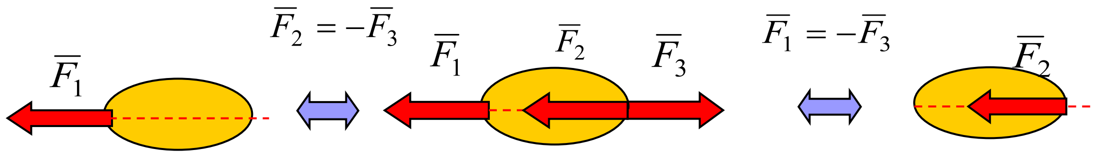
$$\bar{F}_4 = -\bar{F}_5$$

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3) \equiv (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5)$$

Лекция 1 (продолжение – 1.2)

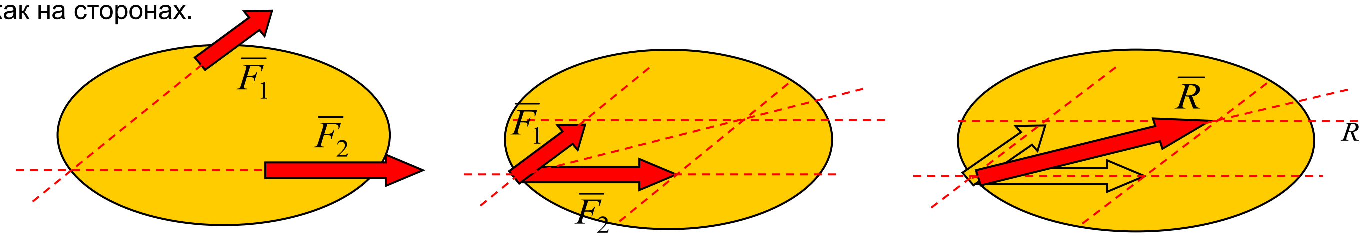
- **Аксиомы статики (продолжение)**

Следствие из аксиомы присоединения – Кинематическое состояние тела не изменится, если силу перенести по линии ее действия.



$$(\overline{F}_1) \equiv (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3) \equiv (\overline{F}_2)$$

4. Аксиома параллелограмма – Равнодействующая двух пересекающихся сил равна диагонали параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах.



$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_1^2 + 2F_1F_2\cos(F_1, F_2)}$$

5. Аксиома действия и противодействия – Всякому действию соответствует равное и противоположное противодействие (III закон Ньютона).

$$\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}$$

6. Аксиома отвердевания – Равновесие деформируемого тела сохраняется при его затвердевании (обратное справедливо не всегда).

- **Связи и реакции связей**

Свободное тело – свобода перемещений тела не ограничивается никакими другими телами.

Несвободное тело – его движение ограничено другими телами.

Связь – тело, ограничивающее свободу перемещений объекта.

Реакция связи – сила, действующая на объект со стороны связи.

Принцип освобождаемости от связи – несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие соответствующими реакциями.

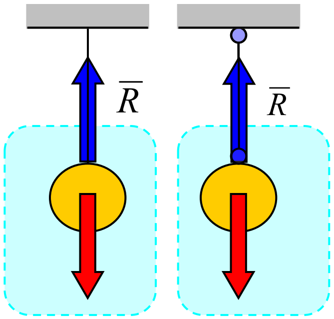
Лекция 1 (продолжение – 1.3)

- **Связи и реакции связей (продолжение)**

Виды связей и их реакции:

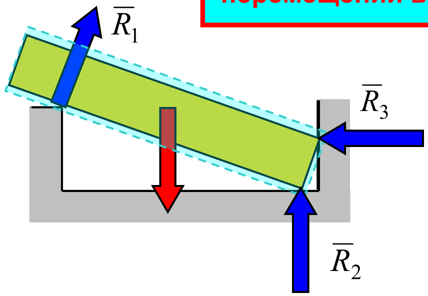
Общее правило для связей любого вида:
Если связь препятствует одному или нескольким перемещениям (максимальное число перемещений – три поступательных и три вращательных), то по направлению именно этих и только этих перемещений возникают соответствующие реакции (силы и моменты).

1. Нить, шарнирный стержень:



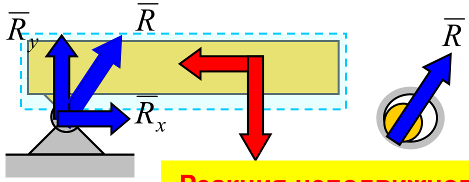
Реакция нити (стержня) направлена по нити (по стержню).

2. Абсолютно гладкая поверхность:



Реакция гладкой поверхности направлена перпендикулярно общей касательной плоскости, проведенной к соприкасающимся поверхностям тела и связи.

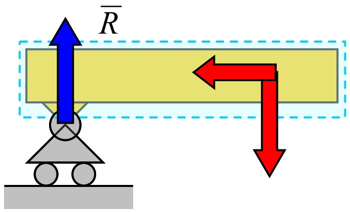
3. Неподвижный цилиндрический шарнир:



Реакция неподвижного шарнира проходит через центр шарнира перпендикулярно оси шарнира и имеет произвольное направление.

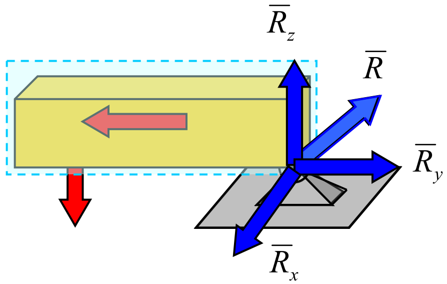
Реакция неподвижного сферического шарнира проходит через центр шарнира и имеет произвольное направление в пространстве.

4. Подвижный цилиндрический шарнир:



Реакция подвижного шарнира проходит через центр шарнира перпендикулярно оси шарнира и плоскости опирания.

5. Неподвижный сферический шарнир:

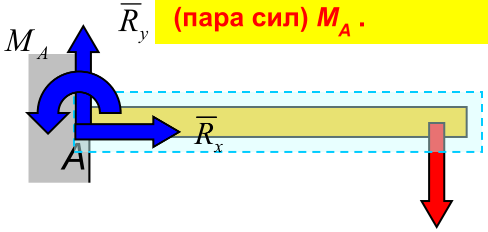


Реакцию неподвижного сферического шарнира можно разложить на три составляющие, например, R_x, R_y, R_z, параллельные координатным осям.

Реакцию неподвижного шарнира можно разложить на две составляющие, например, R_x и R_y, параллельные координатным осям.

6. Жесткая плоская заделка:

В жесткой плоской заделке возникает три реактивных усилия: две составляющие реактивные силы R_x и R_y, а также реактивный момент (пара сил) M_A .

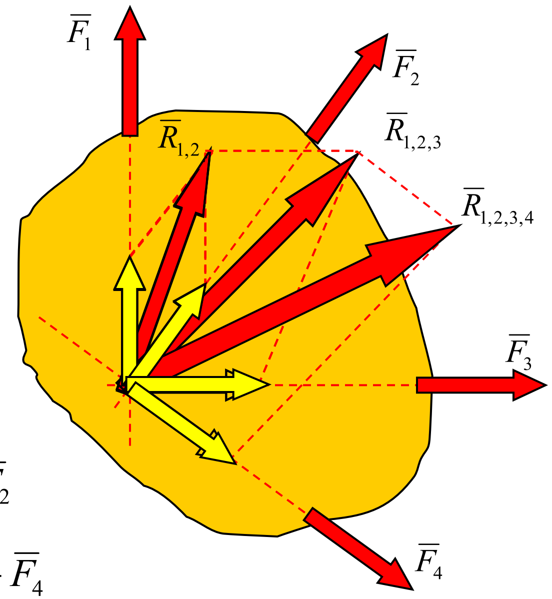


Лекция 2

- **Система сходящихся сил –** линии действия сил пересекаются в одной точке**.**

План исследования любой системы сил соответствует последовательному решению трех вопросов :

1. Как упростить систему?
2. Каков простейший вид системы?
3. Каковы условия равновесия системы?



1. Перенесем все силы по линии их действия в точку пересечения (кинематическое состояние тела при этом не изменится – следствие из аксиомы присоединения).

Сложим первые две силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ (аксиома параллелограмма). Количество сил уменьшилось на единицу.

$$\overline{R}_{1,2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

Сложим полученную равнодействующую $\boldsymbol{R}_{12}$ со следующей силой $\boldsymbol{F}_3$. Количество сил вновь уменьшилось на единицу.

$$\overline{R}_{1,2,3} = \overline{R}_{1,2} + \overline{F}_2$$

Повторим эту же операцию со следующей силой $\boldsymbol{F}_4$. Осталась всего одна сила, эквивалентная исходной системе сил.

$$\overline{R}_{1,2,3,4} = \overline{R}_{1,2,3} + \overline{F}_4$$

Сложение сил построением параллелограммов можно заменить построением **силового треугольника** – выбирается одна из сил или изображается параллельно самой себе с началом в любой произвольной точке, все другие **силы изображаются параллельными самим себе с началом, совпадающим с концом предыдущей силы.**

Результатом такого сложения является вектор, направленный из начала первой силы к концу последней из сил.

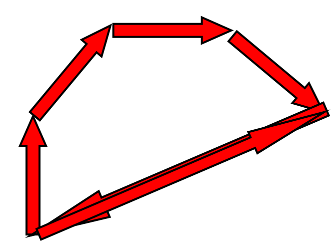
2. Простейший вид системы – сила, приложенная в точке пересечения исходных сил. Таким образом, сходящаяся система сил приводится к одной силе – **равнодействующей** (силе, эквивалентной исходной системе сил), равной геометрической сумме сил системы.

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4 + ... = \sum \overline{F}_i$$

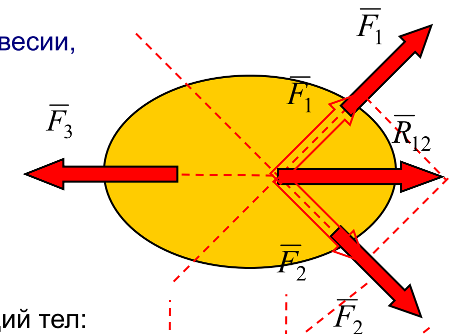
3. Если равнодействующая системы оказывается не равной нулю, тело под действием такой системы силы будет двигаться в направлении равнодействующей (система сил не уравновешена). Для того, чтобы уравновесить систему достаточно приложить силу, равную полученной равнодействующей и направленной в противоположную сторону (аксиома о двух силах). Таким образом, **условием равновесия системы сходящихся сил является обращение равнодействующей в ноль.**

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_i = 0$$

Это условие эквивалентно замкнутости силового треугольника определенным образом, а именно, **направление всех сил при обходе по контуру не изменяется по направлению**:



- **Теорема о трех силах –** Если тело, под действием трех непараллельных сил находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.



1. Перенесем две силы по линии их действия в точку их пересечения (кинематическое состояние тела при этом не изменится – следствие из аксиомы присоединения).

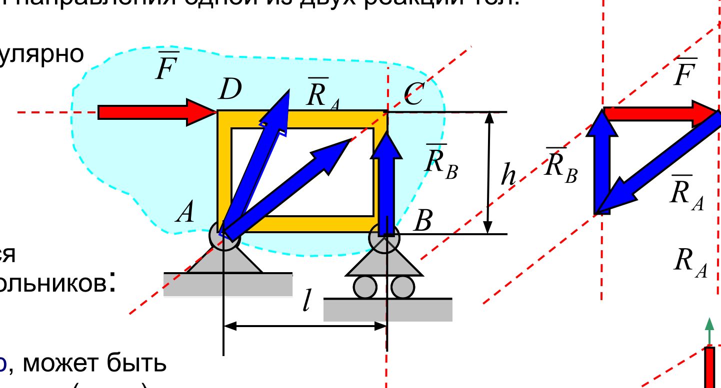
2. Сложим эти силы (аксиома параллелограмма). Теперь система состоит всего из двух сил. А такая система находится в равновесии, если эти силы равны между собой и направлены по одной линии в противоположные стороны. Таким образом, все три силы пересекаются в одной точке.

Теорема о трех силах может эффективно применяться для определения направления одной из двух реакций тел:

Реакция подвижного шарнира $\boldsymbol{R_B}$ направлена вертикально (перпендикулярно опорной плоскости). Направление (угол наклона к горизонту) реакции неподвижного шарнира $\boldsymbol{R_A}$ пока не определено.

Если тело под действием трех сил $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{R_A}$ и $\boldsymbol{R_B}$ находится в равновесии, то все три силы должны пересекаться в одной точке (в точке *C*) :

Действительные направления и величины реакций легко определяются построением силового треугольника и использованием подобия треугольников:



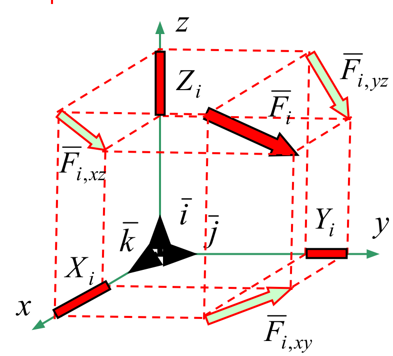
$$\frac{R_B}{F} = \frac{h}{l}$$

$$R_A = \sqrt{F^2 + R_B^2}$$

- **Аналитическое определение равнодействующей –**

Каждая из сил, геометрическая сумма которых дает равнодействующую, может быть представлена через ее проекции на координатные оси и единичные векторы (орты):

$$\overline{F}_i = X_i\bar{i} + Y_i\bar{j} + Z_i\bar{k}$$



Тогда равнодействующая выражается через проекции сил в виде:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_i = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... = X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k} + X_2\bar{i} + Y_2\bar{j} + Z_2\bar{k} + ...$$

Группировка по ортам дает выражения для проекций равнодействующей:

$$\overline{R} = (X_1 + X_2 + ...)\bar{i} + (Y_1 + Y_2 + ...)\bar{j} + (Z_1 + Z_2 + ...)\bar{k} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k}$$

Отсюда проекции равнодействующей :

$$R_x = \sum X_i; \quad R_y = \sum Y_i; \quad R_z = \sum Z_i;$$

Направляющие косинусы равнодействующей :

$$\cos(\overline{R}, x) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\overline{R}, y) = \frac{R_y}{R}.$$

Модуль равнодействующей :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

- **Уравнения равновесия сходящейся системы сил**

Условие равновесия:
Равнодействующая должна обращаться в ноль:

$$\overline{R} = 0$$

Отсюда **уравнения равновесия** :

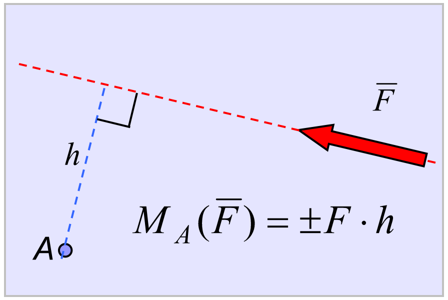
$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum Z_i = 0.$$

Лекция 2 (продолжение – 2.3)

- **Плоская произвольная система сил –** силы лежат в одной плоскости и их линии действия не пересекаются в одной точке**.**

Для рассмотрения такой системы сил необходимо ввести новые понятия:

1. Момент силы относительно точки на плоскости.
2. Пара сил. Момент пары сил.

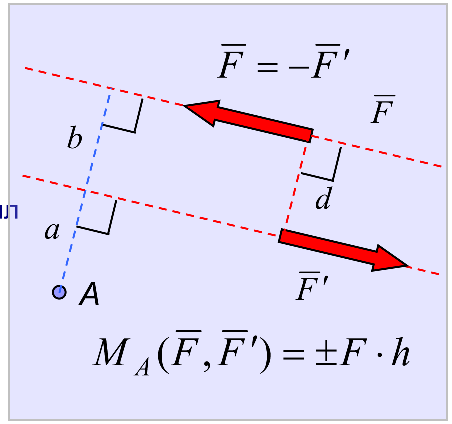


- **Момент силы относительно точки на плоскости –** алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятая со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием силы происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

  Плечо силы – длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.

- **Пара сил –** совокупность двух параллельных друг другу сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны. Пара сил более не может быть упрощена (не может быть заменена одной силой) и представляет собой новую силовую характеристику механического взаимодействия.
- **Момент пары сил на плоскости** (теорема о моменте пары сил) **–** не зависит от выбора центра приведения (полюса) и равен произведению модуля любой из сил пары на плечо пары, взятым со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием пары сил происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

  Плечо пары сил – длина перпендикуляра, опущенного из любой точки на линии действия одной из сил пары на линию действия другой силы этой пары.

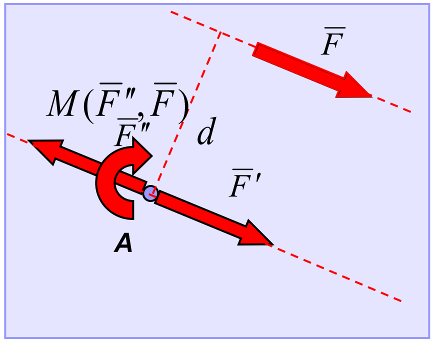


В независимости момента пары от выбора полюса можно убедиться вычислением суммы моментов от каждой из сил относительно любого центра.

- **Теоремы о парах:**
- **О переносе пары сил в плоскости ее действия** – Пару сил можно перенести в любое место в плоскости ее действия. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **Об эквивалентности пар сил** – Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты алгебраически равны. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **О сложении пар сил на плоскости** – Систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **Условие равновесия системы пар сил** -

$$M = \sum M_i = 0$$

- **Приведение силы к заданному центру**– силу можно перенести параллельно самой себе в любую точку плоскости, если добавить соответствующую пару сил, момент которой равен моменту этой силы относительно рассматриваемой точки.



Добавим к системе в точке *A* две силы, равные по величине между собой и величине заданной силы, направленные по одной прямой в противоположные стороны и параллельные заданной силе:

$$\overline{F}'' = -\overline{F}' = -\overline{F}$$

Кинематическое состояние не изменилось (аксиома о присоединении).

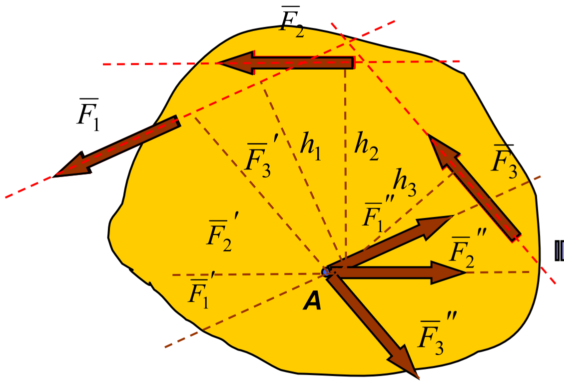
Исходная сила и одна из добавленных сил противоположно направленная образуют пару сил.

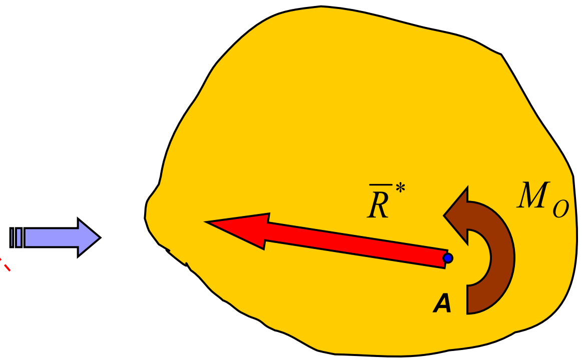
Момент этой пары численно равен моменту исходной силы относительно центра приведения.

$$M(\overline{F}'',\overline{F}) - F \cdot d = -F \cdot h = M_A(\overline{F})$$

Во многих случаях пару сил удобно изображать дуговой стрелкой.

Сходящаяся система сил приводится к одной силе, приложенной в центре приведения, которая ранее называлась равнодействующей, но теперь эта сила не заменяет исходную систему сил, поскольку после приведения возникла система пар. Система пар приводится к одной паре (теорема о сложении пар), момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных сил относительно центра приведения.





В общем случае плоская произвольная система сил приводится к одной силе, называемой главным вектором и к паре с моментом, равным главному моменту всех сил системы относительно центра приведения:

$\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i$ **- главный вектор,**

$M = M_A = \sum M_{iA}$ **- главный момент.**

- **Условием равновесия плоской произвольной системы сил** является одновременное обращение главного вектора и главного момента системы в ноль:

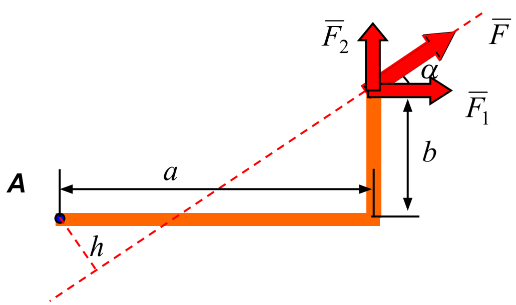
$$\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i = 0 \qquad M = M_A = \sum M_{iA} = 0$$

Лекция 3 (продолжение – 3.2)

- **Теорема Вариньона о моменте равнодействующей** – Если система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно того же центра.

Примеры использования теоремы о моменте равнодействующей:

1. Определение момента силы относительно точки, когда сложно вычислять плечо силы. Например:



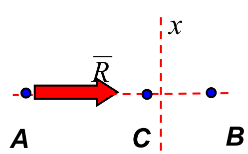
Силу ***F*** разложим на составляющие ***F***$_1$ и ***F***$_2$.
Тогда момент силы ***F*** относительно точки *A* можно вычислить как сумму моментов каждой из сил относительно этой точки:

$$M_A(F) = -F_1 b + F_2 a = -(F\cos\alpha)b + (F\sin\alpha)a$$

2. Доказательство необходимости ограничений для II и III форм уравнений равновесия:
Если $\sum M_{iA} = 0$, то система приводится к равнодействующей, при этом она проходит через точку *A*, т.к. ее момент относительное этой точки должен быть равен нулю (теорема Вариньона).

Если при этом $\sum M_{iB} = 0$, то равнодействующая должна также проходить через точку *B*.

Тогда проекция равнодействующей на ось, перпендикулярную *AB*, и момент равнодействующей относительно точки, лежащей на AB, будут тождественно равны нулю при любом значении равнодействующей.



Лекция 3 (продолжение – 3.3)

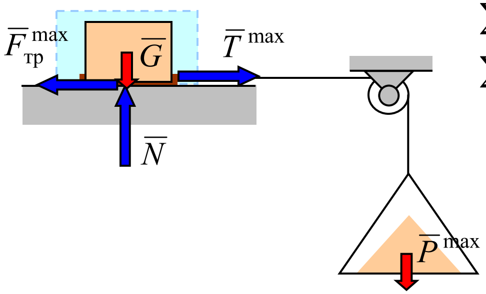
■ **Трение скольжения.** При действии сдвигающей силы, приложенной к телу, покоящемуся на шероховатой поверхности, возникает сила, противодействующая возможному смещению тела (**сила трения сцепления**) из равновесного положения или его действительному перемещению (**сила трения скольжения**) при его движении.

Основные законы трения (Амонтона - Кулона):

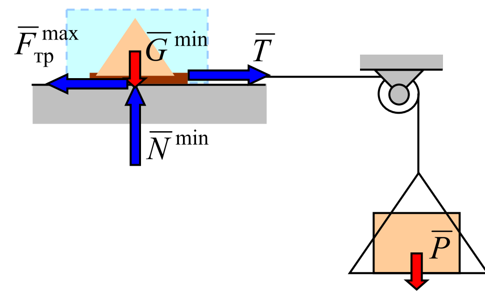
1. Сила трения лежит в касательной плоскости к соприкасающимся поверхностям и направлена в сторону противоположную направлению, в котором приложенные к телу силы стремятся его сдвинуть или сдвигают в действительности (реактивный характер).
2. Сила трения изменяется от нуля до своего максимального значения $0 \le F_{тр} \le F_{тр}^{max}$. Максимальная сила трения пропорциональна коэффициенту трения и силе нормального давления $F_{тр}^{max} = fN.$
3. Коэффициент трения есть величина постоянная для данного вида и состояния соприкасающихся поверхностей ($f = const$).
4. Сила трения в широких пределах не зависит от площади соприкасающихся поверхностей.

■ **Способы определения коэффициента трения.**

1. Сдвигающая сила изменяется от нуля до своего максимального значения – $0 \le \boldsymbol{T} \le \boldsymbol{T}^{max}$, $(0 \le \boldsymbol{P} \le \boldsymbol{P}^{max})$.
2. Сила нормального давления изменяется от некоторого начального значения до минимального значения – $\boldsymbol{N}_0 \ge \boldsymbol{N} \ge \boldsymbol{N}^{min}$ $(\boldsymbol{G}_0 \ge \boldsymbol{G} \ge \boldsymbol{G}^{min})$.



$$\sum X_i = 0; \quad T^{max} - F_{тр}^{max} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0; \quad N - G = 0.$$
$$T^{max} = fN;$$
$$N = G;$$
$$f = \frac{T^{max}}{N} = \frac{P^{max}}{G}.$$



$$\sum X_i = 0; \quad T - F_{тр}^{max} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0; \quad N^{min} - G^{min} = 0.$$
$$T = fN^{min};$$
$$N^{min} = G^{min};$$
$$f = \frac{T}{N^{min}} = \frac{P}{G^{min}}.$$

3. Сдвигающая сила и сила нормального давления изменяются при изменении угла наклона плоскости скольжения от нуля до максимального

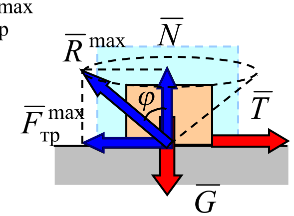
Активные силы ($\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{T}$ и др.) можно заменить равнодействующей силой $\boldsymbol{P}$, имеющей угол отклонения от вертикали α. Можно показать, что **равновесие возможно лишь в том случае, когда эта сила остается внутри пространства конуса трения**:

Условие равновесия по оси x: $P\sin\alpha \le F_{тр}^{max}$.
Из уравнения равновесия по оси y: $N = P\cos\alpha$.
Максимальная сила трения $F_{тр}^{max} = fN = \mathrm{tg}\varphi N = \mathrm{tg}\varphi P\cos\alpha$.
Тогда $P\sin\alpha \le \mathrm{tg}\varphi P\cos\alpha$, откуда $\mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha} \le \mathbf{tg}\varphi$ и $\boldsymbol{\alpha \le \varphi}$.

■ **Угол трения.**

С учетом силы трения, возникающей при контакте с шероховатой поверхностью полная реакция такой поверхности может рассматриваться как геометрическая сумма нормальной реакции абсолютно гладкой поверхности и силы трения:

$$\bar{R}^{max} = \bar{N} + \bar{F}_{тр}^{max}$$



Угол отклонения полной реакции шероховатой поверхности – **угол трения**, равный:

$$\varphi = arctg\left(\frac{F_{тр}^{max}}{N}\right) = arctg(f)$$

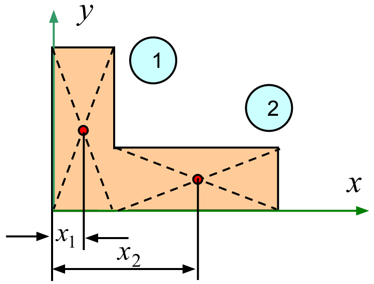
При изменении направления сдвигающей силы $\boldsymbol{T}$ на опорной поверхности ее поворотом относительно нормали к плоскости полная максимальная реакция шероховатой поверхности описывает **конус трения**.

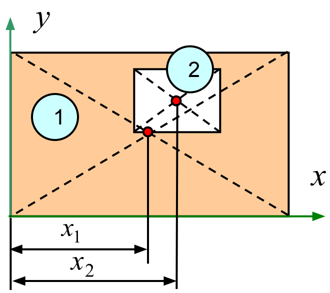
Лекция 3 (продолжение – 3.4)

- **Методы определения положения центра тяжести сложных фигур –**

1. **Метод разбиения** – сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются:

$$x_C = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2}$$





2. **Метод отрицательных площадей** – так же, как и в методе разбиения, сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются, но при наличии отверстий или пустот удобно их представление в виде “отрицательных” областей. Например, следующая фигура вместо разбиения на 4 обычных прямоугольника, может быть представлена как совокупность двух прямоугольников, один из которых имеет отрицательную площадь:

$$x_C = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i} = \frac{x_1 S_1 + x_2 (-S_2)}{S_1 + (-S_2)}$$

Замечание. Поскольку координата, например, x2, может быть отрицательна, то не следует представлять это выражение с использованием разностей:

$$x_C = \frac{x_1 S_1 - x_2 S_2}{S_1 - S_2}$$

3. **Метод симметрии** – при наличии у фигуры оси или плоскости симметрии центр тяжести лежит на этой оси или в этой плоскости. С учетом этого свойства уменьшается количество координат центра тяжести, подлежащих определению. См., например, определение положения центра тяжести кругового сектора.

4. **Метод интегрирования** – при наличии у фигуры достаточно простого контура, описываемым известным уравнением (окружность, парабола и т.п.), выбирается элементарная площадка или полоска и выполняется аналитическое интегрирование. См. например, определение положения центра тяжести треугольника или кругового сектора. При более сложном контуре, который может быть разбит на более простые граничные отрезки используется предварительно метод разбиения. При сложностях с аналитическим интегрированием используются численные методы интегрирования.

5. **Метод подвешивания** – экспериментальный метод, основанный на том, что при подвешивании тела или фигуры за какую-либо произвольную точку центр тяжести находится на одной вертикали с точкой подвеса. Для определения положения центра тяжести плоской фигуры достаточно ее подвесить поочередно за две любые точки и прочертить соответствующие вертикали, например, с помощью отвеса, и точка пересечений этих прямых соответствует положению центра тяжести фигуры.