Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии (многовариантные задачи)

(типовые задания С4)

Тихомирова Галина Юрьевна МБОУ «СОШ № 23 г. Владивостока»

1. Взаимное расположение линейных фигур

2. Взаимное расположение прямолинейных фигур

3. Взаимное расположение окружностей

4. Взаимное расположение элементов фигуры

5. Соответствие между множеством фигур и множеством их свойств

1. Взаимное расположение линейных фигур

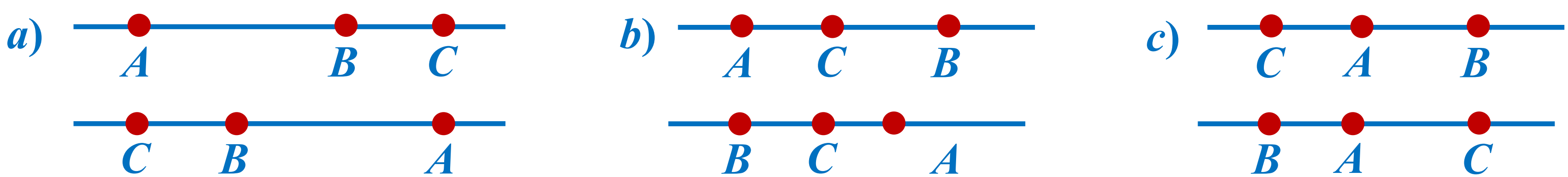
Линейной будем считать фигуру, представляющую собой точку, отрезок, луч, прямую.

При решении задач условие может трактоваться неоднозначно, если для рассматриваемых фигур не указано их взаимное расположение.

1.1 Взаимное расположение различных точек на прямой

Пример 1. На прямой взяты точки *A, B* и *C* так, что расстояние между точками *A* и *B* равно *5*, а между *B* и *C* равно *3*. Найдите расстояние между точками *A* и *C* .

Решение. Неоднозначность в данной задаче состоит в том, что на прямой не указано взаимное расположение точек *A, B* и *C* относительно друг друга. Можно записать шесть различных вариантов расположение этих точек:



$AC = AB + BC = 5 + 3 = 8$ $AC = AB - AC = 5 - 3 = 2$ *Случай невозможен* $CB < AB$

Ответ: *8* или *2.*

Пример 2. На прямой взяты точки A, B и C так, что точка B расположена правее точки A и $AB : BC = 3$. Найдите отношение $AC : AB$.

1 сл.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB + BC}{AB} = \frac{3BC + BC}{3BC} = \frac{4BC}{3BC} = \frac{4}{3}.$$

2 сл.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB - BC}{AB} = \frac{3BC - BC}{3BC} = \frac{2BC}{3BC} = \frac{2}{3}.$$

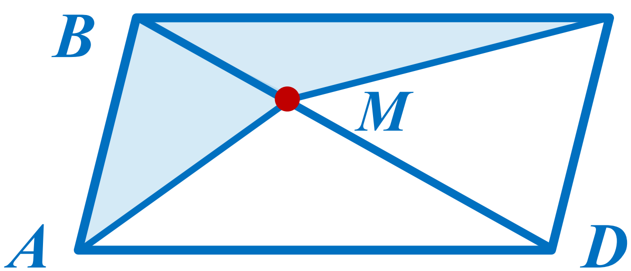
3 сл.

$CB = CA + AB$, *но* $BC < AB$ => *случай невозможен*.

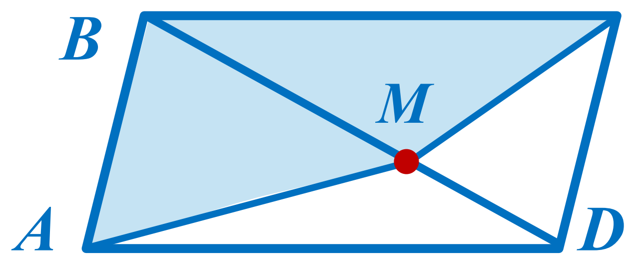
Ответ: $\frac{4}{3}$ **или** $\frac{2}{3}$.

Пример 3. Дан параллелограмм *ABCD*. Точка *M* лежит на диагонали *BD* и делит ее в отношении *1: 2* . Найдите площадь параллелограмма *ABCD*, если площадь четырехугольника *ABCM* равна *60*.

1 сл. ***BM:MD = 1:2***



2 сл. ***BM:MD = 2:1***



По свойству параллелограмма $\Delta ABD = \Delta CDB \Rightarrow S_{ABD} = S_{CDB} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

1 сл. $BM:MD = 1:2 \Rightarrow BM = \frac{1}{3}BD$;

$S_{ABM} = \frac{1}{3}S_{ABD} = \frac{1}{6}S_{ABCD}$ (h_A- общая высота Δ *ABM* и Δ *ABD*).

$S_{BCM} = \frac{1}{3}S_{BCD} = \frac{1}{6}S_{ABCD}$ (h_C- общая высота Δ *BCM* и Δ *BCD*.

$$S_{ABCM} = S_{ABM} + S_{BCM} = \frac{1}{3}S_{ABCD}$$

$S_{ABCD} = 3 \cdot S_{ABCM} = 3 \cdot 60 = 180.$

2 сл. $BM:MD = 2:1 \Rightarrow BM = \frac{1}{3}BD$;

$S_{ABM} = \frac{2}{3}S_{ABD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}$ (h_A- общая высота Δ *ABM* и Δ *ABD*).

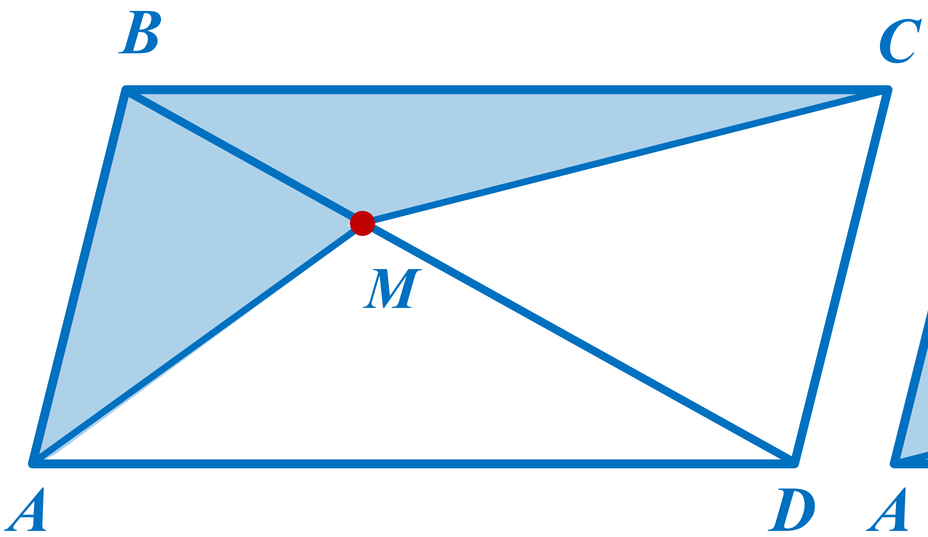
$S_{BCM} = \frac{2}{3}S_{BCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}$ (h_C- общая высота Δ *BCM* и Δ *BCD*.

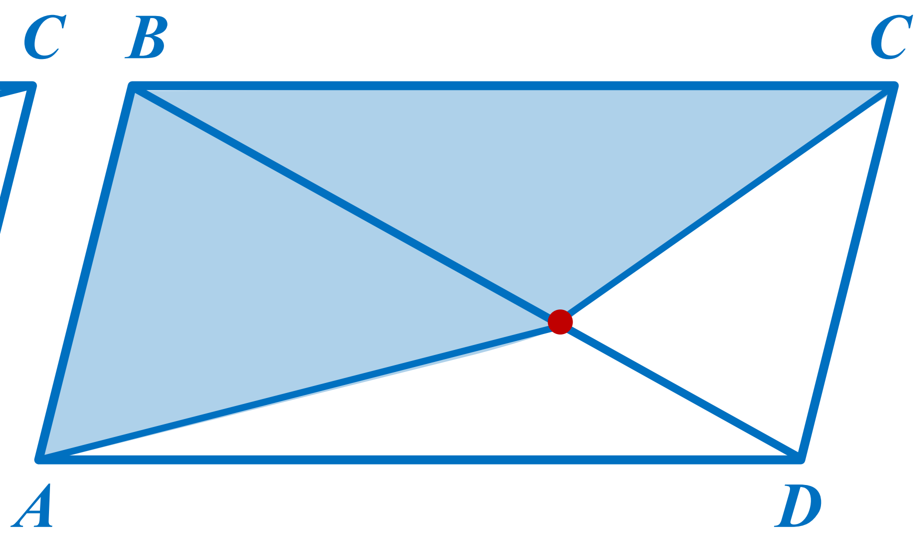
$$S_{ABCM} = S_{ABM} + S_{BCM} = \frac{2}{3}S_{ABCD}$$

$S_{ABCD} = \frac{3}{2} \cdot S_{ABCM} = \frac{3}{2} \cdot 60 = 90.$

Ответ: ***180*** **или** ***90.***

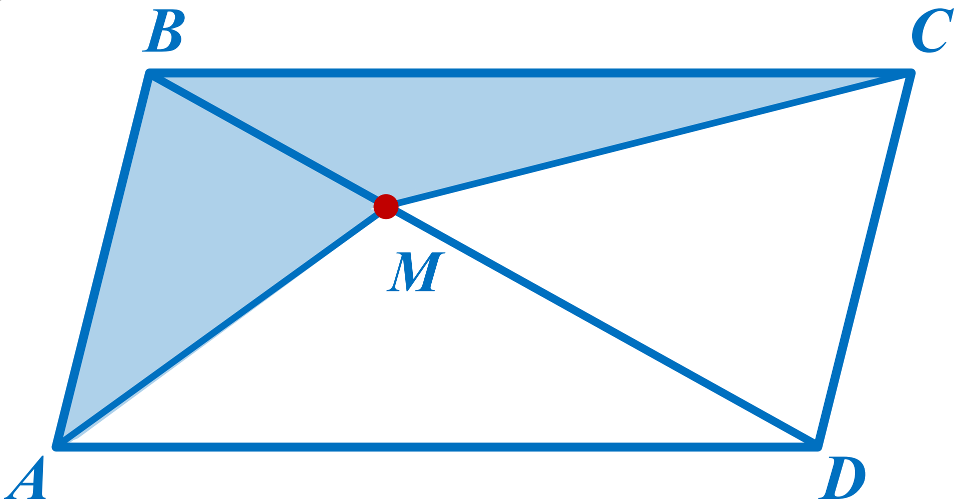
Пример 3. Дан параллелограмм *ABCD*. Точка *M* лежит на диагонали *BD* и делит ее в отношении *1 : 2* . Найдите площадь параллелограмма *ABCD*, если площадь четырехугольника *ABCM* равна *60*.





1 случай. ***BM : MD = 1 : 2***

2 случай. ***BM : MD = 2 : 1***



1 случай. $BM : MD = 1 : 2$

По свойству параллелограмма

$\Delta\, ABD = \Delta\, CDB \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{ABD} = S_{CDB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

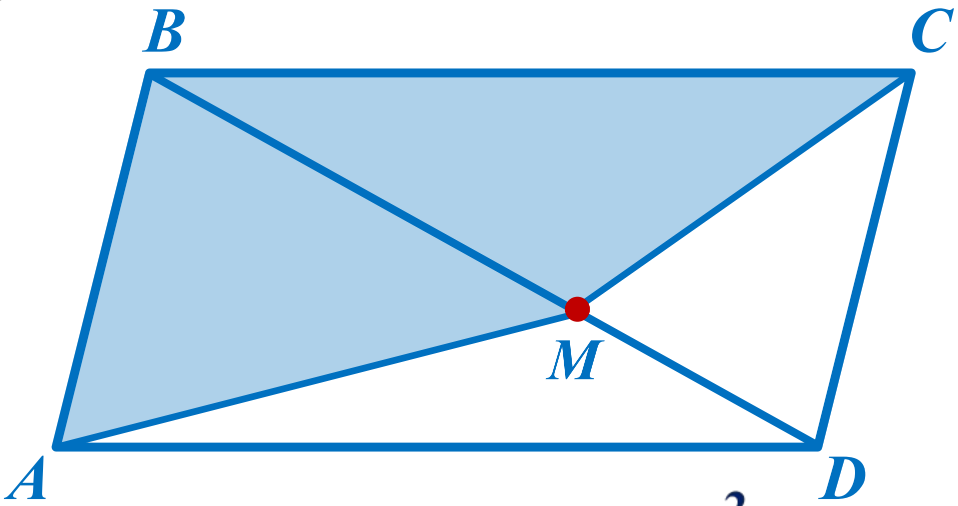
$$BM : MD = 1 : 2 \Rightarrow BM = \frac{1}{3} BD;$$

$S_{ABM} = \frac{1}{3} S_{ABD} = \frac{1}{6} S_{ABCD}$ (h_A – общая высота $\Delta\, ABM$ и $\Delta\, ABD$).

$S_{BCM} = \frac{1}{3} S_{BCD} = \frac{1}{6} S_{ABCD}$ (h_C – общая высота $\Delta\, BCM$ и $\Delta\, BCD$).

$$S_{ABCM} = S_{ABM} + S_{BCM} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$$

$$S_{ABCD} = 3 \cdot S_{ABCM} = 3 \cdot 60 = 180.$$



2 случай. $BM : MD = 2 : 1.$

По свойству параллелограмма

$$\Delta\, ABD = \Delta\, CDB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = S_{CDB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$BM : MD = 2 : 1 \Rightarrow BM = \frac{2}{3} BD;$$

$S_{ABM} = \frac{2}{3} S_{ABD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$ (h_A – общая высота $\Delta\, ABM$ и $\Delta\, ABD$).

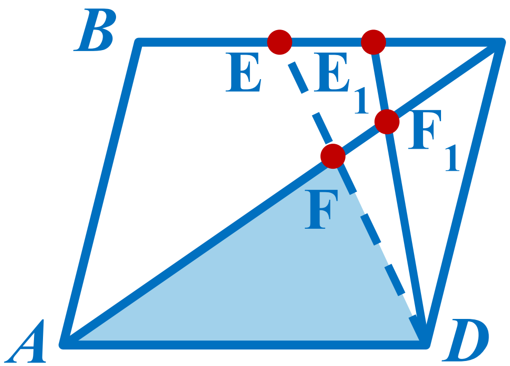
$S_{BCM} = \frac{2}{3} S_{BCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$ (h_C – общая высота $\Delta\, BCM$ и $\Delta\, BCD$).

$$S_{ABCM} = S_{ABM} + S_{BCM} = \frac{2}{3} S_{ABCD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{3}{2} \cdot S_{ABCM} = \frac{3}{2} \cdot 60 = 90.$$

Ответ: *180* или *90*.

Пример 4. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E, делящая эту сторону прямой в отношении $2 : 3$. Отрезок DE пересекает диагональ AC в точке F . Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь треугольника AFD ?



1 случай. $BE : EC = 2 : 3$, то $BE = \frac{2}{3}EC$,

$$BC = EC + \frac{2}{3}EC = \frac{5}{3}EC.$$

$\Delta\, ECF \sim \Delta\, DAF$ по двум углам $\Rightarrow \dfrac{AF}{CF} = \dfrac{AD}{EC} = \dfrac{BC}{EC} = \dfrac{5}{3}$

$$\Rightarrow FC = \frac{3}{5}AF,\ AC = \frac{8}{5}AF.$$

$$\Delta\, ACD = \Delta\, CAB \Rightarrow S_{ACD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

h_D- общая высота $\Delta\, AFD$ и $\Delta\, ACD \Rightarrow \dfrac{S_{AFD}}{S_{ACD}} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{5}{8}.$

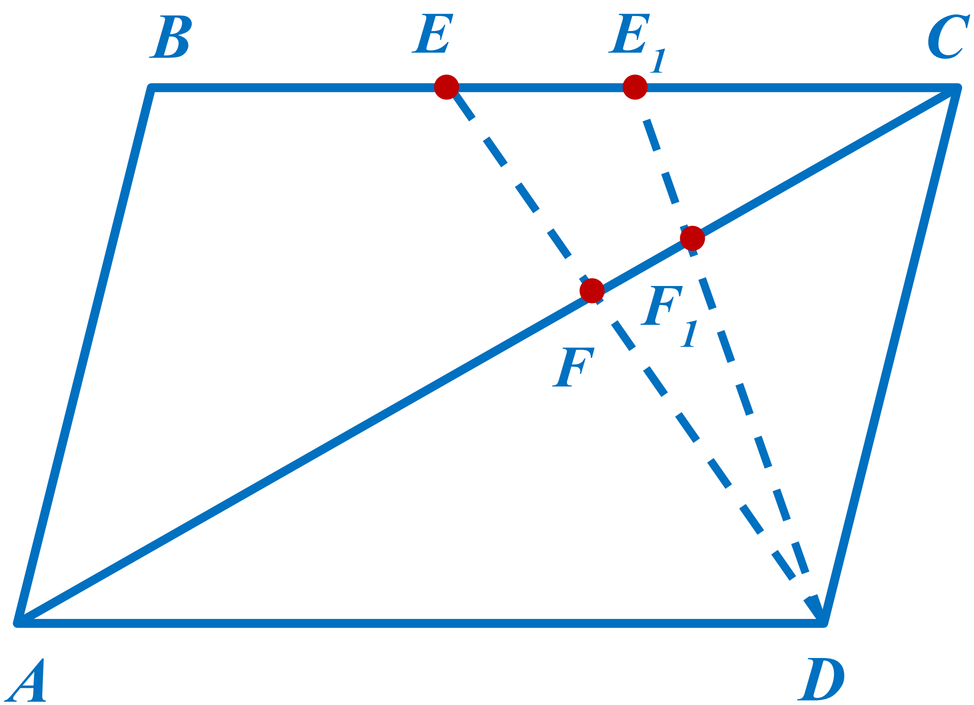
$$S_{AFD} = \frac{5}{8}S_{ACD} = \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{5}{16}S_{ABCD}.$$

2 случай. $E_1C : BE_1 = 2 : 3$, решая аналогично, $BE_1 = \frac{3}{2}E_1C,\ BC = \frac{5}{2}E_1C,$

$AC = \dfrac{7}{5}AF_1,\ \dfrac{S_{AF_1D}}{S_{ACD}} = \dfrac{AF_1}{AC} = \dfrac{5}{7}.\quad S_{AF_1D} = \dfrac{5}{7}S_{ACD} = \dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{5}{14}S_{ABCD}.$

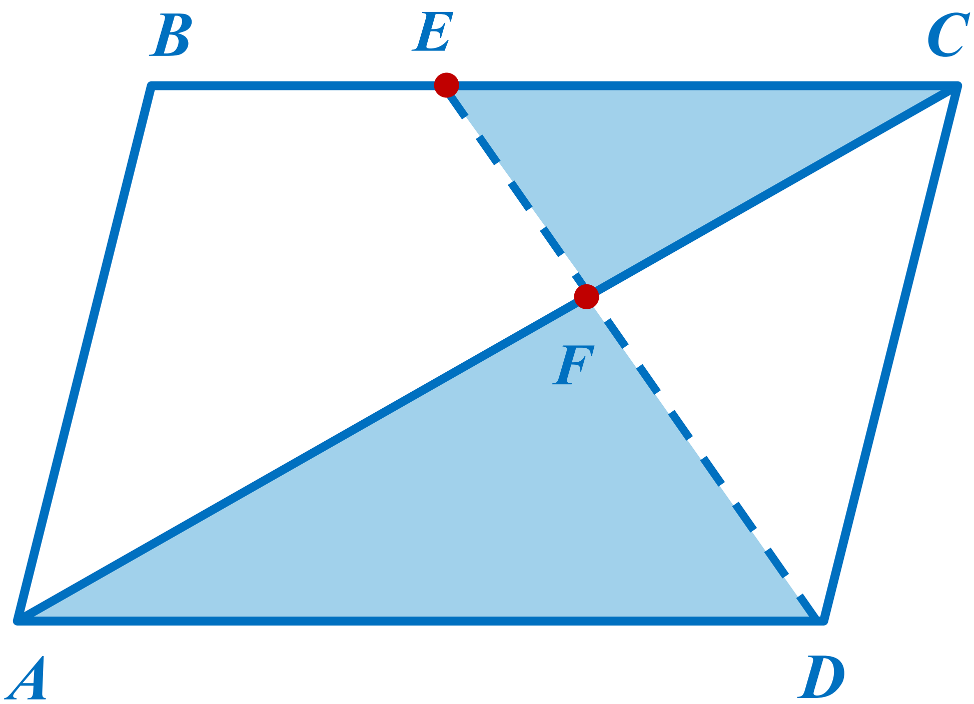
$\boxed{\textbf{Ответ: } \frac{5}{16} \text{ или } \frac{5}{14}.}$

Пример 4. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E, делящая эту сторону прямой в отношении $2 : 3$. Отрезок DE пересекает диагональ AC в точке F . Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь треугольника AFD ?



1 случай. **$BE : EC = 2 : 3$**

2 случай. **$BE_1 : E_1C = 3 : 2$**



1 случай. $BE : EC = 2 : 3,$

то $BE = \frac{2}{3}EC,$

$BC = EC + \frac{2}{3}EC = \frac{5}{3}EC.$

$\Delta ECF \sim \Delta DAF$ по двум углам =>

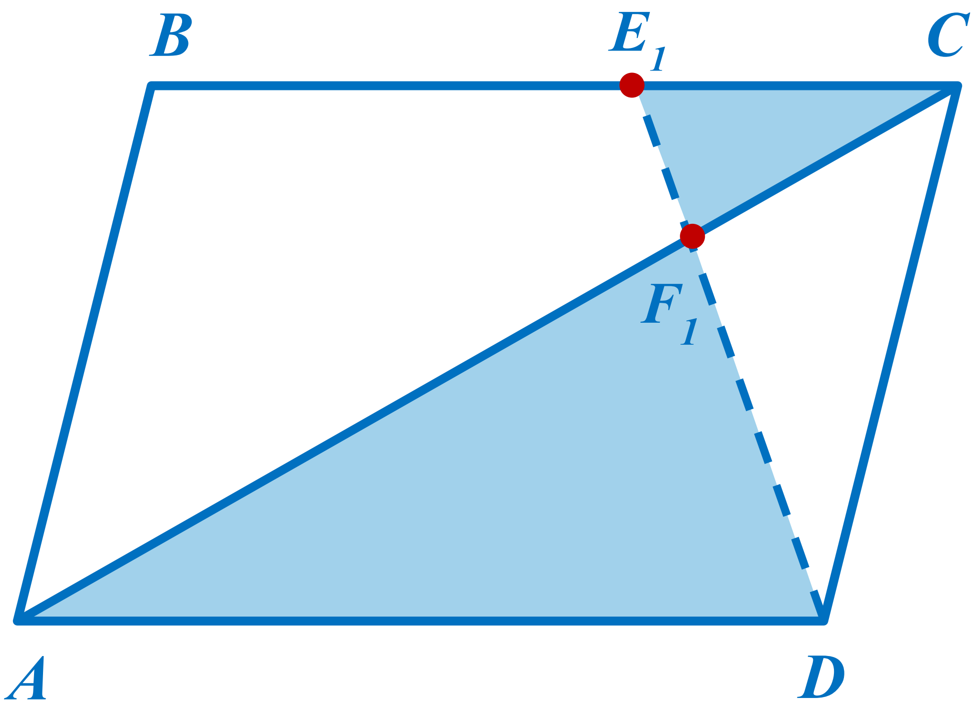
$$=> \frac{AF}{CF} = \frac{AD}{EC} = \frac{BC}{EC} = \frac{5}{3}$$

$$=> FC = \frac{3}{5}AF, AC = \frac{8}{5}AF.$$

$$\Delta ACD = \Delta CAB => S_{ACD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

h_D – общая высота ΔAFD и $\Delta ACD => \frac{S_{AFD}}{S_{ACD}} = \frac{AF}{AC} = \frac{5}{8}.$

$$S_{AFD} = \frac{5}{8}S_{ACD} = \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{5}{16}S_{ABCD}.$$



2 случай. $BE_1 : E_1C = 3 : 2,$

то $BE_1 = \frac{3}{2} E_1C,$

$$BC = E_1C + \frac{3}{2} E_1C = \frac{5}{2} E_1C.$$

$\Delta E_1CF_1 \sim \Delta DAF_1$ по двум углам

$$\Rightarrow \frac{AF_1}{CF_1} = \frac{AD}{E_1C} = \frac{BC}{E_1C} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1C = \frac{2}{5} AF_1,\ AC = \frac{7}{5} AF_1.$$

$$\Delta ACD = \Delta CAB \Rightarrow S_{ACD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

h_D – общая высота ΔAF_1D и ΔACD $\Rightarrow \frac{S_{AF_1D}}{S_{ACD}} = \frac{AF_1}{AC} = \frac{5}{7}.$

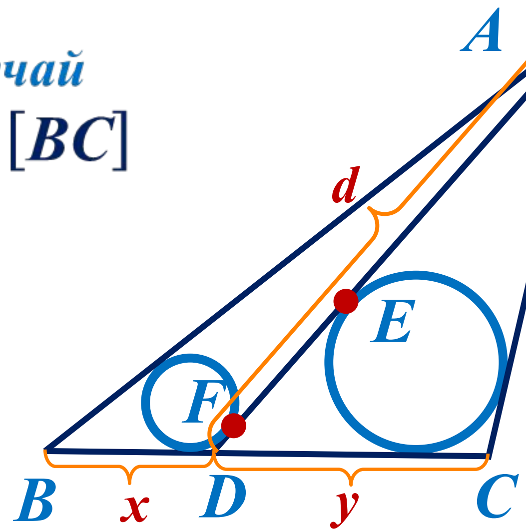
$$S_{AF_1D} = \frac{5}{7} S_{ACD} = \frac{5}{7} \cdot S_{ABCD} = \frac{5}{14} S_{ABCD}.$$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{5}{16} \text{ или } \frac{5}{14}.}$

Пример 5. (ЕГЭ, 2010). В треугольнике ABC $AB = 12$, $BC = 5$, $CA = 10$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 4 : 9$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

1 случай

$D \in [BC]$



В треугольнике со сторонами ***a, b, c*** *расстояние от вершины A до точек касания вписанной окружности сторон, содержащих эту вершину, равно* $\dfrac{b+c-a}{2}$.

Пусть $AD = d$, $BD = x$, $DC = y$.

$$\Delta ACD\text{: } DE = \frac{d+y-10}{2},$$

$$\Delta ADB\text{: } DF = \frac{d+x-12}{2}.$$

$$BD : DC = 4 : 9,\ BC = 5\ \Rightarrow$$

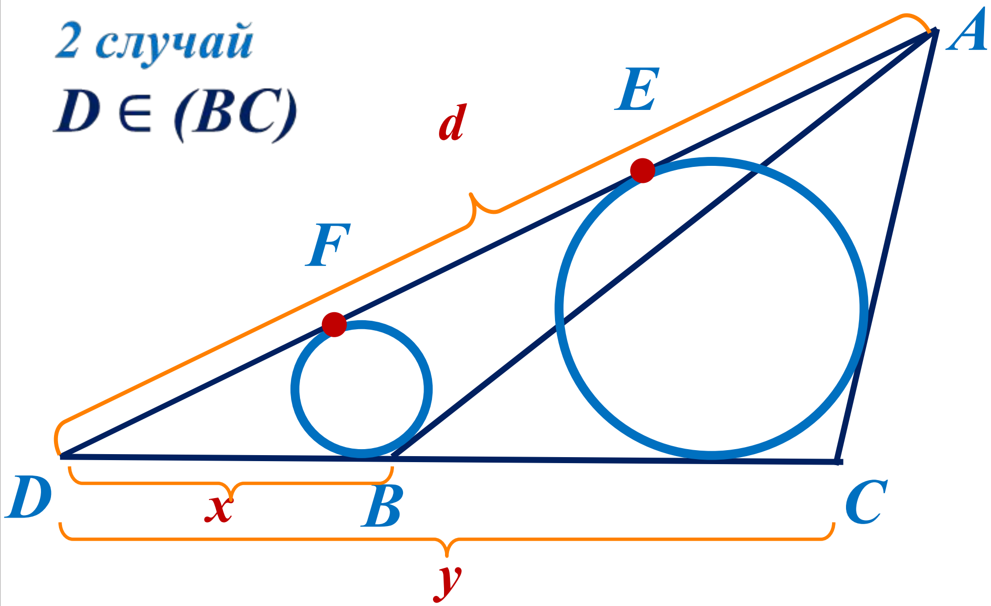
$$\Rightarrow x = \frac{20}{13},\ y = \frac{45}{13}.$$

$$EF = |DE - DF|$$

$$EF = \left|\frac{d+y-10}{2} - \frac{d+x-12}{2}\right| = \frac{51}{26}.$$

2 случай

$D \in (BC)$



$BD : DC = 4 : 9, \; BC = 5 \Rightarrow$

$x = 4, \quad y = x + BC = 9.$

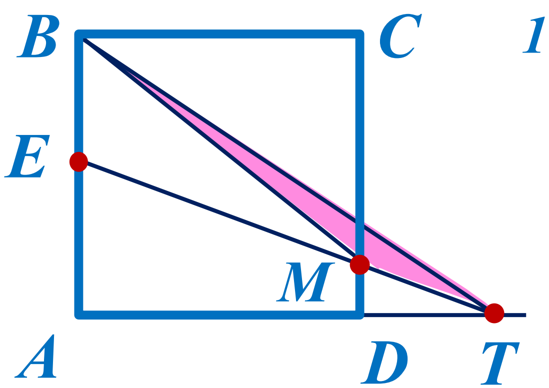
$EF = |DE - DF| = \dfrac{7}{2}.$

Случай расположения точки D правее точки C невозможен.

Замечание. Так как в решении не исследовано расположение точек E и F на отрезке AD, то при вычислении длины отрезка EF использован знак модуля.

Ответ: $\dfrac{7}{2}$ или $\dfrac{51}{26}$.

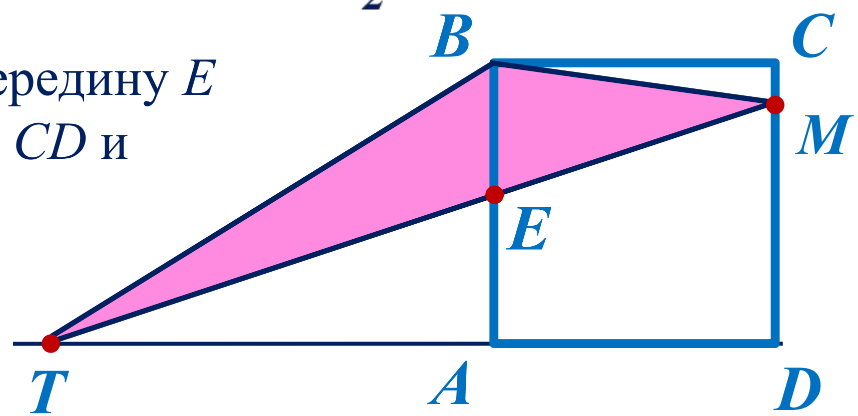
Пример 6. Через середину стороны *AB* квадрата *ABCD* проведена прямая, пересекающая прямые *CD* и *AD* в точках *M* и *T* соответственно и образующая с прямой *AB* угол α, $tg\ \alpha = 3$. Найдите площадь треугольника *BMT*, если сторона квадрата *ABCD* равна *4*.



1 случай. Прямая, проходящая через середину *E* стороны *AB*, пересекает *отрезок CD* и продолжение отрезка *AD* за точку *D*.

$$S_{BMT} = S_{BTE} - S_{DME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT - \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot tg\ \alpha - AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 - 4) = 2.$$

2 случай. Прямая, проходящая через середину *E* стороны *AB*, пересекает *отрезок CD* и продолжение отрезка *AD* за точку *A*.



$$S_{BMT} = S_{BTE} + S_{DME} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT + \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot tg\ \alpha + AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 + 4) = 10.$$

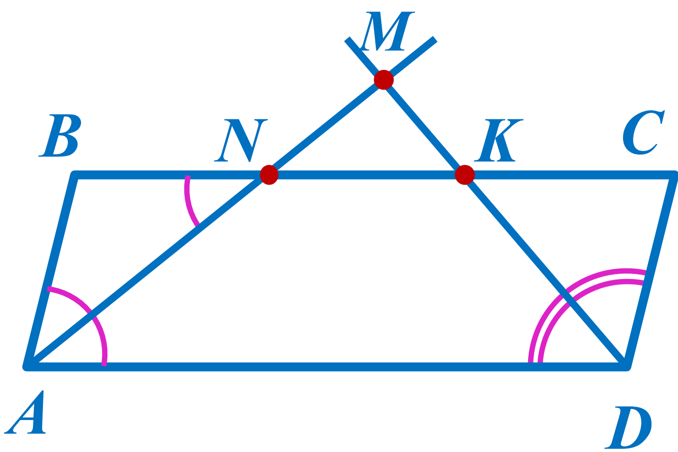
Ответ: *2* или *10*.

Может ли при данных условиях задачи прямая, проходящая через середину ***E*** стороны ***AB***, пересекать продолжение отрезка ***CD*** за точку:

- ***D*** и ***отрезок AD***,
- ***C*** и ***отрезок BC ?***

Почему?

Пример 7. Дан параллелограмм *ABCD*. Биссектрисы его углов *A* и *D* делят сторону *BC* на три равные части. Вычислите стороны параллелограмма, если его периметр равен *40*.



1 случай. Точка ***M*** вне параллелограмма.

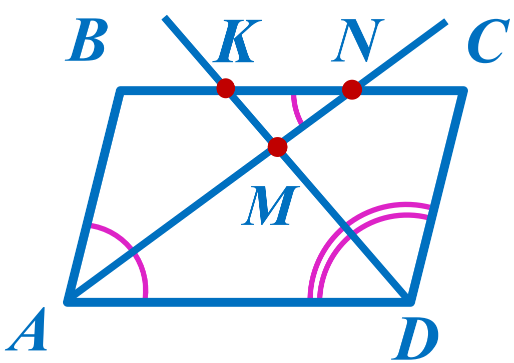
Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

AM – биссектриса => Δ ***ABN*** – равнобедренный.

$AB = BN = NK = KC = x$.

$P_{ABCD} = 40 \Rightarrow 2(x + 3x) = 40 \Rightarrow x = 5.$

$AB = 5,\ BC = 15.$



2 случай. Точка ***M*** внутри параллелограмма.

$NC = x$ и $AB = BN = 2x$.

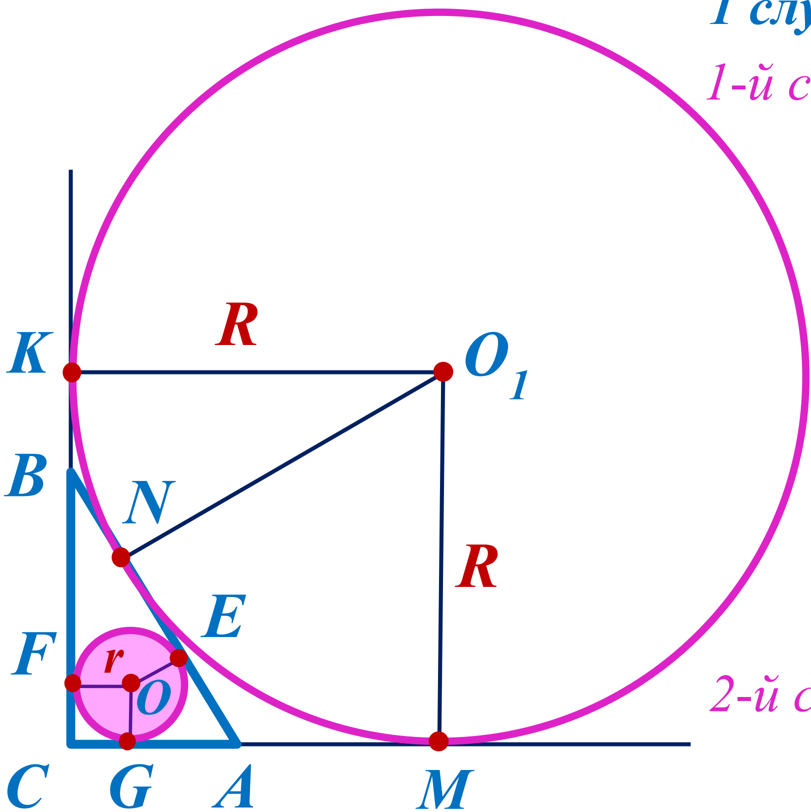
$2(2x + 3x) = 40$

$x = 4$.

Значит, $AB = 8$ и $BC = 8 + 4 = 12$.

Ответ: ***5; 15*** или ***8; 12.***

Пример 8. Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки *3* и *4*. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.



1 случай. Окружность вписана в треугольник.

1-й способ. r – радиус вписанной окружности.

$FOGC$ – квадрат и отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, то

$$AG = AE = b - r,\ BF = BE = a - r.$$

$$\Rightarrow\ c = AB = AE + BE = b - r + a - r.$$

$$\boxed{r = \frac{a+b-c}{2}} \qquad r = \frac{3+4-5}{2} = 1.$$

2-й способ. Выразим площадь прямоугольного треугольника двумя способами.

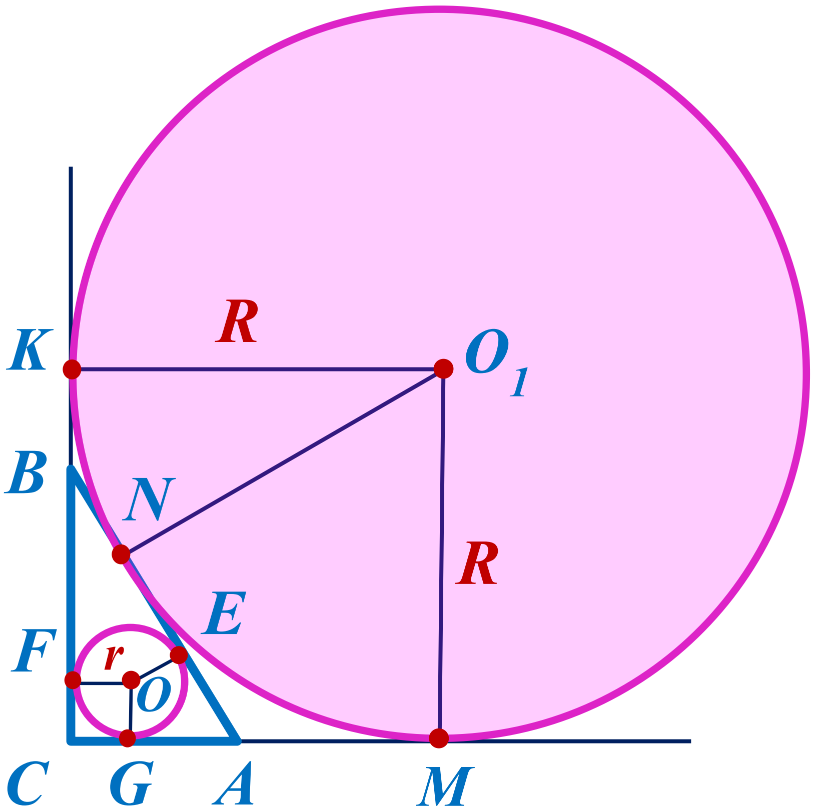
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = 6,\ S_{ABC} = pr,$$

где $p = \dfrac{CA + BC + BA}{2} = 6.$

Из равенства площадей получаем

$$r = \frac{S_{ABC}}{p},\ r = \frac{6}{6} = 1.$$

2 случай. Окружность является вневписанной в треугольник ABC .



Пусть $\boldsymbol{R}$ - радиус вневписанной окружности.

$BK = BN$ и $NA = AM$, как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки.

CKO_1M – квадрат,

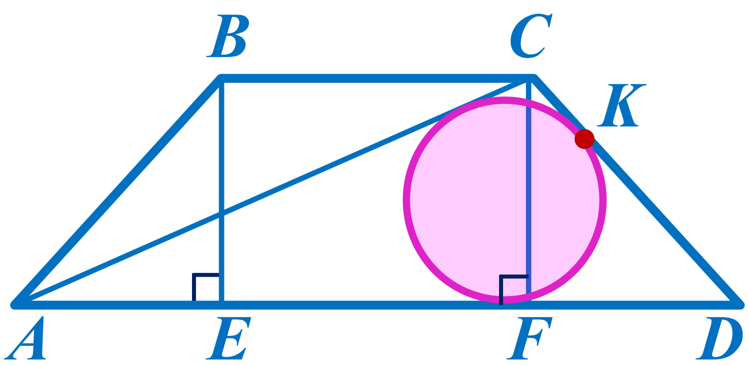
$2R = KC + CM = BC + BN + AN + AC =$

$= P_{ABC}.$

$$R = p_{ABC} = \frac{3+4-5}{2} = 6.$$

Ответ: ***1*** **или** ***6*.**

Пример 9. Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK.



Решение. $BE \perp AD$, $CF \perp AD$.

Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали – полусумме оснований (средней линии).

$$AE = \frac{100 - 44}{2} = 28, \quad AF = \frac{100 + 44}{2} = 72.$$

ΔABE и ΔACF – прямоугольные =>

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21,$$

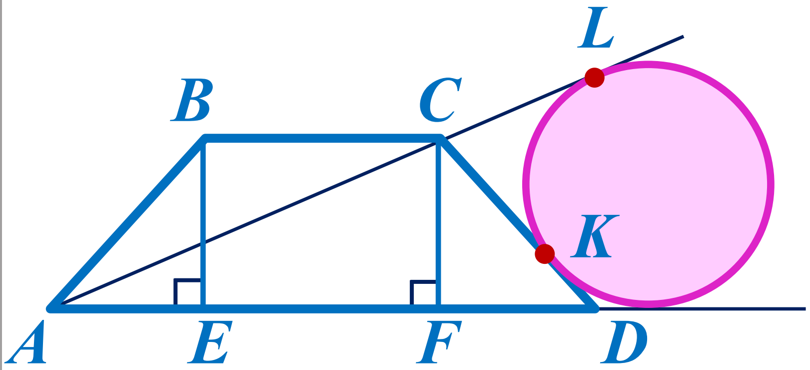
$$AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{72^2 + 21^2} = 75.$$

Если окружность вписана в треугольник ABC, тогда расстояние от вершины A до точки касания окружности со стороной AB равно

$$x = p - a = \frac{b + c - a}{2}.$$

1 случай. Окружность вписана в ΔACD.

$$CK = \frac{AC + CD - AD}{2} = \frac{75 + 35 - 100}{2} = 5.$$



2 случай. Окружность является вневписанной для треугольника *ACD*.

Если окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC. Тогда расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.

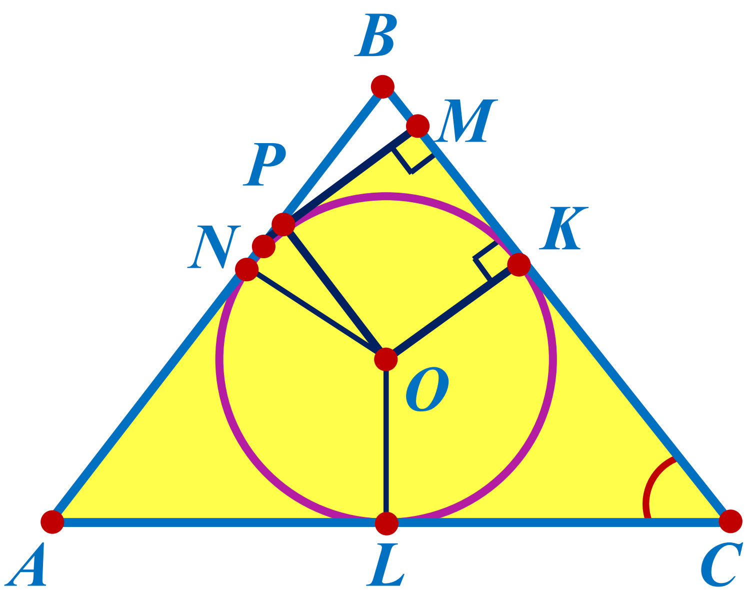
$$AL = \frac{AC + CD + AD}{2} = \frac{75 + 35 + 100}{2} = 105.$$

По свойству отрезков касательных $CK = CL$.

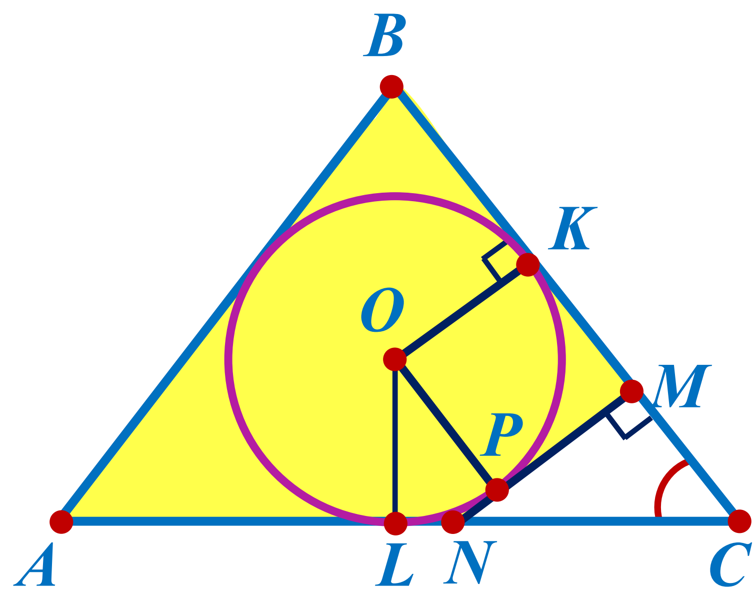
$$CL = AL - AC = 105 - 75 = 30.$$

Ответ: *5* или *30*.

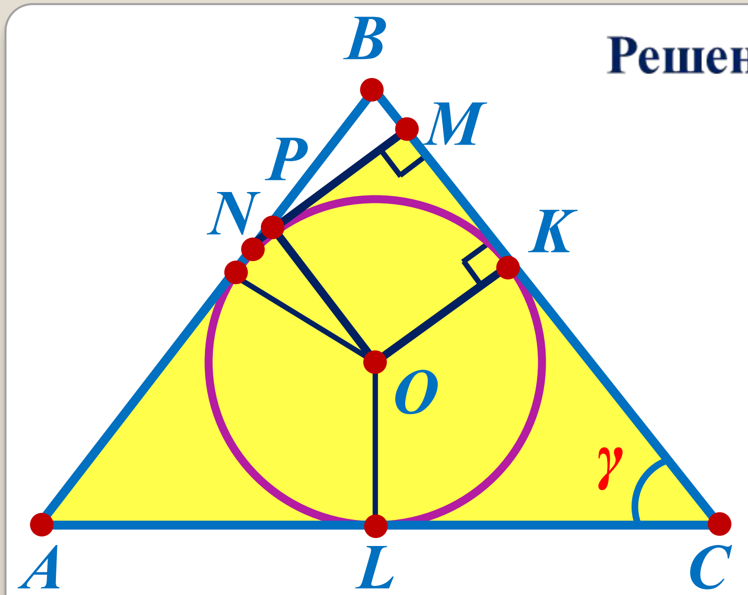
Пример 10. (ЕГЭ, 2011). Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника со сторонами *10*, *10* и *12*, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь этого четырехугольника.



1 случай



2 случай



Решение. $\Delta\, ABC$: $AC = 12,\ AB = BC = 10 \Rightarrow p = 16.$

Пусть $\angle AOB = \gamma,\ \angle ABC = \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\gamma = \frac{AC}{2BC} = \frac{3}{5},\ \sin\gamma = \frac{4}{5},\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{4}{3}.$$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin\gamma}{2} = 48.$$

$$\sin\beta = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{AB \cdot BC} = \frac{24}{25},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{24}{7}.$$

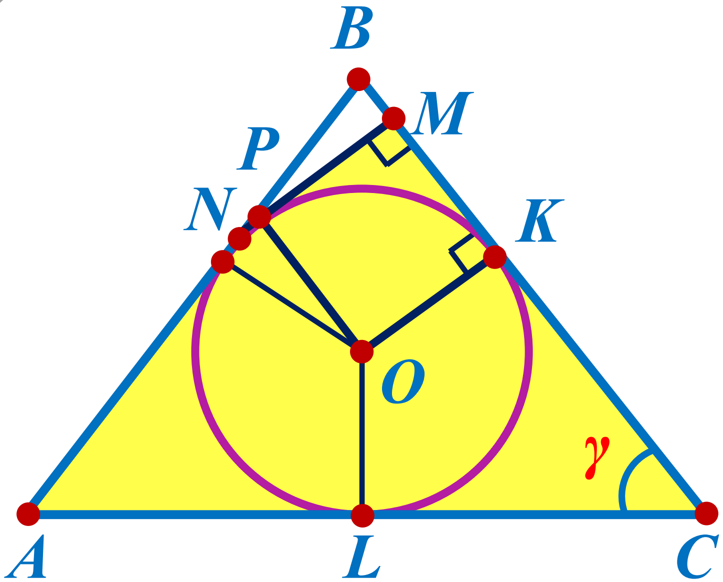
(угол ABC – острый, $AC^2 < AB^2 + BC^2$)

Окружность, вписанная в четырёхугольник – окружность, вписанная в треугольник ABC.

Так как $\Delta\, ABC$ – равнобедренный, то окружность касается основания в его середине – точке L.

$$r = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{P} = \frac{2 \cdot 48}{10 + 10 + 12} = 3.$$

$CK = CL = 6$ по свойству касательных.



1 случай. Пусть NM касается окружности и

$$NM \perp BC,\ NM \cap AB = N,\ NM \cap BC = M.$$

$OP \perp NM,\ OK \perp BC$ => $OPMK$ – квадрат.

$$MK = r = 3 \;\Rightarrow\; BM = BC - CK - MK,$$

$$BM = 16 - 6 - 3 = 1.$$

$\Delta\, NBM$ – прямоугольный треугольник,

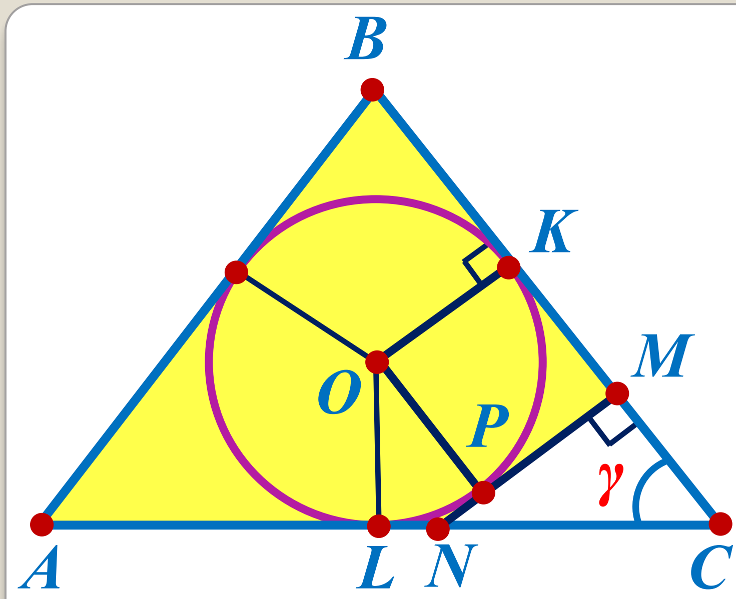
$$MN = BM \cdot tg\,\beta = \frac{24}{7},$$

$$S_{NBM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot MN.$$

$$S_{NBM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{24}{7} = \frac{12}{7}.$$

$$S_{ANMC} = S_{ABC} - S_{NBM}.$$

$$S_{ANMC} = 48 - \frac{12}{7} = \underline{46\,\frac{2}{7}}.$$



2 случай. Пусть NM касается окружности и

$$NM \perp BC,\ NM \cap AC = N,\ NM \cap BC = M.$$

$$OP \perp NM,\ OK \perp BC \Rightarrow OPMK \text{ – квадрат.}$$

$$MK = r = 3 \Rightarrow CM = CK - MK,$$

$$CM = 6 - 3 = 3.$$

ΔNMC – прямоугольный треугольник,

$$MN = CM \cdot tg\,\gamma = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4,$$

$$S_{NMC} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot CM.$$

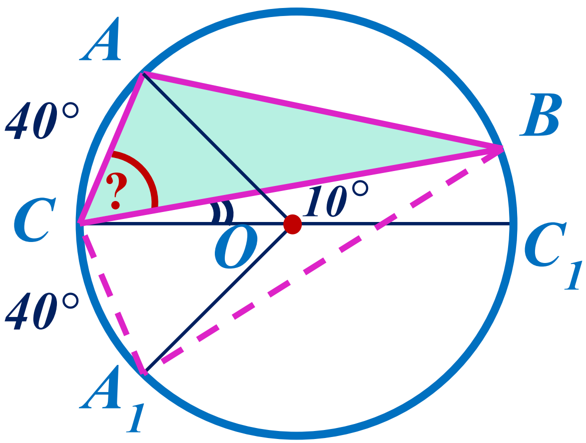
$$S_{NMC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6.$$

$$S_{ABMN} = S_{ABC} - S_{NMC}.$$

$$S_{ABMN} = 48 - 6 = \underline{42}.$$

$$\boxed{\text{Ответ: } 46\frac{2}{7} \text{ или } 42.}$$

Пример 11. Около треугольника ABC описана окружность с центром O. Найдите величину угла ACB, если угол OCB равен $10°$, а $\angle AOC = 40°$.



Решение. $CC_1 = 2R$, $\smile BC_1 = \angle BOC_1 = 2\angle OCB = 20°$.

1 случай. Точки A и B по одну сторону от прямой OC, $\angle COA = 40°$.

ΔABC: угол ACB – вписанный,

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\smile AB = \frac{1}{2}\cdot 120° = 60°.$$

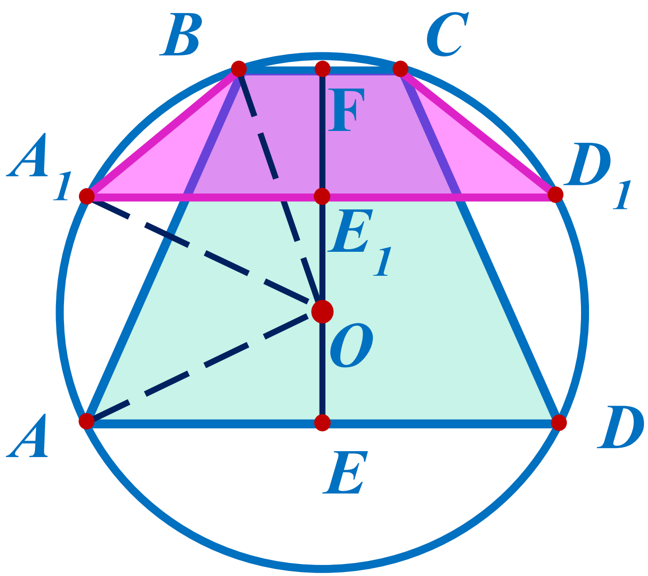
2 случай. Точки A и B по разные стороны от прямой OC.

$\angle COA = 40°$.

ΔA_1BC: вписанный угол $\angle A_1CB = \frac{1}{2}\smile A_1C_1B = \frac{1}{2}\cdot 160° = 80°$.

Ответ: $60°$ или $80°$.

Пример 12. Трапеция с основаниями *14* и *40* вписана в окружность радиуса *25*. Найдите высоту трапеции.



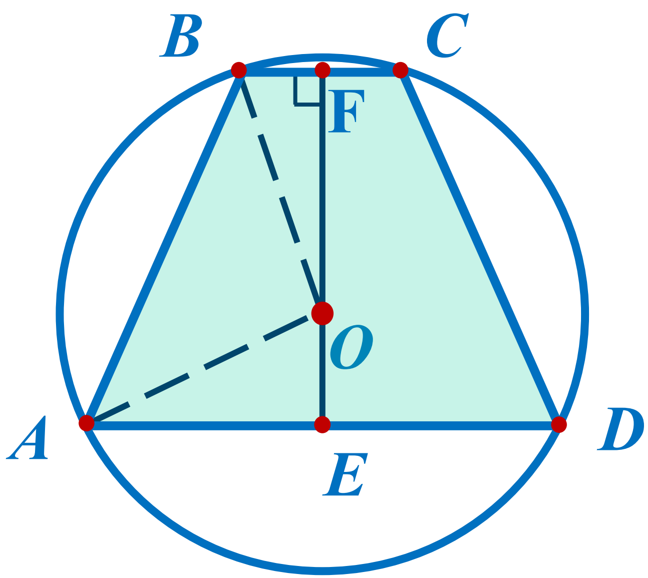
Трапеция вписана в некоторую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.

Решение. Трапеция вписана в окружность, поэтому она равнобедренная.
Пусть $BC = 14$ – хорда окружности $R = 25$.
Существует две хорды $AD \parallel BC$, $A_1D_1 \parallel BC$ и $AD = A_1D_1 = 40$.

Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.

Центр описанной окружности O на серединном перпендикуляре к BC .

1 случай. Центр O окружности лежит внутри трапеции.



Радиус (диаметр), перпендикулярный хорде, делит хорду пополам.

В этом случае высота $EF = EO + OF$.

ΔAOE – прямоугольный треугольник,

$$AO = 25,\ AE = \frac{AD}{2} = 20,$$

$$EO = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15.$$

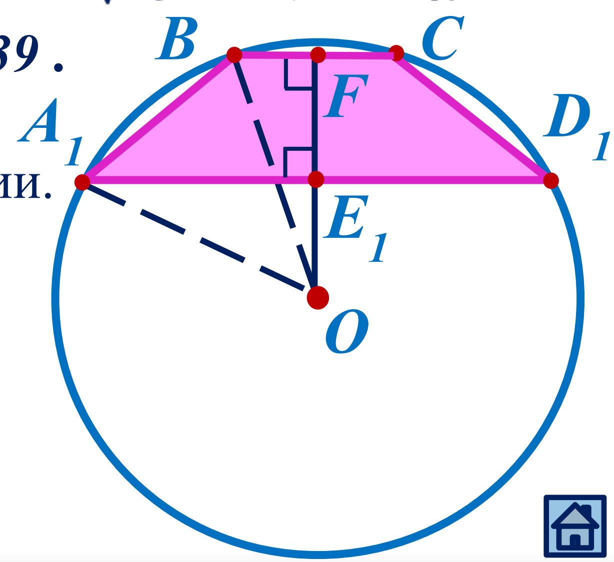
ΔBFO – прямоугольный треугольник,

$$BO = 25,\ BF = \frac{BC}{2} = 7,$$

$$OF = \sqrt{BO^2 - BF^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

$$EF = EO + OF = 39.$$

2 случай. Центр O окружности лежит вне трапеции.

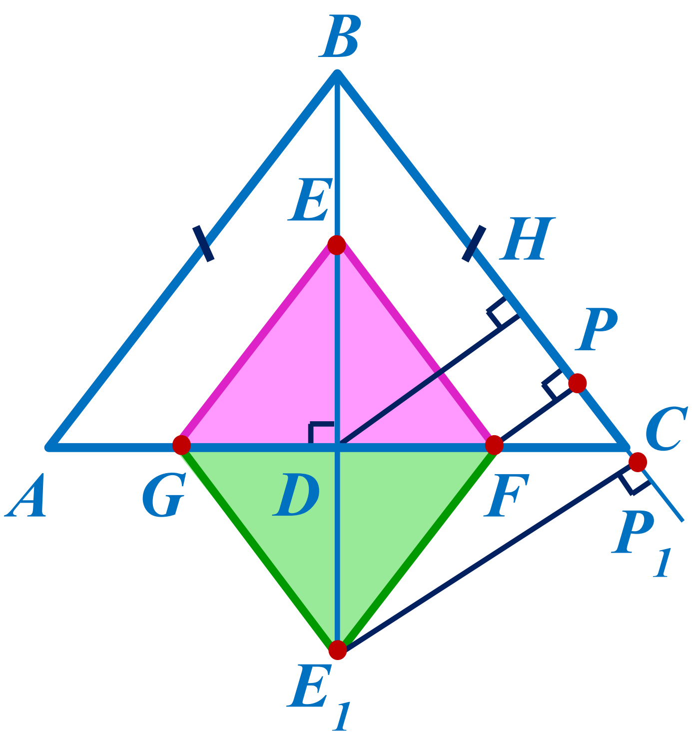


$\Delta AOE_1 \sim \Delta_{\text{египетскому}}$ с $k = 5 \Rightarrow OE_1 = 3 \cdot 5 = 15.$

$E_1F = FO - OE_1 = 9.$

Ответ: 39 или 9.

Пример 13. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC = 10$ и $AC = 12$. Параллельно боковым сторонам треугольника на одинаковом расстоянии от них проведены прямые. Найти это расстояние, если площадь треугольника, образованного этими прямыми и основанием, лежащим на прямой AC, равна 12.



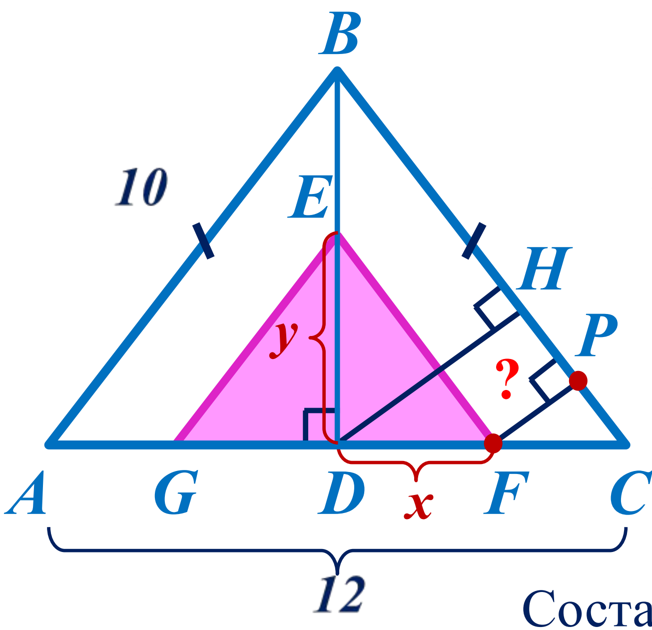
Решение. $BD \perp AC$, $D \in AC$.

1 случай. Точки E и B в одной полуплоскости с границей AC.

$$EG \parallel AB,\ EF \parallel BC.$$
$$FP = ?$$

2 случай. Точки E и B в разных полуплоскостях с границей AC.

$$E_1F \parallel AB,\ E_1G \parallel BC.$$
$$E_1P_1 = ?$$



1 случай. Точки E и B в одной полуплоскости с границей AC.

$$DC = \frac{1}{2}AC = 6 \text{ и } BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Пусть $DF = x$, а $DE = y$,

$$\Delta BDC \sim \Delta EDF \text{ по двум углам} \Rightarrow \frac{BD}{DE} = \frac{DC}{DF} = k$$

$$S_{GFE} = \frac{1}{2} \cdot GF \cdot DE = 12.$$

Составим систему уравнений:

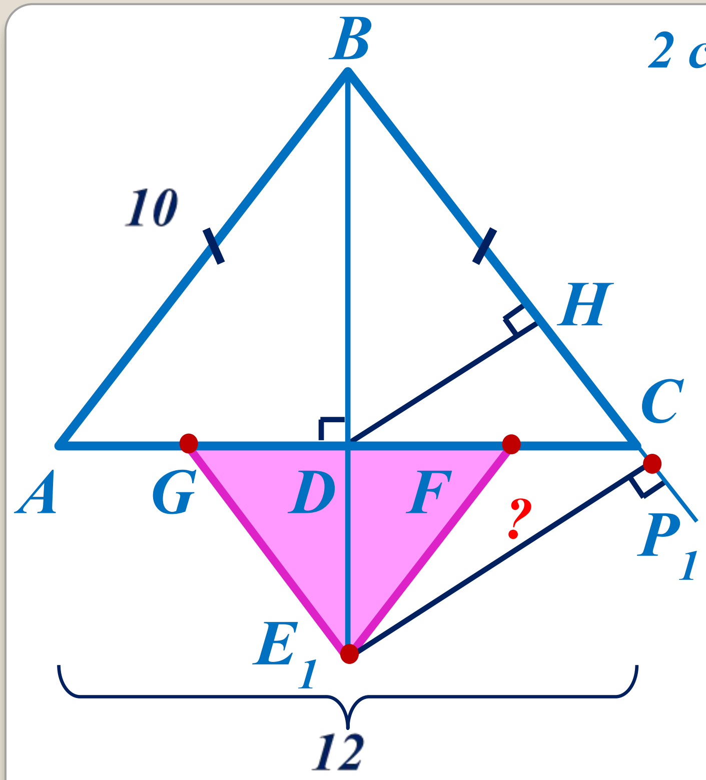
$$\begin{cases} \dfrac{8}{y} = \dfrac{6}{x}, \\ xy = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 4. \end{cases}$$

$$k = \frac{DC}{DF} = \frac{6}{3} = 2.$$

$$DH \perp BC,\ H \in BC,\ DH \perp BC,\ P \in BC.$$

$$\Delta BDC \text{ – прямоугольный, } DH = \frac{BD \cdot DC}{BC} \Rightarrow$$

$$DH = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4{,}8 \Rightarrow FP = \frac{4{,}8}{2} = 2{,}4.$$



2 случай. Точки E и B в разных полуплоскостях с границей AC.

$E_1F \parallel AB,\ E_1G \parallel BC.$

$DC = 6$ и $BD = 8$, $DH = 4{,}8.$

$BE_1 = BD + DE_1 = 8 + 4 = 12.$

ΔBP_1E_1 – прямоугольный =>

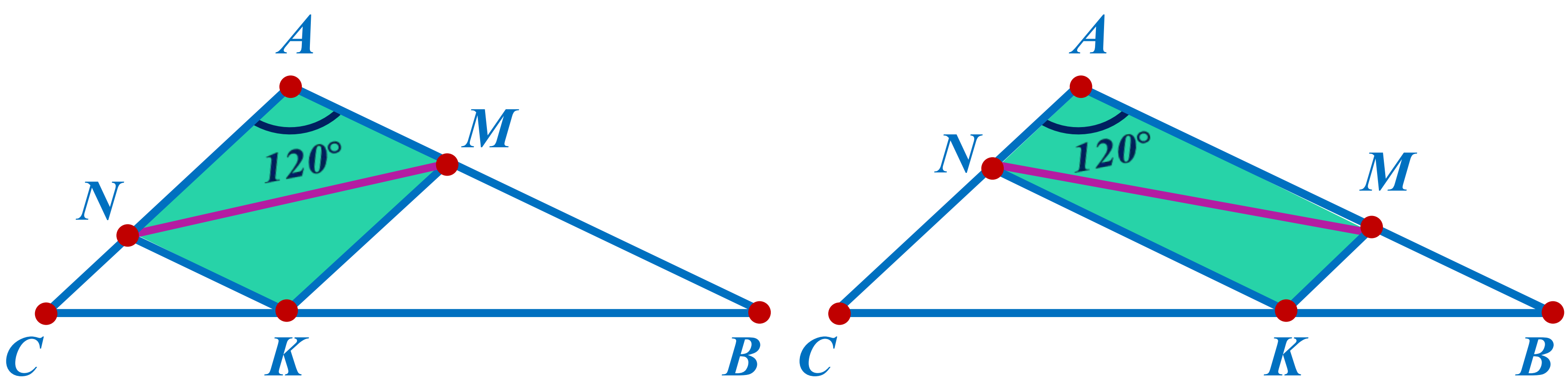
$E_1P_1 = BE_1 \cdot \sin\angle CBD,$

$$\sin\angle CBD = \frac{DC}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

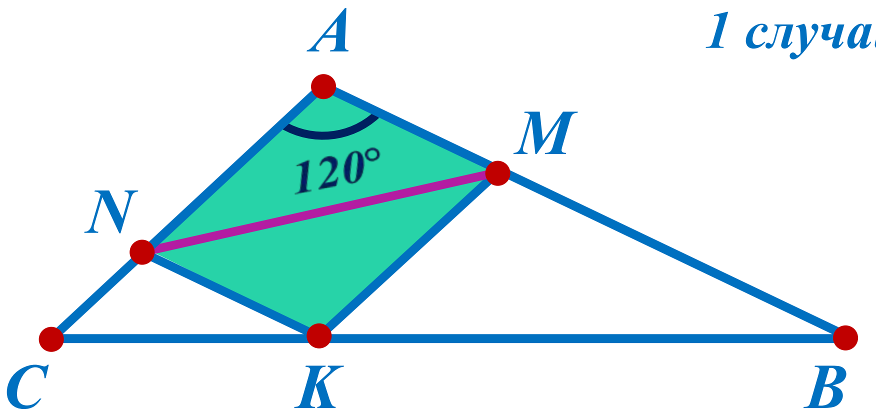
$$E_1P_1 = \frac{12 \cdot 3}{5} = 7{,}2.$$

Ответ: $2{,}4$ или $7{,}2$.

Пример 14. (ЕГЭ, 2011). Точки M, K и N лежат на сторонах соответственно AB, BC и AC треугольника ABC, причем $AMKN$ – параллелограмм, площадь которого составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника ABC. Найти диагональ MN параллелограмма, если известно, что $AB = 21$, $AC = 12$ и $\angle BAC = 120°$.



1 случай *2 случай*



1 случай. **Решение.** $MK \parallel AN,\ AM \parallel NK, \Rightarrow$

$\Delta MBK \sim \Delta ABC$ по двум углам $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{MB}{AB} = \frac{MK}{AC} = k.$$

$\Delta NKC \sim \Delta ABC$ по двум углам $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{NK}{AB} = \frac{KC}{BC} = \frac{NC}{AC} = 1 - k.$$

$$S_{ABC} = S_{AMKN} + S_{MBK} + S_{NKC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{4}{9}S + k^2S + (1-k)^2S,$$

$$k^2 - k + \frac{2}{9} = 0.$$

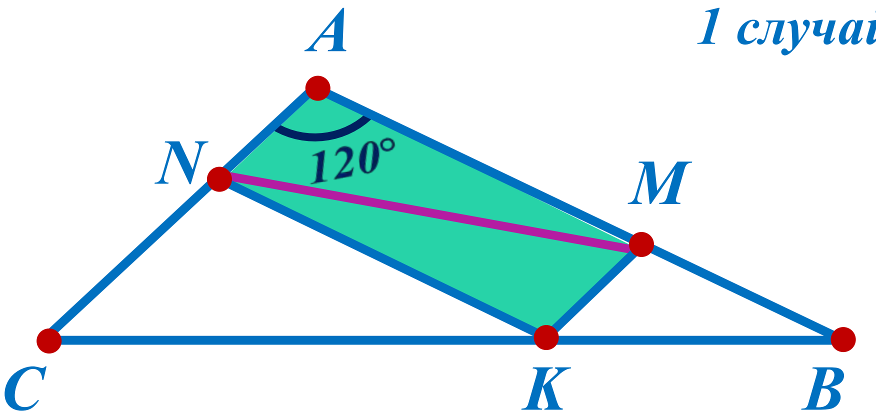
$$\left[\begin{array}{l} k = \frac{2}{3}, \\ k = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

$$k = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{2}{3} \text{ и } \frac{KC}{BC} = \frac{1}{3}.$$

$$AM = NK = \frac{1}{3}AB = 7,\ AN = MK = \frac{2}{3}AC = 8.$$

ΔNAM по теореме косинусов

$$MN = \sqrt{7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ} = 13.$$



1 случай. $k = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{1}{3}$ и $\frac{KC}{BC} = \frac{2}{3}$.

$$AM = NK = \frac{2}{3}AB = 14,$$

$$AN = MK = \frac{1}{3}AC = 4.$$

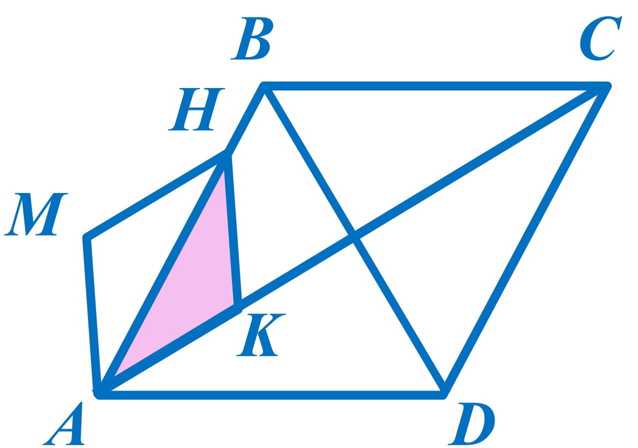
$\Delta\, NAM$ по теореме косинусов

$$MN = \sqrt{14^2 + 4^2 - 2 \cdot 14 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ} = 2\sqrt{67}.$$

Ответ: *13* или $2\sqrt{67}$.

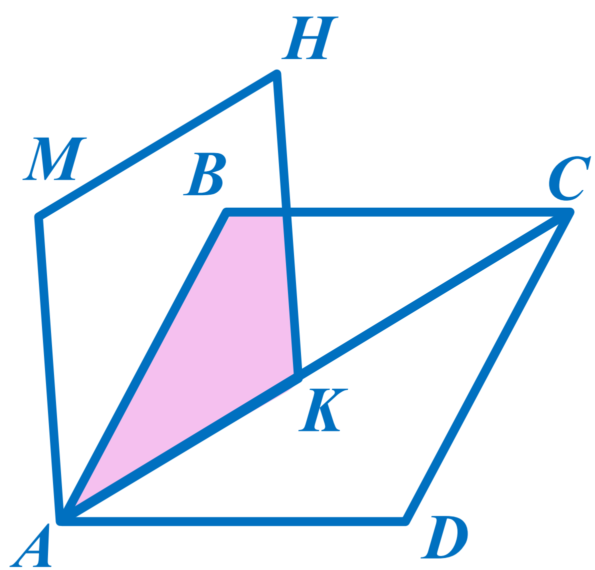
Пример 15. Два ромба $ABCD$ и $AMHK$, имеющие общую вершину A, расположены так, что стороны AB и AM образуют угол в $30°$. Известно, что углы при вершине A обоих ромбов равны $60°$, площадь пересечения ромбов равна $5\sqrt{3}$, а площадь их объединения равна $23\sqrt{3}$. Найти площадь каждого из ромбов.

Решение.



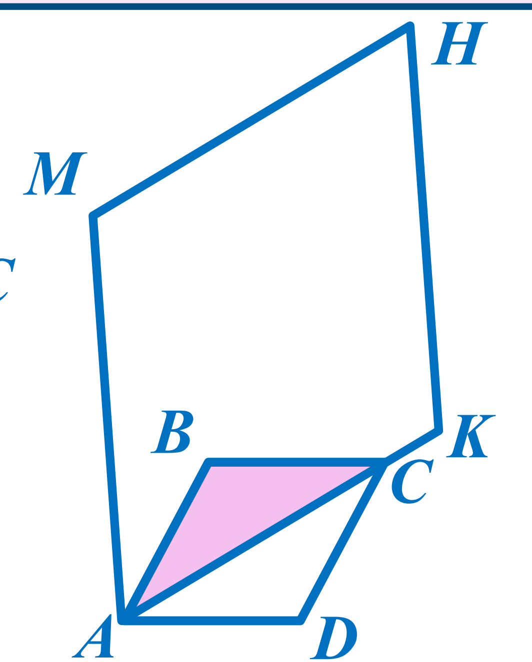
1 случай.

Точка H принадлежит отрезку AB, $AH \le AB$.



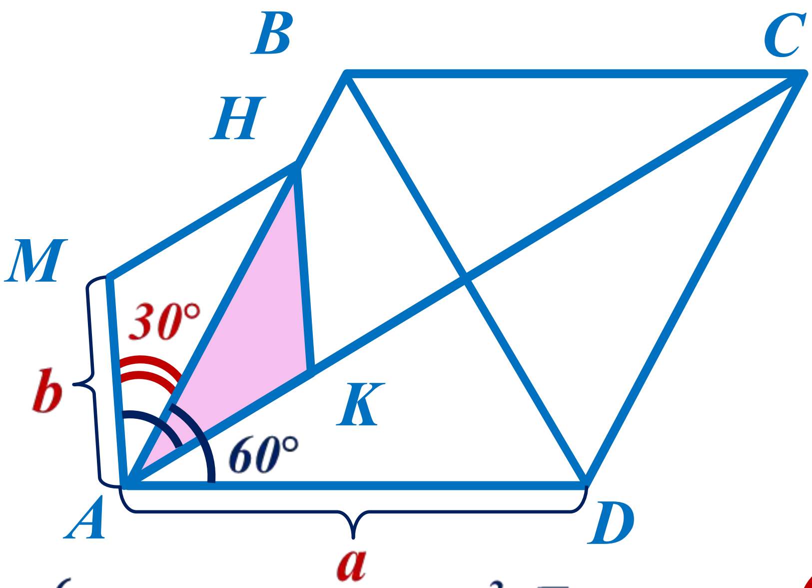
2 случай.

Точка H принадлежит лучу AB, $3AB > AH > AB$.



3 случай.

Точка H принадлежит лучу AB, $AH \ge 3AB$



1 случай. Точка $H \in [AB]$, $AH \le AB$.

$ABCD$ – ромб, $\angle BAC = 60°$ =>
ΔABD – правильный, $AB = a$.

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{AMHK} = \frac{b^2\sqrt{3}}{2}, \text{ где } AM = b.$$

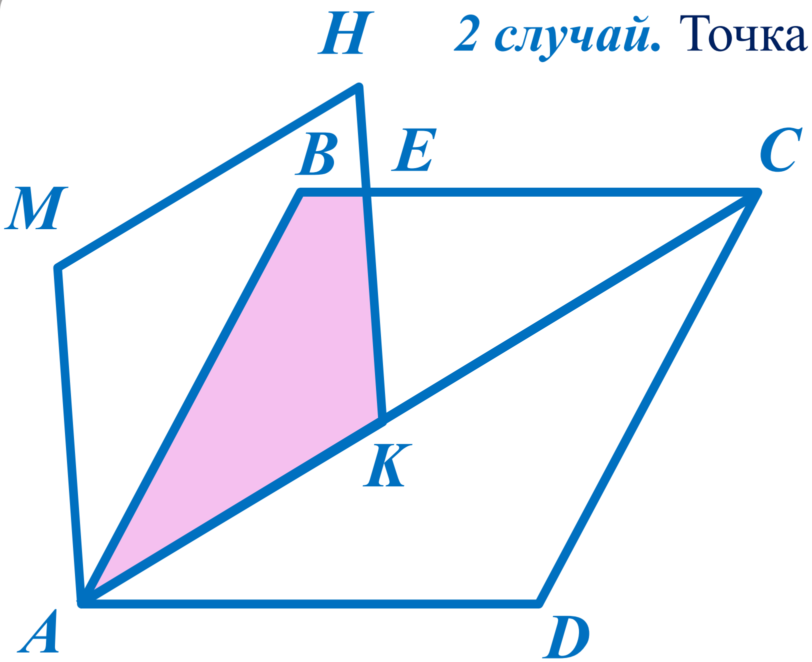
$$\begin{cases} S_{AHK} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}, \\ S_{AMH} + S_{ABCD} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

Пересечение ромбов – ΔAHK, объединение ромбов состоит из ΔAMH и ромба $ABCD$.

$$\begin{cases} \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}, \\ \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = 23\sqrt{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 6, \\ b = 2\sqrt{5}. \end{cases}$$

Из ΔAHK по т. косинусов $AH = 2\sqrt{15}$, что **противоречит** условию $AH \le AB$ ($AH = 2\sqrt{15} > 6 = AB$).

2 случай. Точка H принадлежит лучу AB, $AB < AH < 3AB$.



Пересечение ромбов – четырехугольник $ABEK$, объединение состоит из ромба $ABCD$ и $\Delta\, AMH$ и $\Delta\, BHE$.

$\Delta\, AMH$: по теореме косинусов

$AH = b\sqrt{3}$, а $BH = b\sqrt{3} - a$.

Так как $\angle BEH = 90°$, $\angle\, EBH = 60°$, то

$$S_{BHE} = \frac{\left(\sqrt{3}b - a\right)^2\sqrt{3}}{8}, \quad S_{AHK} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4},$$

$$S_{ABEK} = S_{AHK} - S_{BHE}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\left(\sqrt{3}b - a\right)^2\sqrt{3}}{8} = 5\sqrt{3}, \\ \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\left(\sqrt{3}b - a\right)^2\sqrt{3}}{8} = 23\sqrt{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4\sqrt{3}, \\ b = 2\sqrt{6}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 2\sqrt{6}, \\ b = 4\sqrt{3}. \end{cases}$$

Из $\Delta\, AHK$ $AH = 2b \cdot \sin\frac{1}{2}\angle AKH = b\sqrt{3}$,

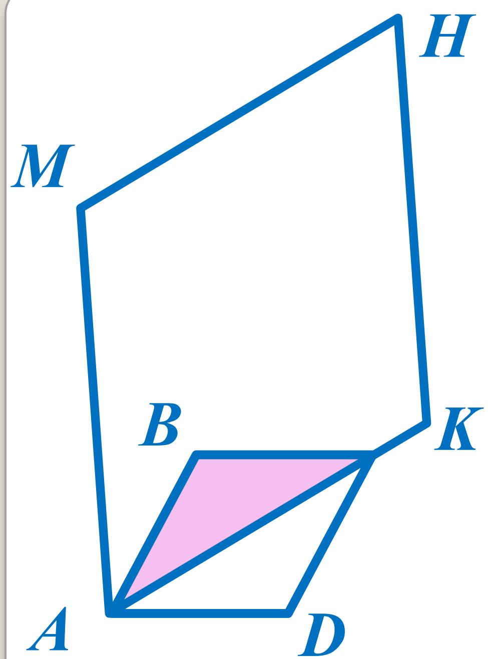
Если $b = 2\sqrt{6}$, то $AH = 6\sqrt{2} > 4\sqrt{3} = AB$,

если $b = 4\sqrt{3}$, то $AH = 12 > 2\sqrt{6} = AB$,

$AH < 3AB$

$$S_{ромба} = a^2 \cdot \sin A = \frac{a^2\sqrt{3}}{2},$$

=> При этом площади ромбов принимают одно из значений $12\sqrt{3}$ или $16\sqrt{3}$.



3 случай. Точка H принадлежит лучу AB, $AH \geq 3AB$.

В этом случае пересечение ромбов $-\Delta\, ABC$,
а объединение состоит из ромба $AMHK$ и $\Delta\, ACD$.

$$\begin{cases} \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}, \\ \dfrac{b^2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 23\sqrt{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2\sqrt{5}, \\ b = 6. \end{cases}$$

Из $\Delta\, AHK$ $AH = 2b \cdot \sin\frac{1}{2}\, AKH = b\sqrt{3}$,

Если $b = 6$, то $AH = 6\sqrt{3} < 3 \cdot 2\sqrt{5} = 3AB$,

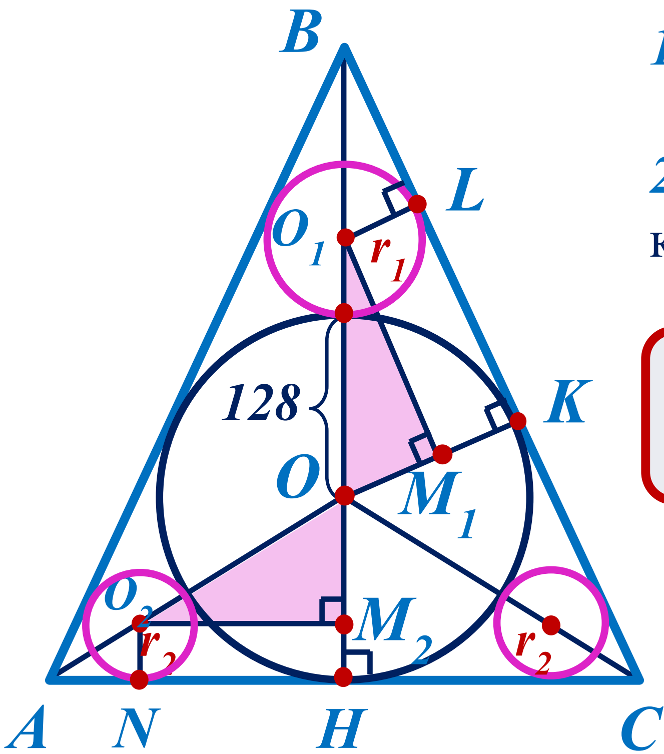
$AH < 3AB$

$\Downarrow$

противоречит условию $AH \geq 3AB$.

Ответ: $S_{ABCD} = 16\sqrt{3},\ S_{AMNK} = 12\sqrt{3}$
или $S_{ABCD} = 12\sqrt{3},\ S_{AMNK} = 16\sqrt{3}$.

Пример 16. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник равен *128 см*, а косинус угла при его основании равен $\frac{7}{9}$. Найти радиус окружности, касающейся вписанной окружности этого треугольника и двух его сторон.

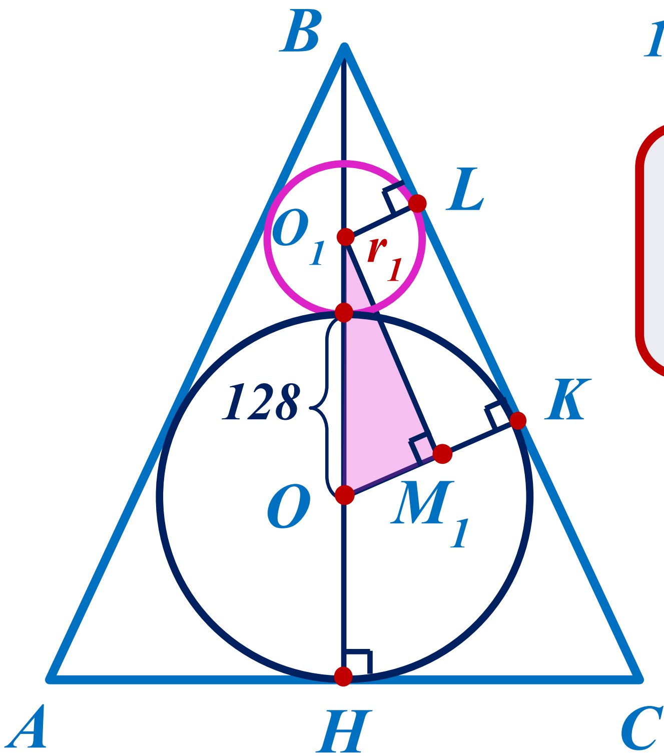


1 случай. Окружность касается сторон ***AB*** и ***BC***.

2 случай. Две окружности, одинакового радиуса, касаются основания ***AC*** и ***AB*** или ***BC*** .

Центр ***O*** вписанной в Δ ***ABC*** окружности – точка пересечения биссектрис треугольника.

При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.



1 случай. Окружность касается сторон ***AB*** и ***BC***.

Окружности радиусов *r* и *R* с центрами *O* и O_1 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = OO_1$.

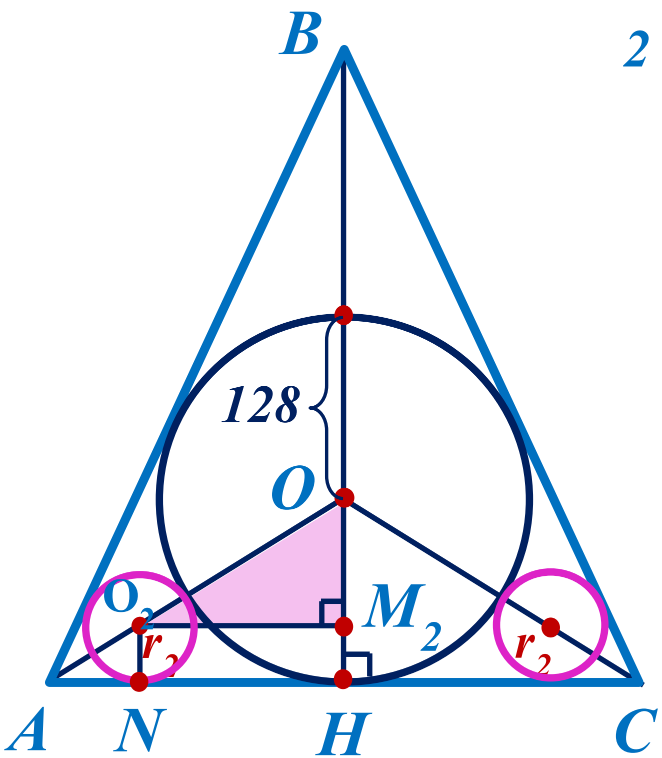
Пусть $O_1L = r_1$.

$\Delta\, O_1OM_1$: $\angle O_1M_1O = 90^0$, $O_1O = r_1 + 128$.

$OM_1 = OK - O_1L = 128 - r_1$,

$\sin\angle OO_1M_1 = \sin\angle O_1BL = \cos\angle BCA = \dfrac{7}{9}$.

$$\frac{OM_1}{O_1O} = \frac{128 - r_1}{r_1 + 128} = \frac{7}{9} \Rightarrow r_1 = 16.$$



2 случай. Две окружности, одинакового радиуса, касаются основания AC и AB или BC.

Пусть $O_2N = r_2$.

$\Delta\, O_2OM_2$: $\angle O_2M_2O = 90°$, $O_2O = r_2 + 128$.

$OM_2 = OH - M_2H = 128 - r_2$,

$\sin\angle OO_2M_2 = \sin\angle OAH =$

$= \sqrt{\dfrac{1 - \cos\angle BAH}{2}} = \dfrac{1}{3}.$

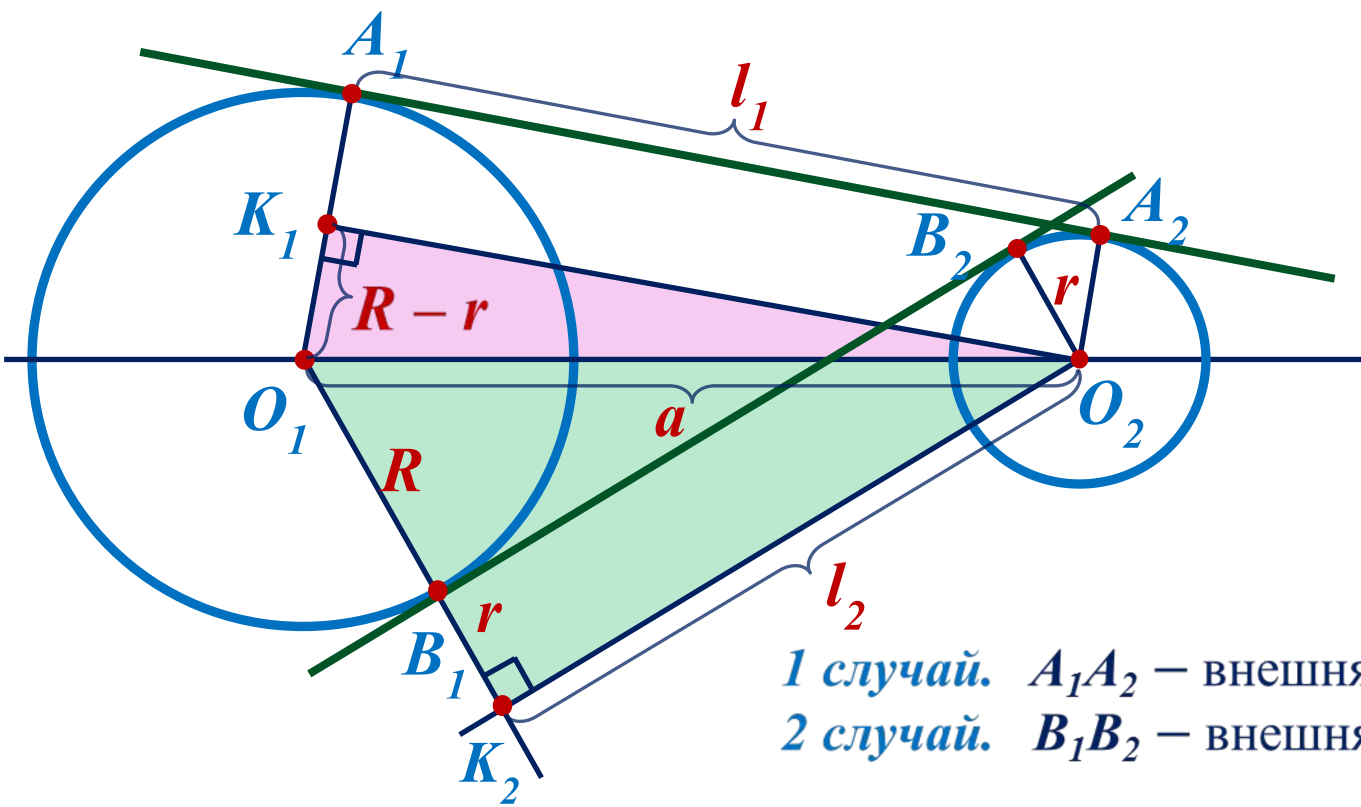
$\dfrac{OM_2}{OO_2} = \dfrac{128 - r_2}{r_2 + 128} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow r_2 = 64.$

Ответ: *16* или *64*.

3. Взаимное расположение окружностей

3.1 Расположение центров окружностей относительно общей касательной

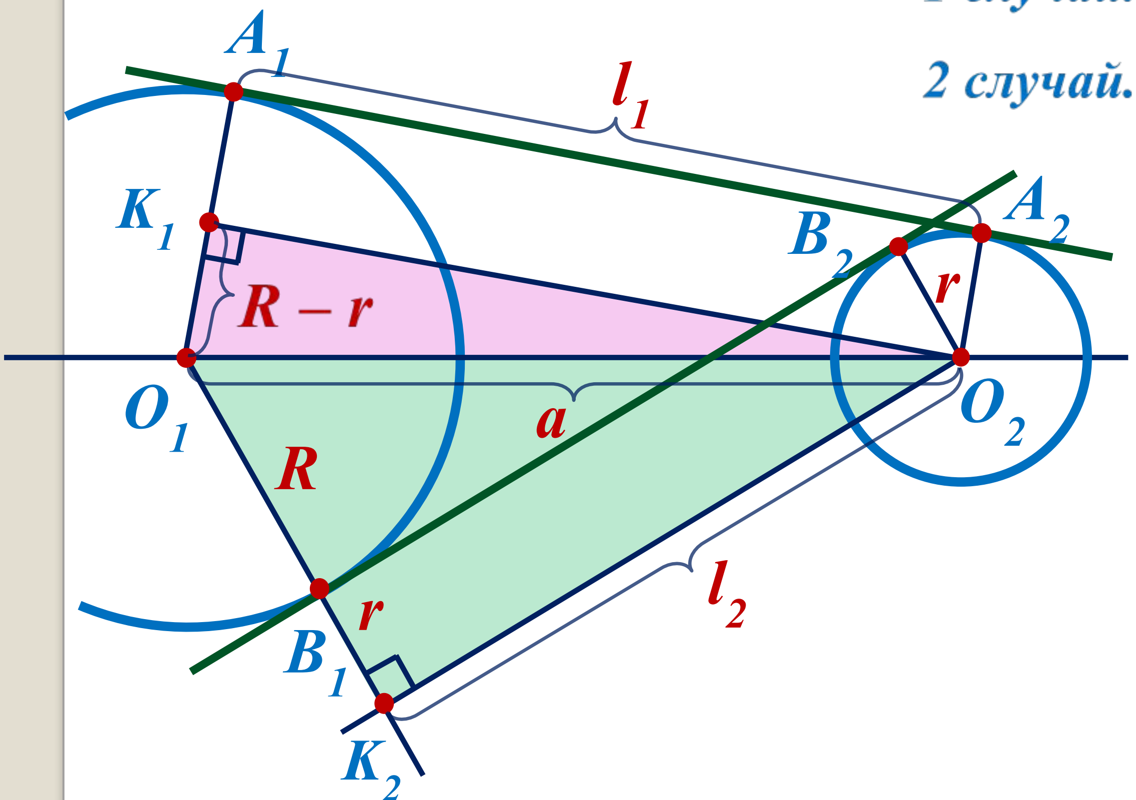
Пример 17. Прямая касается окружностей радиусов R и r. Известно, что расстояние между их центрами равно а, причем $R > r$ и $a > r + R$. Найдите расстояние между точками касания.



1 случай. A_1A_2 – внешняя касательная.

2 случай. B_1B_2 – внешняя касательная.

пг сг



1 случай. A_1A_2 – внешняя касательная.

2 случай. B_1B_2 – внешняя касательная.

Решение. $O_2K_1 \perp O_1A_1$,

$O_2K_2 \perp O_1B_1$.

$\Delta\, O_1K_1O_2 : \angle O_1K_1O_2 = 90°$,

$O_1O_2 = a,\ O_1K_1 = R - r.$

$\Delta\, O_1K_2O_2 : \angle O_1K_2O_2 = 90°$,

$O_1O_2 = a,\ O_1K_2 = R + r.$

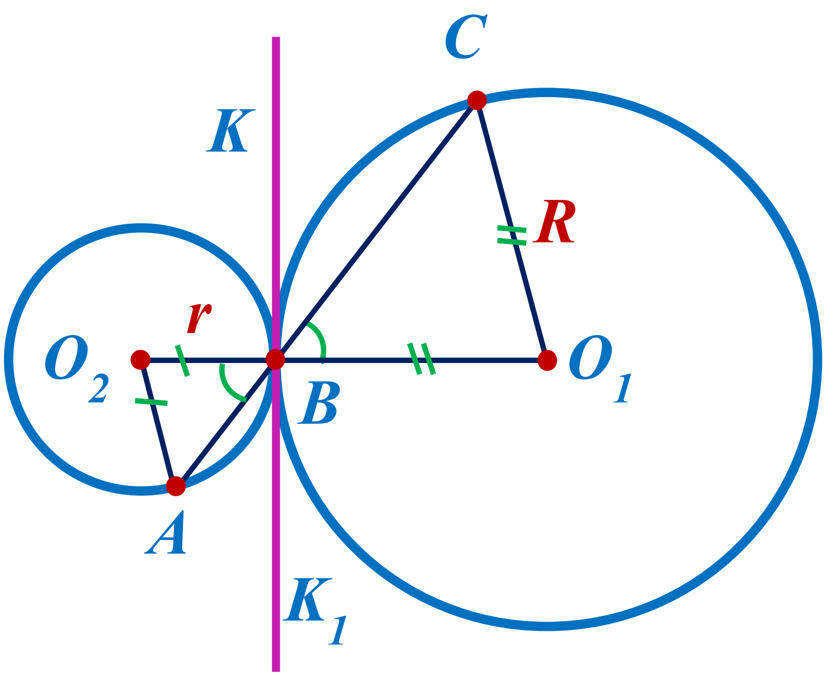
По теореме Пифагора $l_1 = A_1A_2 = \sqrt{a^2 - (R - r)^2}$,

$l_2 = B_1B_2 = \sqrt{a^2 - (R + r)^2}$.

Ответ: $\sqrt{a^2 - (R - r)^2}$ или $\sqrt{a^2 - (R + r)^2}$.

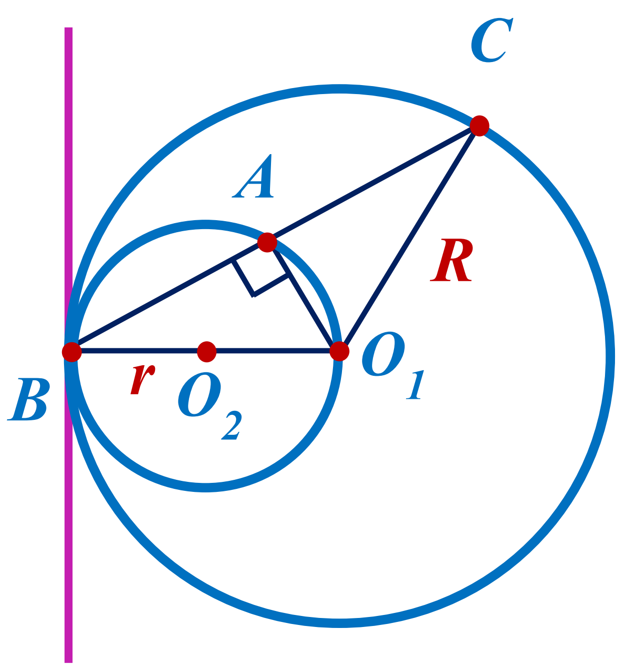
3.2 Расположение центров окружностей относительно их общей точки касания

Пример 18. (ЕГЭ 2010). Окружности радиусов *2* и *4* касаются в точке В. Через точку *B* проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке *A*, а большую – в точке *C*. Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Найдите *BC*.



1 случай

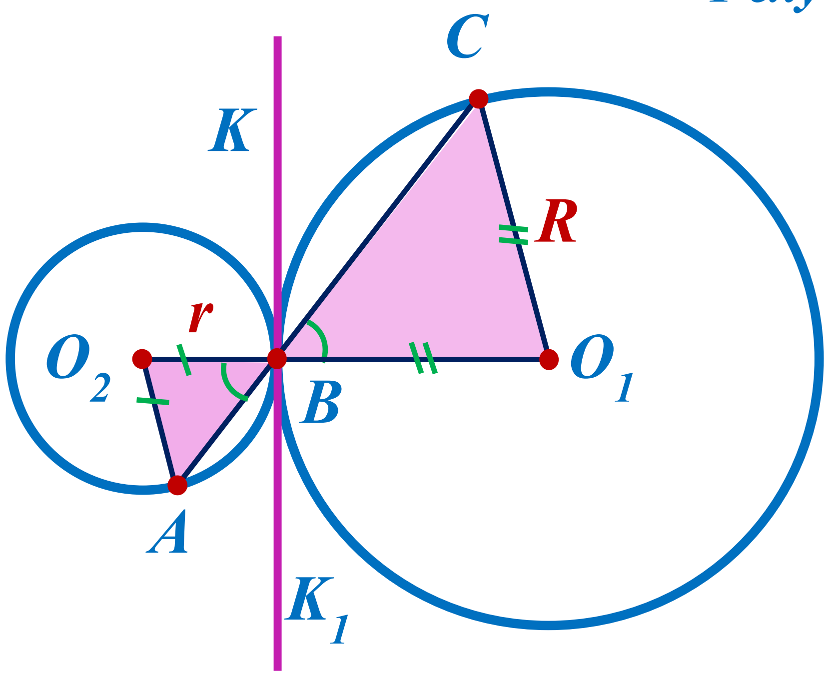
Внешнее касание окружностей.



2 случай

Внутреннее касание окружностей.

1 случай. Внешнее касание окружностей.



Общая касательная KK_1 перпендикулярна линии центров.

$\Delta\, AO_2B \sim \Delta\, O_1BC$ по двум углам.

$\angle O_2BA = \angle O_1BC$ (вертикальные),

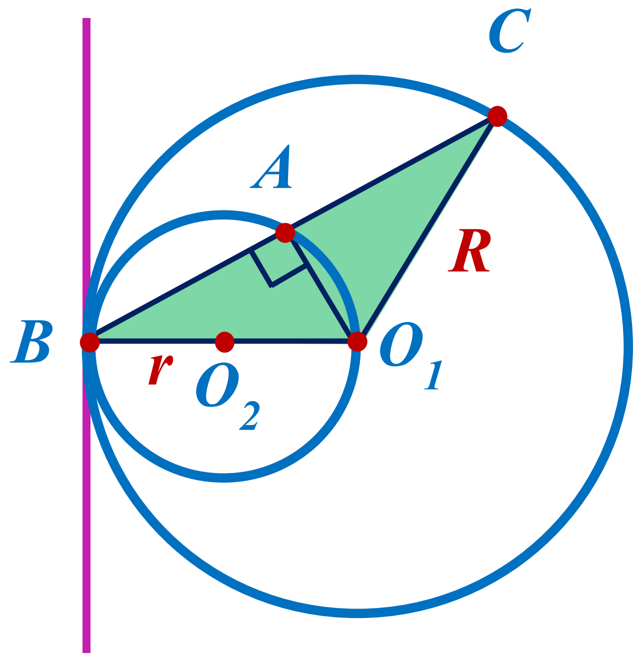
$\angle AO_2B = \angle BO_1C$ – центральные, опирающиеся на дуги $\smile AB = \smile CB$

($\angle ABK_1 = \angle KBC$ – вертикальные и каждый из них – ***угол между касательной и хордой***.)

$\Delta\, AO_2B \sim \Delta\, O_1BC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BO_2}{BO_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$BC = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$



2 случай. Внутреннее касание окружностей.

Δ BAO_1 – прямоугольный, т. к.
вписанный угол BAO_1
опирается на диаметр BO_1.

Δ BO_1C – равнобедренный =>

высота O_1A – медиана => $BA = AC = 3\sqrt{2}$.

В Δ BAO_1 гипотенуза $BO_1 = 4 < 3\sqrt{2}$.

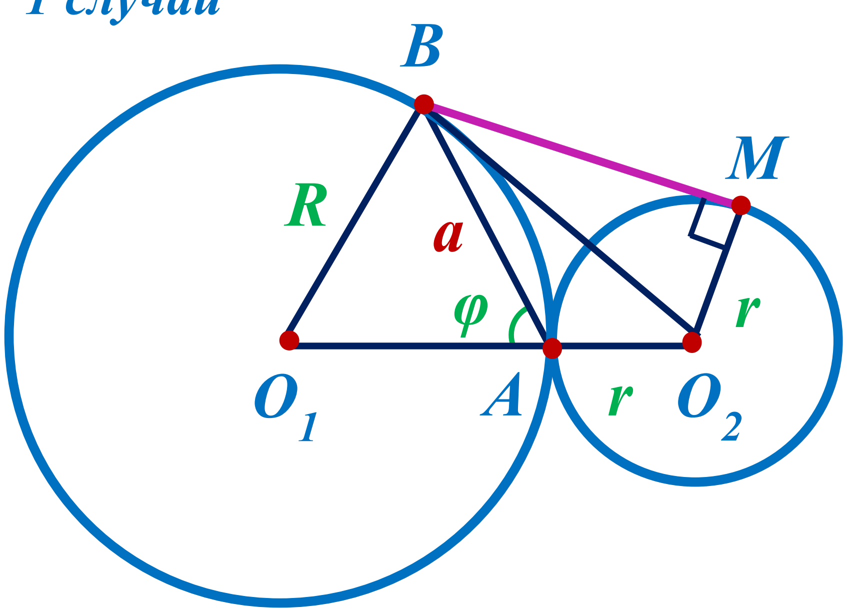
$BO_1 < BA$ –противоречие.

В этом случае при исходных числовых данных задача не имеет решения .

Ответ: $2\sqrt{2}$.

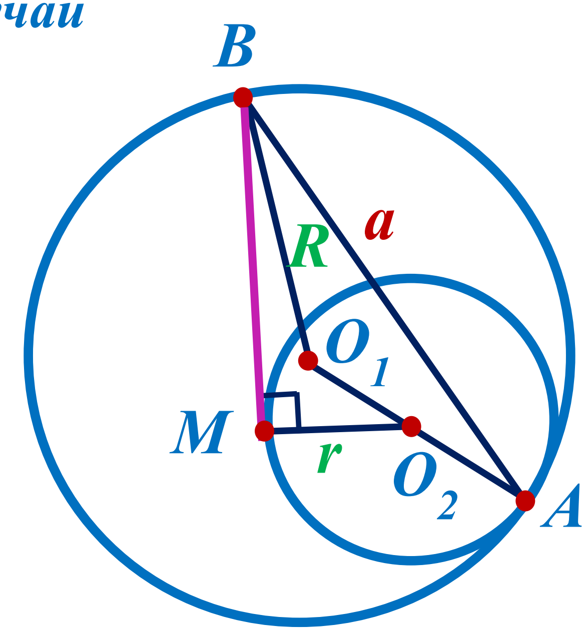
Пример 19. Окружности S_1 и S_2 радиусов R и r ($R > r$) соответственно касаются в точке A . Через точку B, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке M . Найдите BM , если известно, что $AB = a$.

1 случай

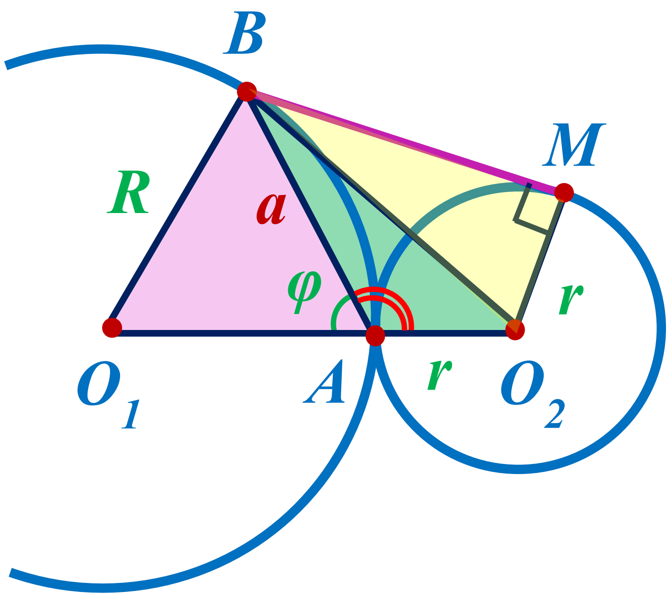


Внешнее касание окружностей.

2 случай



Внутреннее касание окружностей.



1 случай. Внешнее касание окружностей.

1-й способ решения. Пусть $\angle O_1AB = \varphi$.

$\Delta O_1AB: \ \angle O_1AB = \varphi, \ AB = a, \ O_1B = O_1A = R.$

По теореме косинусов:

$$O_1B^2 = O_1A^2 + AB^2 - 2 \cdot O_1A \cdot AB\cos\varphi,$$

$$R^2 = R^2 + a^2 - 2 \cdot R \cdot a\cos\varphi \Rightarrow \ \cos\varphi = \frac{a}{2R}.$$

По теореме косинусов для ΔO_2AB:

$$O_2B^2 = O_2A^2 + AB^2 + 2 \cdot O_2A \cdot AB\cos\varphi,$$

$$O_2B^2 = r^2 + a^2 + 2r \cdot a\cos\varphi.$$

$$O_2B^2 = r^2 + a^2 + \frac{a^2 r}{R}.$$

$\Delta O_2BM: \ \angle O_2MB = 90°.$

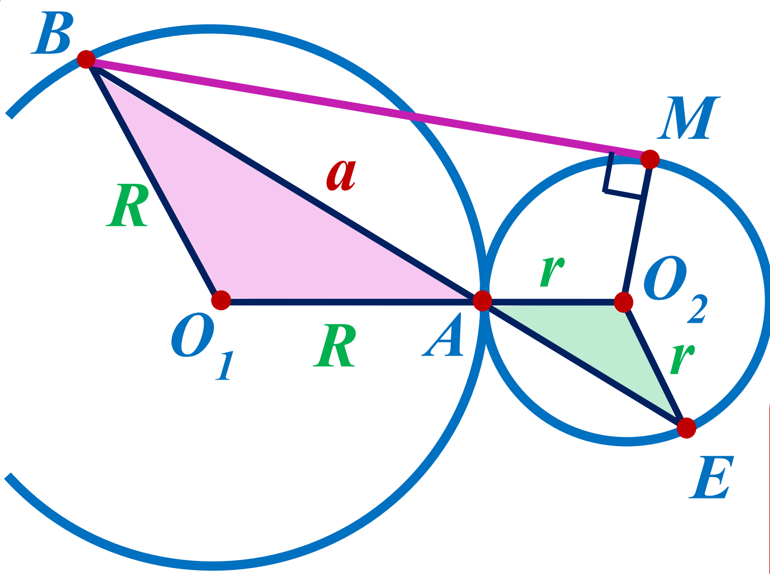
По теореме Пифагора

$$BM^2 = O_2B^2 - r^2,$$

$$BM^2 = r^2 + a^2 + \frac{a^2 r}{R} - r^2,$$

$$BM^2 = a^2\left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

$$BM = a \cdot \sqrt{1 + \frac{r}{R}}.$$



1 случай. Внешнее касание окружностей.

2-й способ решения. $AB \cap$ ***окр.*** $S_2 = E$.

$$\Delta AO_1B \sim \Delta AO_2E \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{r}{R} \Rightarrow AE = \frac{ar}{R}.$$

Если через точку *B* вне окружности провести секущую и касательную, то произведение длины секущей на ее внешнюю часть будет равно квадрату длины касательной (**теорема о секущей и касательной**).

BM – касательная к ***окр.*** S_2,
BE – секущая,
BA –внешняя часть секущей.

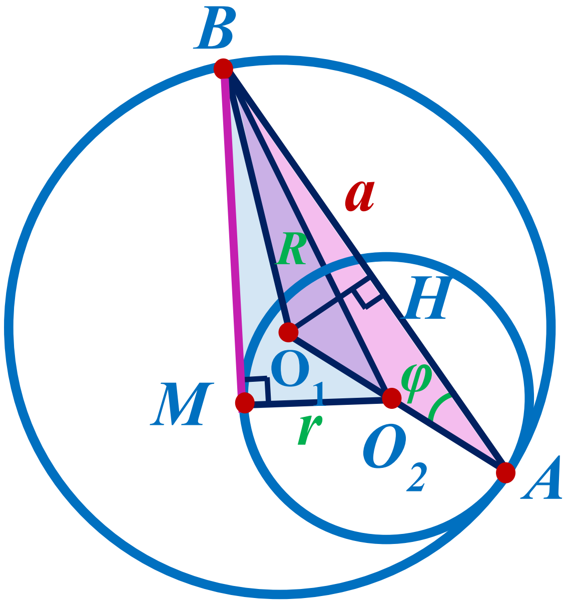
$$BM^2 = BA \cdot BE,$$

$$BM^2 = BA \cdot (BA + AE),$$

$$BM^2 = a \cdot \left(a + \frac{ar}{R}\right),$$

$$BM = \sqrt{a \cdot \left(a + \frac{ar}{R}\right)},$$

$$BM = a \cdot \sqrt{1 + \frac{r}{R}}.$$



2 случай. Внутреннее касание окружностей.

Решение. $O_1H \perp AB,$

ΔAO_1B – равнобедренный $\Rightarrow O_1H$ – медиана.

$\Delta O_1HA: \angle O_1HA = 90°,\ AH = \frac{a}{2}, O_1A = R,$

$$\angle O_1HA = \varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{AH}{O_1A} = \frac{a}{2R}.$$

По теореме косинусов для ΔO_2AB :

$$O_2B^2 = O_2A^2 + AB^2 - 2 \cdot O_2A \cdot AB \cos\varphi,$$

$$O_2B^2 = r^2 + a^2 - \frac{a^2 r}{R},$$

$\Delta O_2MB: \angle O_2MB = 90°,\ O_2M = r,$

$\Delta O_2MB: \angle O_2MB = 90°,\ O_2M = r,$

$$O_2B^2 = r^2 + a^2 - \frac{a^2 r}{R}.$$

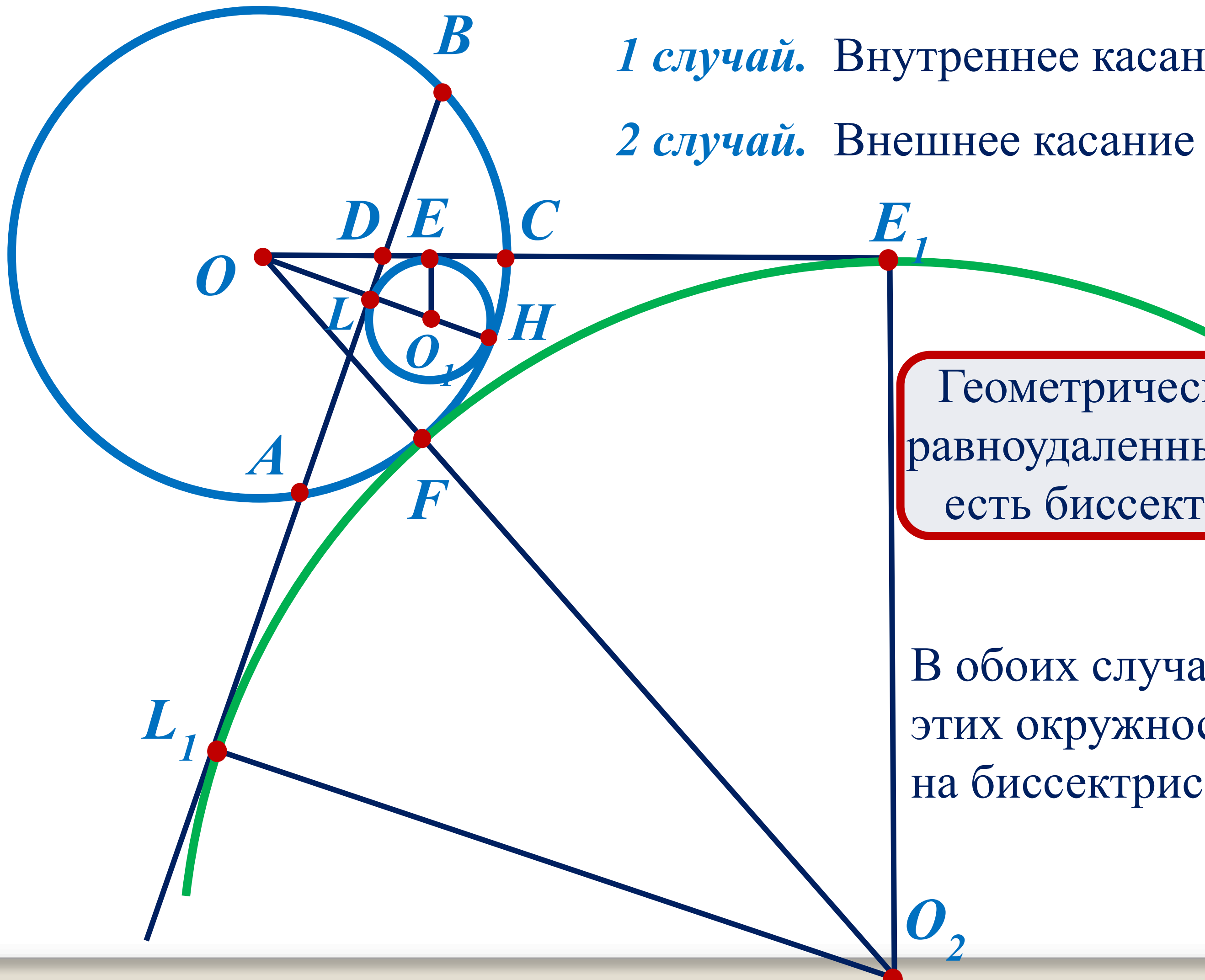
По теореме Пифагора:

$$BM^2 = O_2B^2 - r^2,$$

$$BM = a \cdot \sqrt{1 - \frac{r}{R}}.$$

Ответ: $a \cdot \sqrt{1 - \frac{r}{R}}.$

Пример 20. Дана окружность радиуса 2 с центром O. Хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем $\angle CDA = 120°$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если $OD = \sqrt{3}$.



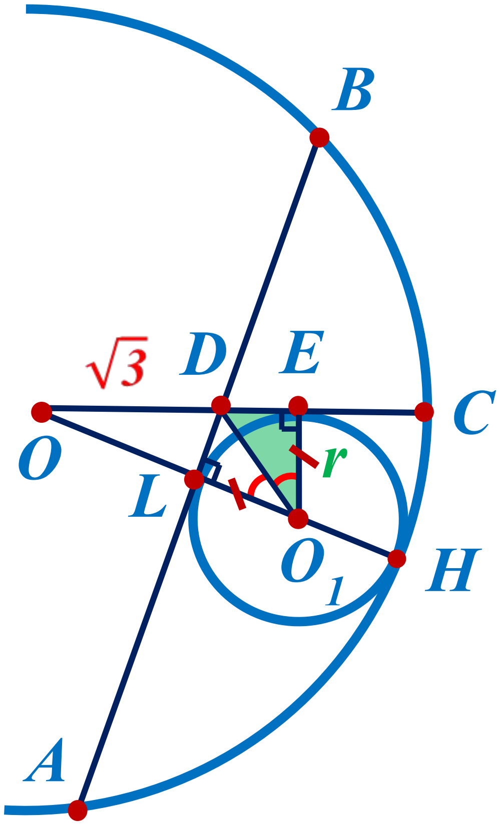
1 случай. Внутреннее касание окружностей.

2 случай. Внешнее касание окружностей.

Геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла, есть биссектриса этого угла.

В обоих случаях центры O_1 и O_2 этих окружностей будут лежать на биссектрисе угла ADC.

1 случай. Внутреннее касание окружностей.



Решение. Пусть $O_1E = O_1L = r$,

E – точка касания *окр.*$(O_1; r)$ с $OC = R = 2$.

ΔDEO_1: $\angle DEO_1 = 90°$, $\angle EDO_1 = 60°$, т. к.

DO_1 – биссектриса угла ADC =>

$$DE = r \cdot ctg\, 60° = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

По теореме о секущей и касательной, получим

$$OL \cdot OH = OE^2.$$

$$(2 - 2r) \cdot 2 = \left(\sqrt{3} + \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

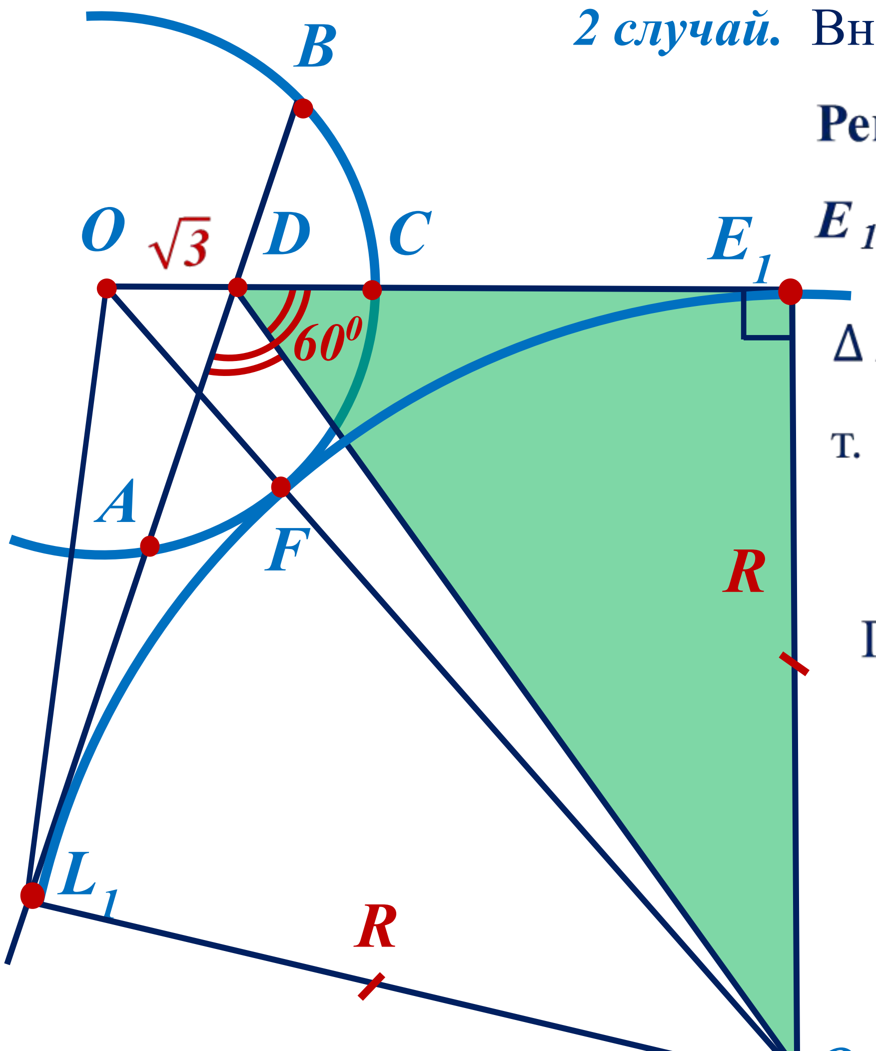
$$r^2 + 18r - 3 = 0,$$

$$r = -9 \pm 2\sqrt{21},$$

$$-9 - 2\sqrt{21} < 0 \quad \Rightarrow r = -9 + 2\sqrt{21}.$$

OE – касательная к *окр.* S_1,
OH – секущая,
OL –внешняя часть секущей.

2 случай. Внешнее касание окружностей.



Решение. Пусть $O_2E_1 = O_2L_1 = R,$

E_1 – точка касания ***окр.(O_2; R)*** с лучом ***OC***.

ΔDE_1O_2: $\angle DE_1O_2 = 90°,\ \angle E_1DO_2 = 60°,$

т. к. DO_2 – биссектриса угла ADC =>

$$DE_1 = R \cdot ctg\,60° = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

По теореме о секущей и касательной

$$OF_1 \cdot OF = OE_1^{\,2}.$$

$$(2 + 2R) \cdot 2 = \left(\sqrt{3} + \frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$R^2 - 6R - 3 = 0,$$

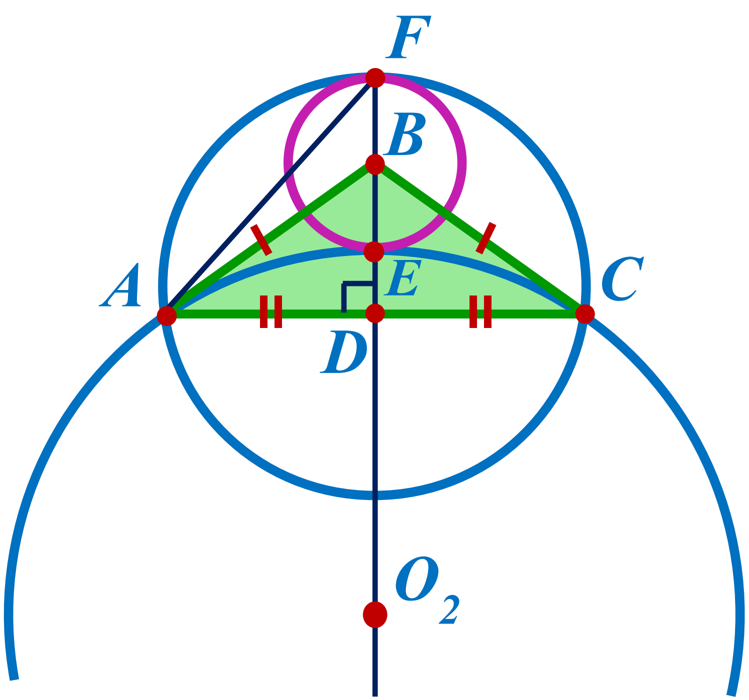
$$R = 3 \pm 2\sqrt{3},$$

$$3 - 2\sqrt{3} < 0 \ \Rightarrow\ \underline{R = 3 + 2\sqrt{3}}.$$

OE_1 – касательная к ***окр.*** S_2,
OF_1 – секущая,
OF –внешняя часть секущей.

Ответ: $-9 + 2\sqrt{21}$ **или** $3 + 2\sqrt{3}$.

Пример 21. Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной *5* и основанием *8* служит центром данной окружности радиуса *2*. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.



Решение. Пусть $D \in AC$, $AD = DC$, $BD \cap$ окр. $(B; r) = E$ и F.

$AD = 4,\ BD = 3,\ ED = 1,\ FD = 5.$

ΔAED: $\angle ADE = 90°,\ AD = 4,\ ED = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow AE = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}.$

ΔAFD: $\angle ADF = 90°,\ AD = 4,\ FD = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow AF = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}.$

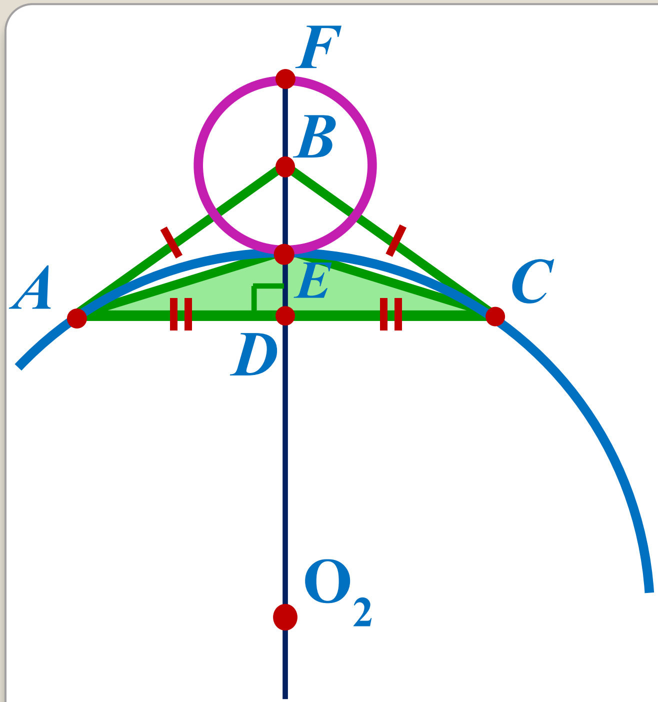
$$S_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot ED = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 = 4.$$

$$S_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot FD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20.$$

1 случай.
Внешнее касание окружностей.

2 случай.
Внутреннее касание окружностей.

В обоих случаях центры O_1 и O_2 этих окружностей будут лежать на биссектрисе угла – прямой BD.

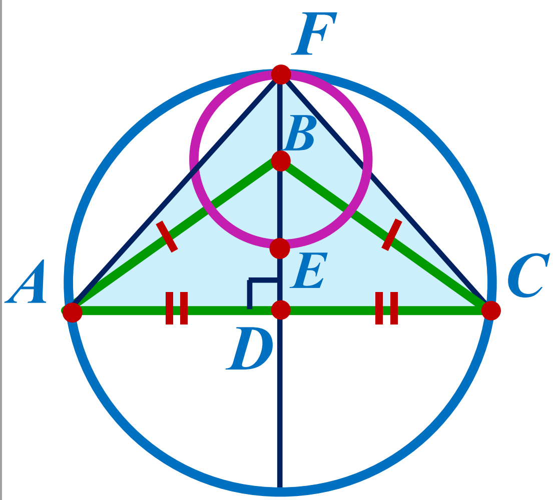


1 случай. Внешнее касание окружностей.

Тогда искомая окружность описана около $\Delta\, AEC$.

Найдем ее радиус по формуле

$$R = \frac{AE \cdot EC \cdot AC}{4S_{AEC}} = \frac{17 \cdot 8}{4 \cdot 4} = \frac{17}{2}.$$



2 случай. Внутреннее касание окружностей.

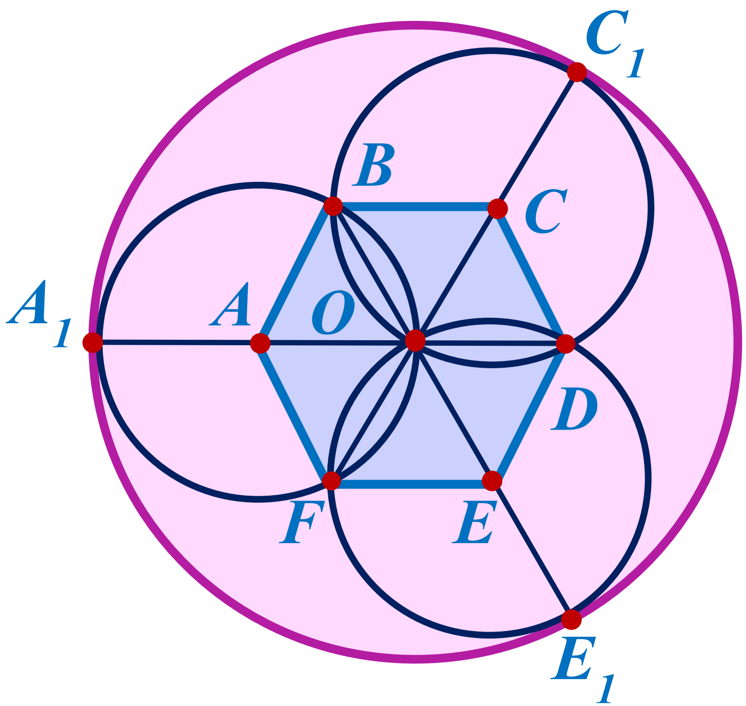
Тогда искомая окружность описана около $\Delta\, AFC$.

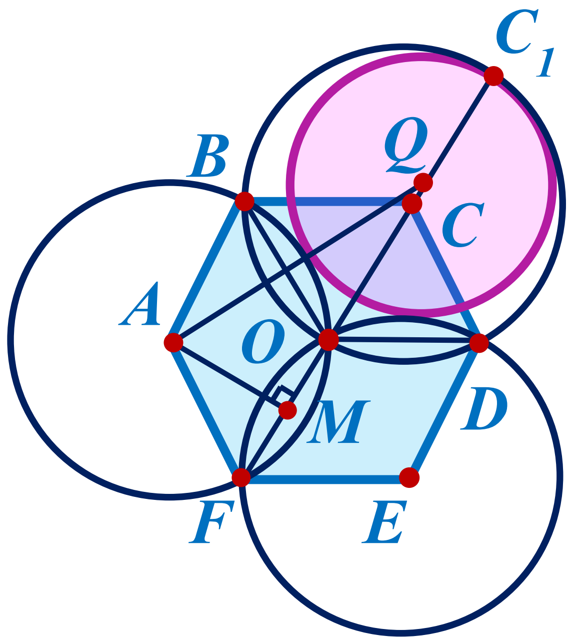
Найдем ее радиус по формуле

$$R = \frac{AF \cdot FC \cdot AC}{4S_{AFC}} = \frac{41 \cdot 8}{4 \cdot 20} = \frac{41}{10}.$$

Ответ: $\frac{17}{2}$ или $\frac{41}{10}$.

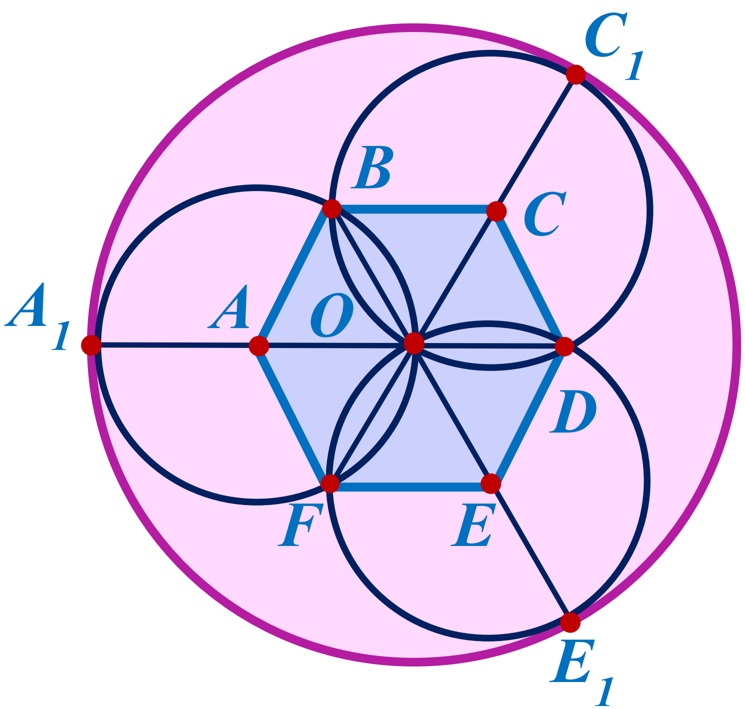
Пример 22 (ЕГЭ 2012). Точка *O* – центр правильного шестиугольника *ABCDEF*, в котором $AC = 14\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников *BOD, DOF и BOF.*





1 случай. Искомая окружность касается трёх данных внутренним образом.

2 случай. Искомая окружность касается одной из данных внутренним образом, а двух других – внешним.



Решение. ΔABC: $\angle ABC = 120°$,

$AC = 14\sqrt{3} \Rightarrow AB = \dfrac{AC}{\sqrt{3}} = 14.$

$CB = CO = CD \Rightarrow C$ – центр окружности, описанной около ΔBOD.

Аналогично, A и E – центры окружностей, описанных около ΔBOF и ΔDOF.

1 случай. Искомая окружность касается трёх данных внутренним образом.

$OA_1 = OC_1 = OE_1 = 2r = 28.$

$\{A_1, C_1, E_1\} \in$ окр. S,

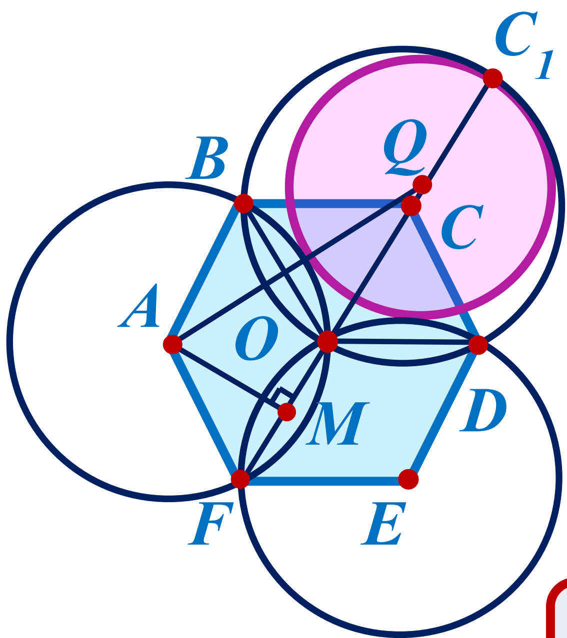
окр. S = окр. $(O; R)$, где $R = 2r$.

$OA = OA_1 - AA_1 = R - r \Rightarrow$

окр. S касается внутренним образом окружности, описанной около ΔBOF.

Аналогично, окр. S касается остальных двух окружностей.

$R = 2r = 28.$



2 случай. Искомая окружность касается одной из данных внутренним образом , а двух других – внешним.

Пусть Q – центр искомой окружности,

x – радиус этой окружности.

$AM \perp FO,\ AM \cap FO = M \Rightarrow AM$ – высота правильного $\Delta AOF \Rightarrow AM = \dfrac{14\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}.$

Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания.

$$QM = OM + OQ = OM + OC_1 - QC_1$$

$$\Leftarrow$$

$$QM = 7 + 28 - x = 35 - x;$$

$$AQ = 14 + x.$$

По теореме Пифагора $AQ^2 = AM^2 + QM^2.$

$$(14 + x)^2 = (35 - x)^2 + \left(7\sqrt{3}\right)^2.$$

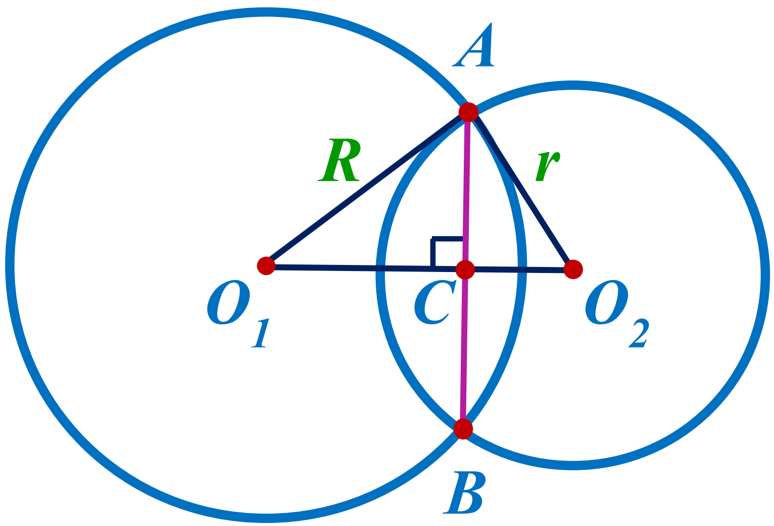
$$(2x - 21) \cdot 49 = 49 \cdot 3;$$

$$x = 12.$$

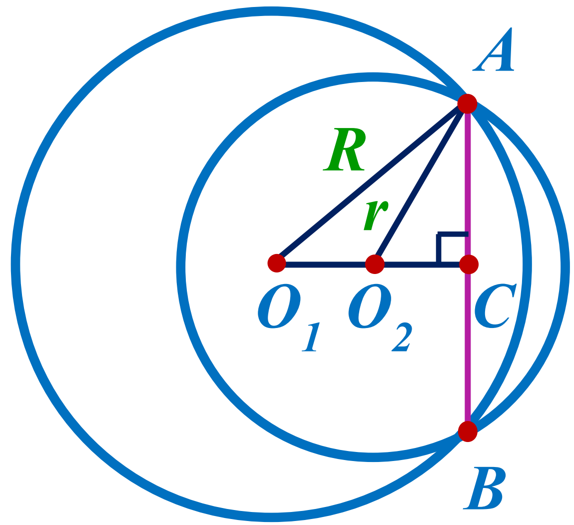
Ответ: *28* или *12.*

3.3 Расположение центров окружностей относительно общей хорды

Пример 23. *Окружности радиусов* 10 *и* 17 *пересекаются в точках A и B. Найдите расстояние между центрами окружностей, если AB* = 16.



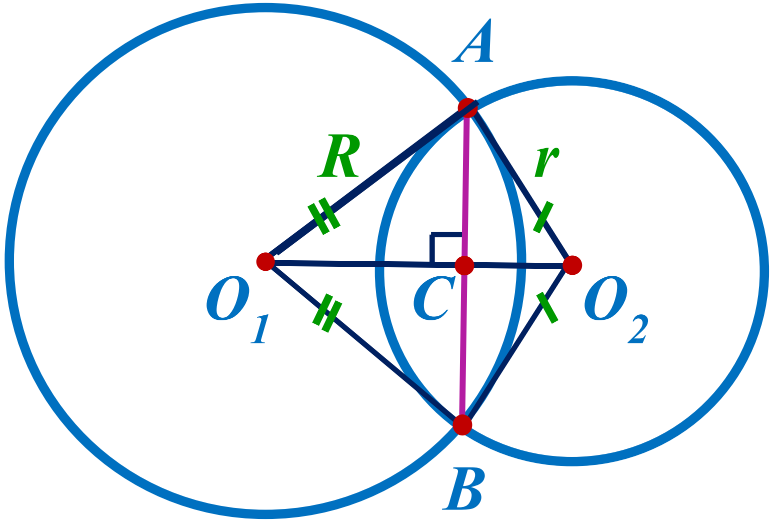
1 случай. Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды *AB*.



2 случай. Центры окружностей лежат по одну сторону от их общей хорды *AB*.

Пересекающиеся окружности в точках *A* и *B* имеют общую хорду *AB*. Общая хорда перпендикулярна линии центров и делится ею пополам.

1 случай. Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды *AB*.



Решение. $AB \cap O_1O_2 = C.$

$\Delta O_1A O_2 = \Delta O_1BO_2$ по трём сторонам

$\Rightarrow \angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ биссектриса O_1C равнобедренного

ΔAO_1B является высотой медианой

$\Rightarrow AB \perp O_1O_2, \; AC = CB.$

ΔO_1AC: $O_1CA = 90°, AC = 8, O_1A = 17$

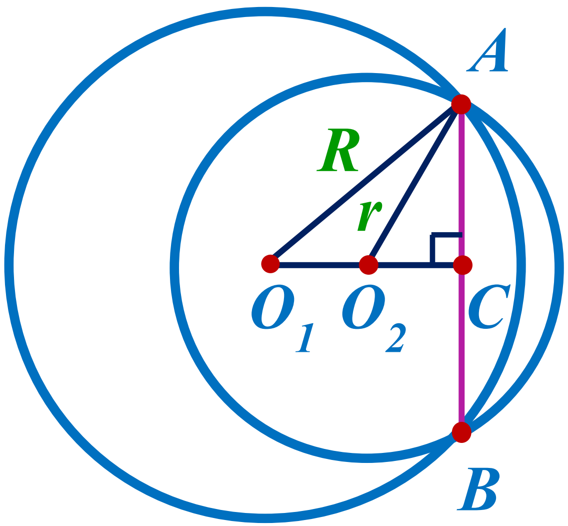
$O_1C = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15.$

ΔO_2AC: $O_2CA = 90°, AC = 8, O_2A = 10,$

$O_2C = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$

$O_1O_2 = O_1C + O_2C,$

$O_1O_2 = 15 + 6 = 21.$



2 случай. Центры окружностей лежат по одну сторону от их общей хорды AB.

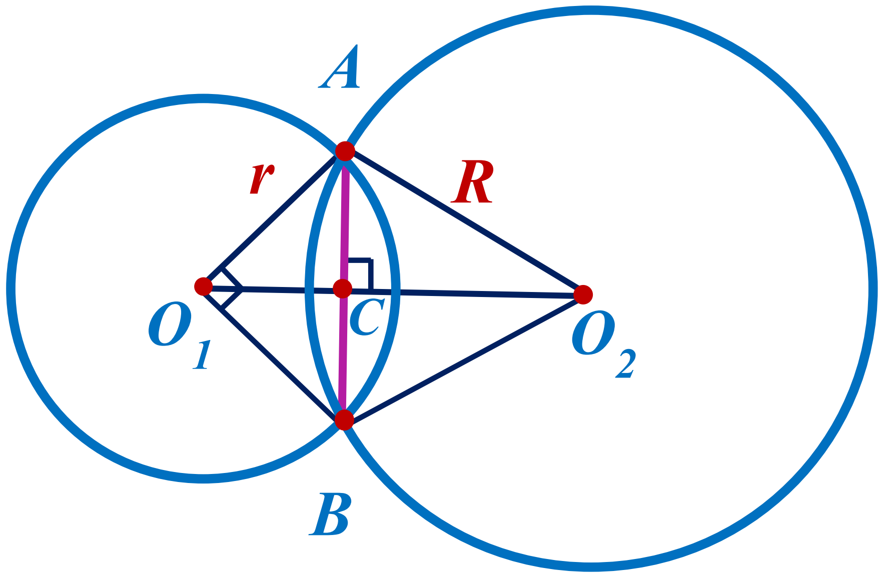
Аналогично из $\Delta\, O_1AC$ и $\Delta\, O_2AC$ находим O_1C и O_2C.

$$O_1O_2 = O_1C - O_2C,$$

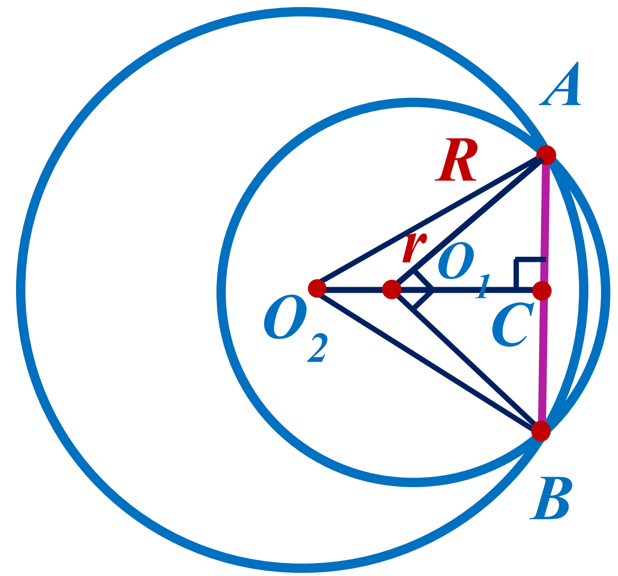
$$O_1O_2 = 15 - 6 = 9.$$

Ответ: ***21*** **или** ***9.***

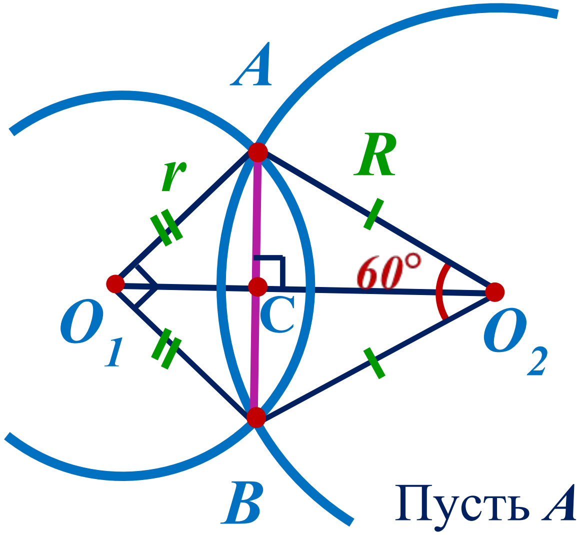
Пример 24. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90°$, $\angle AO_2B = 60°$, $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.



1 случай. Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AB.



2 случай. Центры окружностей лежат по одну сторону от их общей хорды AB.



1 случай. Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды *AB*.

Решение. $\Delta\, AO_1B$ и $\Delta\, AO_2B$ – равнобедренные => линия центров O_1O_2 – биссектриса углов AO_1B и AO_2B.

$$\angle AO_1C = 45°, \quad \angle AO_2C = 30°.$$

Пусть $AC = x$.

$\Delta\, AO_2C: \angle\, O_2CA = 90°, \angle AO_2C = 30°.$

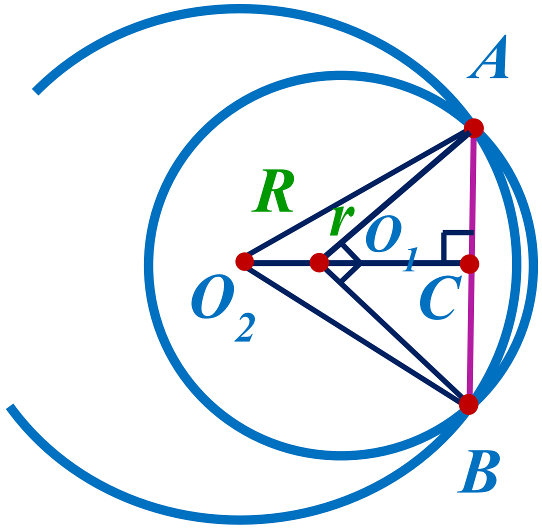
$$O_2C = AC \cdot ctg30° = x\sqrt{3}.$$

$$O_1O_2 = O_1C + O_2C, \qquad a = x + x\sqrt{3}.$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}+1}.$$

$$O_1A = x\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1},$$

$$O_2A = 2AC = 2x = \frac{2a}{\sqrt{3}+1}.$$



2 случай. Центры окружностей лежат по одну сторону от их общей хорды *AB*.

Проводя аналогичные рассуждения, получим

$$O_1O_2 = O_2C - O_1C, \qquad a = \sqrt{3}x - x.$$

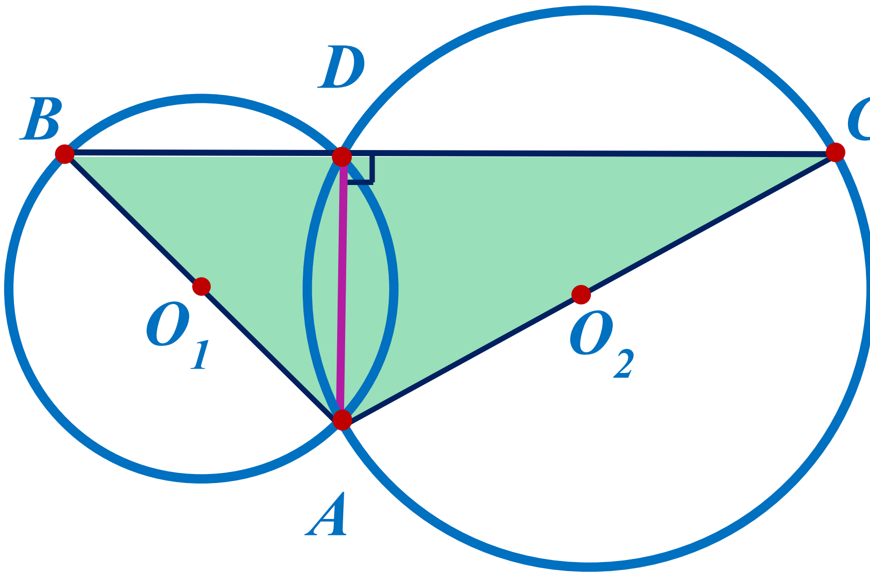
$$x = \frac{a}{\sqrt{3}-1}.$$

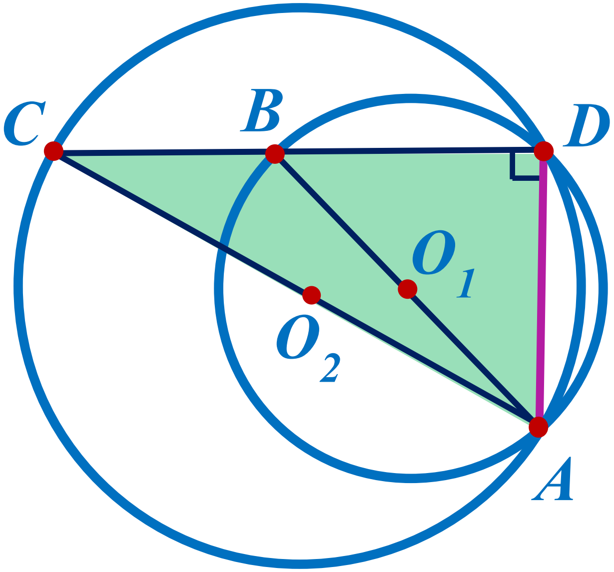
$$O_1A = x\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1},$$

$$O_2A = 2AC = 2x = \frac{2a}{\sqrt{3}-1}.$$

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}, \dfrac{2a}{\sqrt{3}+1}$ или $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}, \dfrac{2a}{\sqrt{3}-1}$.

Пример 25 (ЕГЭ 2012). В треугольнике ABC $\angle C = 30°$, D – отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Найдите синус угла A.



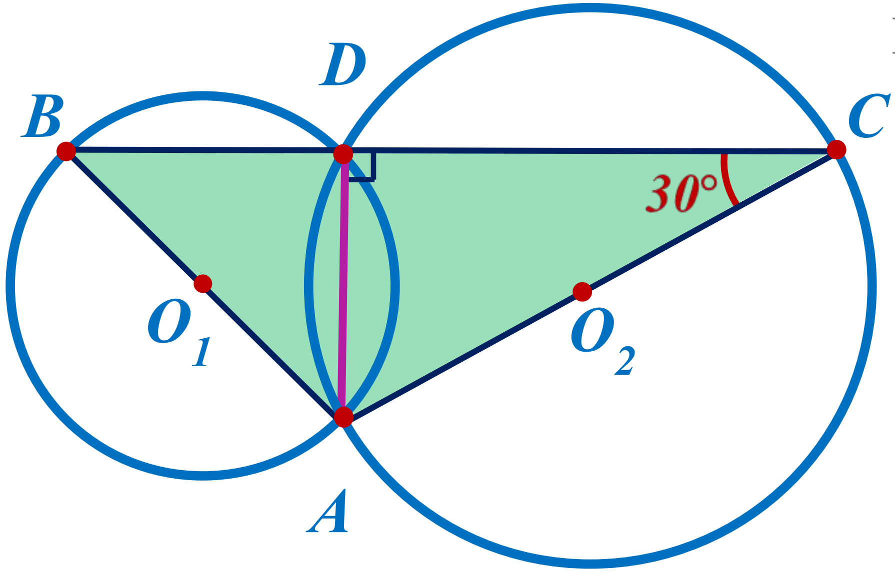


1 случай. Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AD.

$$D \in [BC]$$

2 случай. Центры окружностей лежат по одну сторону от их общей хорды AD.

$$D \in [CB)$$



Решение. $D \in$ *окр.* $(O_2; R)$, $2R = AB$

$$\Downarrow$$

$$\angle ADB = 90°.$$

Аналогично $\angle ADC = 90°.$

$$\Downarrow$$

$$D \in (BC).$$

1 случай. $D \in [BC]$.

Пусть $DB = t$, $CD = 2t$.

$\Delta\, ADC$: $\angle ADC = 90°, \angle ACD = 30°.$

$$AD = CD \cdot tg30° = \frac{\sqrt{3}}{3}t.$$

$$AD = \frac{2t \cdot \sqrt{3}}{3}.$$

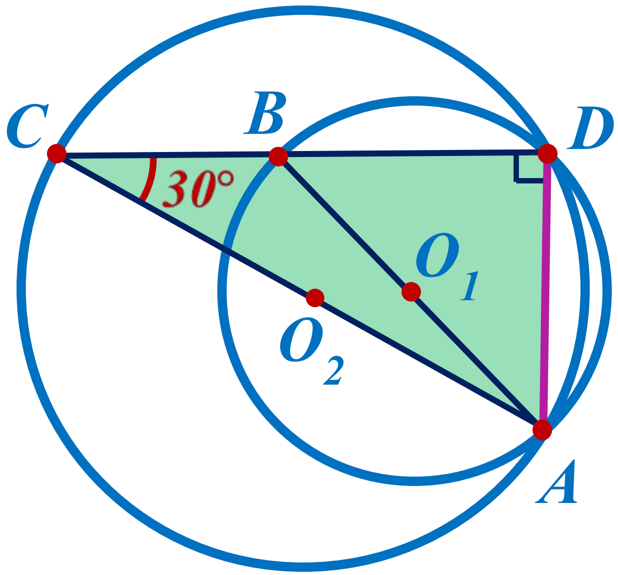
$\Delta\, ADB$: $\angle ADB = 90°$ =>

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{\frac{4}{3}t^2 + t^2} = t \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

По теореме синусов для $\Delta\, ABC$

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB}, \quad \frac{\sin A}{3t} = \frac{\frac{1}{2}}{t \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}},$$

$$\sin A = \frac{3\sqrt{21}}{14}.$$



2 случай. $D \in [CB)$.

Пусть $DB = t,\ CD = 2t\ \Rightarrow AB = t \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$.

По теореме синусов для $\Delta\, ABC$

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB}, \qquad \frac{\sin A}{t} = \frac{\frac{1}{2}}{t \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}},$$

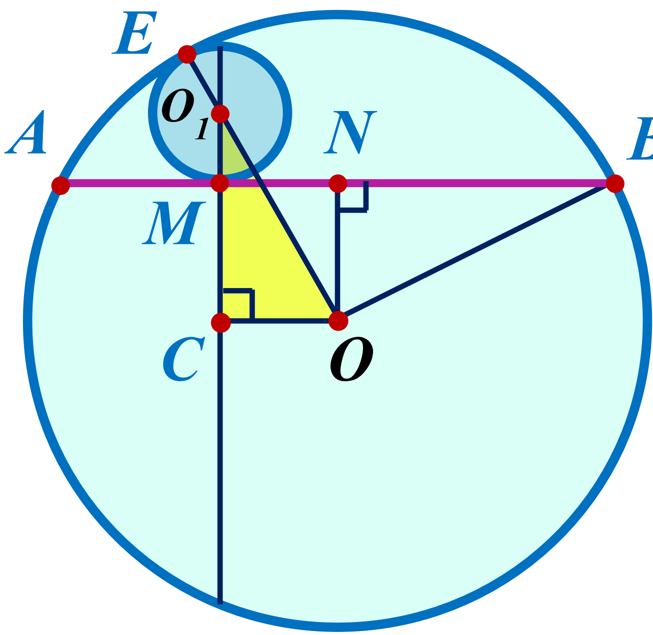
$$\sin A = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

Точка D не может лежать на продолжении отрезка BC за точку C, так как угол ACB – острый.

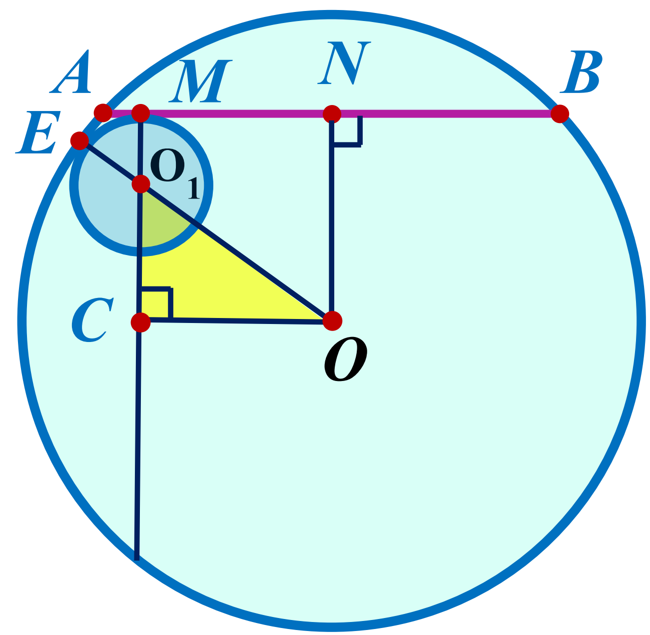
Ответ: $\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$ или $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

3.4 Расположение центров окружностей относительно хорды большей окружности

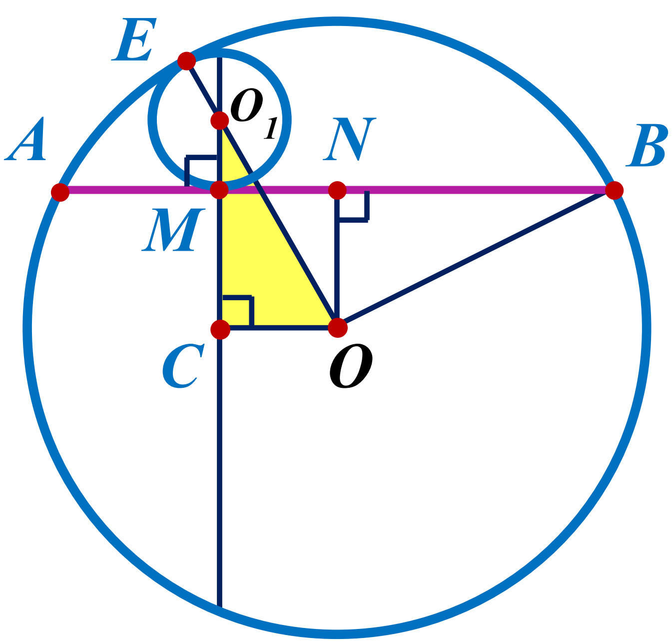
Пример 26. Окружности радиусов *20* и *3* касаются внутренним образом. Хорда *AB* большей окружности касается меньшей окружности в точке *M*. Найдите длины отрезков *AM* и *MB*, если *AB = 32*.



1 случай. Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды *AB*.



2 случай. Центры окружностей лежат по одну сторону от их общей хорды *AB*.



1 случай. Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды *AB*.

Решение. Пусть $N \in AB$, $AN = NB$.

$$\rho(O;AB) = ON = \sqrt{OB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 12.$$

$r_1 = O_1M = 3,\ \ O_1M \perp AB,\ OC \perp O_1M.$

$\Delta\, OO_1C$: $\angle OCO_1 = 90^\circ,\ \ OO_1 = 17,$

$O_1C = O_1M + MC = O_1M + ON = 15,$

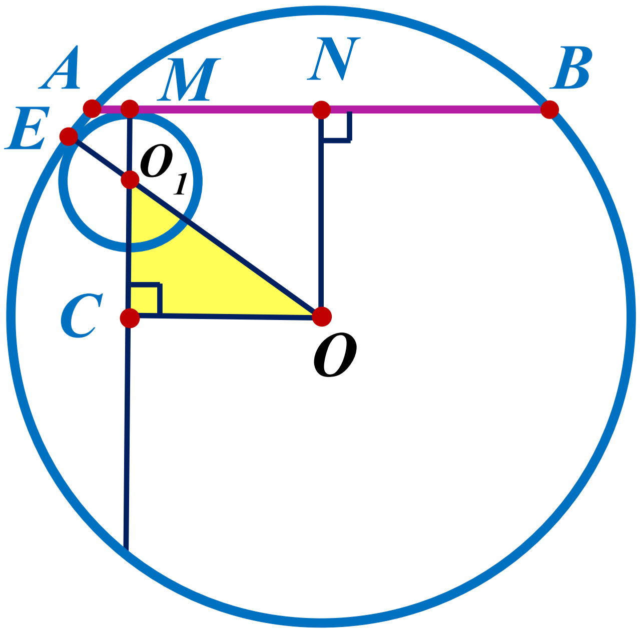
$OC = MN.$

$OC = \sqrt{OO_1^2 - O_1C^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8.$

$\underline{AM = AN - MN = 16 - 8 = 8}$

и

$\underline{MB = MN + NB = 8 + 16 = 24.}$



2 случай. Центры окружностей лежат по одну сторону от их общей хорды *AB*.

По теореме Пифагора для $\Delta\ OO_1C$ получаем

$$OC = \sqrt{OO_1^2 - O_1C^2} = \sqrt{17^2 - 9^2} = 4\sqrt{13}.$$

$$AM = AN - MN = 16 - 4\sqrt{13}$$

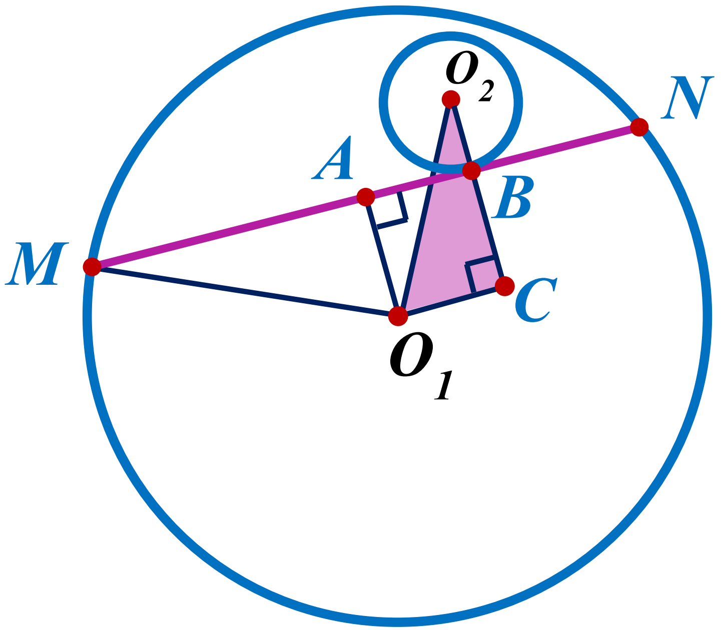
и

$$MB = MN + NB = 4\sqrt{13} + 16.$$

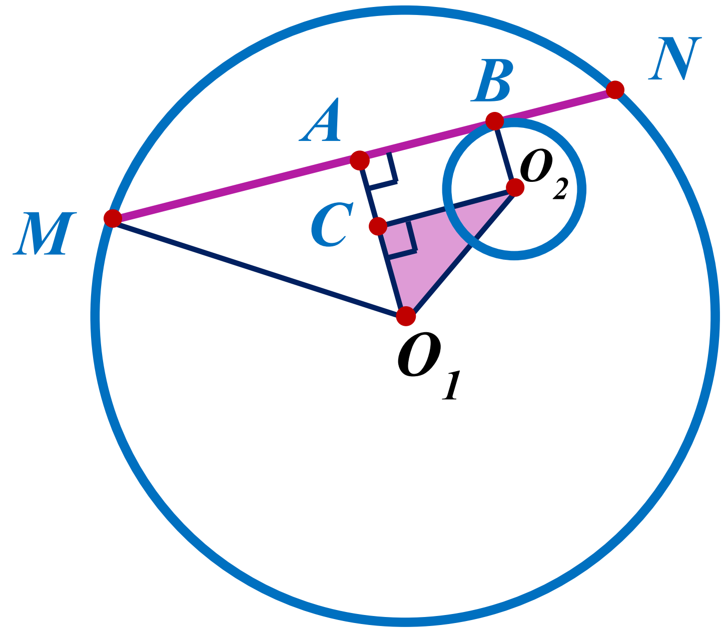
Замечание. *В данной задаче можно рассмотреть еще два случая, когда точка касания M расположена правее точки N. В этом случае ответы будут $AM = 24$ и $MB = 8$ или $AM = 16 + 4\sqrt{13}$ и $MB = 16 - 4\sqrt{13}$.*

Ответ: 24 и 8 или $16 + 4\sqrt{13}$ и $16 - 4\sqrt{13}$.

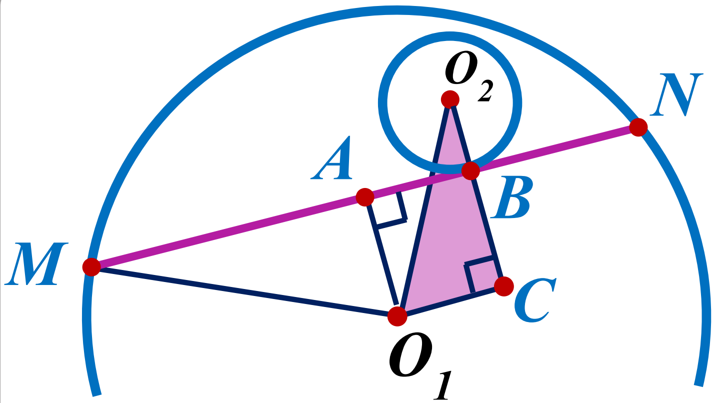
Пример 27. Расстояние между центрами двух окружностей равно $5r$. Одна из окружностей имеет радиус r , а вторая – $7r$. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении $1 : 6$. Найдите длину этой хорды.



1 случай. Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды *MN*.



2 случай. Центры окружностей лежат по одну сторону от их общей хорды *MN*.



1 случай. Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды *MN*.

Решение. Пусть $MN = 7x$.

$$\rho(O_1; MN) = O_1A = \sqrt{MO_1^{\,2} - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} =$$

$$= 7 \quad \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2},$$

$$AB = AN - NB = \frac{7x}{2} - x = \frac{5x}{2}.$$

$$\Delta\, O_1O_2C: \angle O_1CO_2 = 90^\circ,\ \ O_1O_2 = 5r,\ \ O_2B = r$$

$$O_2C = O_2B + BC = r + 7 \quad \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2},$$

$$O_1C = AB, \qquad O_1C^2 = O_1O_2^2 - O_2C^2.$$

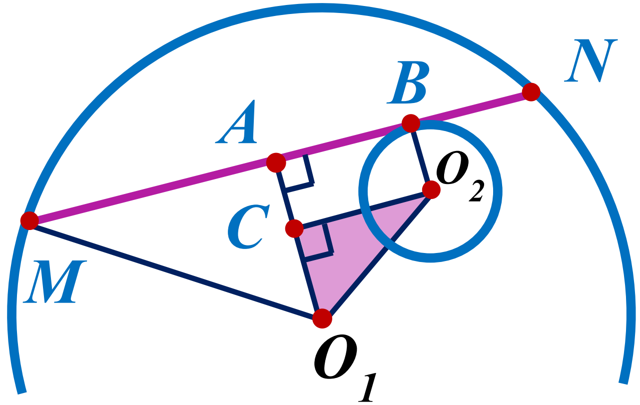
$$\frac{25x^2}{4} = 25r^2 - \left(r + 7 \quad \cdot \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}\right)^2,$$

$$6x^2 - 25r^2 = 14r \quad \cdot \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}},$$

$$\begin{cases} 36x^4 - 251x^2 \cdot r\ 2 + 429r^4 = 0, \\ 6x^2 - 25r^2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = r\sqrt{3}, \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{143}}{6}r, \end{array}\right. \\ 6x^2 - 25r^2 \geq 0. \end{cases} \quad \varnothing.$$

Такой случай невозможен.



2 случай. Центры окружностей лежат по одну стороны от их общей хорды MN.

Решение. Пусть $MN = 7x$.

$$\rho(O_1; MN) = O_1A = \sqrt{MO_1^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} =$$

$$= 7 \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2},$$

$$AB = AN - NB = \frac{7x}{2} - x = \frac{5x}{2}.$$

$$\Delta\, O_1O_2C: \angle O_1CO_2 = 90°,\ O_1O_2 = 5r,\ O_2B = r$$

$$O_1C = AO_1 - AC = 7 \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} - r,$$

$$O_2C = AB,$$

$$O_2C^2 = O_1O_2^2 - O_1C^2.$$

$$\frac{25x^2}{4} = 25r^2 - \left(7 \cdot \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} - r\right)^2,$$

$$25r^2 - 6x^2 = 14r \cdot \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}},$$

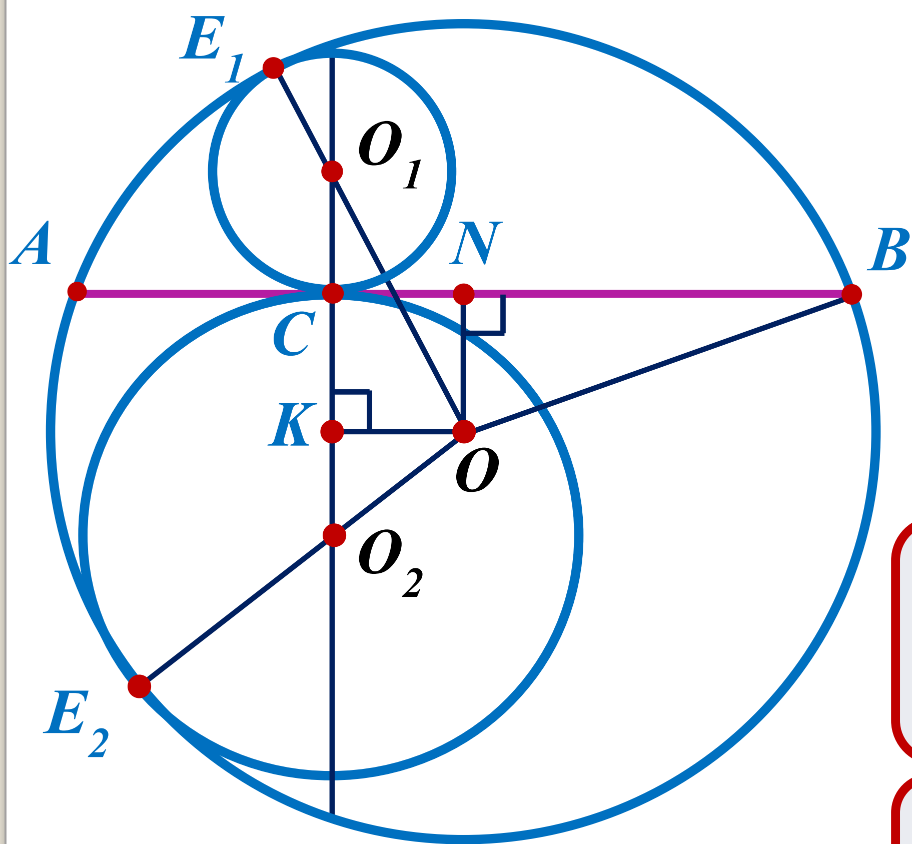
$$\begin{cases} 36x^4 - 251x^2 \cdot r^2 + 429r^4 = 0, \\ 25r^2 - 6x^2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = r\sqrt{3}, \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{143}}{6}r, \end{array}\right. \\ 6x^2 - 25r^2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} MN = 7\sqrt{3}r, \\ MN = \dfrac{7\sqrt{143}}{6}r. \end{array}\right.$$

Ответ: $7\sqrt{3}r$ и $\dfrac{7\sqrt{143}}{6}r$.

Пример 28. (ЕГЭ, 2010). В окружности, радиус которой равен *15*, проведена хорда $AB = 24$. Точка C лежит на хорде AB так, что $AC : BC = 1 : 2$. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.

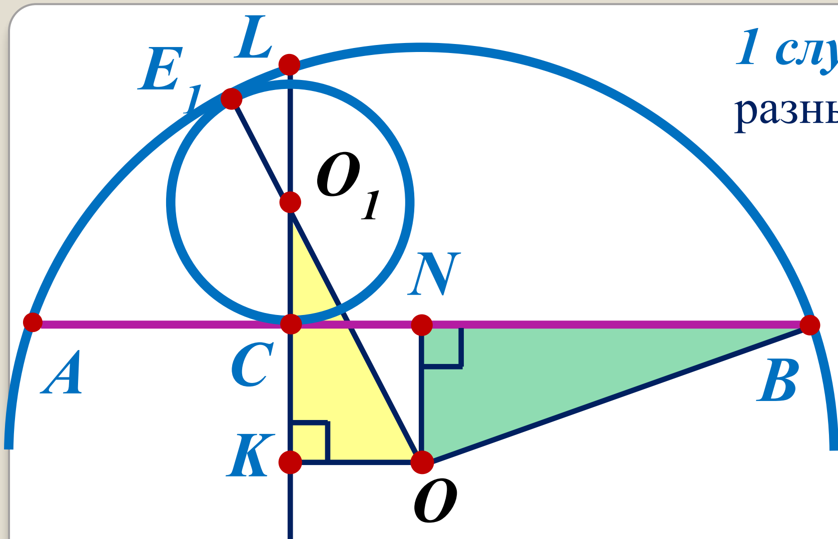


1 случай. Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AB.

2 случай. Центры окружностей лежат по одну сторону от их общей хорды AB.

Центры этих окружностей $\boldsymbol{O_1}$ и $\boldsymbol{O_2}$ будут лежать на перпендикуляре к хорде $\boldsymbol{AB}$, проходящем через точку $\boldsymbol{C}$.

При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.



1 случай. Центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды *AB*.

Решение. Пусть $N \in AB$, $AN = NB$.

$AC : BC = 1 : 2 \Rightarrow AC = 8$.

$\Delta\, ONB : \angle ONB = 90^\circ,\ OB = 15,\ NB = 12$

$$= \sqrt{OB^2 - NB^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$$

Пусть $K \in LL_1$, $LK = KL_1$, $LL_1 \perp AB$,

$C \in LL_1$.

Четырехугольник $KCNO$ – прямоугольник,

$OK = CN = AN - AC = 12 - 8 = 4.$

Пусть $O_1E_1 = r$.

$O_1 \in OE_1 \Rightarrow OO_1 = OE_1 - O_1E_1 = 15 - r.$

$\Delta\, KOO_1 : \angle OKO_1 = 90^\circ,\ OK = 4,$

$OO_1 = 15 - r,$

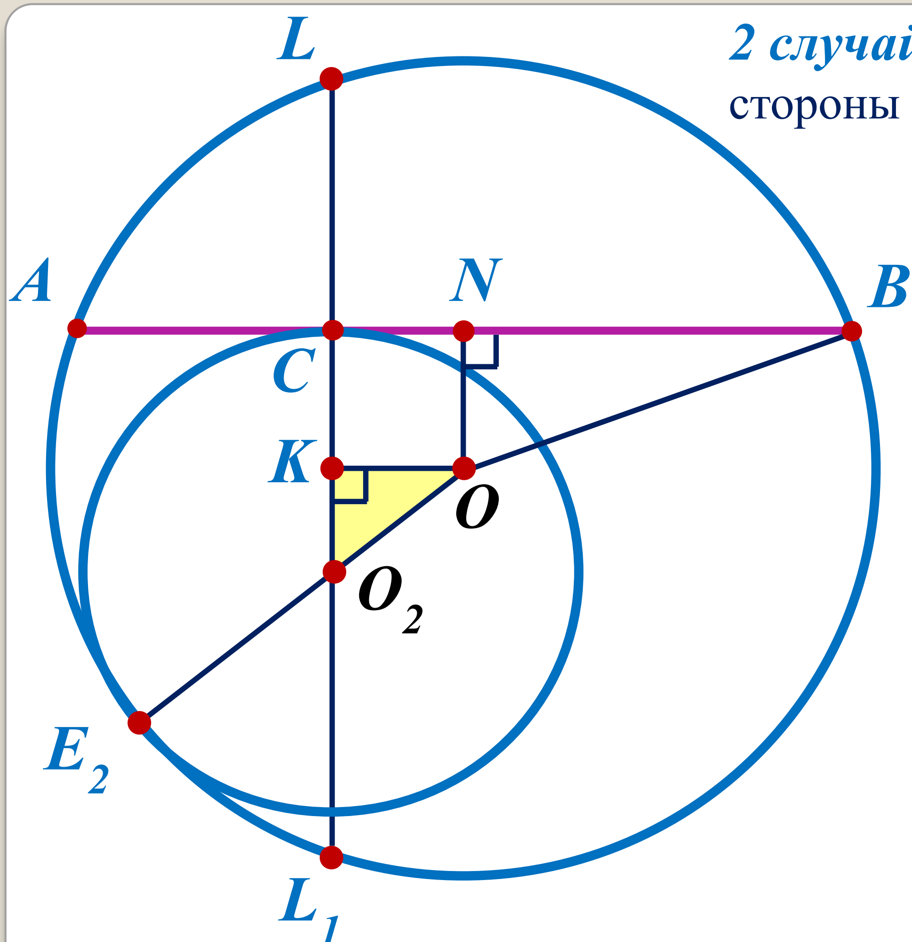
$KO_1 = KC + CO_1 = 9 + r \Rightarrow$

$OO_1^2 = OK^2 + KO_1^2.$

$(15 - r)^2 = 4^2 + (9 + r)^2.$

$r = \dfrac{8}{3}.$

2 случай. Центры окружностей лежат по одну стороны от их общей хорды *AB*.



$$\Delta KOO_2 : \angle OKO_2 = 90°, \ \ OK = 4,$$

$$OO_2 = 15 - r,$$

$$KO_2 = CO_2 - KC = r - 9 \Rightarrow$$

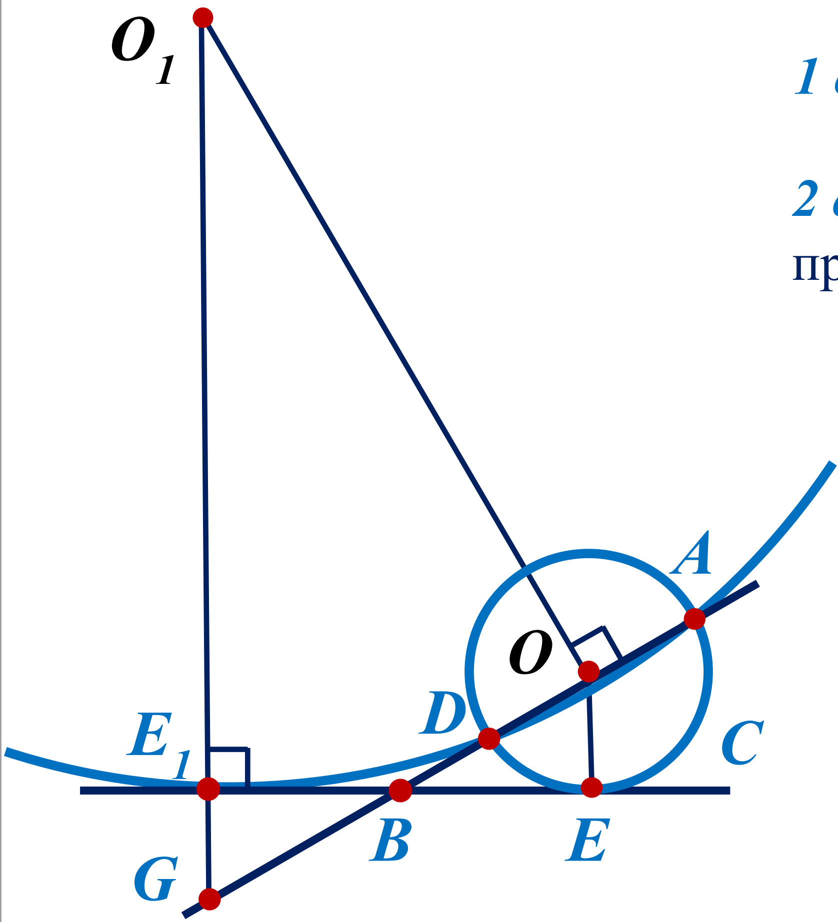
$$OO_2^2 = OK^2 + KO_2^2.$$

$$(15 - r)^2 = 4^2 + (r - 9)^2.$$

$$r = \frac{32}{3}.$$

Ответ: $\frac{8}{3}$ и $\frac{32}{3}$.

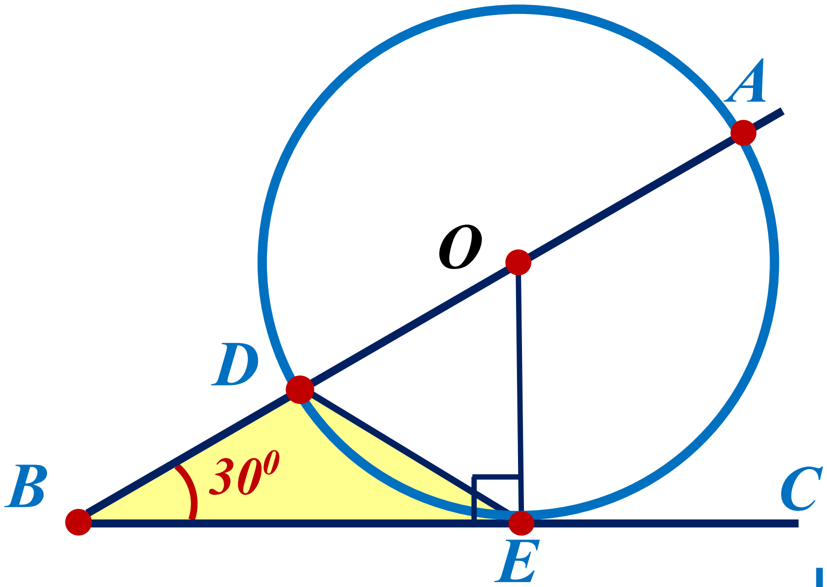
Пример 29. На стороне BA угла ABC, равного $30°$, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D касающейся прямой BC.



1 случай. Окружность касается луча BC.

2 случай. Точка касания E_1 лежит на продолжении луча BC за точку B.

Центр искомой окружности $\boldsymbol{O}$ – точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку $\boldsymbol{AD}$ и перпендикуляра к прямой $\boldsymbol{BC}$, восставленного из точки касания $\boldsymbol{E}$ окружности и прямой.



1 случай. Окружность касается луча ***BC***.

BE – касательная к окружности,
BA – секущая,
BD –внешняя часть секущей.

По теореме о касательной и секущей

$$BE^2 = BD \cdot AB = 1 \cdot 3 = 3,$$

$$BE = \sqrt{3}.$$

Так как $BD = DE \Rightarrow \Delta BDE$ – равнобедренный и $\angle BED = 30°$.

$\angle BDE$ – угол между касательной и хордой $\Rightarrow \smile DE = 60° \Rightarrow R = DE = 1$.

$\Delta BDE: \angle DBE = 30°, BD = 1,$

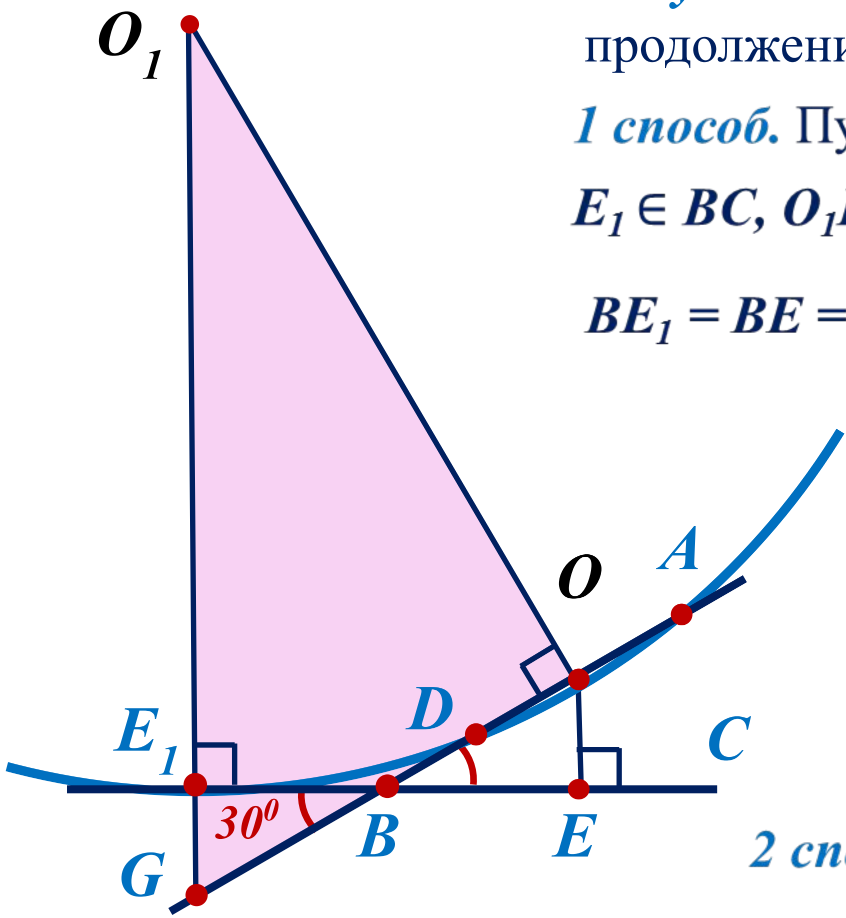
$NB = 12, BE = \sqrt{3}.$

По теореме косинусов получаем

$$DE^2 = DB^2 + BE^2 - 2 \cdot DB \cdot BE \cdot \cos(\angle ABE) = 1,$$

т.е. $DE = 1$.

Тогда центр ***O*** окружности совпадает с серединой отрезка ***AD***.



2 случай. Точка касания E_1 лежит на продолжении луча *BC* за точку *B*.

1 способ. Пусть O_1 – центр искомой окружности, $E_1 \in BC$, $O_1E_1 \perp BC$, а $G = O_1E_1 \cap AD$.

$BE_1 = BE = \sqrt{3}$, $\angle GBE_1 = 30°$, $\angle O_1GO = 60°$

$BG = 2$, $GE_1 = 1$, $GO = 2 + 2 = 4$,

$GO_1 = 8$, $OO_1 = 4\sqrt{3}$.

$O_1E_1 = 8 - 1 = 7$,

$O_1D = O_1A = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 1} = 7.$

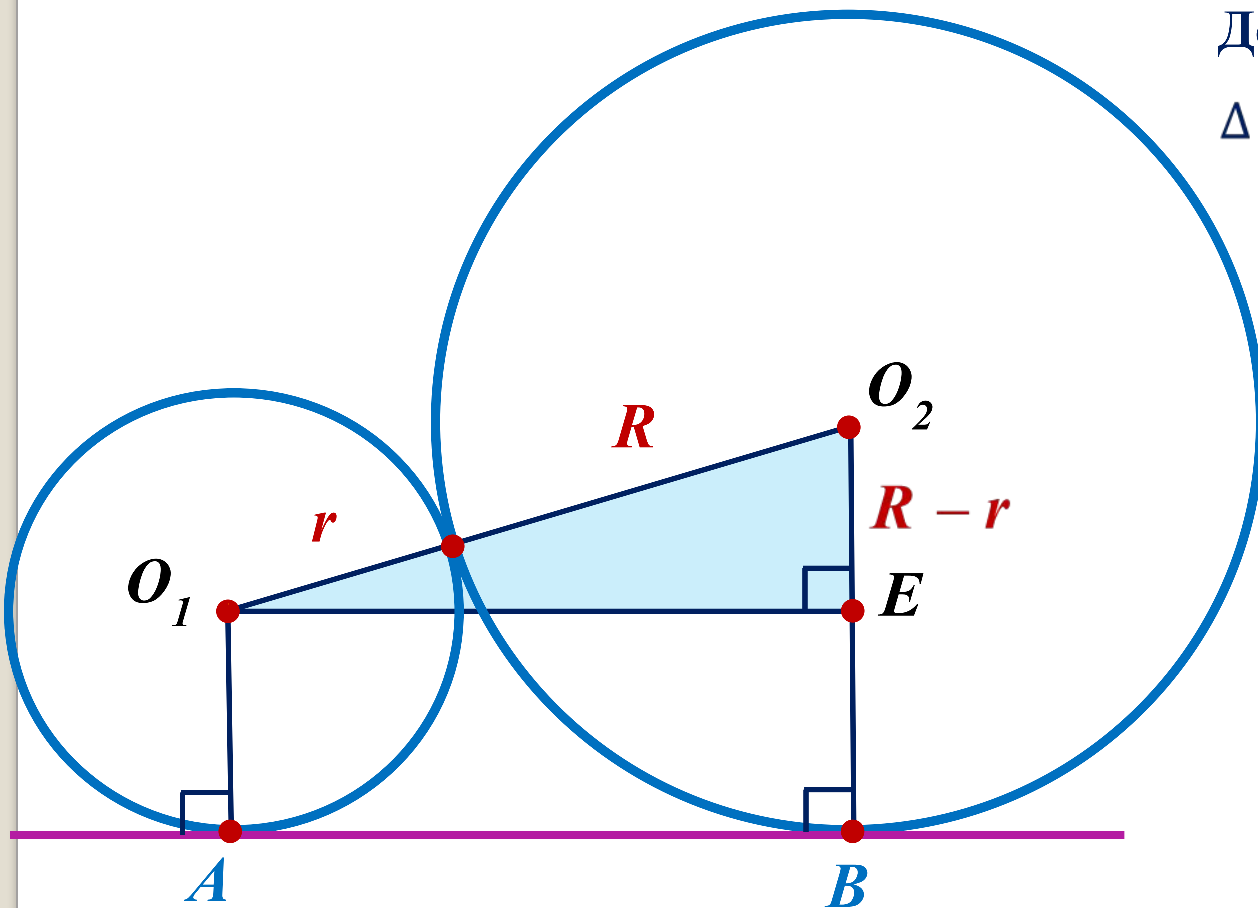
2 способ. $\Delta\, GO_1O : \angle GOO_1 = 90°$,

$\angle O_1GO = 60°$, $GO = 4$, $GE_1 = 1$,

$R = GO_1 - GE_1 = 8 - 1 = 7.$

Ответ: *1* или *7*.

Опорная задача. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен $2\sqrt{Rr}$.



AB – отрезок общей внешней касательной

Доказательство.

$\Delta\, O_1O_2E : \angle\, O_1EO_2 = 90°,$

$O_1O_2 = R + r,$

$EO_2 = R + r,$

$AB = O_1E =$

$= \sqrt{O_1O_2^2 - EO_2^2} =$

$= \sqrt{(R + r)^2 + (R - r)^2} =$

$= 2\sqrt{Rr}$ ■

Пример 30. Окружности радиусов *4* и *9* касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Найдите радиус окружности, касающейся каждой из двух данных и той же прямой.

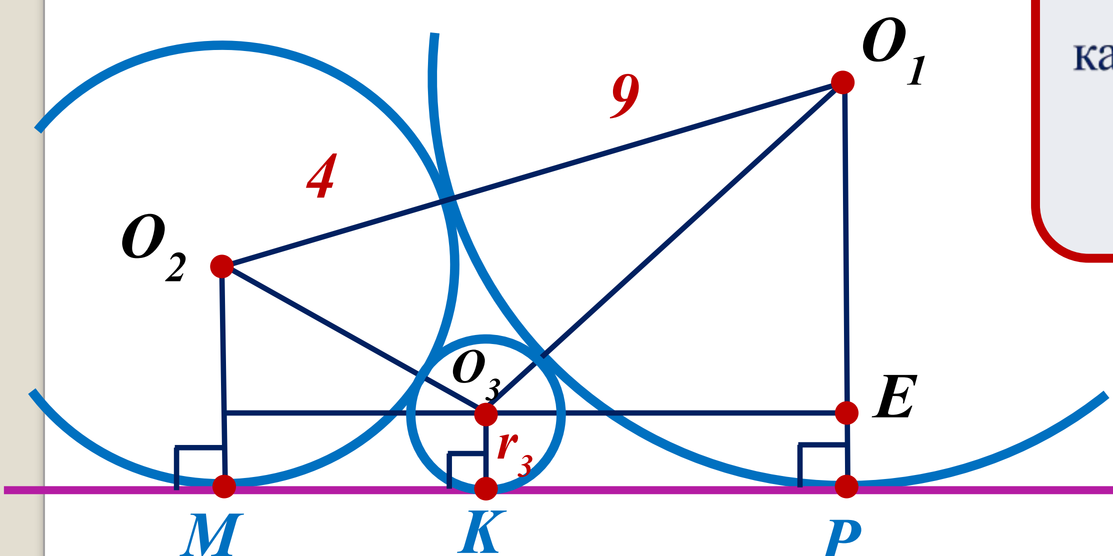
Перебор вариантов в задаче зависит от расположения точки касания третьей окружности с прямой относительно точек касания первых двух окружностей с этой прямой.

Решение.

1 случай.

$MP = MK + KP.$

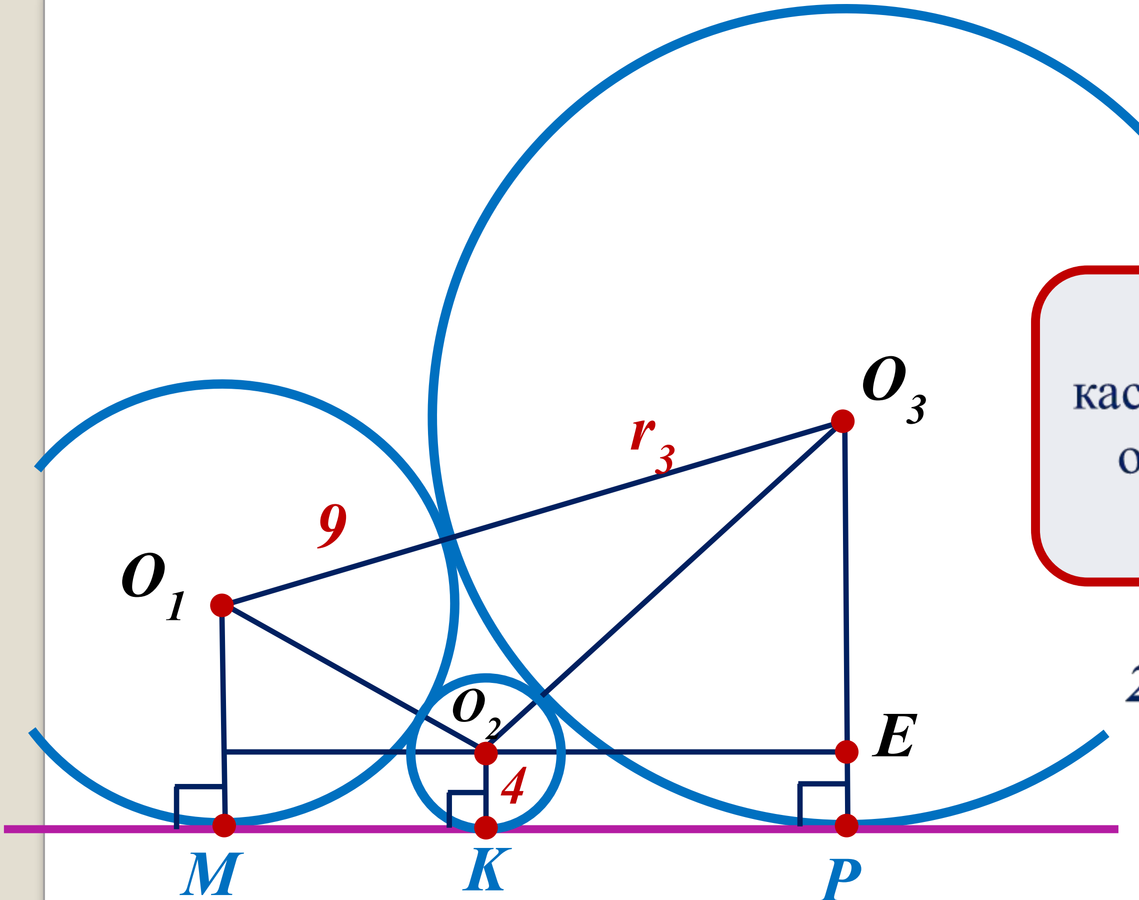
Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен $2\sqrt{Rr}$.



$$2\sqrt{4\cdot 9} = 2\sqrt{4\cdot r_3} + 2\sqrt{9\cdot r_3},$$

$$6 = 2\sqrt{r_3} + 3\sqrt{r_3},$$

$$r_3 = 1{,}44.$$



Решение.

2 случай.

$MP = MK + KP.$

Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен $2\sqrt{Rr}$.

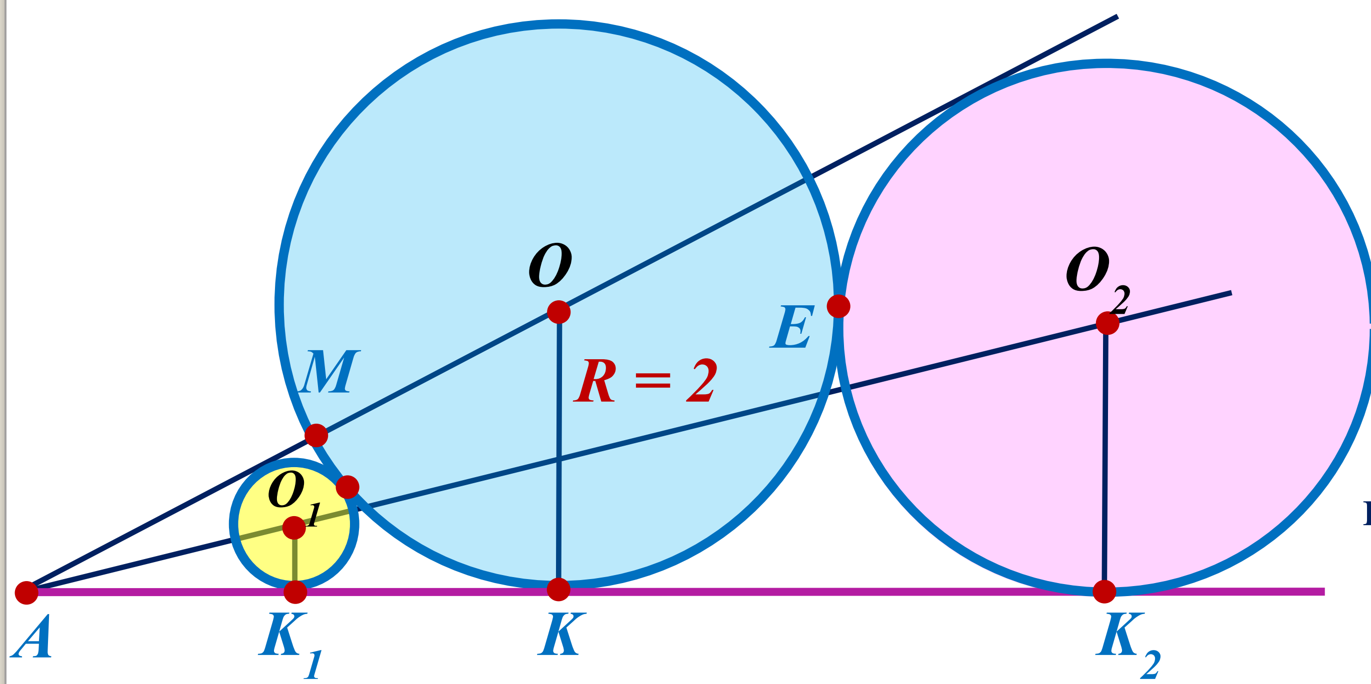
$$2\sqrt{r_3 \cdot 9} = 2\sqrt{4 \cdot 9} + 2\sqrt{4 \cdot r_3},$$

$$3\sqrt{r_3} = 6 + 2\sqrt{r_3},$$

$$r_3 = 36.$$

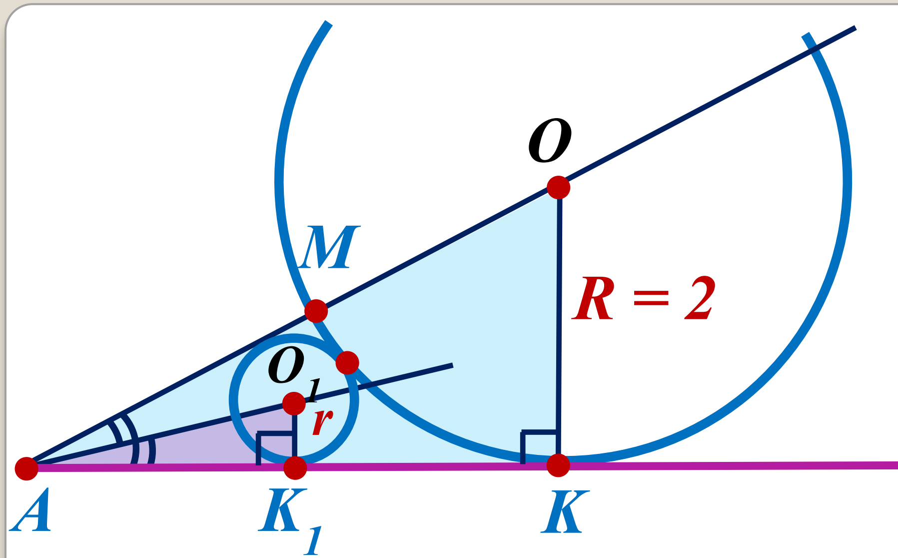
Ответ: $1{,}44$ **или** $36.$

Пример 31. Точка O – центр окружности радиуса 2. На продолжении радиуса OM взята точка A. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Известно, что $\angle OAK = 60°$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.



1 случай.
Точка касания искомой ***окр.*** с ***AK*** левее точки касания ***K***.

2 случай.
Точка касания искомой ***окр.*** с ***AK*** правее точки касания ***K***.



1 случай. Точка касания искомой ***окр.*** с ***AK*** левее точки касания ***K***.

Решение.

Центр O_1 искомой окружности лежит на биссектрисе угла A =>

$=> \angle O_1AK_1 = 30°, AK = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

KK_1 – отрезок внешней касательной окружностей.

$\Delta AK_1O_1: \angle AK_1O_1 = 90°,$

$AK_1 = r \cdot ctg30° = r\sqrt{3},$

где $r = O_1K_1.$

$KK_1 = 2\sqrt{OK \cdot O_1K_1} = 2\sqrt{2r}.$

$AK = AK_1 + K_1K,$

$\frac{2}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3} + 2\sqrt{2r}.$

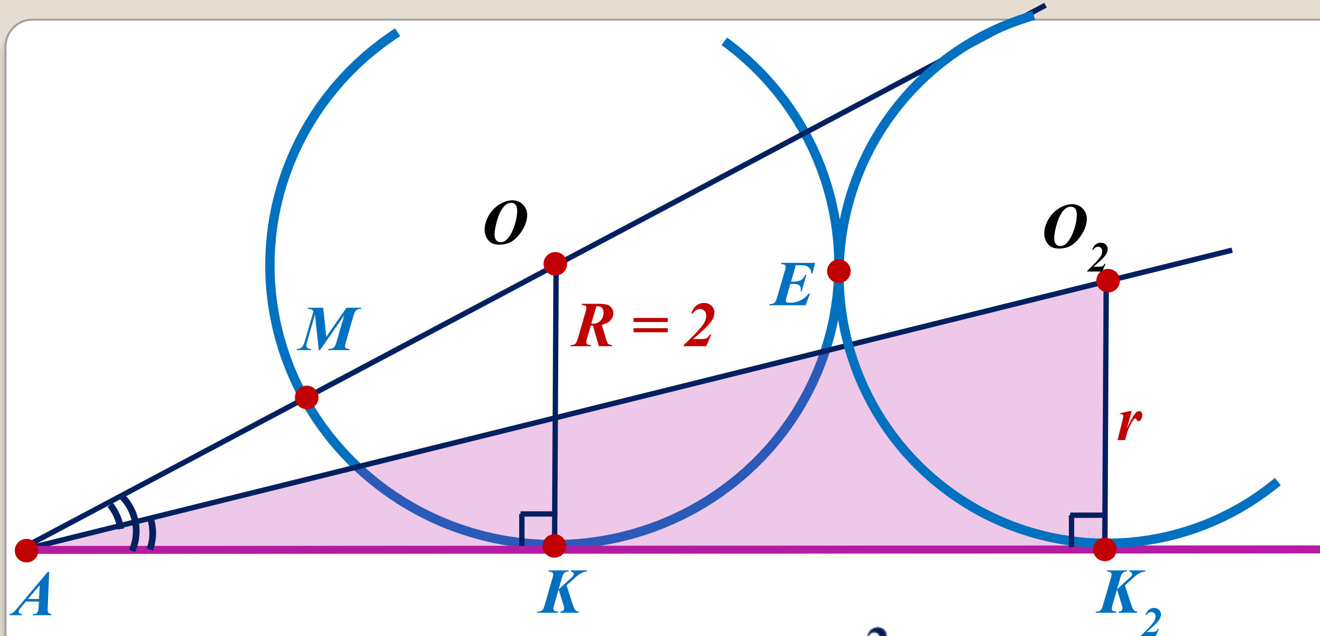
$3t^2 + 2\sqrt{6}\,t - 2 = 0,$

где $t = \sqrt{r}.$

$t = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{3} > 0.$

$r = \left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{3}\right)^2,$

$r = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{3}.$



2 случай.

Точка касания искомой ***окр.*** с ***AK*** правее точки касания ***K***.

$\Delta AK_2O_2: \angle AK_2O_2 = 90°,$

$AK_2 = r \cdot ctg30° = r\sqrt{3},$

где $r = O_2K_2.$

$KK_2 = 2\sqrt{OK \cdot O_2K_2} = 2\sqrt{2r}.$

$AK_2 = AK + KK_2,$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{2r} = r\sqrt{3}.$$

$3t^2 - 2\sqrt{6}\,t - 2 = 0,$

где $t = \sqrt{r}.$

$$t = \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{3} > 0.$$

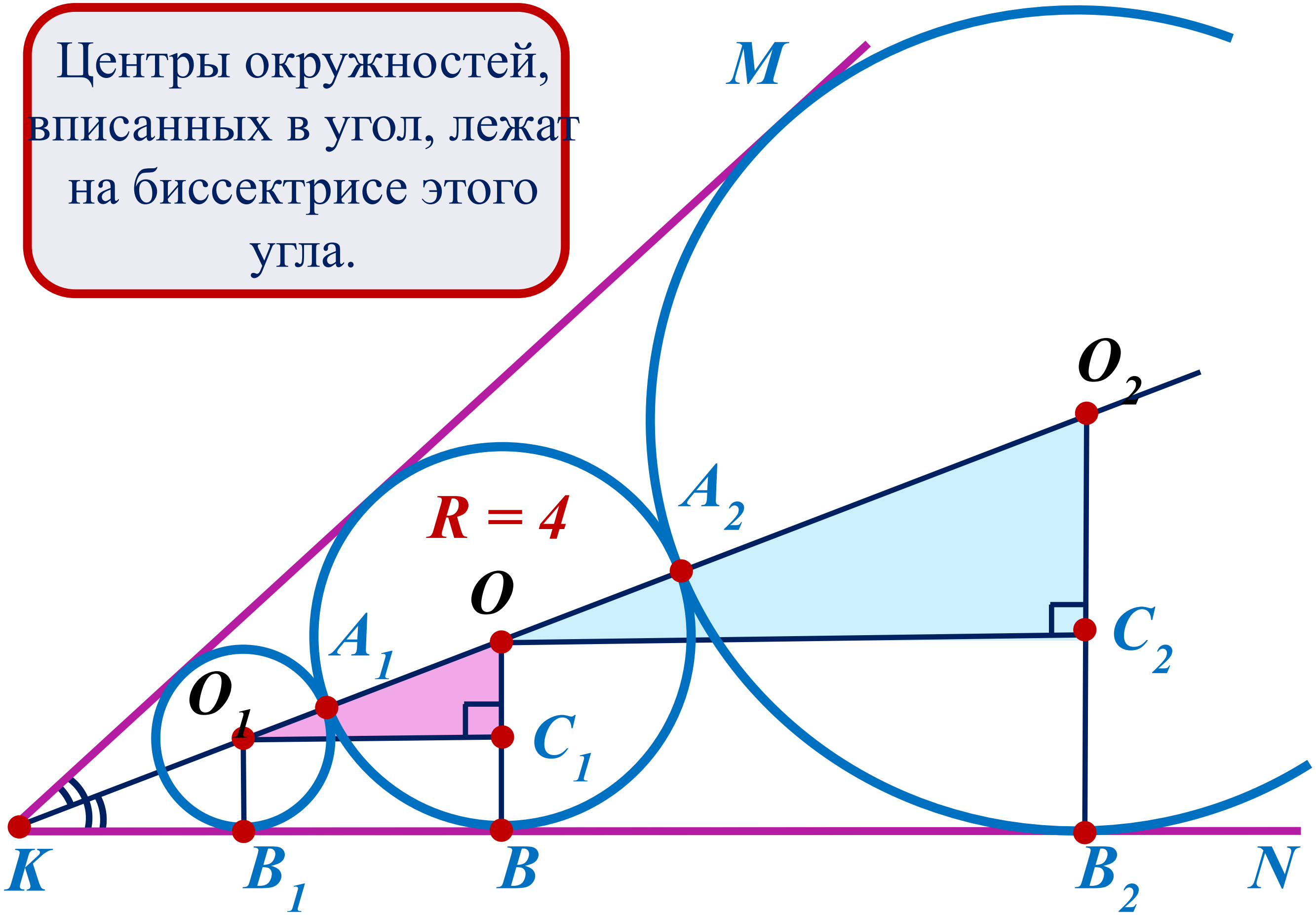
$$r = \left(\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}\right)^2,$$

$$r = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{6 \pm 4\sqrt{2}}{3}.$

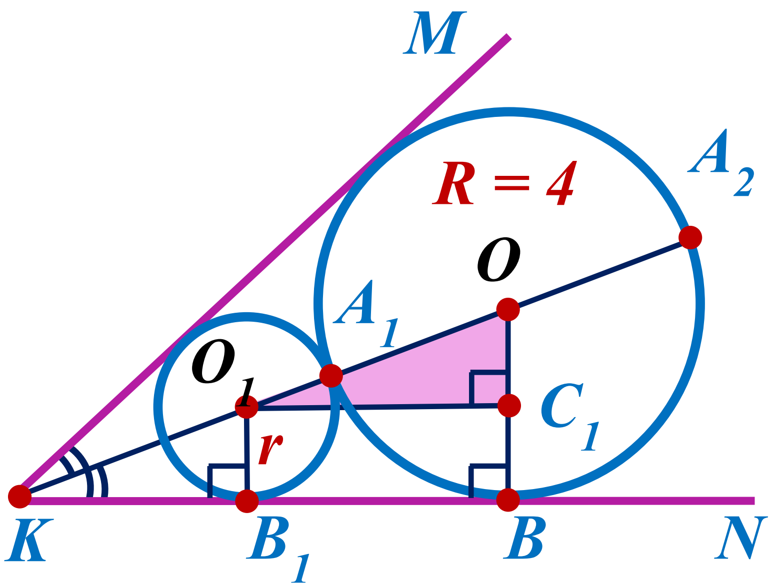
Пример 32. Найдите радиус окружности, вписанной в угол *MKN* равный $2\arcsin 0{,}6$ и касающейся окружности, радиуса *4* также вписанной в угол *MKN*.

Центры окружностей, вписанных в угол, лежат на биссектрисе этого угла.



1 случай. Точка касания искомой ***окр.*** с ***KN*** левее точки касания ***B***.

2 случай. Точка касания искомой ***окр.*** с ***KN*** правее точки касания ***B***.



1 случай. Точка касания искомой ***окр.*** с KN левее точки касания B

Решение.

Центр O_1 искомой окружности лежит на биссектрисе угла MKN =>

=> $\angle O_1KN = \angle OKN = \arcsin 0{,}6$.

$O_1B_1 \perp KN$, а $KN = r$, $O_1C_1 \perp OB$.

$OB \perp KN$, а $KN = R = 4$.

$\Delta\, OC_1O_1 : \angle OC_1O_1 = 90°$,

$OO_1 = 4 + r$, $OC_1 = 4 - r$.

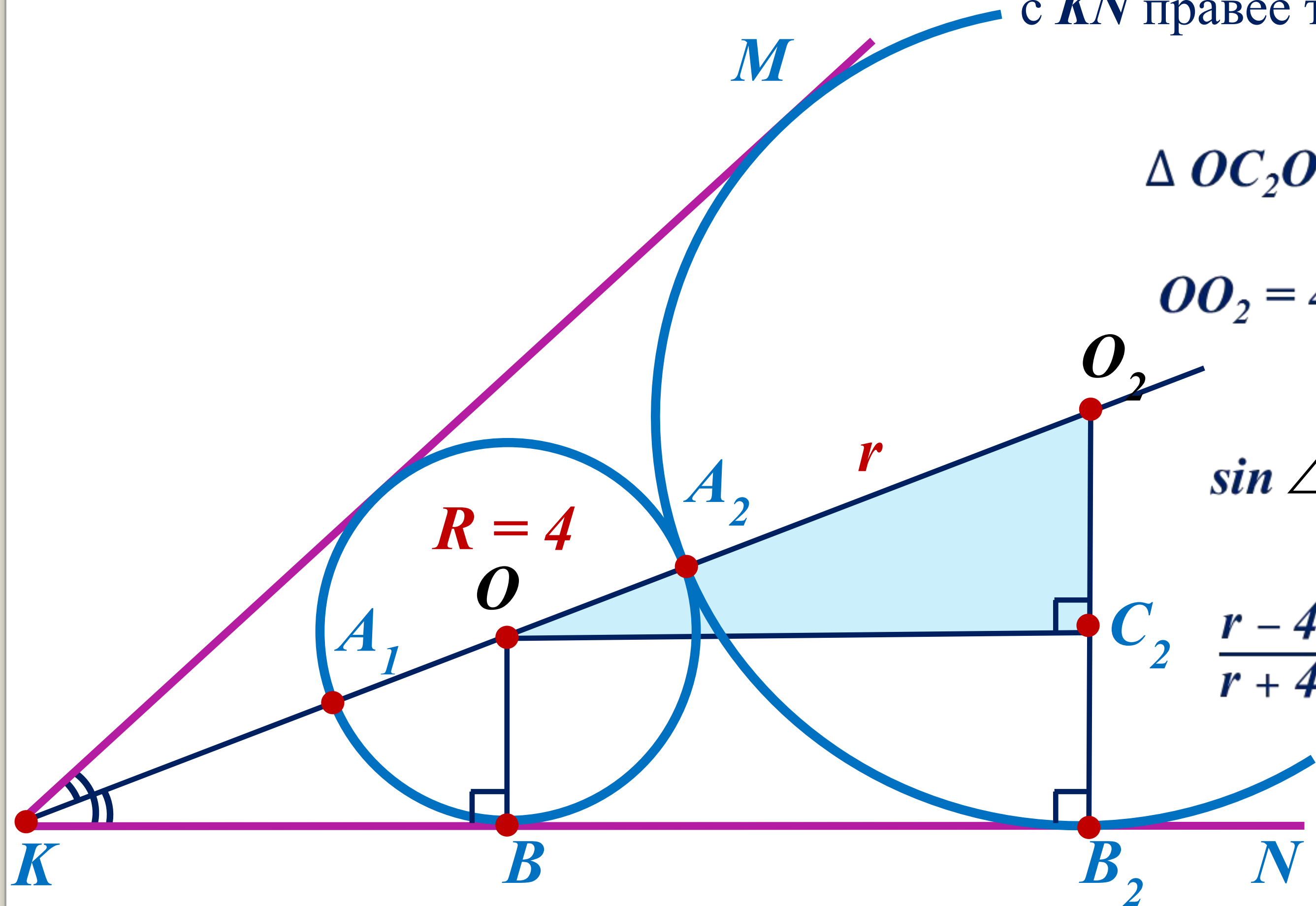
$\sin\angle OKN = \dfrac{OC_1}{OO_1}$.

$\dfrac{4-r}{4+r} = \sin(\arcsin 0{,}6)$,

$\dfrac{4-r}{4+r} = 0{,}6.$

$r = 1.$

2 случай. Точка касания искомой ***окр.*** с ***KN*** правее точки касания ***B***



$\Delta OC_2O_2 : \angle OC_2O_2 = 90°,$

$OO_2 = 4 + r, \; OC_2 = 4 - r.$

$\sin \angle OKN = \dfrac{OC_2}{OO_2}.$

$\dfrac{r-4}{r+4} = \sin(\arcsin 0{,}6),$

$\dfrac{r-4}{r+4} = 0{,}6.$

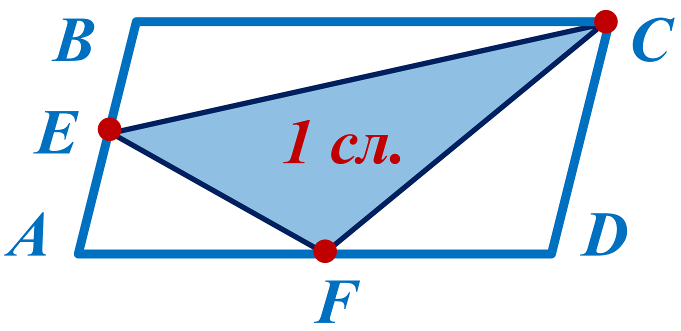
$r = 16.$

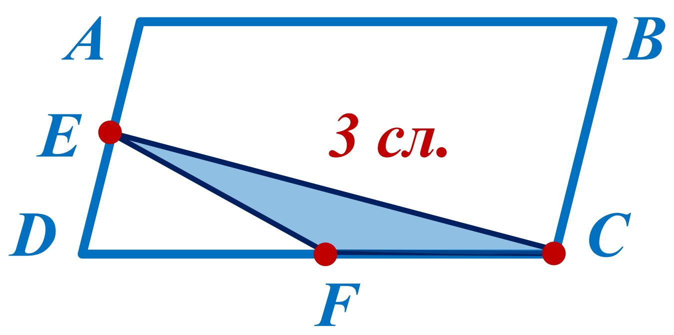
Ответ: *1* и *16*.

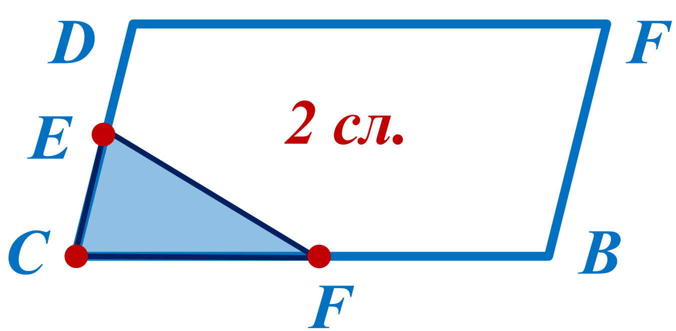
4. Взаимное расположение элементов фигуры

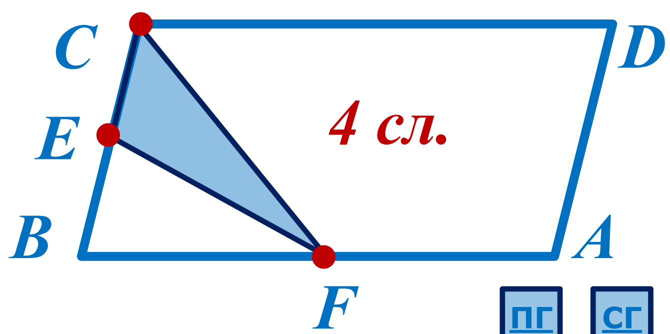
4.1 Выбор обозначений вершин многоугольника

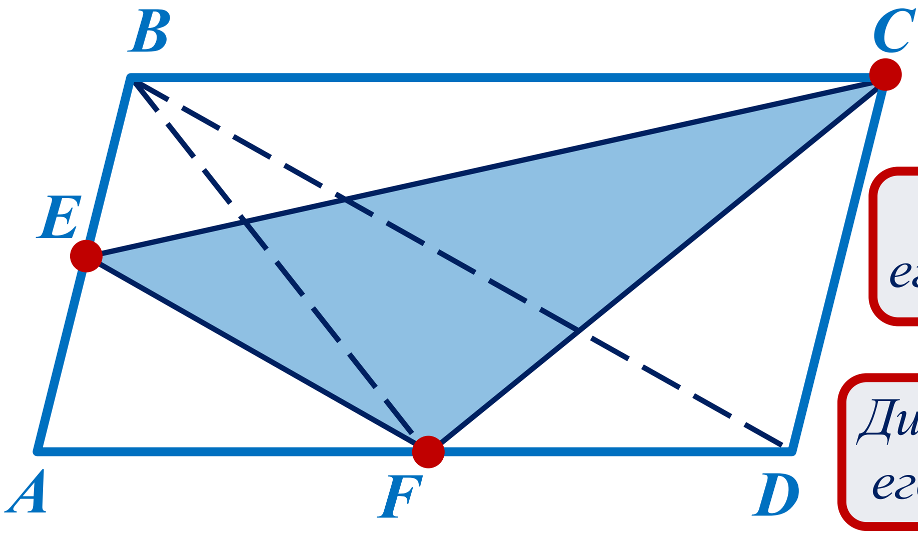
Пример 33. В параллелограмме $ABCD$ один из углов равен $60°$. Точки E и F являются серединами смежных сторон, образующих острый угол. Площадь треугольника, отсекаемого прямой EF от параллелограмма $ABCD$, равна S. Найдите площадь треугольника, вершинами которого служат точки E, F и C.











Решение. *1 случай*

Медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.

Диагональ параллелограмма разбивает его на два равновеликих треугольника.

$$S_{ABCD} = 8S_{EFC} = 8S$$

$$S_{ECF} = S_{ABCD} - S_{AEF} - S_{FDC},$$

$$S_{ECF} = 8S - S - \frac{1}{2}S_{ABC} - \frac{1}{2}S_{ADC},$$

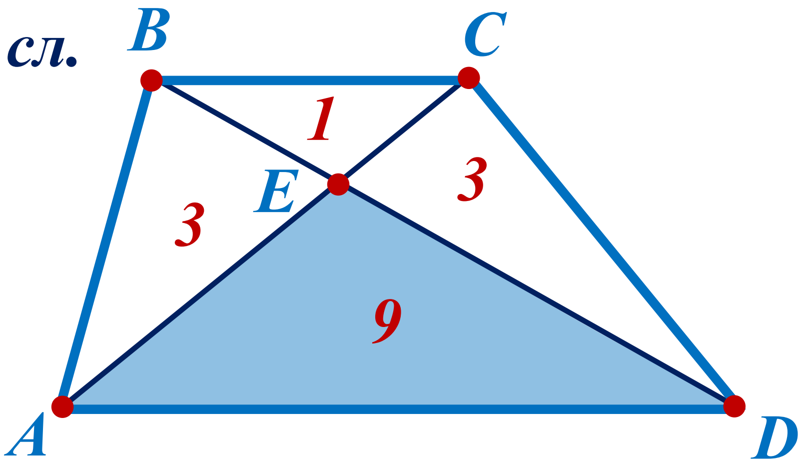
$$S_{ECF} = 8S - S - 2S - 2S = \underline{3S.}$$

В остальных 3-х случаях искомая площадь будет равна S.

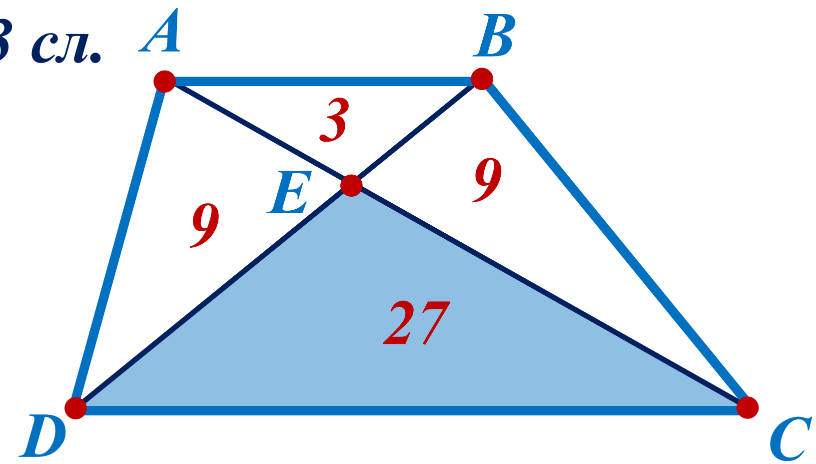
Ответ: S или $3S$.

Пример 34. Диагонали *AC* и *BD* трапеции *ABCD* пересекаются в точке *E*. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника *AED* равна *9*, а точка *E* делит одну из диагоналей в отношении *1 : 3*.

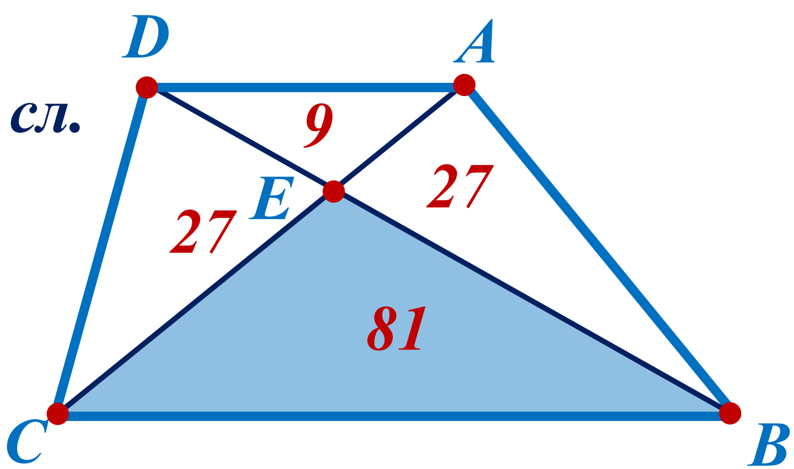
1 сл.



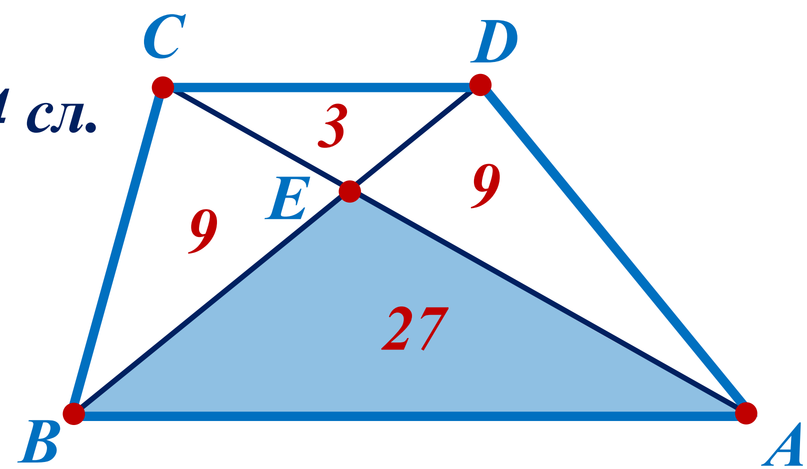
3 сл.

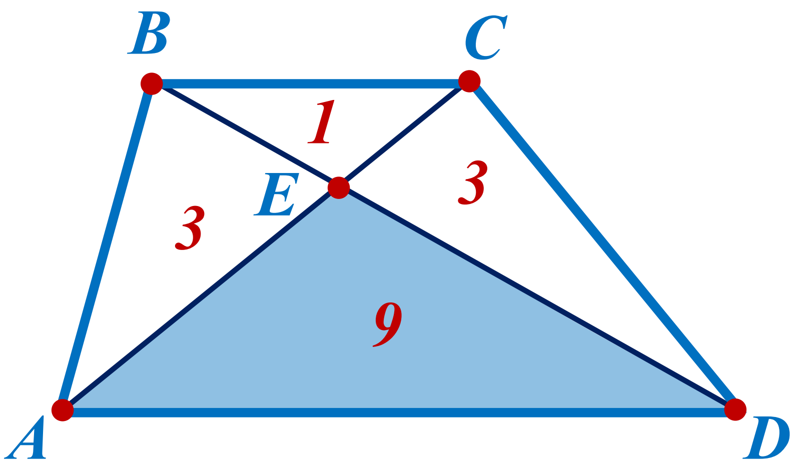


2 сл.



4 сл.





Решение. *1 случай*

$BD \cap AC = E,\ BE : ED = 1 : 3.$

Трапеция разбивается диагоналями на два равновеликих треугольника (примыкающих к боковым сторонам) и два подобных треугольника (примыкающих к основаниям).

$\Delta\, BEC \sim \Delta\, AED$ по двум углам

$$=> k = \frac{EC}{AE} = \frac{1}{3} \quad => \frac{S_{AED}}{S_{ACD}} = 3^2 = 9.$$

Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.

$$S_{BEC} = \frac{S_{AED}}{9} = 1.$$

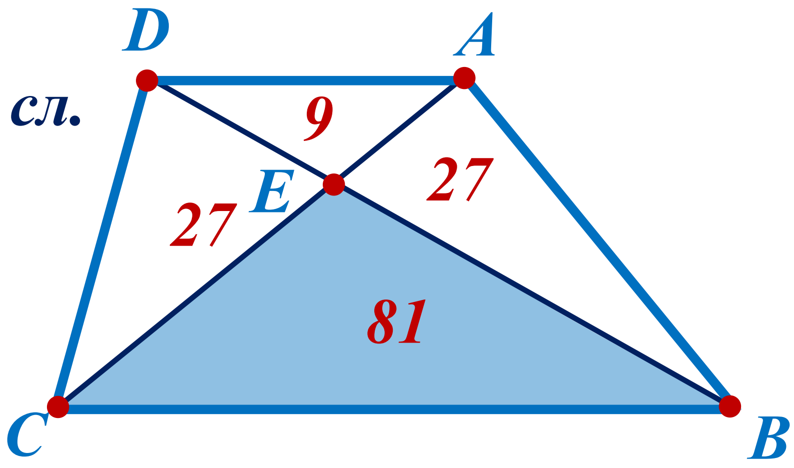
h_B – общая высота $\Delta\, ABE$ и $\Delta\, BEC$

$$=> \frac{S_{ABE}}{S_{BEC}} = \frac{AE}{EC} = 3.$$

$$S_{ABE} = 3 \cdot S_{BEC} = 3.$$

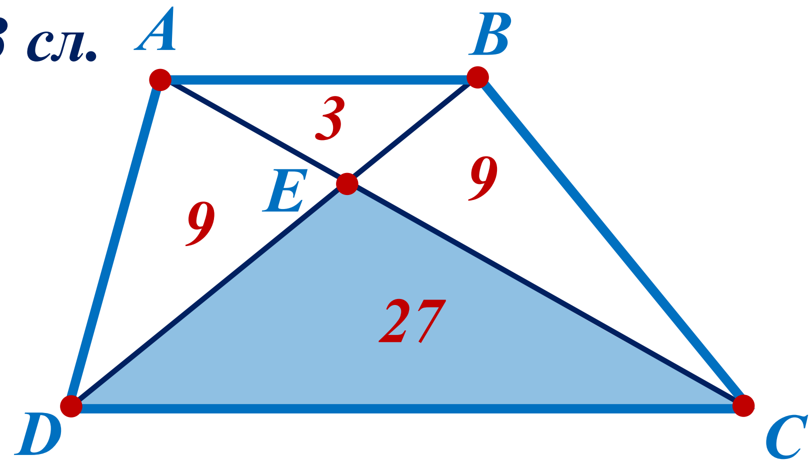
$$S_{ABCD} = 1 + 3 + 3 + 9 = \underline{16.}$$

2 сл.



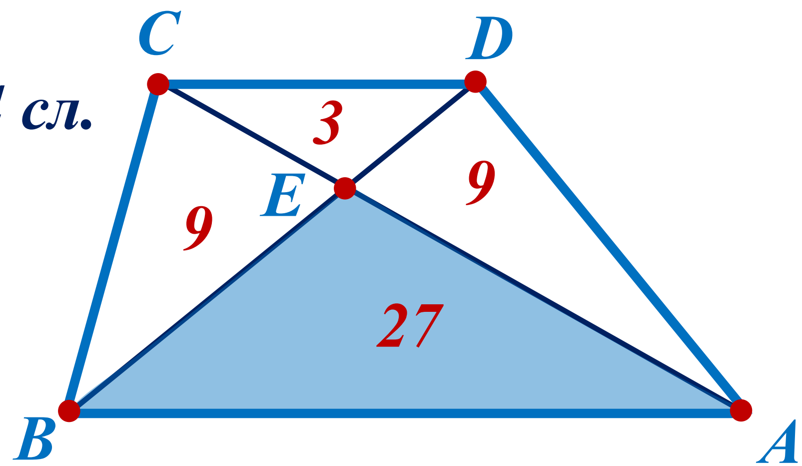
$S_{ABCD} = 9 + 27 + 27 + 81 = \underline{144.}$

3 сл.



$S_{ABCD} = 9 + 9 + 3 + 27 = \underline{48.}$

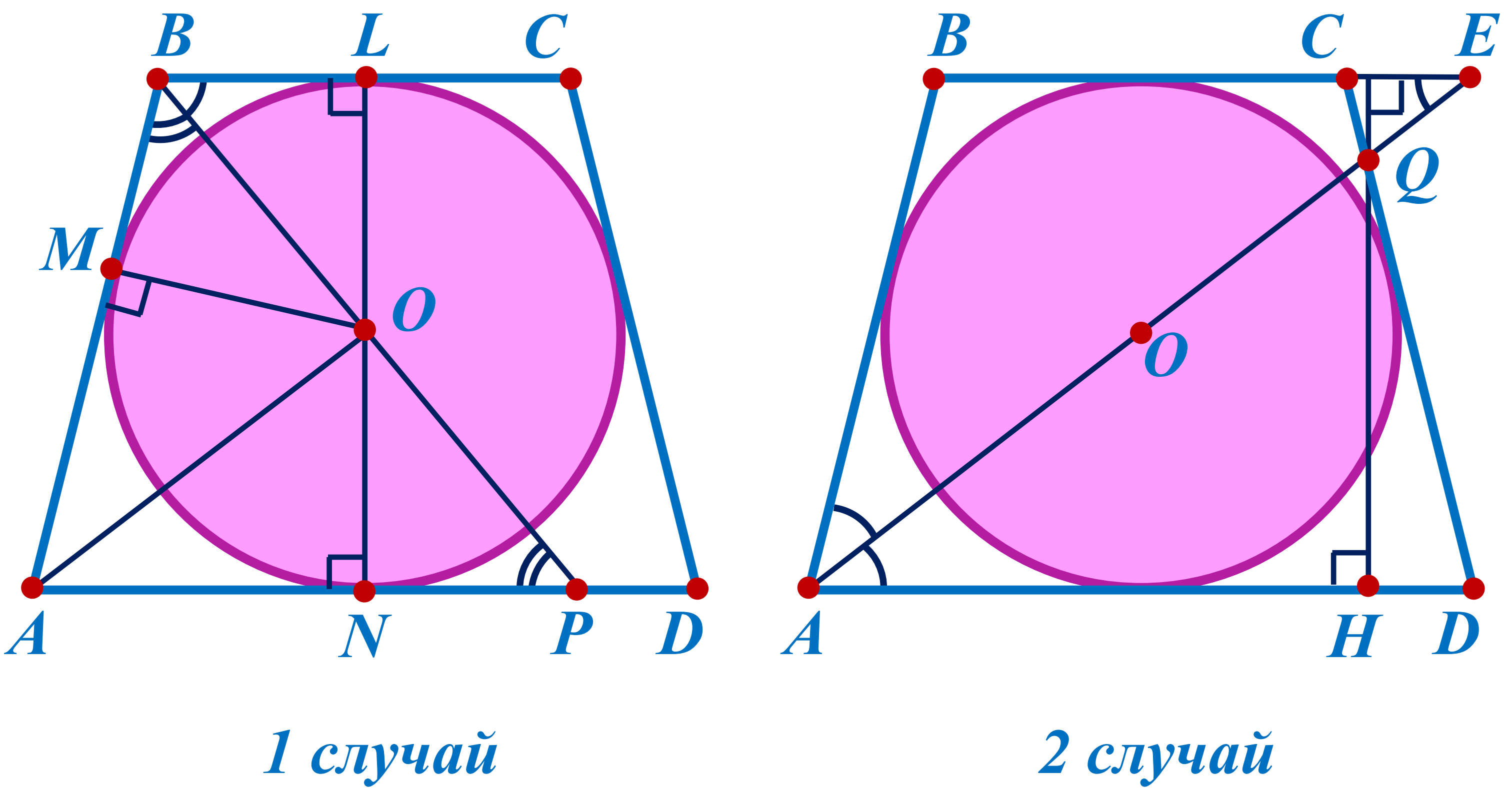
4 сл.

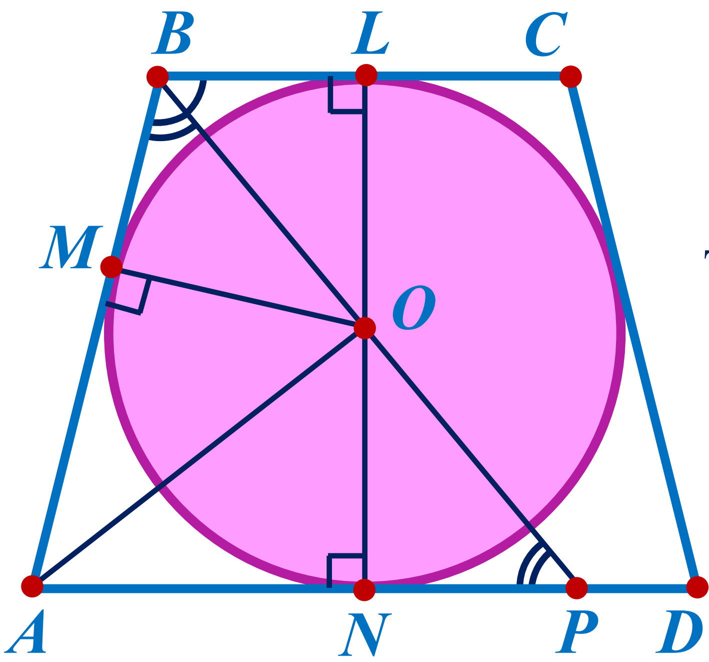


$S_{ABCD} = 9 + 9 + 3 + 27 = \underline{48.}$

Ответ: *16; 48; 144.*

Пример 35. (ЕГЭ-2011). Периметр равнобедренной трапеции равен *136*. Известно, что в эту трапецию можно вписать окружность, причем боковая сторона делится точкой касания в отношении *9 : 25*. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найти отношение площади этого треугольника к площади трапеции.





Решение. *1 случай*

По свойству описанного четырёхугольника

$$AB + CD = BC + AD = 68.$$

Трапеция – равнобедренная, то $AB = CD = 34$.

Пусть M, L и N – точки касания окружности боковой стороны AB и основания BC и AD соответственно => $AM = 25$, $MB = 9$.

$$LN \perp BC,\ LN \perp AD,\ BL = LC,\ AN = ND.$$

$MB = BL$ и $AM = AN$ (отрезки касательных, проведенные из одной точки), то $BC = 2BL = 18$,

$AD = 2AN = 50$.

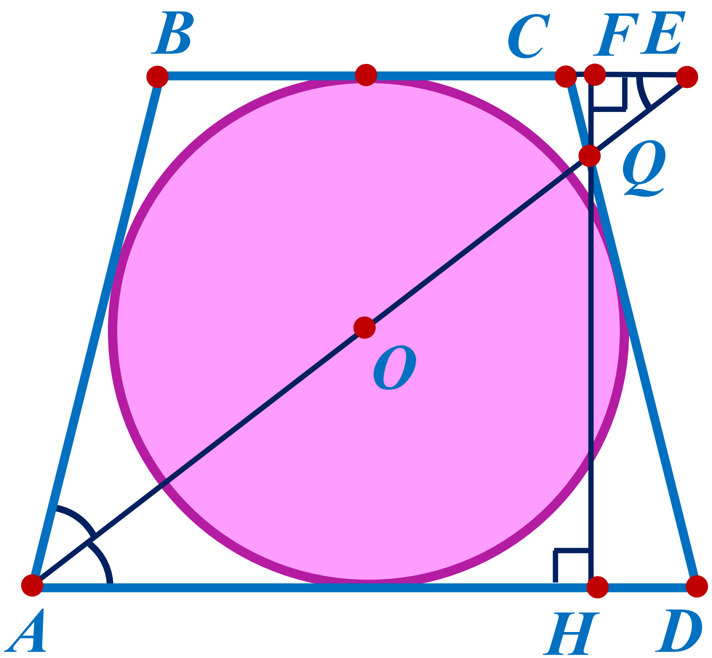
$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = 34h.$$

1 случай. Пусть $BO \cap AD = P$.

$$\Delta\, OBL = \Delta\, NOP \Rightarrow BL = NP = 9.$$

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot (AN + NP) \cdot h = 17h.$$

$$S_{ABP} : S_{ABCD} = \frac{1}{2}.$$



Решение. *2 случай*

Пусть $AO \cap BC = E$, $AO \cap CD = Q$.

$\angle BEA = \angle BAE = \angle EAD$ =>

=> ΔABE – равнобедренный, $AB = BE = 34$.

$$CE = BE - BC = 16.$$

$$\Delta AQD \sim \Delta EQC, \quad k = \frac{CE}{AD} = \frac{QF}{QH} = \frac{8}{25}.$$

$QF + QH = h$ =>

=> $QH = \dfrac{25}{33} h$.

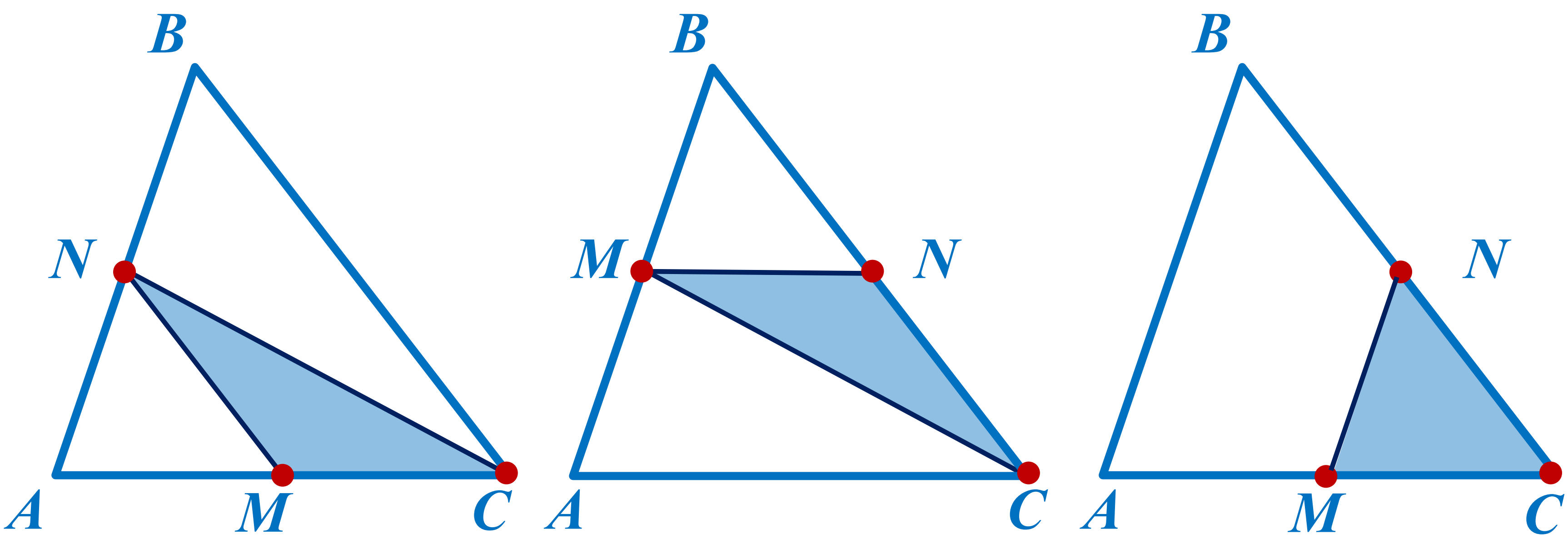
$$S_{AQD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{25}{33} h = \frac{625}{33} h.$$

$$S_{AQD} : S_{ABCD} = \frac{625}{33 \cdot 34} = \underline{\frac{625}{1122}}.$$

Поскольку трапеция равнобедренная, то для прямых, проходящих через вершины *C* и *D* получатся такие же результаты.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$ или $\dfrac{625}{1122}$.

Пример 36. Площадь треугольника *ABC* равна 8. *MN* – средняя линия. Найдите площадь треугольника *CMN*.



1 случай

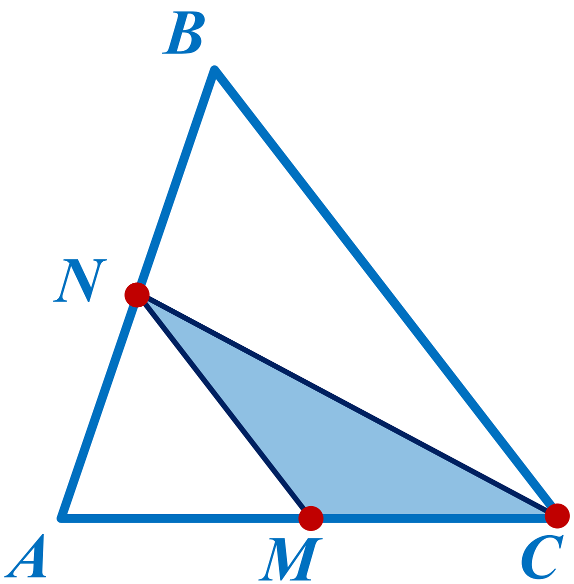
$MN \parallel BC$

2 случай

$MN \parallel AC$

3 случай

$MN \parallel AB$



1 случай. $MN \parallel BC$

Решение.

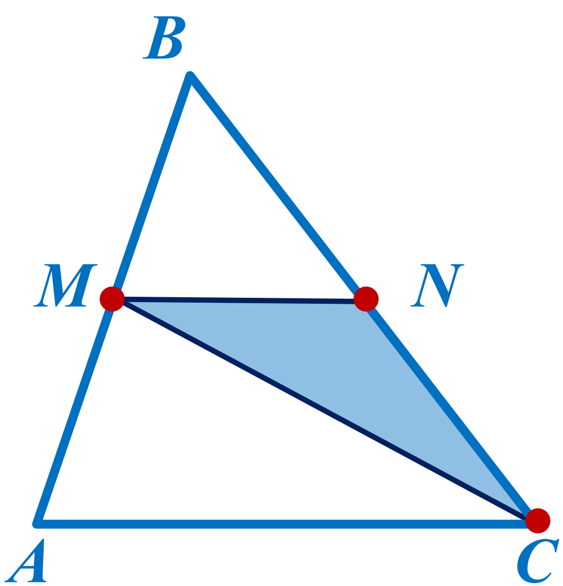
Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие, отсекает от него треугольник, подобный данному.

CN – медиана $\Delta\ ABC$ =>

$$S_{ANC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4.$$

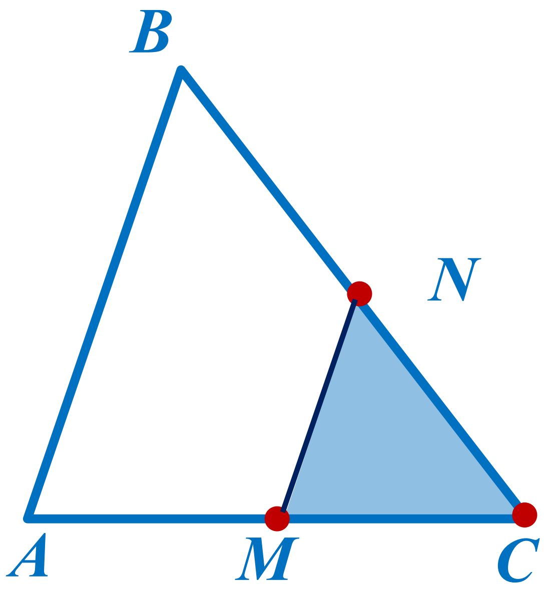
MN – медиана $\Delta\ AMC$ =>

$$S_{CMN} = \frac{1}{2} S_{AMC} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$



2 случай. $MN \parallel AC$

$$S_{CMN} = \frac{1}{2} S_{BMC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2.$$



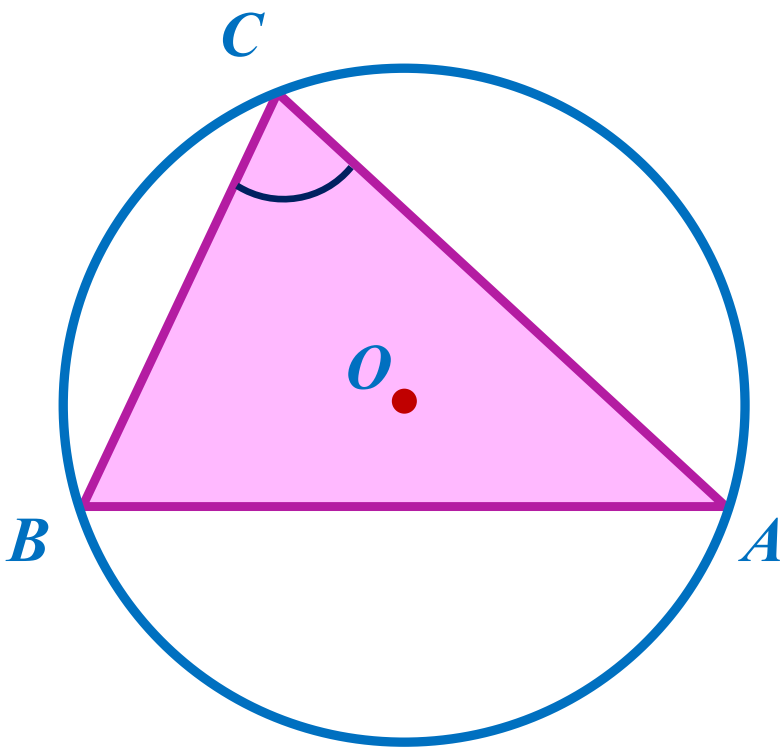
3 случай. $MN \parallel AB$

$\Delta\, CMN \sim \Delta\, ABC$ по *2* признаку

$$S_{CMN} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2.$$

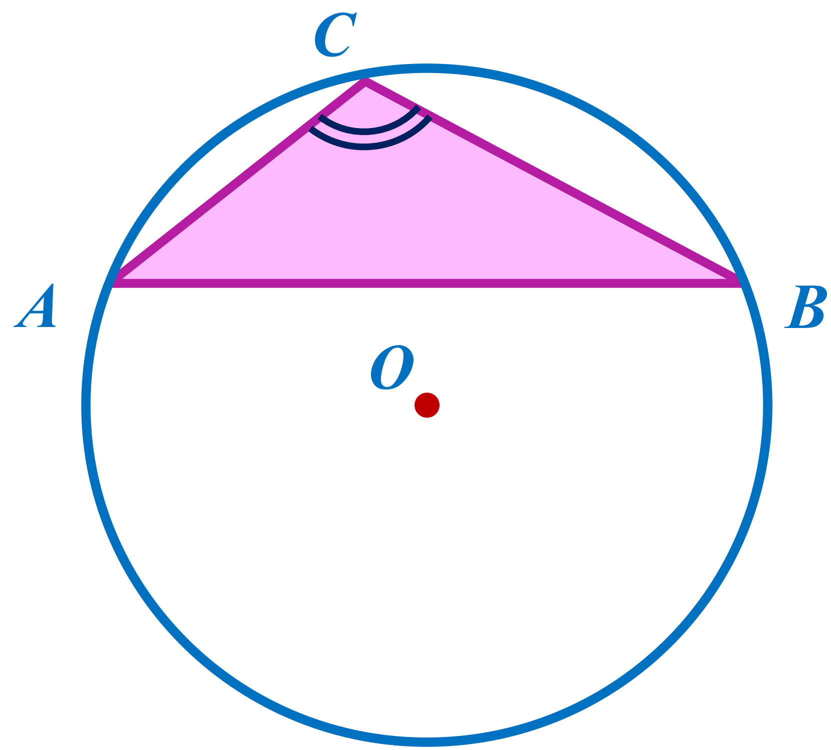
Ответ: *2.*

Пример 37. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12. Известно, что $AB = 6$ и $BC = 4$. Найдите AC.



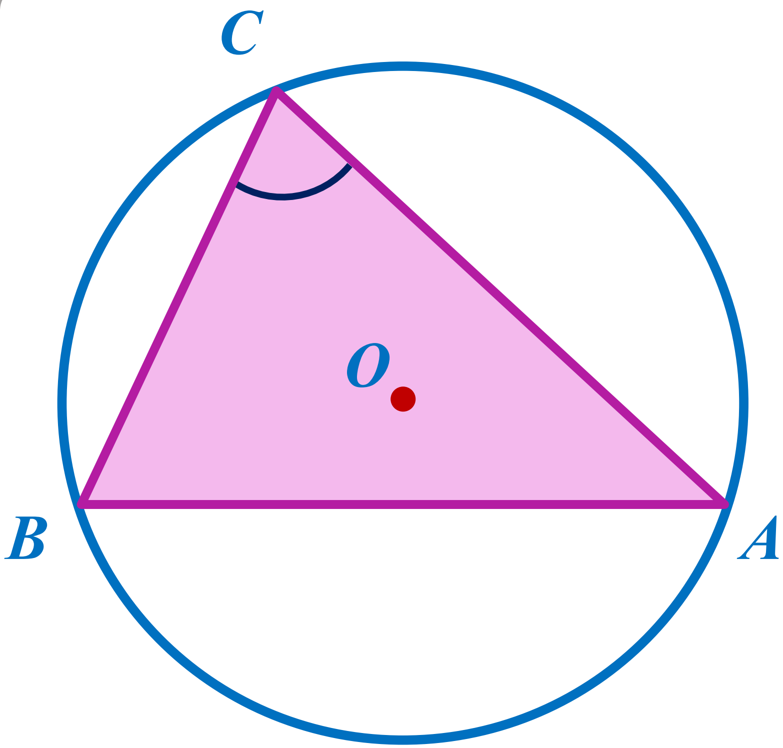
1 случай

Δ *ABC* – остроугольный



2 случай

Δ *ABC* – тупоугольный



1 случай. ΔABC – остроугольный

Решение. *1-й способ*

По обобщенной теореме синусов

$$\sin A = \frac{BC}{2R} = \frac{4}{2 \cdot 12} = \frac{1}{6}.$$

$$\sin C = \frac{AB}{2R} = \frac{6}{2 \cdot 12} = \frac{1}{4}.$$

$$\sin B = \sin(180° - \angle A - \angle C).$$

$$\sin B = \sin(\angle A + \angle C).$$

ΔABC – остроугольный

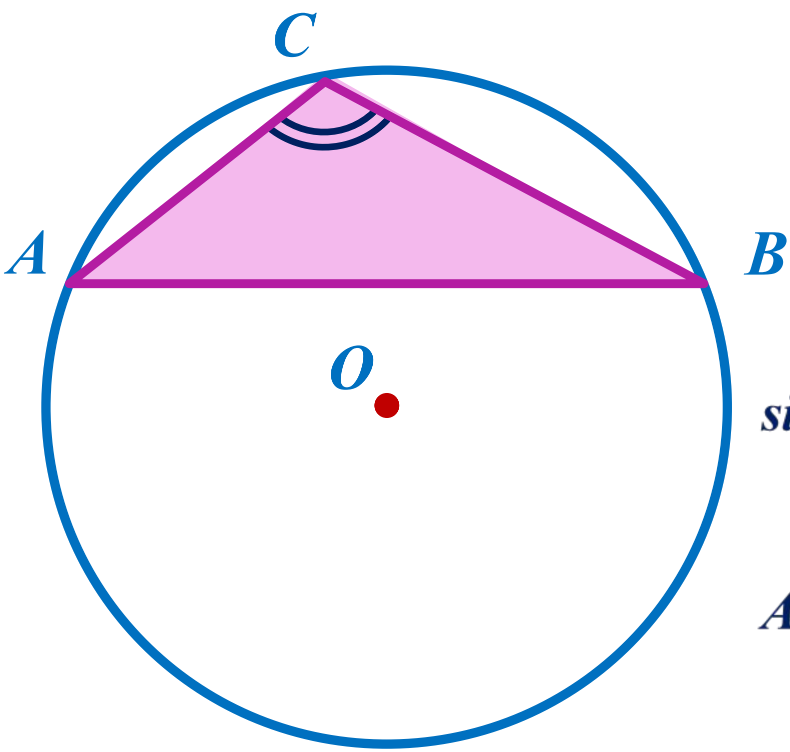
$$\cos A = \frac{\sqrt{35}}{6},$$

$$\cos C = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$\sin B = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{35}}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{35}}{24}.$$

$$AC = 2R \cdot \sin B = 24 \cdot \frac{\sqrt{15} + \sqrt{35}}{24},$$

$$AC = \sqrt{15} + \sqrt{35}.$$



2 случай. $\Delta\, ABC$ – тупоугольный

Решение. Пусть угол C – тупой.

$$\sin B = \sin(\angle A + \angle C).$$

$$\sin B = \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + \frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{15}}{24}.$$

$$AC = 2R\cdot\sin B = 24\cdot\frac{\sqrt{35}-\sqrt{15}}{24},$$

$$AC = \sqrt{35} - \sqrt{15}.$$

Ответ: $\sqrt{35} \pm \sqrt{15}.$

Решение. *2-й способ*

$\Delta\, ABC$: по теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{1 \pm 5\sqrt{21}}{24}.$$

$$\frac{1 + 5\sqrt{21}}{24} > 0 \Rightarrow \quad \angle B \text{ – острый,}$$

$$\frac{1 - 5\sqrt{21}}{24} < 0 \Rightarrow \quad \angle B \text{ – тупой.}$$

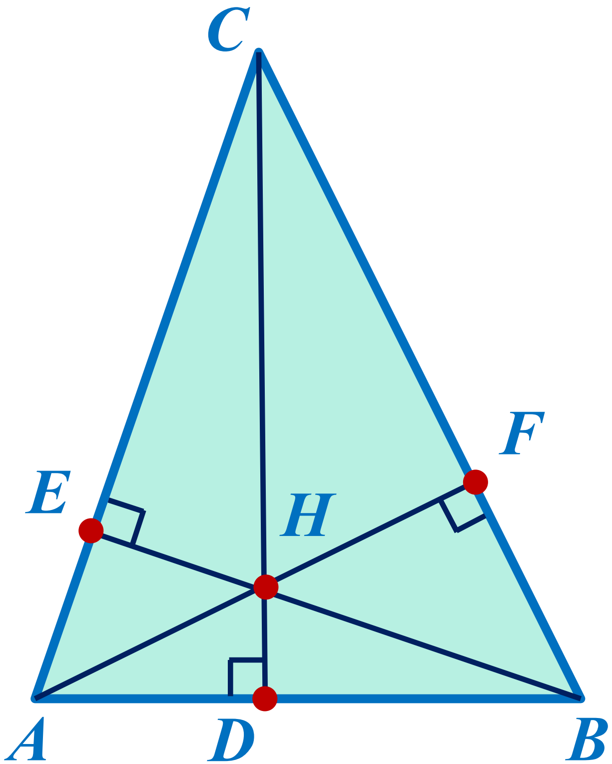
$$\sin B = \frac{\sqrt{50 \pm 10\sqrt{21}}}{24} = \frac{\sqrt{35} \pm \sqrt{15}}{24}.$$

$$AC = 2R \cdot \sin B = 24 \cdot \frac{\sqrt{35} \pm \sqrt{15}}{24},$$

$$AC = \sqrt{35} \pm \sqrt{15}.$$

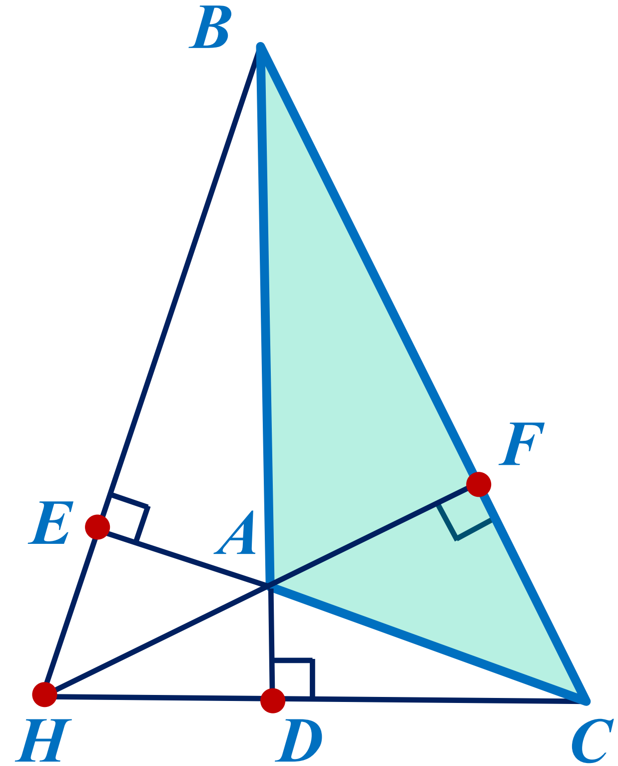
Ответ: $\sqrt{35} \pm \sqrt{15}.$

Пример 38. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол ACB.



1 случай

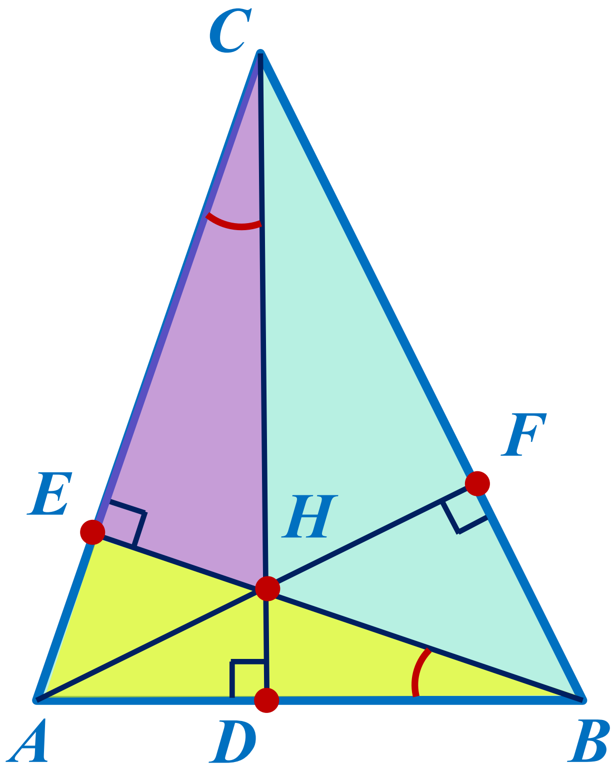
Δ *ABC* – остроугольный



2 случай

Δ *ABC* – тупоугольный

1 случай. $\Delta\, ABC$ – остроугольный



Решение. $BE \perp AC,\ CD \perp AB,\ AF \perp BC.$

$BE \cap CD \cap AF = H.$

$\angle ABE = \angle HCE$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами).

$\Delta\, AEB = \Delta\, HEC$ по гипотенузе и острому углу =>

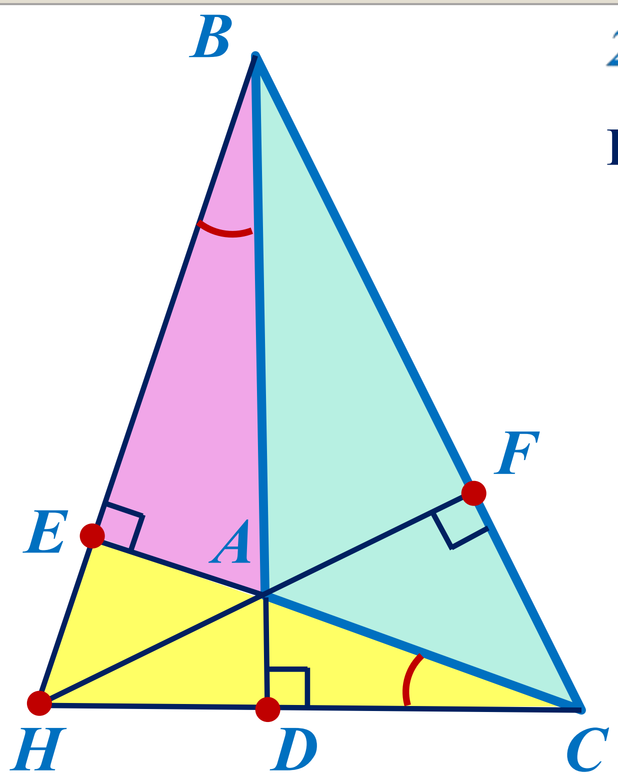
=> $AE = EH$ => $\angle EAH = \angle AHE = 45°.$

$\Delta\, ACF: \angle AFC = 90°,$

$\angle CAF = 45°$

<=

$\angle ACF = 45°.$



2 случай. $\Delta\, ABC$ – тупоугольный, $\angle BAC$ – тупой.

Решение. $BE \perp AC,\ CD \perp AB,\ AF \perp BC.$

$BE \cap CD \cap AF = H.$

$\angle ABE = \angle HCE$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами).

$\Delta\, AEB = \Delta\, HEC$ по гипотенузе и острому углу =>

=> $AE = EH$ => $\angle EAH = \angle AHE = 45°$.

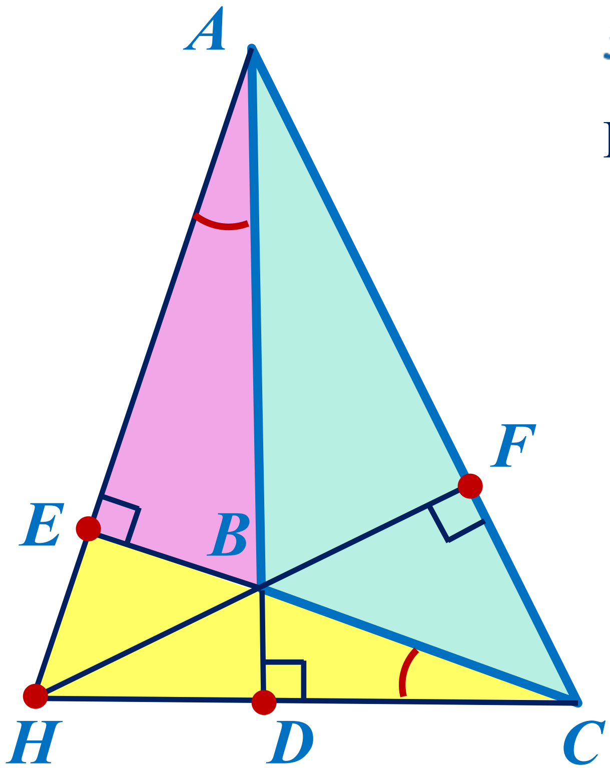
$\angle EAH = \angle CAF = 45°$ (вертикальные).

$\Delta\, ACF: \angle AFC = 90°,$

$\angle CAF = 45°$

<=

$\angle ACF = 45°$.



3 случай. $\Delta\, ABC$ – тупоугольный, $\angle ABC$ – тупой.

Решение. $BF \perp AC,\ CD \perp AB,\ AE \perp BC.$

$BF \cap CD \cap AE = H.$

$\angle BAE = \angle HCE$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами).

$\Delta\, AEB = \Delta CEH$ по гипотенузе и острому углу =>

=> $EB = EH$ => $\angle EHB = \angle EBH = 45°$.

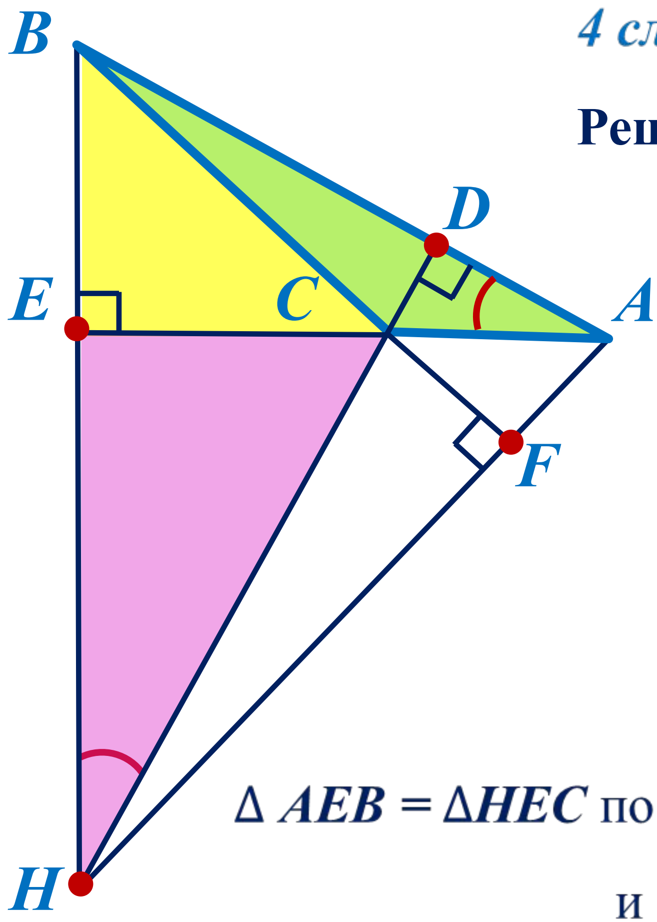
$\angle\, EBH = \angle\, CBF = 45°$ (вертикальные).

$\Delta\, BCF{:}\ \angle\, BFC = 90°,$

$\angle CBF = 45°$

<=

$\angle FCB = 45°$.



4 случай. $\Delta\, ABC$ – тупоугольный, $\angle ACB$ – тупой.

Решение. $BE \perp AC,\ CD \perp AB,\ AF \perp BC.$

$BE \cap CD \cap AF = H.$

$\angle BHC = \angle BAE$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами).

$\Delta\, AEB = \Delta HEC$ по гипотенузе и острому углу

<=

$EB = EC \ \Rightarrow \angle EHB = \angle EBH = 45°.$

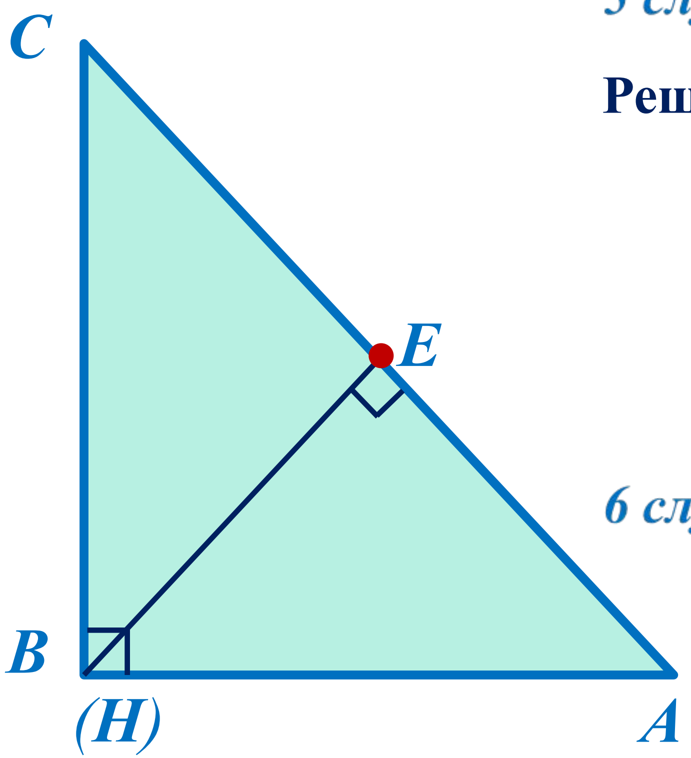
$\angle BCE$ и $\angle ACB$ – смежные.

$\Delta\, BEC: \angle\, BEC = 90°,$

$\angle BCE = 45°$

<=

$\angle ACB = 135°$.



5 случай. $\Delta\, ABC$ – прямоугольный, $\angle ABC = 90°$.

Решение. $BE \perp AC$.

$BC \cap AB \cap DE = H,\ H \equiv B.$

$HC = AB \Rightarrow CB = AB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACB = 45°$.

6 случай. $\Delta\, ABC$ – прямоугольный, $\angle\, BAC = 90°$.

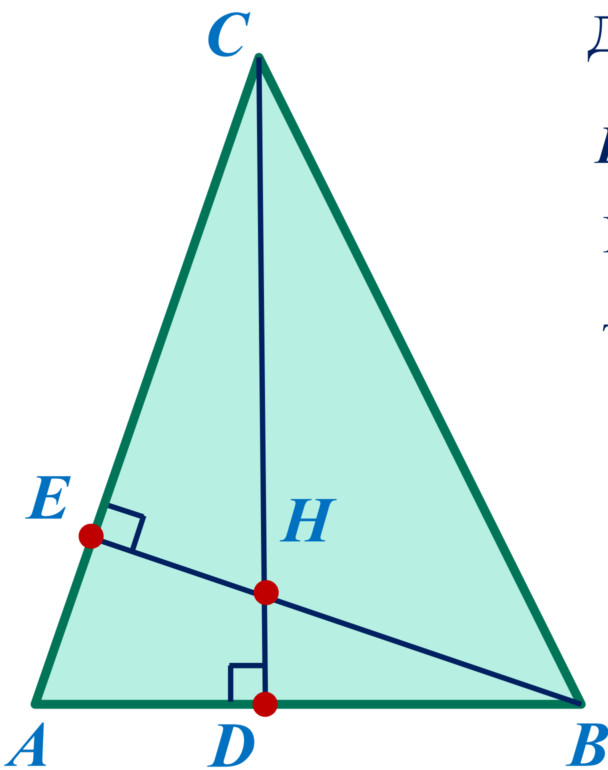
Аналогично $\angle ACB = 45°$.

7 случай. $\Delta\, ABC$ – прямоугольный, $\angle\, ACB = 90°$.

$H \equiv C,\ CH = AB$ – невозможно.

Ответ: $45°$ или $135°$.

Опорная задача. *Если H – ортоцентр треугольника, то радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, ABH, BCH, ACH, равны между собой.*



Доказательство.

$BE \perp AC,\ CD \perp AB \Rightarrow \angle HEA = \angle HAD = 90°.$

В четырехугольнике ***AEHD*** углы ***E*** и ***D*** прямые,

то $\angle EAD + \angle DHA = 180°.$

$\angle BHC = \angle DHE = 180° - \angle A.$

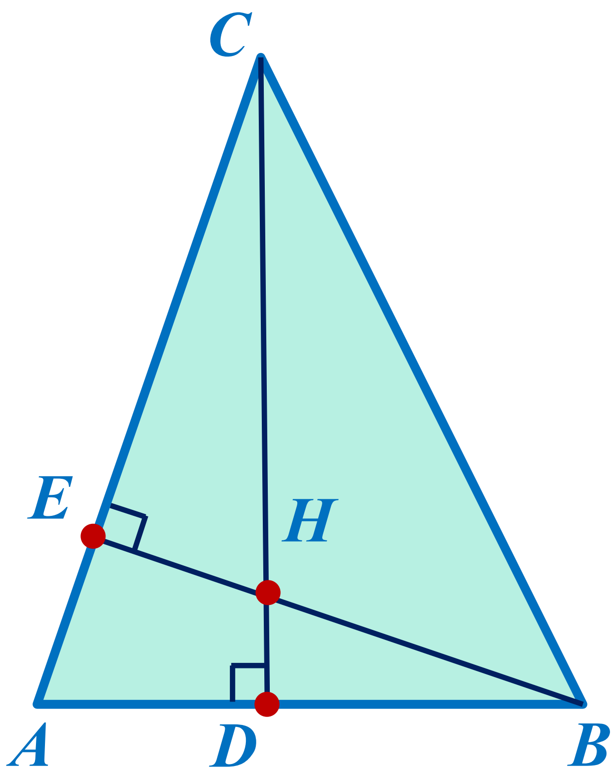
ΔBHC: $R = \dfrac{BC}{2\sin(180° - \angle A)} = \dfrac{BC}{2\sin A} \Rightarrow$

$R = \dfrac{a}{2\sin \alpha}.$

Отсюда следует, что радиусы окружностей, описанных около треугольников
C и *BCH* равны между собой.

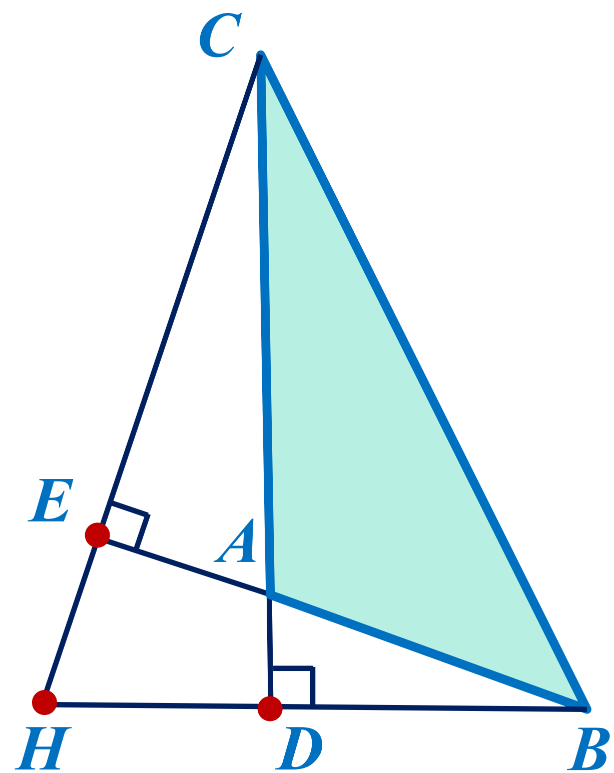
Аналогичное доказательство проводят и для других треугольников.

Пример 39. Высоты треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*. Известно, что отрезок *CH* равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол *ACB*.



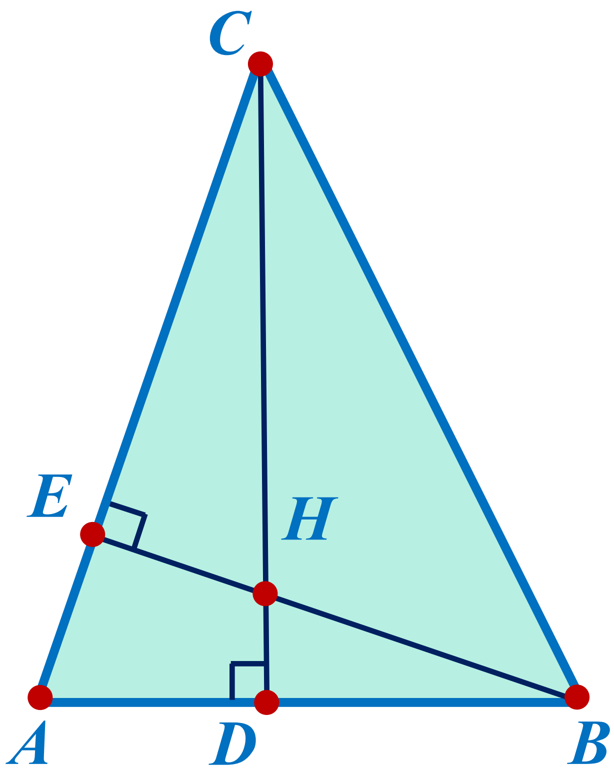
1 случай

Δ *ABC* – остроугольный



2 случай

Δ *ABC* – тупоугольный



1 случай. ΔABC – остроугольный

Решение.

Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCH равны.

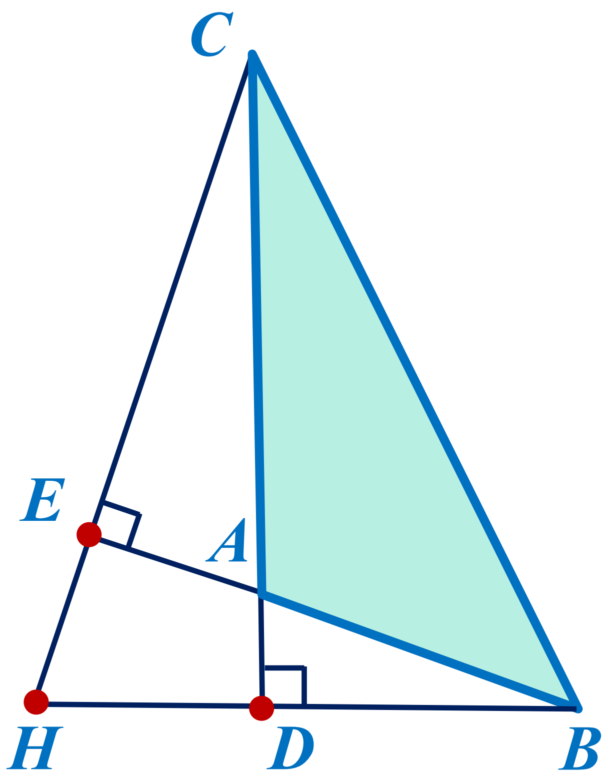
ΔBCH: $CH = 2R\sin\angle HBC$, $CH = R$ =>

$R = 2R\sin\angle HBC$ => $\sin\angle HBC = \frac{1}{2}$ =>

$\angle HBC = 30°$ или $\angle HBC = 150°$.

ΔABC – остроугольный => $\angle HBC = 30°$.

ΔBEC: $\angle C = 90° - 30° = 60°$.



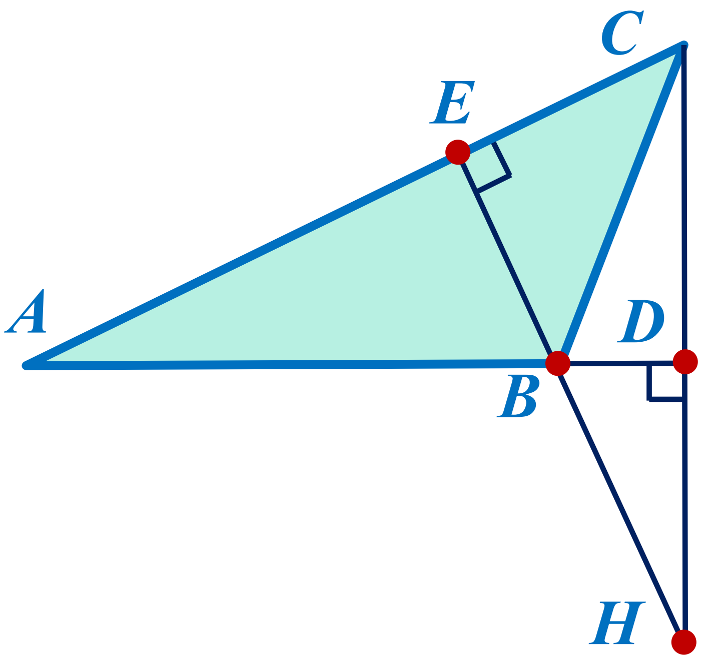
2 случай. Δ ***ABC*** – тупоугольный, $\angle$***A*** – тупой.

Решение.

Δ ***DBC***: $\angle$***BDC*** = ***90°*** => $\angle$***DBC*** – острый.

$\angle$***A*** – тупой => $\angle$***HBC*** = ***30°***.

Δ ***DBC***: $\angle$***C*** = ***90°*** – ***30°*** = ***60°***.



3 случай. $\Delta\, ABC$ – тупоугольный, $\angle B$ – тупой.

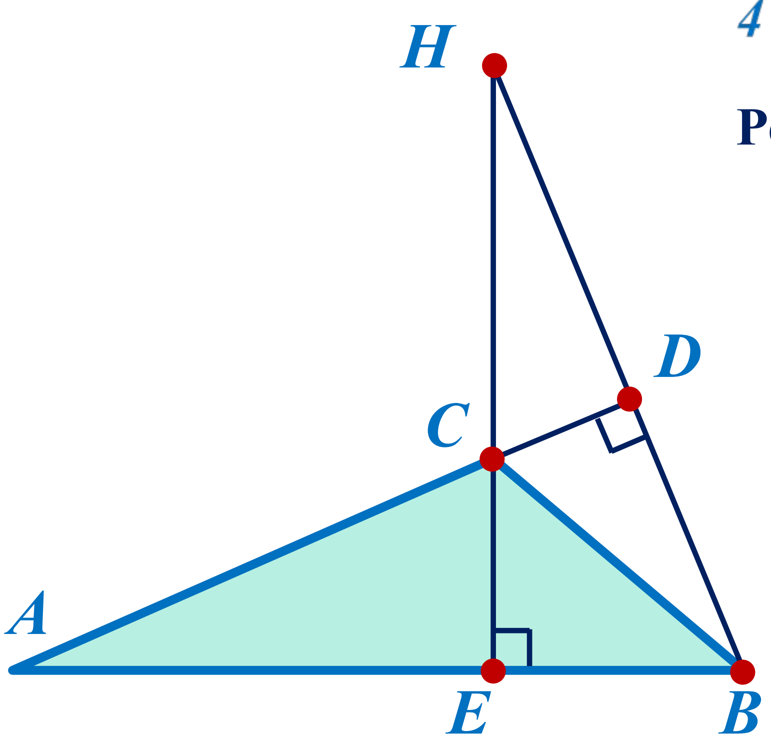
Решение.

$\Delta\, EBC$: $\angle BEC = 90°$ => $\angle HBC$ – тупой.

$\angle HBC$ – внешний угол прямоугольного треугольника.

$\angle HBC = 150°$.

$\Delta\, DBC$: $\angle C = 90° - 30° = 60°$.



4 случай. $\Delta\, ABC$ – тупоугольный, $\angle C$ – тупой.

Решение.

$\angle C$ – тупой => $\angle\, HBC = 30°$.

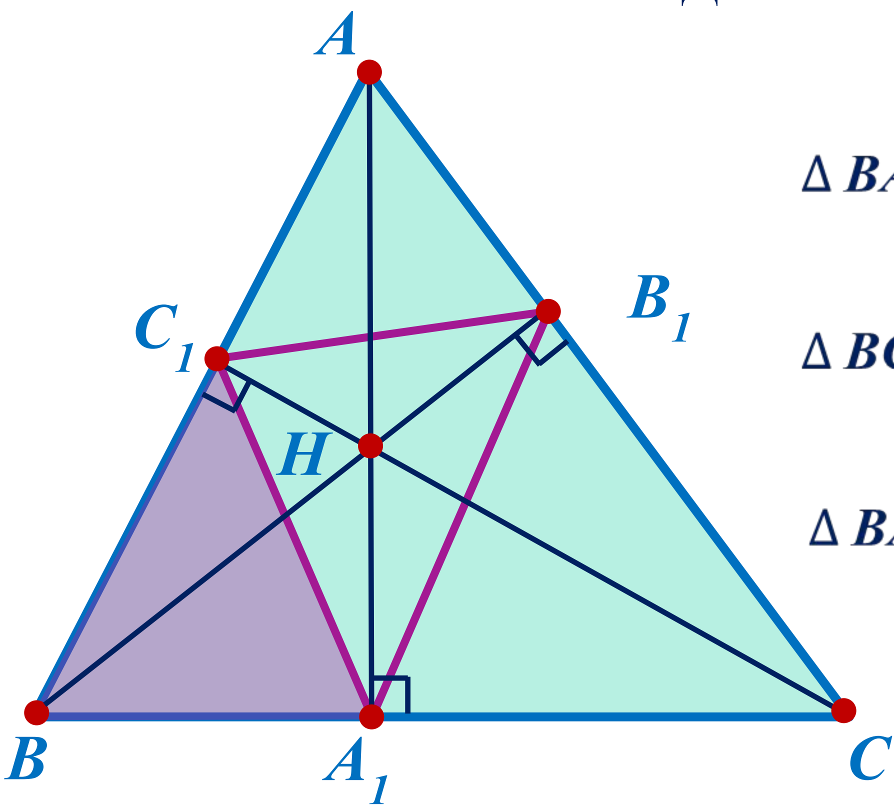
$\Delta\, DBC$: $\angle BDC = 90°$ => $\angle\, HBC$ – острый.

$\Delta\, DBC$: $\angle BCD = 90° - 30° = 60°$.

$\angle ACB = 180° - 60° = 120°$.

Ответ: $60°$ или $120°$.

Опорная задача. *Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Тогда треугольник A_1BC_1 подобен данному с коэффициентом подобия, равным $|\cos B|$.*



Доказательство. Рассмотрим остроугольный треугольник ***ABC.***

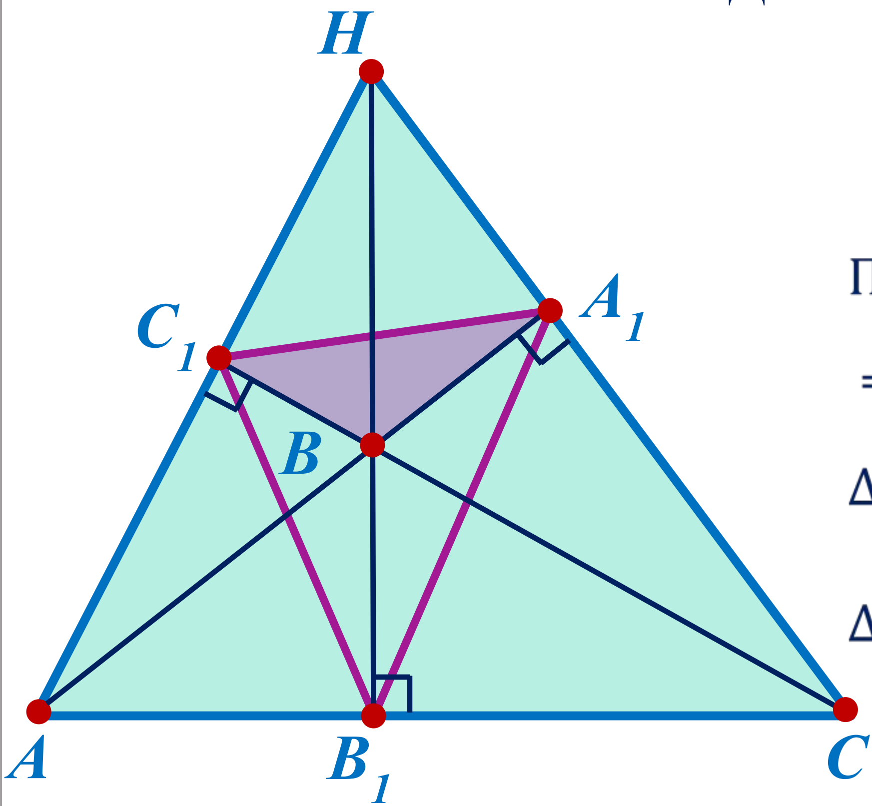
$$\Delta BA_1A: \angle BA_1A = 90° \Rightarrow \cos B = \frac{BA_1}{AB}.$$

$$\Delta BC_1C: \angle BC_1C = 90° \Rightarrow \cos B = \frac{BC_1}{BC}.$$

$\Delta BA_1C_1 \sim \Delta BAC$ по 2 признаку

(общий угол B и

$\dfrac{BA_1}{AB} = \dfrac{BC_1}{BC} = \cos B = k$).



Доказательство. Рассмотрим тупоугольный треугольник ABC.

Угол B – тупой.

Пусть $\angle A_1BC_1 = \beta$ =>

=> $\angle A_1BC = \angle ABC_1 = 180° - \beta$.

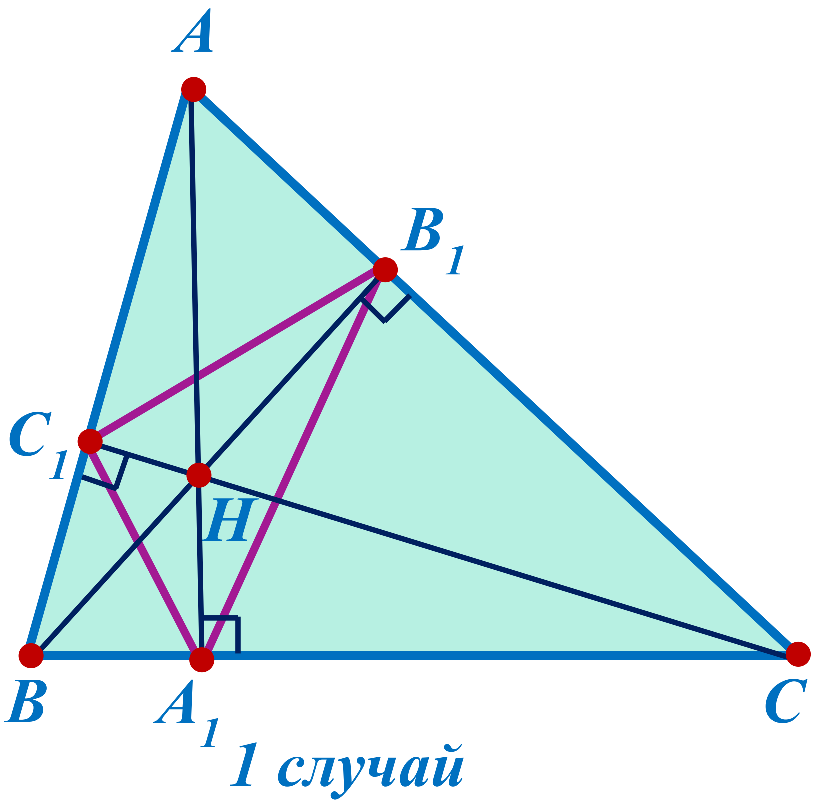
ΔBA_1C: $\angle BA_1C = 90°$ => $\cos B = \dfrac{BA_1}{BC}$.

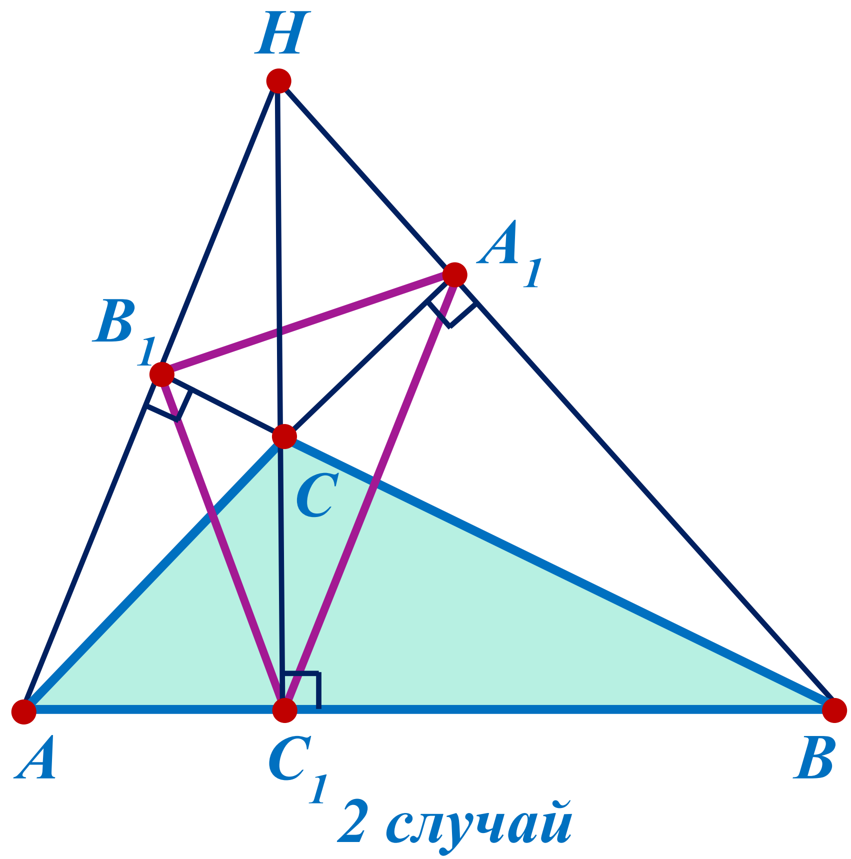
ΔBC_1A: $\angle AC_1B = 90°$ => $\cos B = \dfrac{BC_1}{AB}$.

$$\frac{BA_1}{BC} = \frac{BC_1}{AB} = \cos(180^0 - \beta) = -\cos\beta = |\cos\beta| = k.$$

$\Delta BA_1C_1 \sim \Delta BAC$ по 2 признаку (общий угол B и $\dfrac{BA_1}{BC} = \dfrac{BC_1}{AB} = k$).

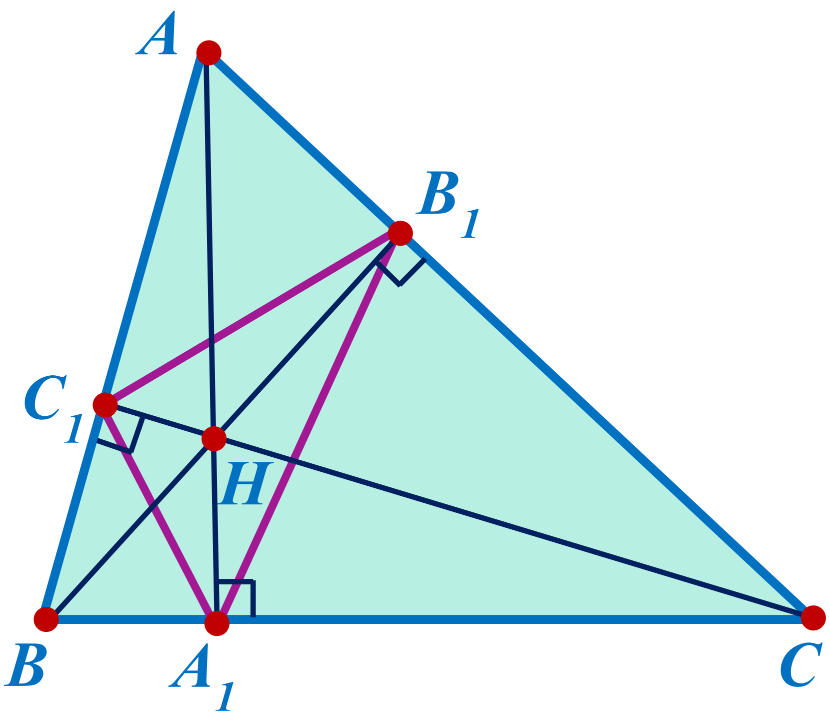
Пример 40. Точки A_1, B_1, C_1 – основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны $90°$, $60°$ и $30°$. Найдите углы треугольника ABC.





Δ *ABC* – остроугольный

Δ *ABC* – тупоугольный



1 случай. ΔABC – остроугольный

Решение.

$\Delta BC_1A_1 \sim \Delta BCA$ по 2 признаку

$\angle BC_1A_1 = \angle BCA.$

$\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$ по 2 признаку

$\angle AC_1B_1 = \angle ACB.$

$\angle AC_1B = \angle AC_1B_1 + \angle B_1C_1A_1 + \angle A_1C_1B.$

$\angle AC_1B_1 = 180°.$

$2\angle C + \angle B_1C_1A_1 = 180°.$

$\angle C = 90° - \frac{1}{2}\angle B_1C_1A_1.$

Аналогично получим:

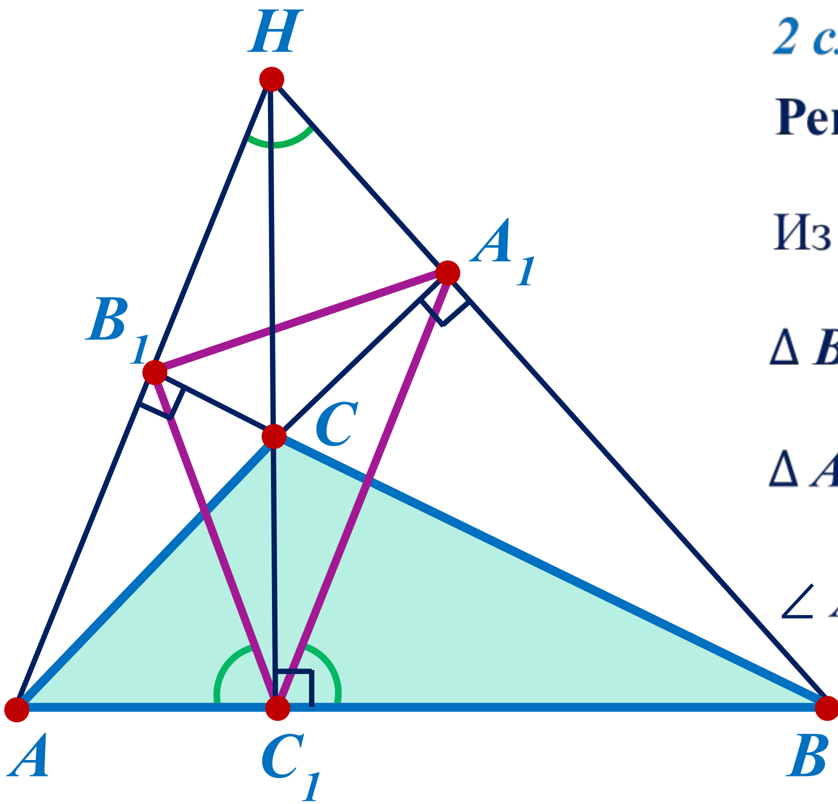
$\angle A = 90° - \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1.$

$\angle B = 90° - \frac{1}{2}\angle A_1B_1C_1.$

$90° - \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°,$

$90° - \frac{1}{2} \cdot 60° = 60°,$

$90° - \frac{1}{2} \cdot 30° = 75°.$



2 случай. $\Delta\, ABC$ – тупоугольный

Решение. $\angle C = \gamma$ – тупой.

Из 4-х угольника A_1CB_1H $\angle H = 180° - \gamma$.

$\Delta\, BA_1C_1 \sim \Delta\, BAH \Rightarrow \angle\, A_1C_1B = \angle\, AHB.$

$\Delta\, AB_1C_1 \sim \Delta\, ABH \Rightarrow \angle\, AC_1B_1 = \angle\, AHB.$

$\angle\, AC_1B = \angle AC_1B_1 + \angle\, B_1C_1A_1 + \angle A_1C_1B.$

Аналогично получим:

$2\angle H + \angle B_1C_1A_1 = 180°.$	$\angle ACB = 90° + \frac{1}{2}\angle B_1C_1A_1.$	$90° + \frac{1}{2}\cdot 30° = 105°,$
$\angle H = 90° - \frac{1}{2}\angle B_1C_1A_1.$	$\angle CAB = \angle H - \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1.$	$75° - \frac{1}{2}\cdot 60° = 45°,$
$\angle HAB = 90° - \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1.$	$\angle CBA = \angle H - \frac{1}{2}\angle A_1B_1C_1.$	$75° - \frac{1}{2}\cdot 90° = 30°.$

Остальные случаи рассмотрите самостоятельно.

3. Угол ***ABC*** – тупой.

4. Угол ***BAC*** – тупой.

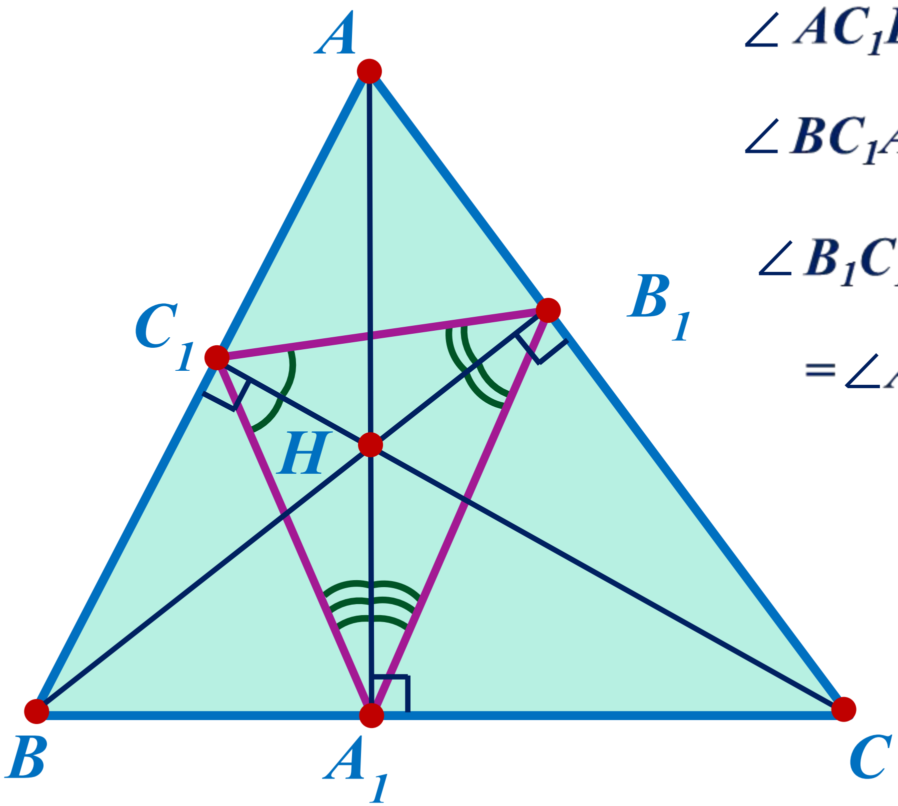
Случаи, когда один из углов ***ABC***, ***BAC***, ***ACB*** – прямой, невозможны (***почему?***).

Ответ: ***45°, 75°, 60°*** или ***105°, 30°, 45°*** или ***120°, 15°, 45°*** или ***135°, 15°, 30°.***

Замечание. Другое решение может быть основано на следующей опорной задаче:

Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника (треугольник, образованный основаниями высот).

Опорная задача. *Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника (треугольник, образованный основаниями высот).*



$\angle AC_1B_1 = \angle ACB$,
$\angle BC_1A_1 = \angle ACB$, $\Rightarrow$ $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$.

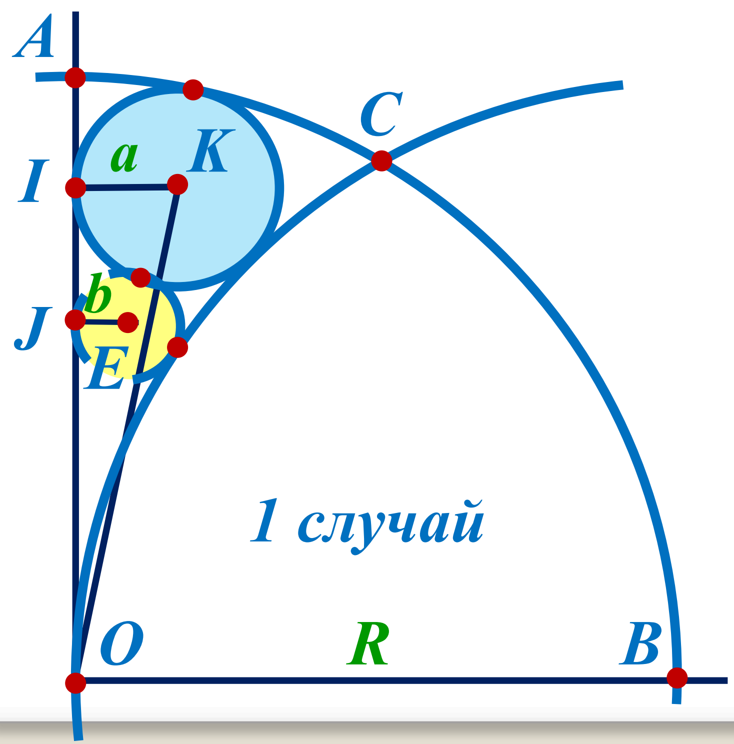
$\angle B_1C_1C = 90° - \angle AC_1B_1 = 90° - \angle BC_1A_1 =$
$= \angle A_1C_1C$.

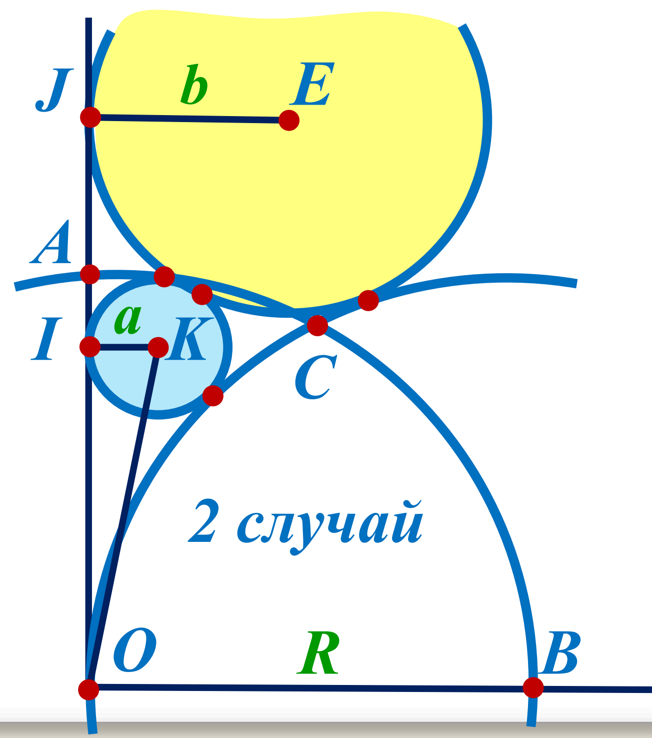
$\angle A_1B_1B = \angle C_1B_1B$,

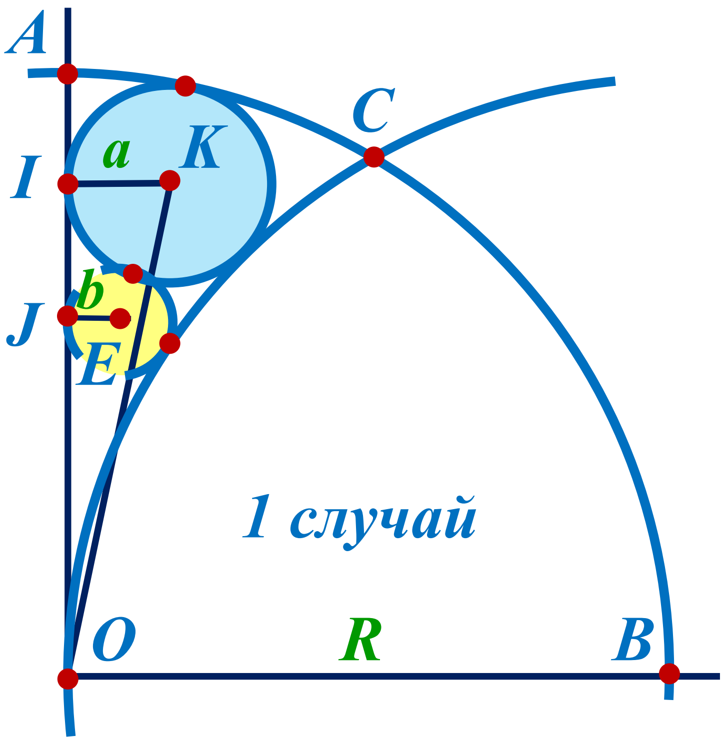
$\angle B_1A_1A = \angle C_1A_1A$,

Если треугольник тупоугольный, то две его высоты — биссектрисы внешних углов ортотреугольника, а третья — биссектриса внутреннего угла.

Пример 41. Окружности с центрами O и B радиуса OB пересекаются в точке C. Радиус OA окружности с центром O перпендикулярен OB, причем точки A и C лежат по одну сторону от прямой OB. Окружность S_1 касается меньших дуг AB и OC этих окружностей, а также прямой OA, а окружность S_2 касается окружности с центром B, прямой OA и окружности S_1. Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.







1 случай. OI – отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов a и R.

$$OI = 2\sqrt{Ra}\,,\ OK = R - a.$$

$\Delta\, OKI$: $\angle OIK = 90°$, по теореме Пифагора

$$(R - a)^2 = a^2 + \left(2\sqrt{Ra}\right)^2.$$

$$R = 6a.$$

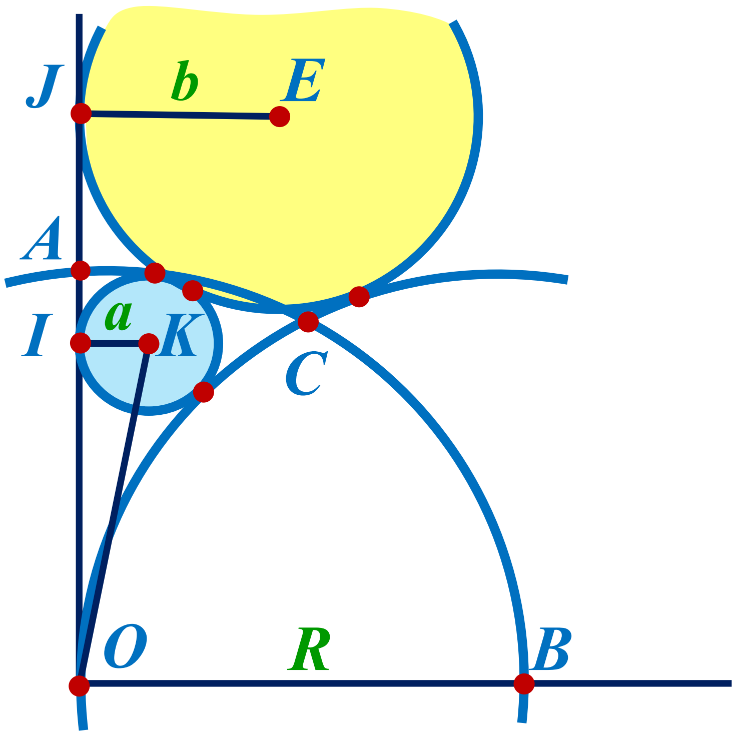
$$OI = OJ + JI,\ 2\sqrt{Ra} = 2\sqrt{Rb} + 2\sqrt{ab},$$

$$\sqrt{6a^2} = \sqrt{6ab} + \sqrt{ab},\ \Big|\div\sqrt{6b^2}$$

$$\frac{a}{b} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt{\frac{a}{b}},$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{6}.$$



2 случай. OJ – отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов b и R.

$$OJ = 2\sqrt{Rb}.$$

Из предыдущего случая $R = 6a$.

$$OJ = OI + JI,\quad 2\sqrt{Rb} = 2\sqrt{Ra} + 2\sqrt{ab},$$

$$\sqrt{6a^2} = \sqrt{6ab} - \sqrt{ab}, \quad \Big| \div \sqrt{6b^2}$$

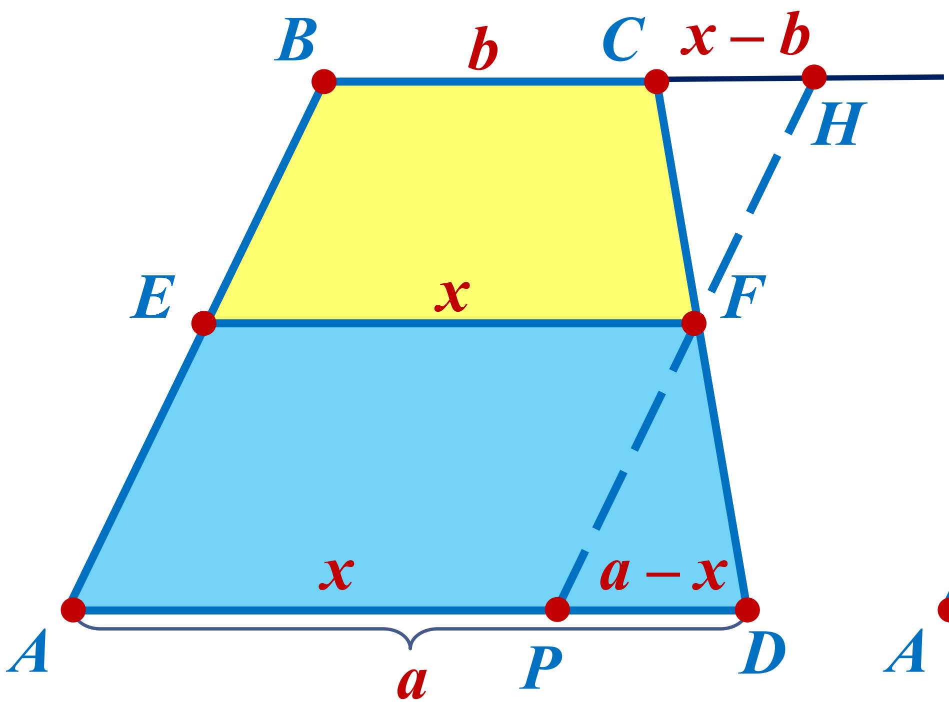
$$\frac{a}{b} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot \sqrt{\frac{a}{b}},$$

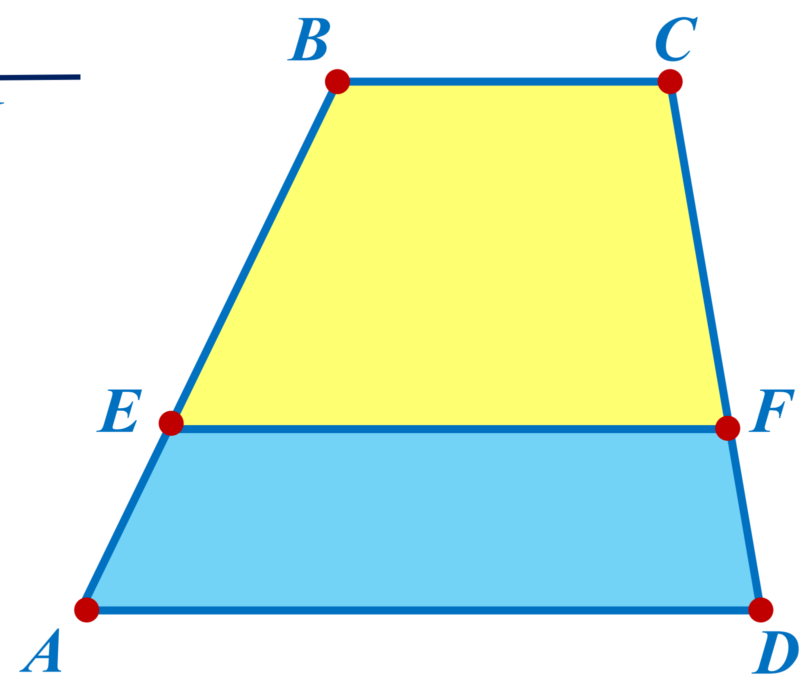
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{\sqrt{6} - 1}{\sqrt{6}},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{7 - 2\sqrt{6}}{6}.$$

Ответ: $\boxed{\frac{7 \pm 2\sqrt{6}}{6}.}$

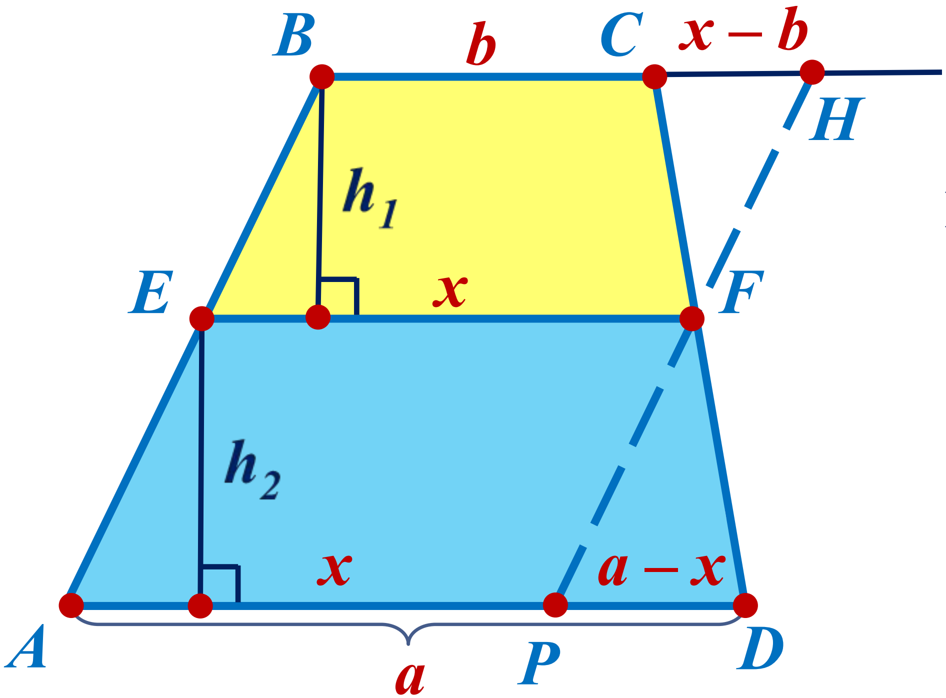
Пример 42. Основания трапеции равны *a* и *b*. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как *2 : 3* . Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.





1 случай. $\dfrac{S_{BCFE}}{S_{AEFD}} = \dfrac{2}{3}$

2 случай. $\dfrac{S_{BCFE}}{S_{AEFD}} = \dfrac{3}{2}$



1 случай. $\dfrac{S_{BCFE}}{S_{AEFD}} = \dfrac{2}{3}$

Решение. *1-й способ*

Пусть $EF = x$, $PH \parallel AB$, $F \in PH$.

$$\frac{S_{BCFE}}{S_{AEFD}} = \frac{\frac{b+x}{2}\cdot h_1}{\frac{a+x}{2}\cdot h_2} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{2(a+x)}{3(b+x)}.$$

$\Delta\, PFD \sim \Delta\, HFC$ по 2-м углам =>

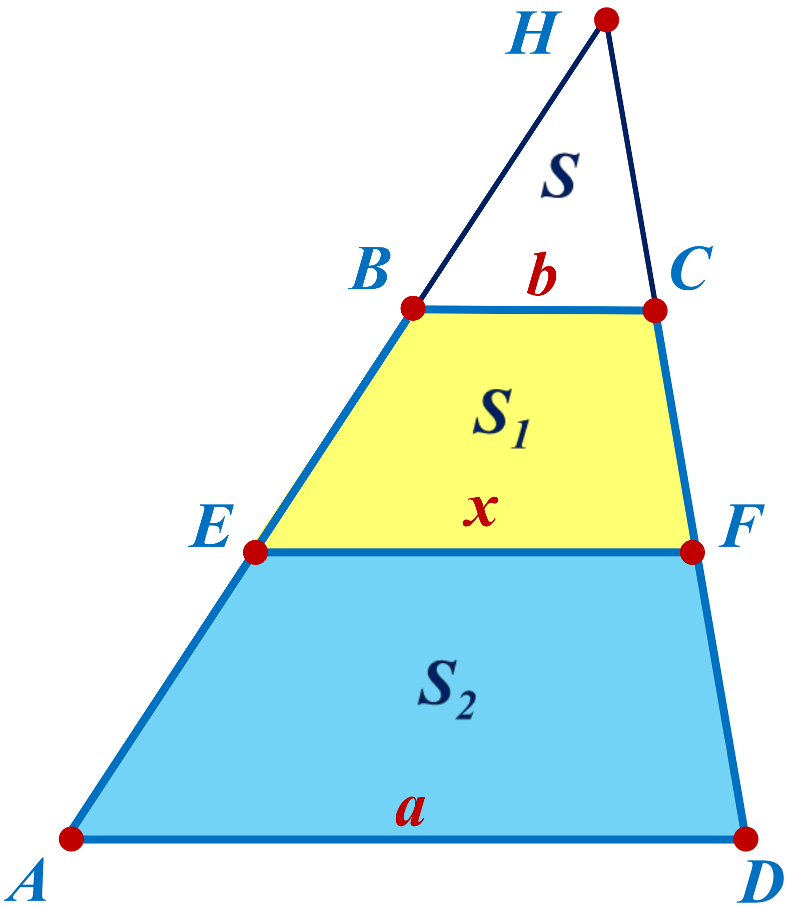
$$\frac{CH}{BP} = \frac{h_1}{h_2},$$

$$\frac{x-b}{a-x} = \frac{2(a+x)}{3(b+x)}.$$

$$3(x^2 - b^2) = 2(a^2 - x^2),$$

$$5x^2 = 2a^2 + 3b^2,$$

$$x = \sqrt{\frac{2a^2 + 3b^2}{5}}.$$



1 случай. $\dfrac{S_{BCFE}}{S_{AEFD}} = \dfrac{2}{3}$

Решение. *2-й способ*

Достроим трапецию ***ABCD*** до Δ ***AHD.***

$\Delta\, AHD \sim \Delta\, BHC$ по 2-м углам =>

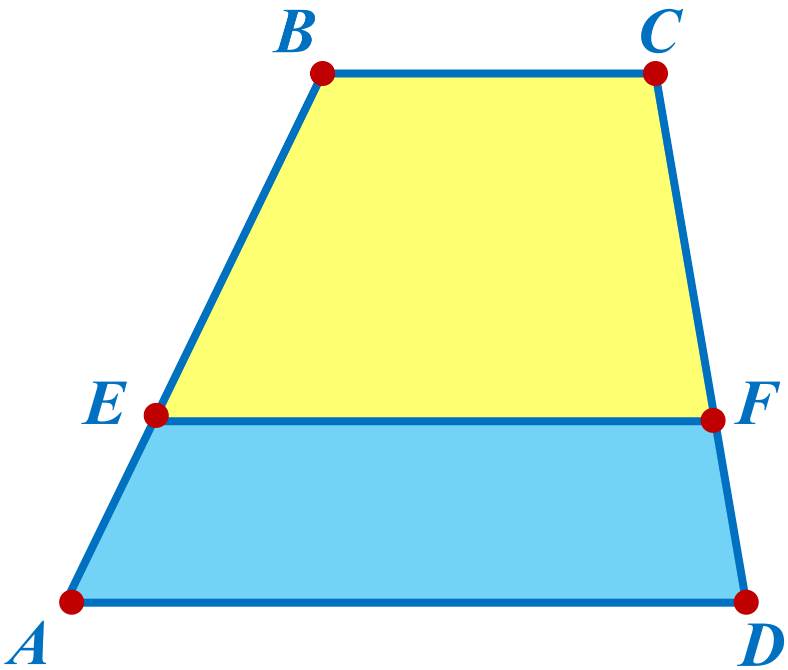
$$\frac{S_{AHD}}{S_{BHC}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2, \quad \frac{S+S_1+S_2}{S} = \frac{a^2}{b^2}.$$

$\Delta\, EHF \sim \Delta\, AHD$ по 2-м углам =>

$$\frac{S_{EHF}}{S_{BHC}} = \left(\frac{x}{b}\right)^2, \quad \frac{S+S_1}{S} = \frac{x^2}{b^2}.$$

$$\begin{cases} 1+\dfrac{S_1+S_2}{S} = \dfrac{a^2}{b^2}, \\ 1+\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{x^2}{b^2}. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{S_1+S_2}{S} = \dfrac{a^2-b^2}{b^2}, \\ \dfrac{S_1}{S} = \dfrac{x^2-b^2}{b^2}. \end{cases} \quad \left| \begin{cases} \dfrac{S_1+S_2}{S} = \dfrac{a^2-b^2}{x^2-b^2}, \\ \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2}{3}. \end{cases} \right| \quad x:\ \frac{a^2-b^2}{x^2-b^2} = \frac{5}{2},$$

$$x = \sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}.$$



2 случай. $\dfrac{S_{BCFE}}{S_{AEFD}} = \dfrac{3}{2}$

Решение. Аналогично 1 случаю.

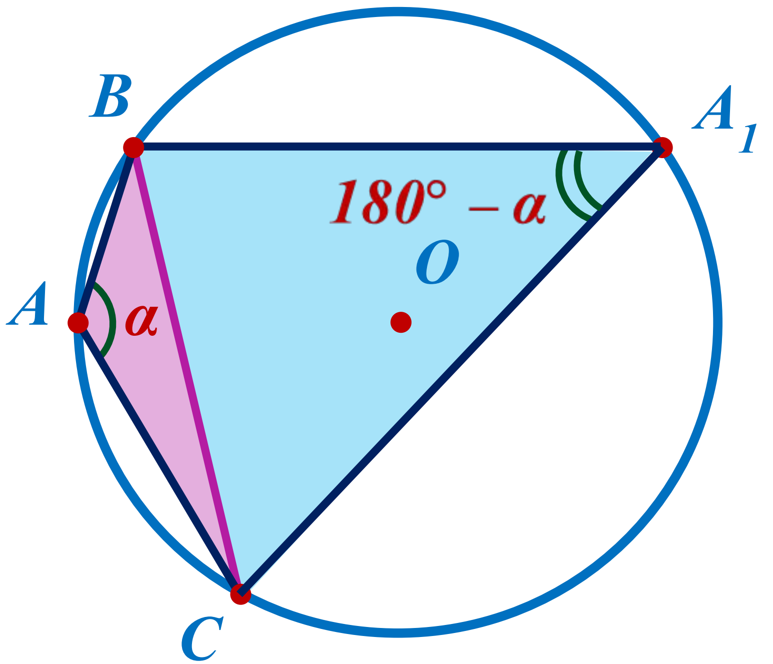
$$x = \sqrt{\frac{2b^2 + 3a^2}{5}}.$$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2a^2 + 3b^2}{5}}$ или $\sqrt{\dfrac{2b^2 + 3a^2}{5}}$.

5. Соответствие между множеством фигур и множеством их свойств

5.1 Неопределенность между значением синуса (косинуса) угла и видом угла

Пример 43. Радиус окружности равен *1*. Найдите величину вписанного угла, опирающегося на хорду, равную *2*. Ответ дайте в градусах.



Решение. Хорда ***BC*** разбивает окружность на две дуги.

Все вписанные углы, опирающиеся на эту хорду, с вершинами, лежащими на одной дуге, будут равны.

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad a = \sqrt{2}, \quad R = 1.$$

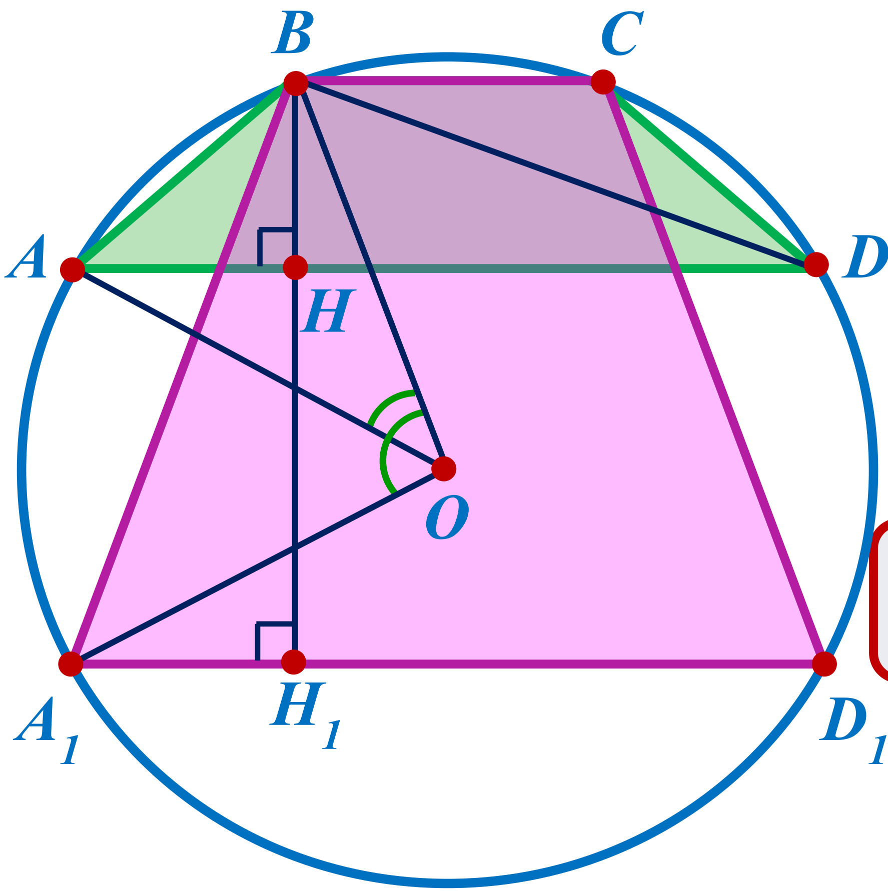
$$\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad =>$$

$$\angle A_1 = 45° \text{ или } \angle A = 135°.$$

Ответ: ***45°*** **или** ***135°.***

пг

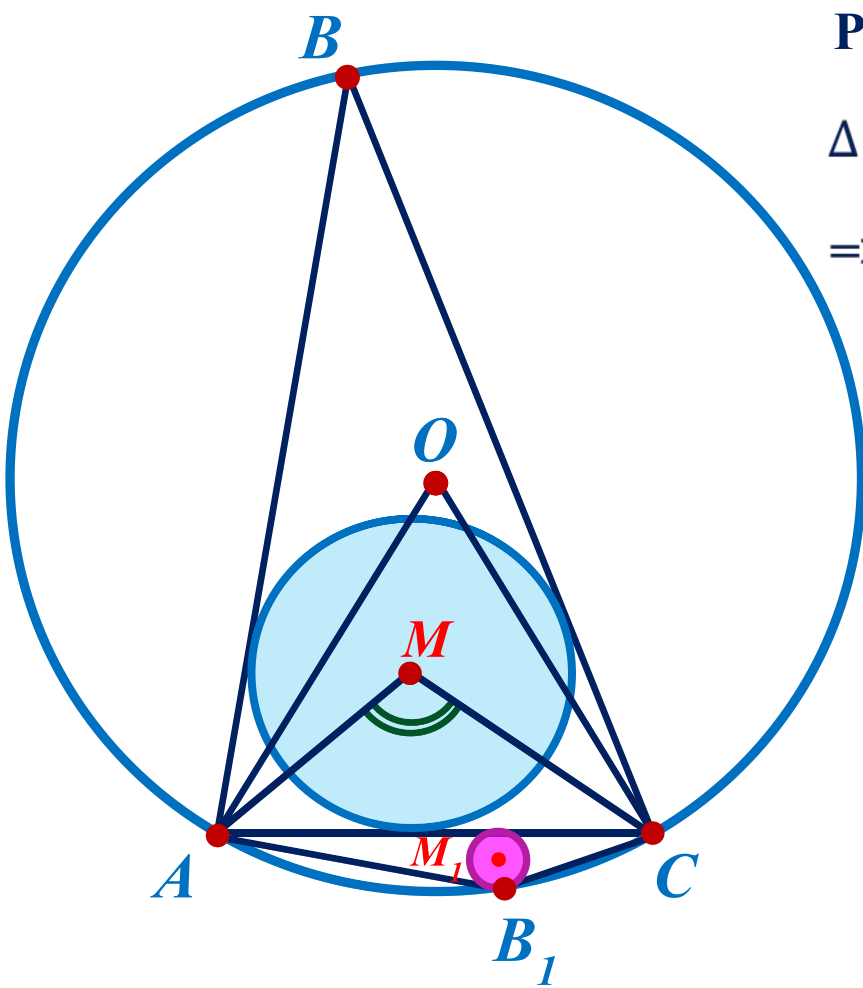
Пример 46. Трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* вписана в окружность с центром *O*. Найдите высоту трапеции, если ее средняя линия равна 3 и $\sin \angle AOB = 0,6$.



Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований (средней линии).

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Пример 44. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен $60°$. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.



Решение.

ΔAOC: $OC = OA = R$, $\angle AOC = 90°$ =>

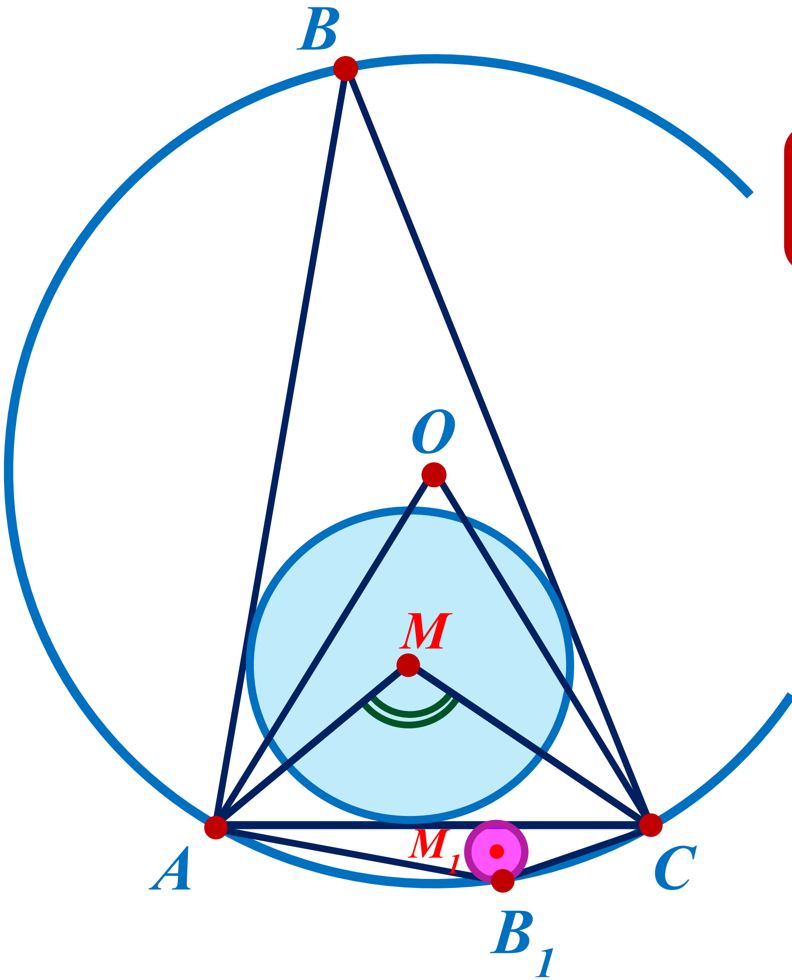
=> ΔAOC – равносторонний => $AC = R$.

По следствие теоремы синусов

$AC = 2R \cdot \sin B$, $R = 2R \cdot \sin B$,

$$\sin B = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

=> $\angle B = 30°$ или $\angle B = 150°$.



1 случай. $\angle B = 30° \Rightarrow \angle A + \angle C = 150°.$

Центр вписанной окружности *M*, лежит на пересечении биссектрис треугольника.

$\angle MAC + \angle MCA = 150° : 2 = 75°.$

$\angle AMC = 180^0 - 75^0 = 105^0.$

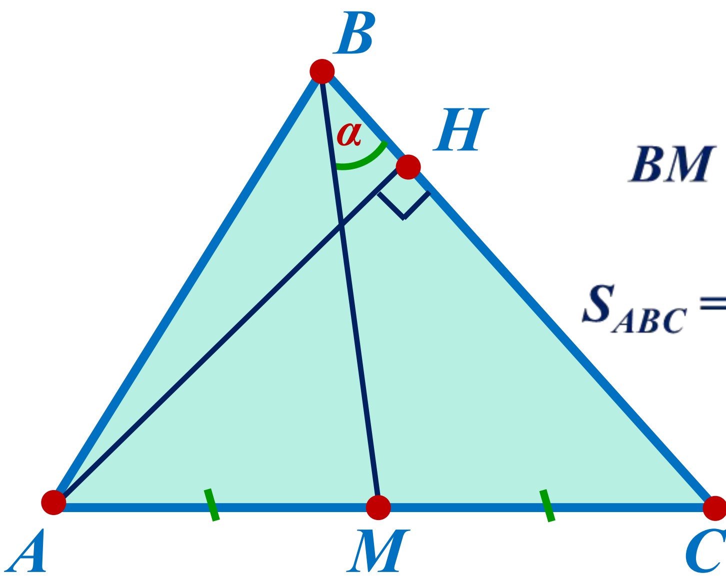
2 случай. $\angle B_1 = 150° \Rightarrow \angle A + \angle C = 30°.$

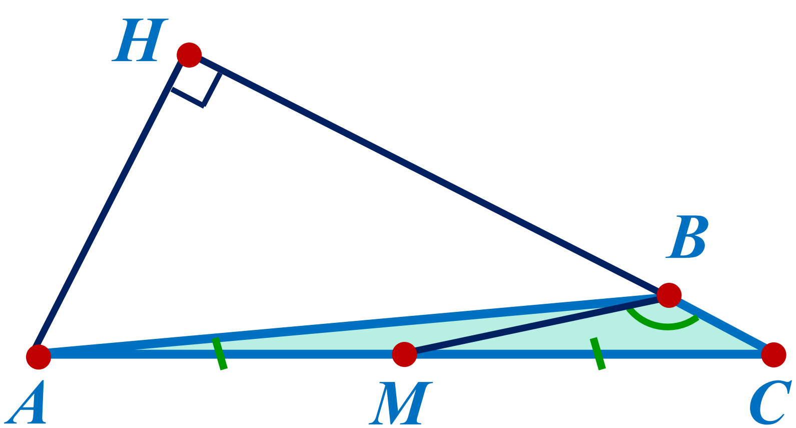
$\angle M_1AC + \angle M_1CA = 30° : 2 = 15°.$

$\angle AM_1C = 180° - 15° = 165°.$

Ответ: ***105°*** **или** ***165°*****.**

Пример 45. Медиана *BM* треугольника *ABC* равна его высоте *AH*. Найдите угол *MBC*.





Решение. Пусть $\angle MBC = \alpha$.

BM – медиана ΔABC => $S_{ABM} = S_{CBM} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$

$$S_{ABC} = 2S_{CBM} = 2 \cdot \frac{1}{2} BC \cdot BM \cdot \sin\alpha = BC \cdot BM \sin\alpha.$$

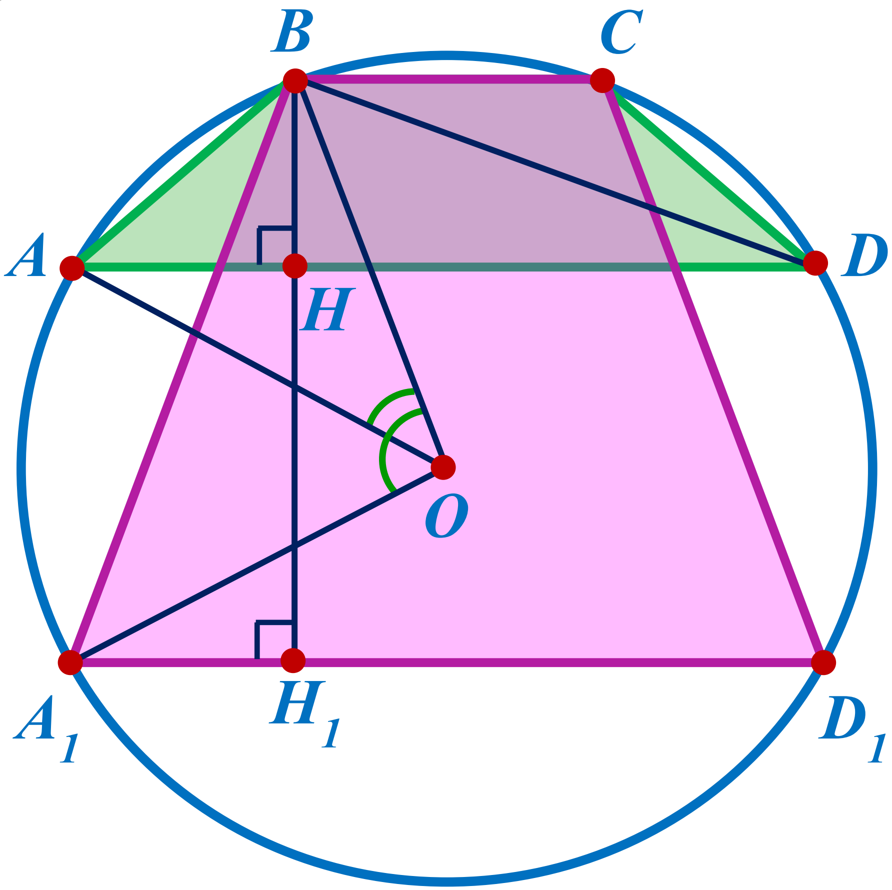
$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH,$ $AH = BM$ =>

$$BC \cdot BM \sin\alpha = \frac{1}{2} BC \cdot AH.$$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ =>

=> $\alpha = 30°$ или $\alpha = 150°$.

Ответ: $30°$ или $150°$.



Решение. Пусть $\angle AOB = \alpha$.

$BH \perp AD,\ H \in AD \Rightarrow HD = MN$, где

MN – средняя линия.

$\angle ADB$ – вписанный угол,

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{\alpha}{2}.$$

$$\Delta BHD:\ \angle BHD = 90^\circ \Rightarrow$$

$$BH = HD \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \Rightarrow BH = \frac{3\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

1 случай. $\angle AOB = \alpha$ – острый.

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \text{ и } BH = \frac{3\cdot\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}} = 1.$$

2 случай. $\angle AOB = \alpha$ – тупой.

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5} \text{ и } BH = \frac{3\cdot\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{5}} = 9.$$

Что будет в случае, когда $\angle AOB = 90^\circ$?

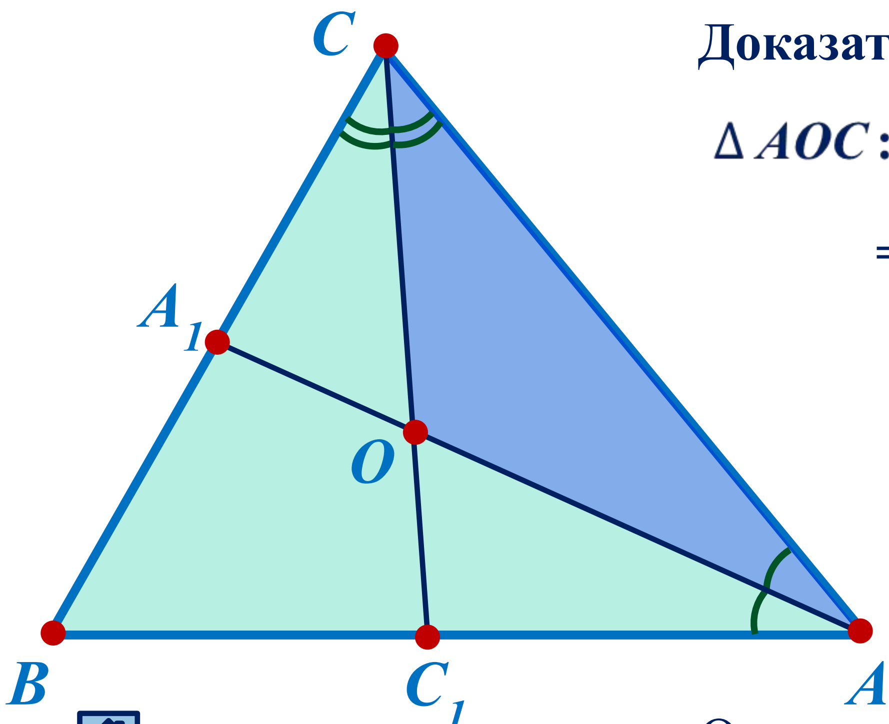
Ответ: 1 или 9.

Опорная задача. *Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Докажите равенства:*

$$\angle AOC = \frac{\angle B}{2} + 90°,$$

$$\angle AOB = \frac{\angle C}{2} + 90°,$$

$$\angle BOC = \frac{\angle A}{2} + 90°.$$



Доказательство.

$$\Delta AOC: \quad \angle CAO = \frac{1}{2}\angle A, \ \angle ACO = \frac{1}{2}\angle C,$$

$$\Rightarrow \angle AOC = 180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C,$$

$$\angle AOC = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C),$$

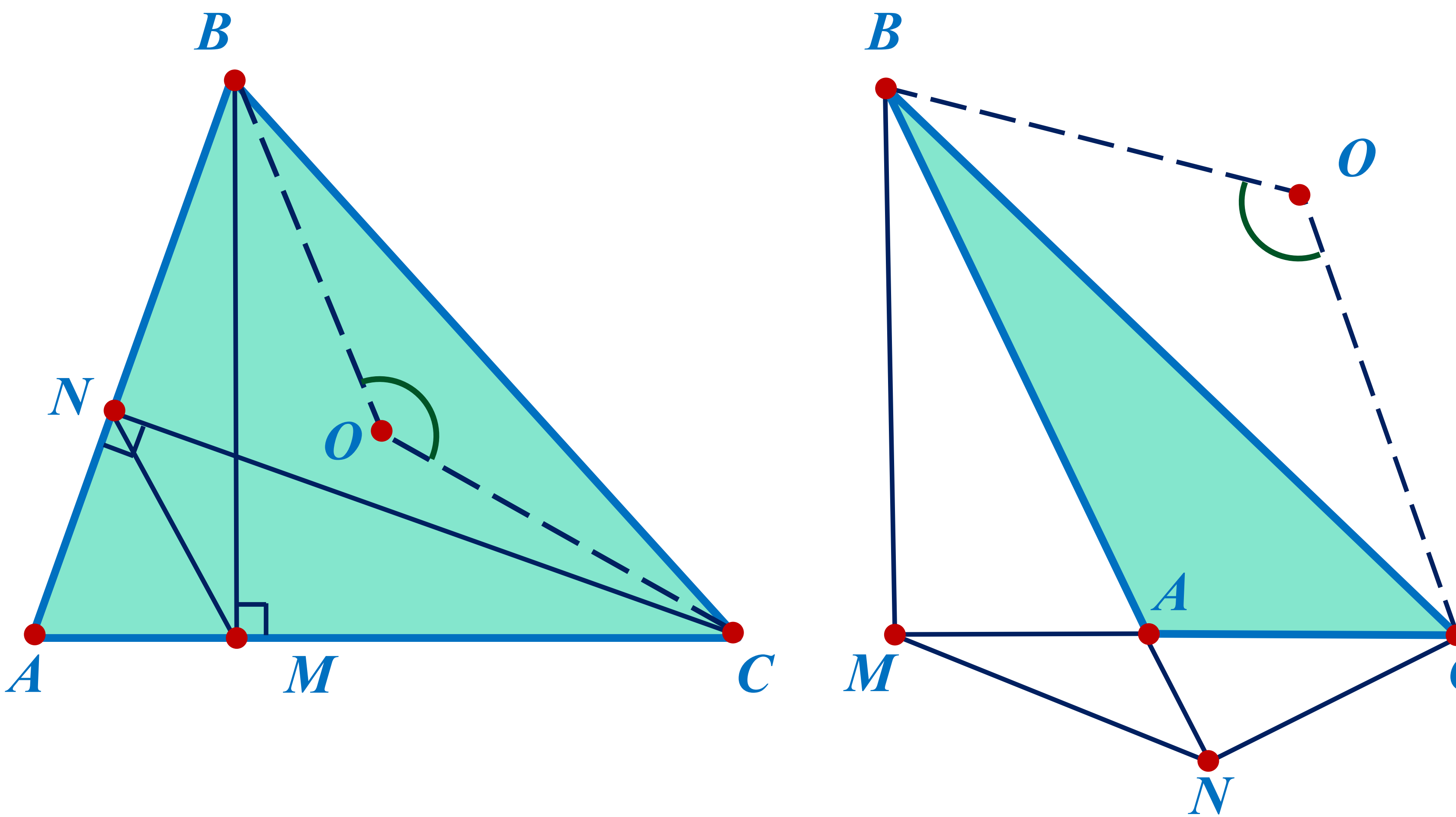
$$\angle AOC = 180° - \frac{180° - \angle B}{2},$$

$$\angle AOC = \frac{\angle B}{2} + 90°.$$

Остальные равенства доказывают аналогично.

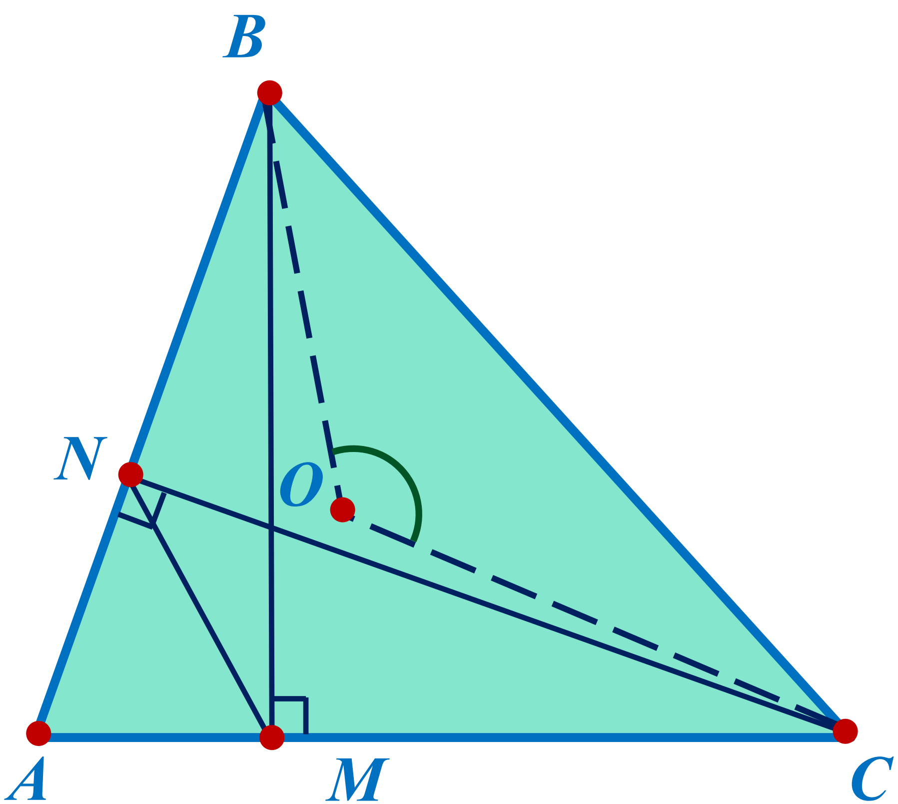
Пример 47. В треугольнике *ABC* проведены высоты *BM* и *CN*, *O* – центр вписанной окружности. Известно, что *BC = 24*, *MN = 12*.

Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *BOC*.

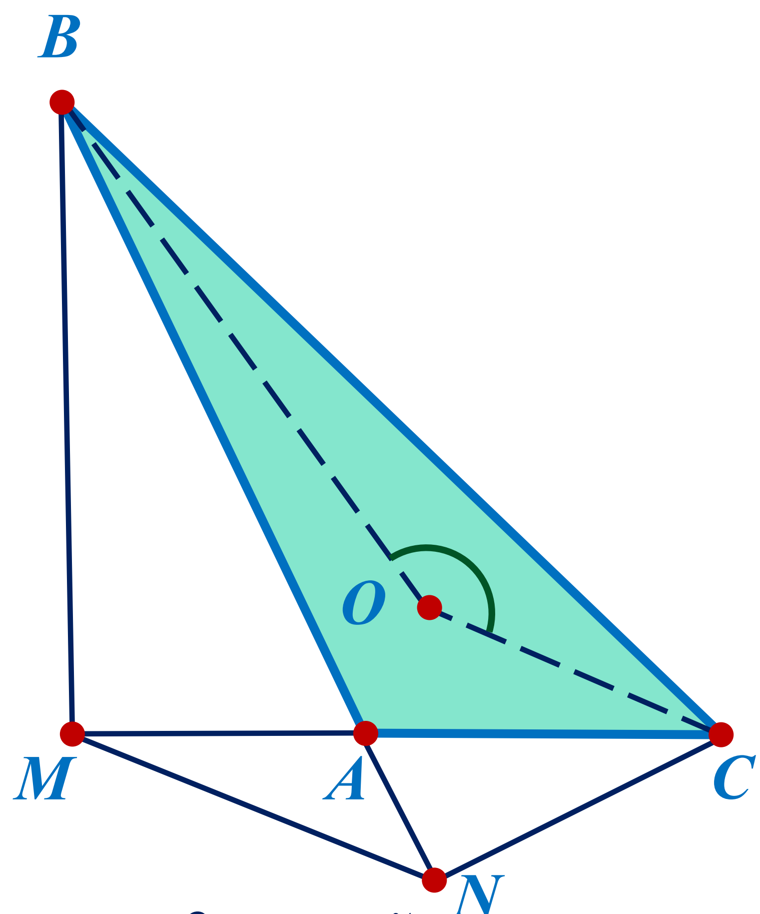


Пример 47. В треугольнике *ABC* проведены высоты *BM* и *CN*, *O* – центр вписанной окружности. Известно, что *BC = 24*, *MN = 12*.

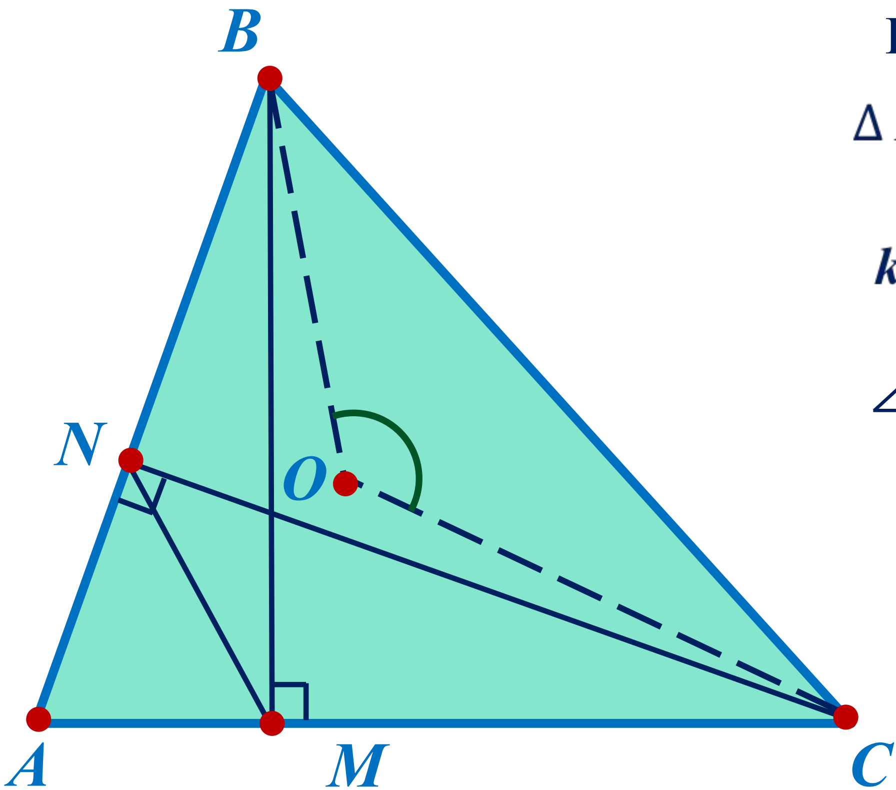
Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *BOC*.



1 случай



2 случай



Решение.

$\Delta AMN \sim \Delta ABC$ по 2-му признаку =>

$$k = \frac{MN}{BC} = \frac{MN}{BC} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = |\cos A|.$$

$$\angle A = 60° \quad \text{или} \quad \angle A = 120°.$$

$$\angle BOC = \frac{\angle A}{2} + 90°.$$

$$\sin \angle BOC = \sin\left(\frac{60^0}{2} + 90°\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

или

$$\sin \angle BOC = \sin\left(\frac{120^0}{2} + 90°\right) = \frac{1}{2}.$$

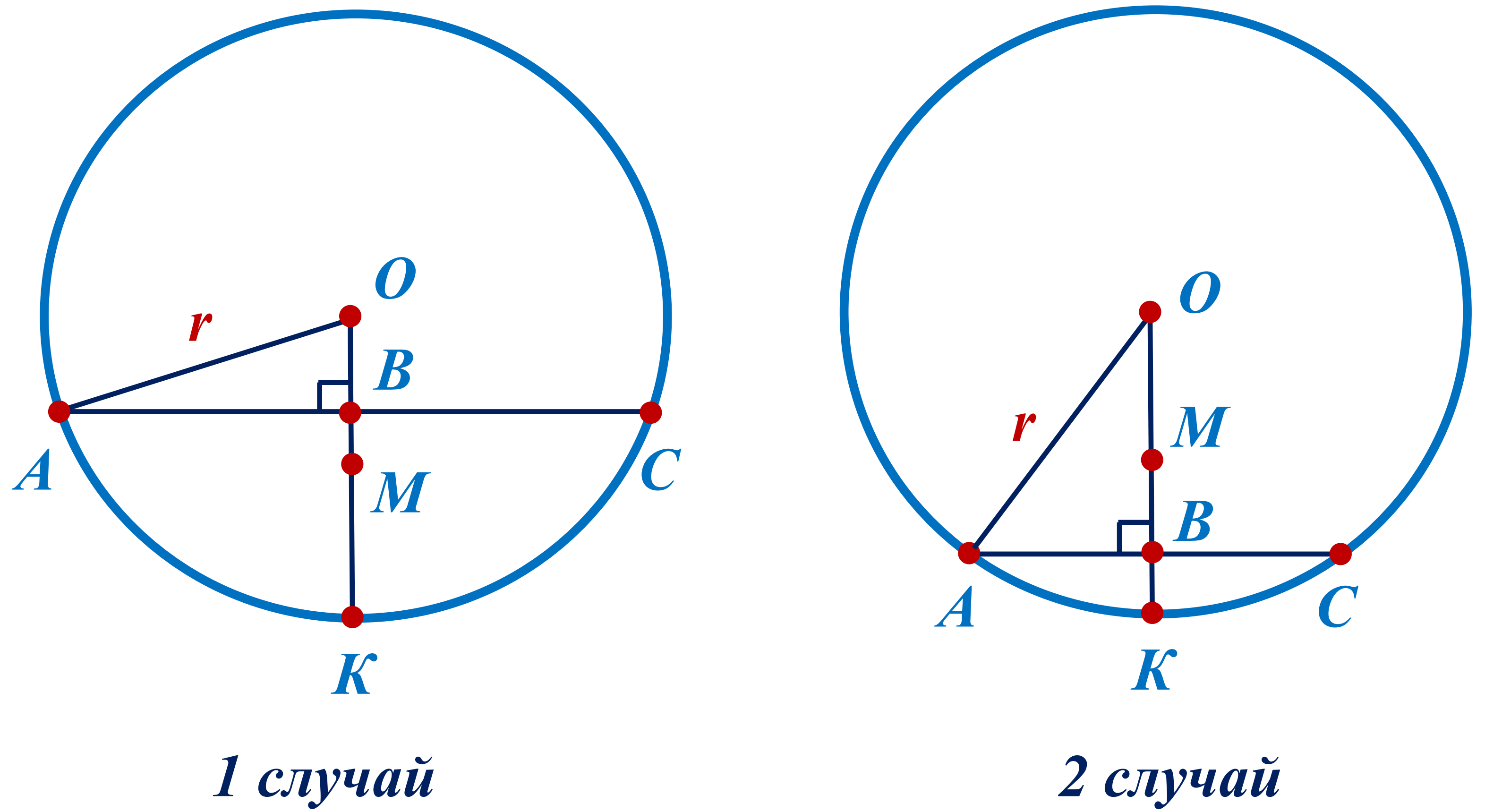
По следствие теоремы синусов

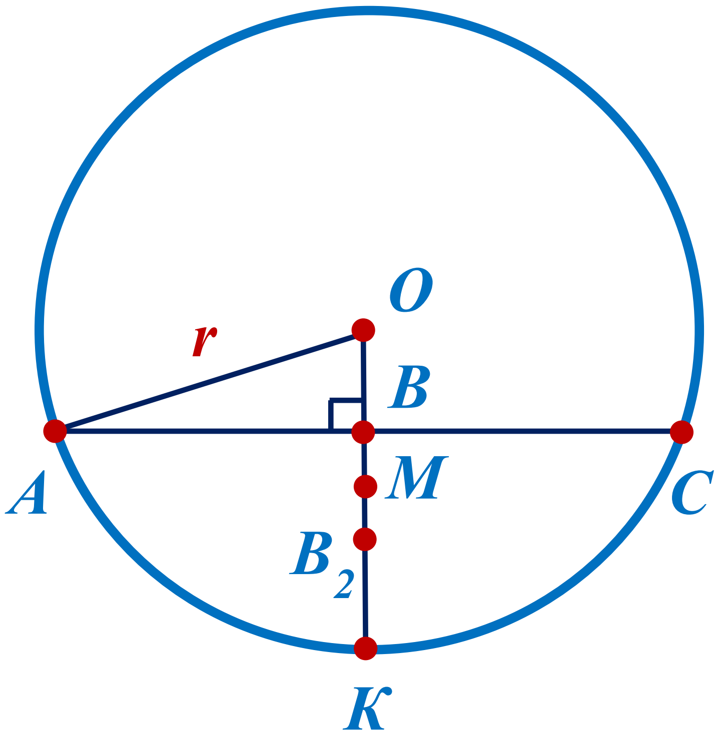
$$R = \frac{BC}{2\sin \angle BOC}.$$

$$R = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} \quad \text{или} \quad R = \frac{24}{1} = 24.$$

Ответ: $8\sqrt{3}$ или 24.

Пример 48. Дана окружность радиуса *13*. Точка *M* – середина радиуса *OK*. Хорда *AC* перпендикулярна радиусу *OK*. Найти расстояние *BM*, если известно, что $AB - BK = 4$.





Решение. Пусть $BM = x,$

тогда $OB = 6,5 - x.$

По теореме Пифагора для $\Delta\, AOB$

$$AB = \sqrt{169 - (6,5 - x)^2}\,.$$

$$BK = 6,5 + x, \quad AB = BK + 4\,.$$

$$\sqrt{169 - (6,5 - x)^2} = 10,5 + x.$$

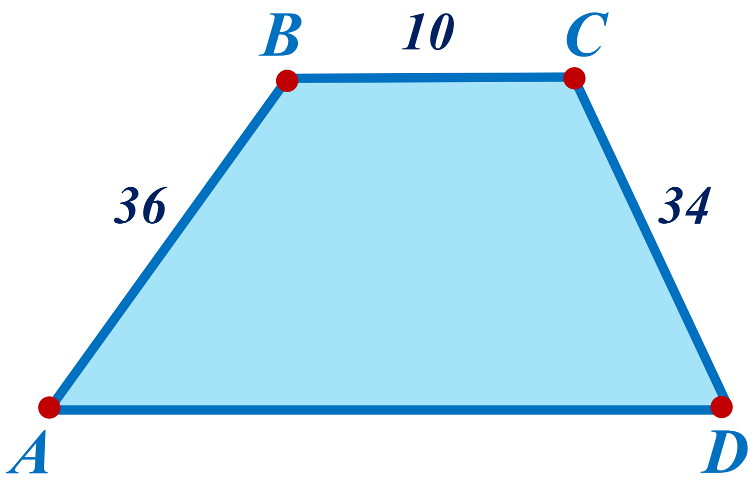
$$\left[\begin{array}{l} x = 1{,}5, \\ x = -5{,}5. \end{array}\right.$$

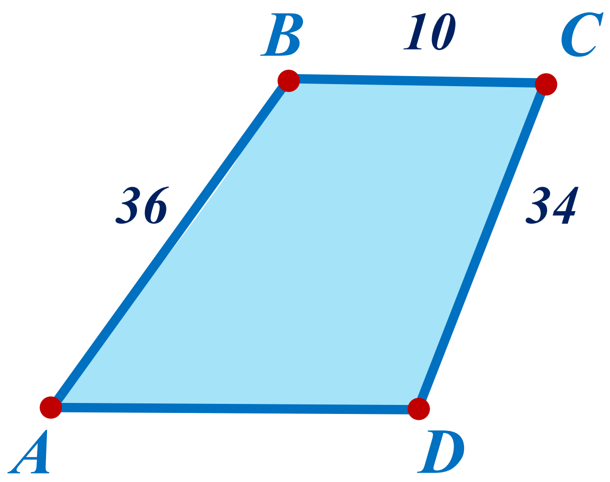
Интерпретируем отрицательный корень: точка B расположена между точками M и K, то есть отрезок MB откладывается в противоположном направлении.

Оба корня удовлетворяют решению задачи.

Ответ: ***1,5*** **или** ***5,5.***

Пример 49. Дана трапеция $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 36$, $CD = 34$ и верхним основанием $BC = 10$. Известно, что, $\cos\angle ABC = -\dfrac{1}{3}$. Найдите BD.



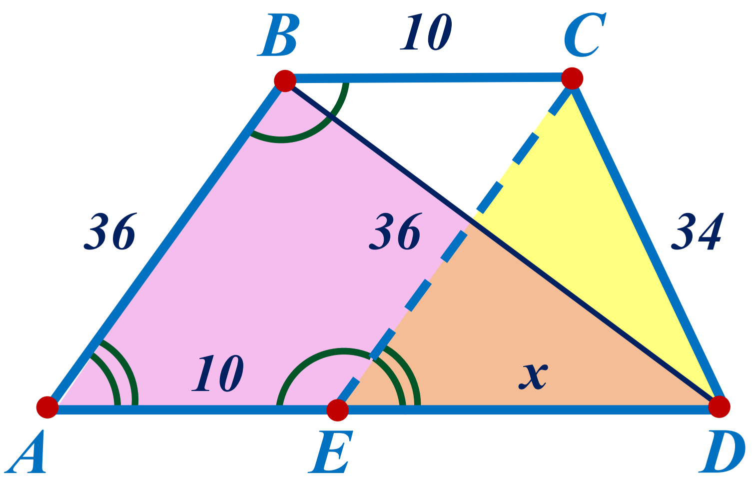


1 случай.

Угол ***ADC*** – острый.

2 случай.

Угол ***ADC*** – тупой.



Решение. $CE \parallel AB,\ E \in AD \ \Rightarrow$

$\Rightarrow ABCE$ – параллелограмм.

$$\angle AEC = \angle ABC,\ \angle DEC = 180° - \angle AEC,$$

$$\cos\angle DEC = \cos\angle DAB = \frac{1}{3}.$$

Пусть $ED = x$, по теореме косинусов в треугольнике DEC :

$$34^2 = 36^2 + x^2 - 2\cdot 36\cdot 34\cdot \frac{1}{3},$$

$$x^2 - 24x + 140 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 14, \\ x = 10. \end{array}\right.$$

Условию задачи соответствуют два чертежа. В одном случае угол *CDE* острый, в другом – тупой.

1. Пусть $x = 14$, тогда $AD = 24$.

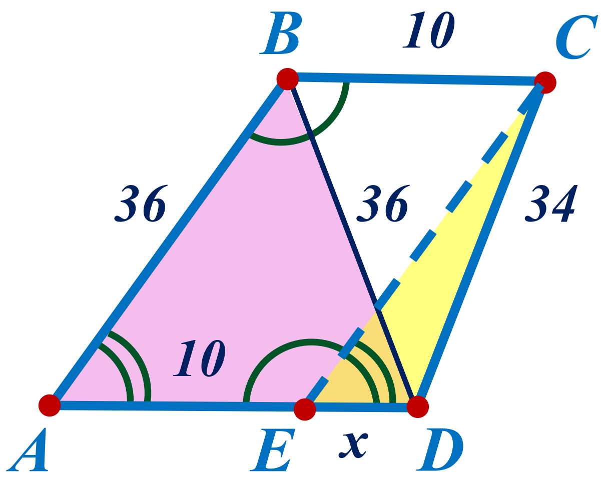
По теореме косинусов в $\Delta\ ABD$:

$$BD^2 = 36^2 + 24^2 - 2\cdot 36\cdot 24\cdot \frac{1}{3},$$

$$BD^2 = 1296 \ \Rightarrow \ BD = 36.$$

$$EC^2 - ED^2 - CD^2 = 36^2 - 14^2 - 34^2 = -56 < 0 \Rightarrow$$

угол *D* – острый.



2. Пусть $x = 10$, тогда $AD = 20$.

По теореме косинусов в $\Delta\, ABD$:

$$BD^2 = 36^2 + 20^2 - 2 \cdot 36 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3},$$

$$BD^2 = 1216 \;\Rightarrow\; BD = 8\sqrt{19}.$$

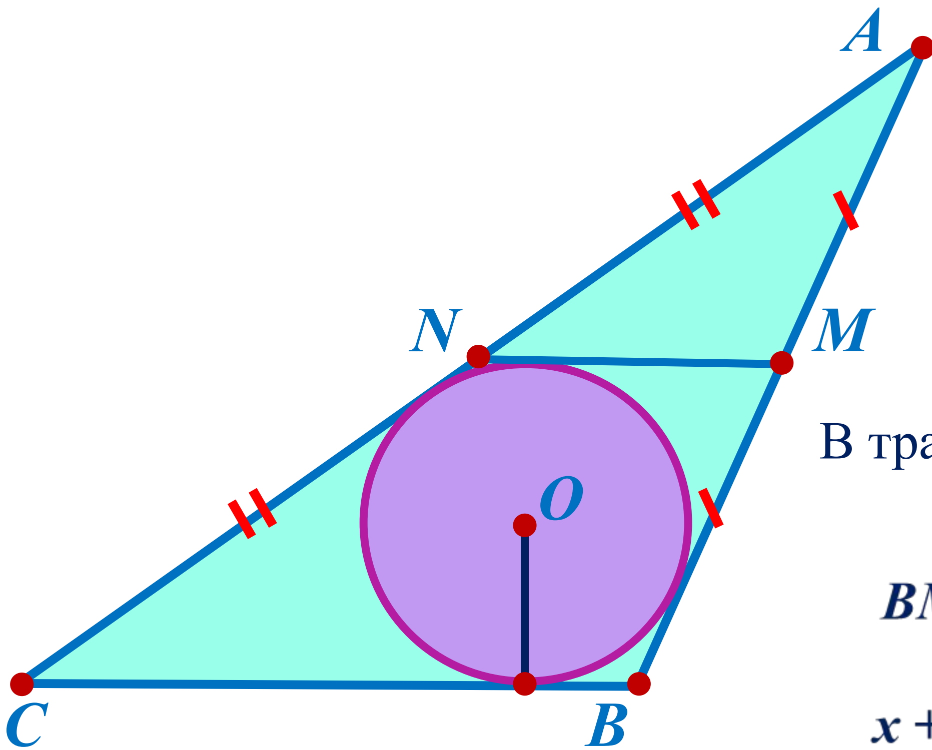
$$EC^2 - ED^2 - CD^2 = 36^2 - 10^2 -$$

$$- 34^2 = 40 > 0 \Rightarrow$$

угол D – тупой.

Ответ: 36 или $8\sqrt{19}$.

Пример 50. (ЕГЭ, 2011). Окружность, вписанная в треугольник *ABC*, площадь которого равна *36*, касается средней линии, параллельной стороне *AB*. Известно, что *BC* = 9. Найти сторону *AB*.



Решение. *MN* – средняя линия =>

$$MN \parallel BC,\ MN = \frac{1}{2}BC = \frac{9}{2}.$$

Пусть $AB = x$, $AC = y$,

p – полупериметр $\Delta\, ABC$.

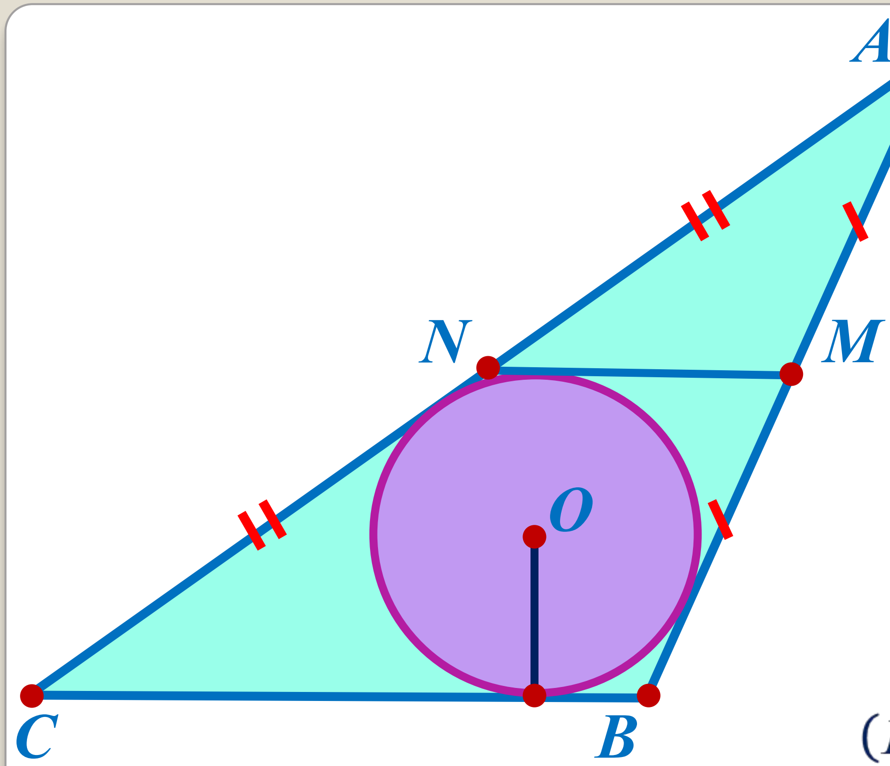
В трапецию ***BMNC*** вписана окружность

<=

$$BM + CN = BC + MN = 9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}.$$

$$x + y = AB + AC = 2BM + 2CN = 27.$$

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{x + y + 9}{2} = 18.$$



По формуле Герона

$$S_{ABCD} = \sqrt{p \cdot (p-x) \cdot (p-y) \cdot (p-9)} =$$

$$= \sqrt{18 \cdot (18-x) \cdot (18-y) \cdot (18-9)} =$$

$$= 9\sqrt{2 \cdot (18-x) \cdot (18-y)} = 36.$$

$$\Leftarrow$$

$$\sqrt{2 \cdot (18-x) \cdot (18-y)} = 4.$$

$(18-x) \cdot (18-y) = 8$ и $x + y = 27$ =>

$$(18-x) \cdot (18-27+y) = 8,$$

$$x^2 - 27x + 170 = 0,$$

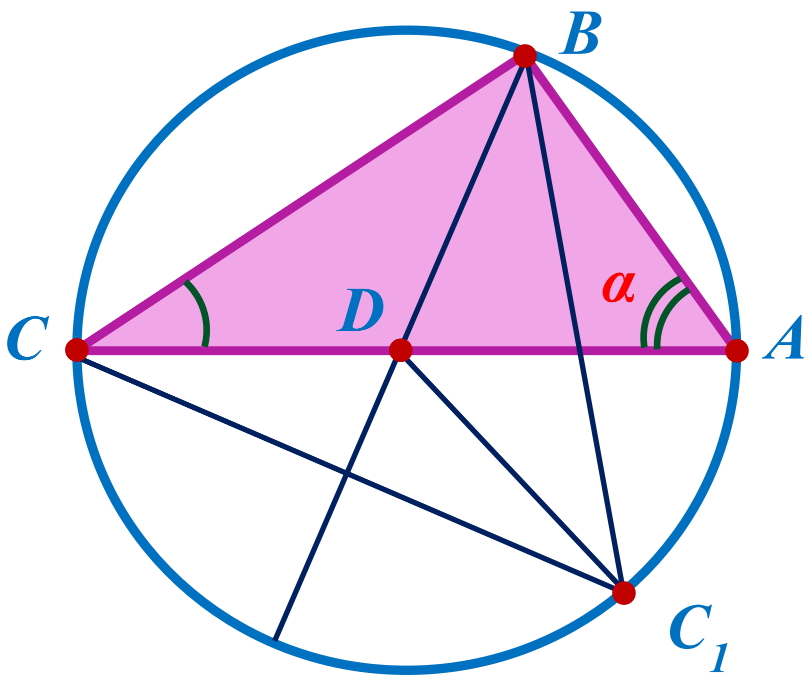
$$\left[\begin{array}{l} x = 17, \\ x = 10. \end{array}\right.$$

$y = 17$ при $x = 10$ и
$y = 10$ при $x = 17$.

Два ответа означают, что условию задачи соответствует треугольник со сторонами *10*, *17*, *9*.
Полученные значения x соответствуют двум способам обозначения вершин буквами.

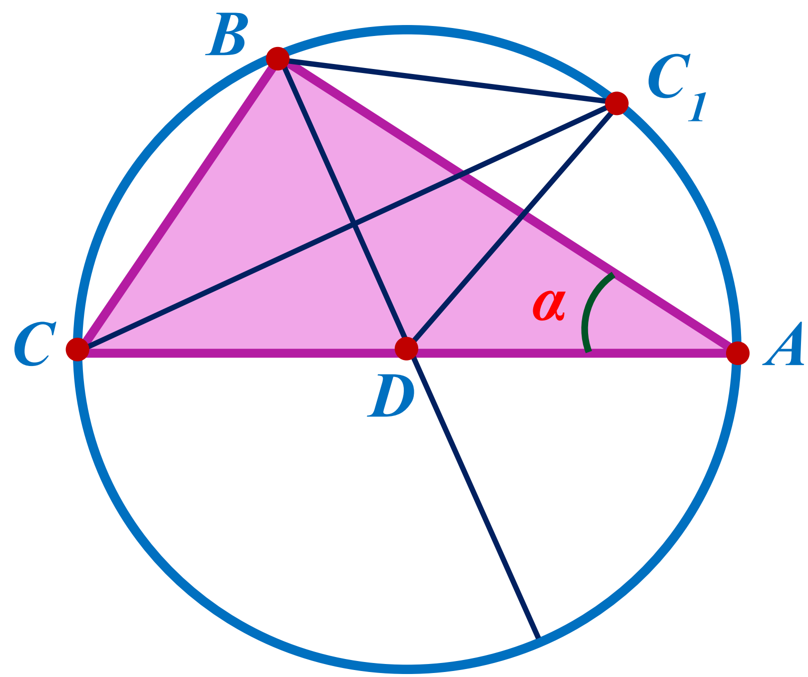
Ответ: *10* или *17*.

Пример 51. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B и углом $\boldsymbol{\alpha}$ при вершине A. Точка D – середина гипотенузы. Точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите угол AC_1B.



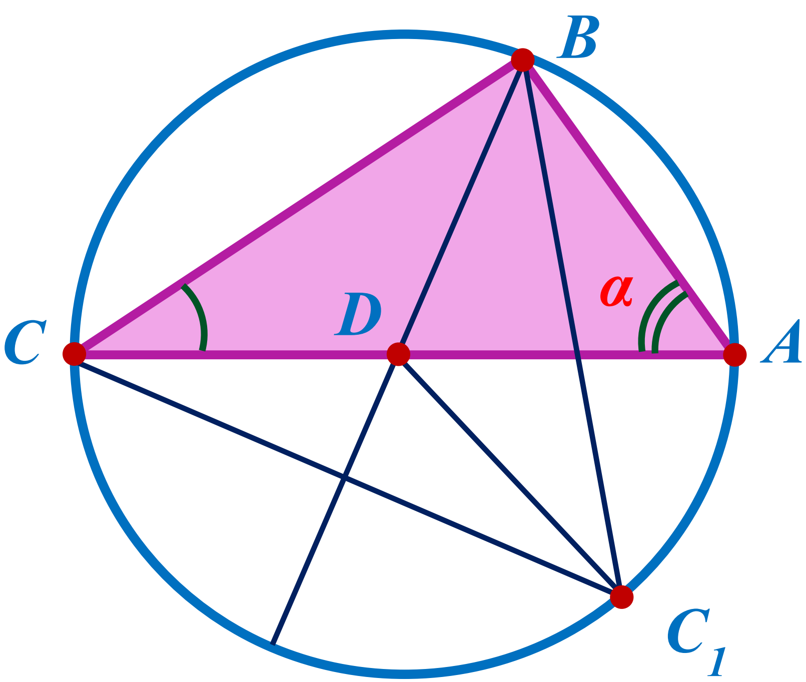
1 случай

$45^0 < \alpha < 90^0$



2 случай

$0^0 < \alpha < 45^0$



Решение. $BD \perp_{ср} CC_1 \Rightarrow DC = DC_1$.

Точка D – центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника.

$DC = DB = DA = R \Rightarrow C_1 \in окр\ (D; R)$.

1 случай. $45° < \alpha < 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BDC = 2\angle BAC = 2\alpha > 90°$.

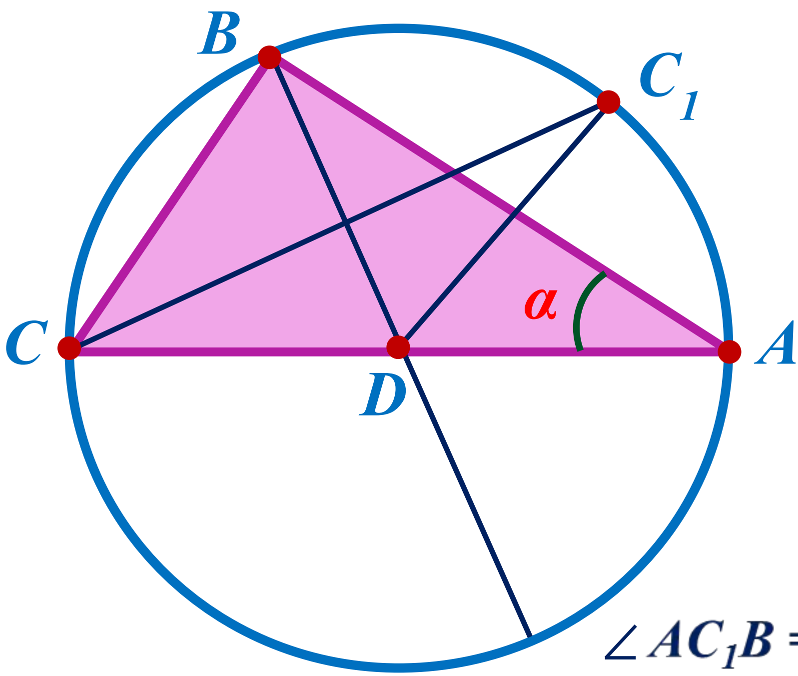
Точки C и C_1 расположены по одну сторону от хорды AB.

ΔABC: $\angle ABC = 90°$, $\angle BAC = \alpha$,

$\angle BCA = 90° - \alpha$.

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

$\angle AC_1B = \angle BCA = \underline{90° - \alpha}$.



2 случай . $\alpha < 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BDC = 2\angle BAC = 2\alpha < 90°.$

Точки C и C_1 расположены по разные стороны от хорды AB.

Четырехугольник AC_1BC вписан в окружность, поэтому

$\angle AC_1B = 180° - \angle BCA = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha.$

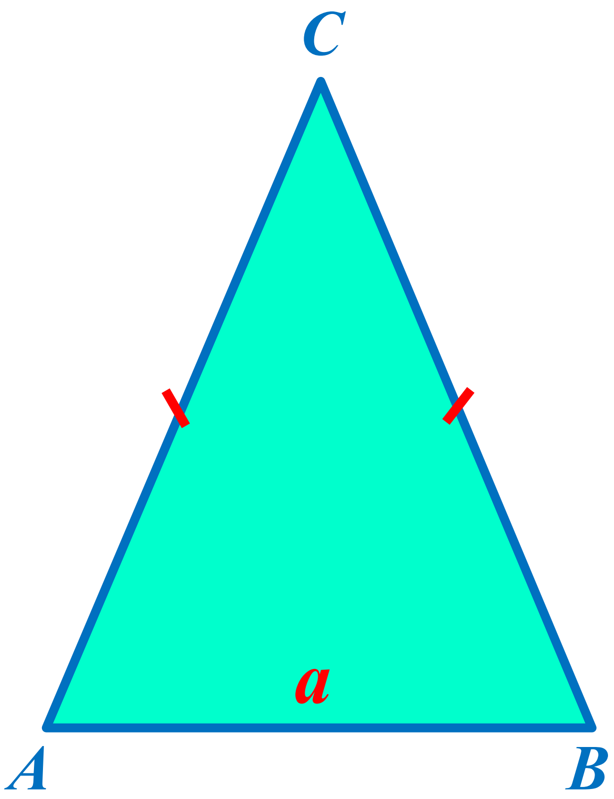
3 случай. Если $\alpha = 45°$, то центральный угол $\angle BDC = 2\angle BAC = 90°$. В этом случае ось BD перпендикулярна гипотенузе AC. Точка C отобразится в точку A, и угол AC_1B не будет определён.

Ответ: $90° + \alpha$, если $0° < \alpha < 45°$;

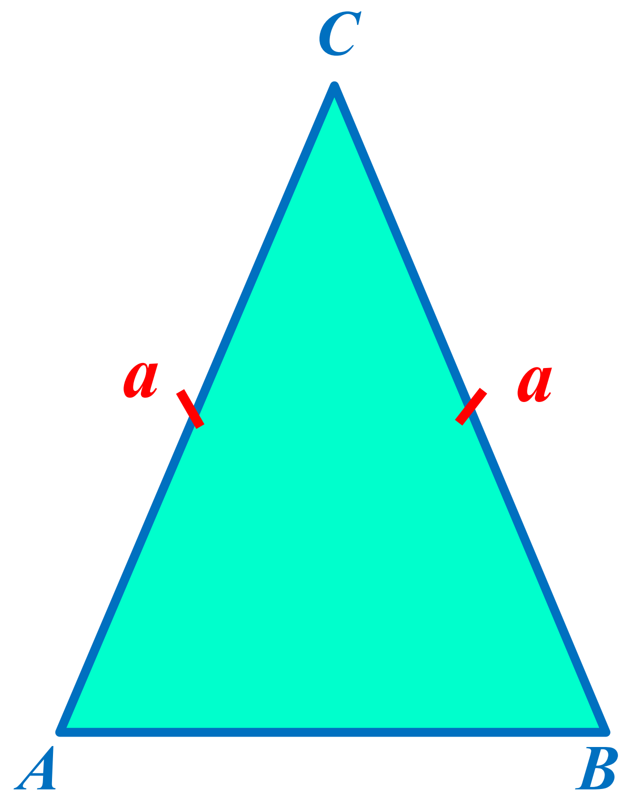
$90° - \alpha$, если $45° < \alpha < 90°$;

при $\alpha = 45°$ $C \equiv A$ и угол AC_1B не определен.

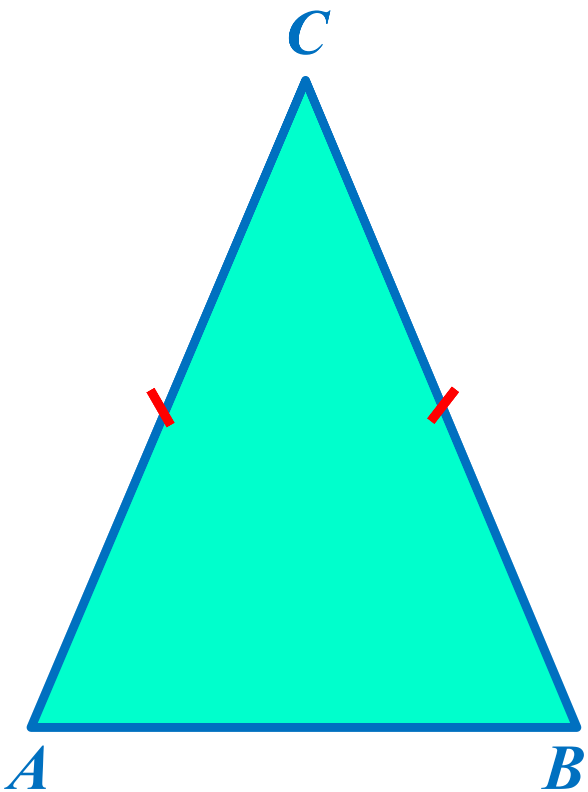
Пример 52. Периметр равнобедренного треугольника равен Р, одна из его сторон равна а. Найдите вторую сторону треугольника.



1 случай



2 случай



Решение. $AB = a \Rightarrow AC = BC = \dfrac{P-a}{2}.$

Используя неравенство треугольника, получаем систему

$$\begin{cases} a < \dfrac{P-a}{2} + \dfrac{P-a}{2}, \\ \dfrac{P-a}{2} < \dfrac{P-a}{2} + a; \end{cases} \qquad \begin{cases} a < \dfrac{P}{2}, \\ a > 0. \end{cases}$$

Пусть $AC = BC = a \Rightarrow AB = \dfrac{P-a}{2}.$

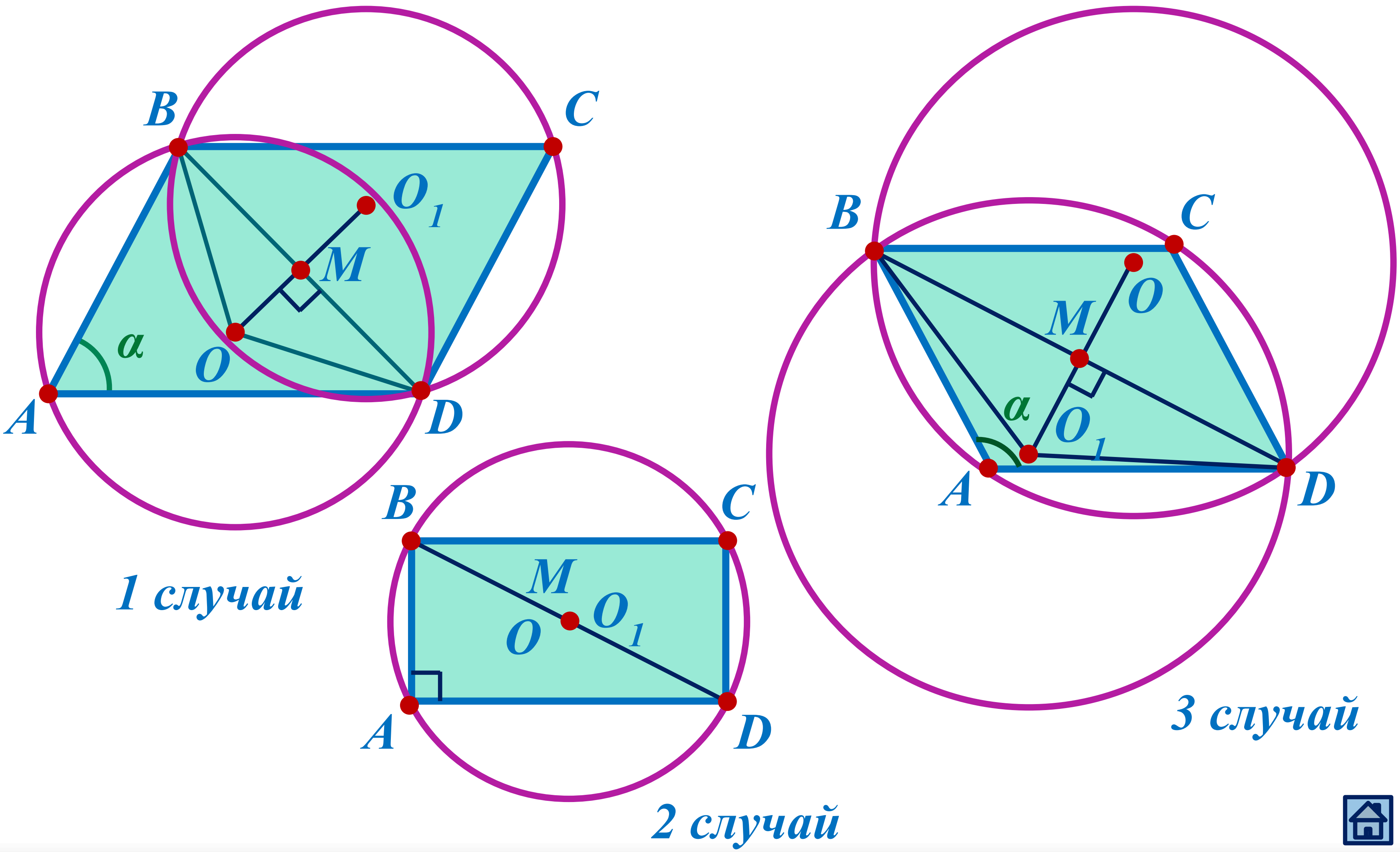
$$\begin{cases} P - 2a < a + a, \\ a < P - 2a + a; \end{cases} \qquad \begin{cases} a > \dfrac{P}{4}, \\ a < \dfrac{P}{2}. \end{cases}$$

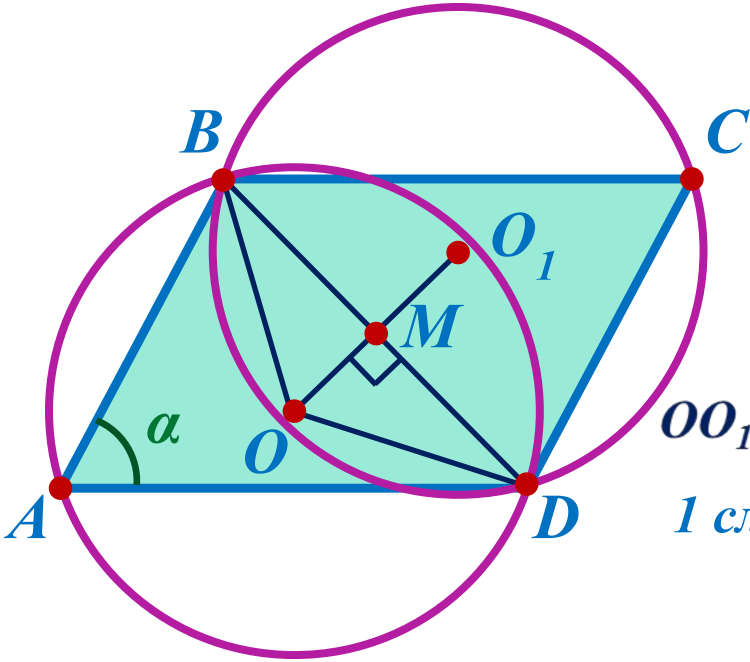
Ответ: если $0 < a < \dfrac{P}{4}$, то одно решение $a, \dfrac{P-a}{2}, \dfrac{P-a}{2};$

если $\dfrac{P}{4} < a < \dfrac{P}{2}$, то два решения $a, \dfrac{P-a}{2}, \dfrac{P-a}{2}$ или $a, a, \dfrac{P-a}{2};$

при $a \leq 0$ или при $a \geq \dfrac{P}{2}$ решений нет.

Пример 53. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$, и $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.





Решение. $\Delta\, DAB = \Delta\, BCD$.

Поэтому по разные стороны от прямой BD расположены центры O и O_1 описанных около них окружностей.

$OO_1 \perp_{ср} BD \Rightarrow OO_1 = 2OM,\ M \in BD,\ BM = MD.$

1 случай. $\alpha < 90^0 \Rightarrow O$ – внутри $\Delta\, DAB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle\, BOM = \frac{1}{2}\angle BOD = \alpha.$$

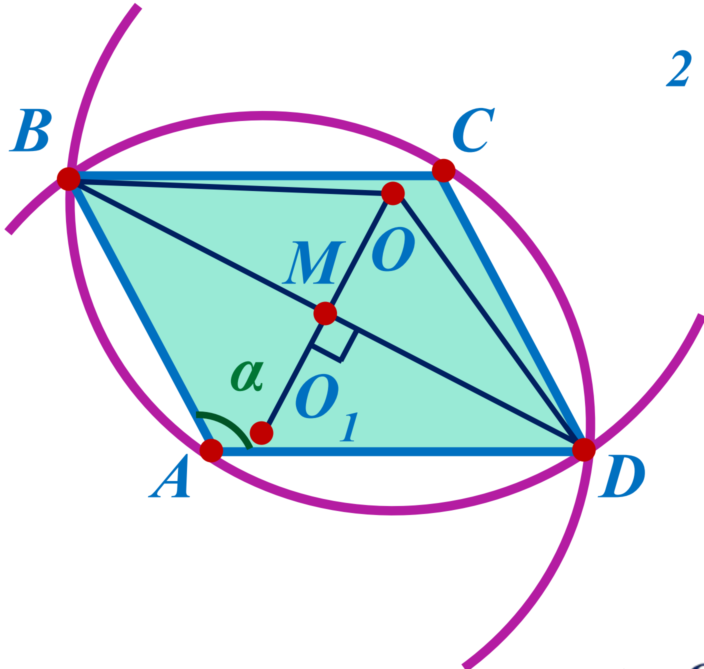
$\Delta\, BOM$: $OM = BM \cdot ctg\, \alpha.$

$OO_1 = 2OM = 2\, BM \cdot ctg\, \alpha = BD \cdot ctg\, \alpha.$

$\Delta\, DAB$ по теореме косинусов

$$BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}.$$

$$\Rightarrow OO_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot ctg\, \alpha.$$



2 случай. $\alpha > 90° \Rightarrow O$ – вне $\Delta\, DAB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BOD = 360° - 2\alpha.$$

$$\Rightarrow \angle BOM = \frac{1}{2}\angle BOD = 180° - \alpha.$$

$$\Delta\, BOM:\ OM = BM \cdot ctg\,(180° - \alpha),$$

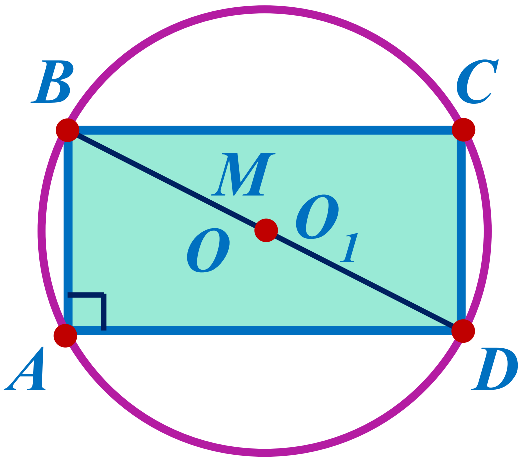
$$OM = BM \cdot (-ctg\,\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OO_1 = 2OM = 2\,BM \cdot (-ctg\,\alpha) = BD \cdot (-ctg\,\alpha).$$

$\Delta\, DAB$ по теореме косинусов

$$BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}\,.$$

$$\Rightarrow OO_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot (-ctg\,\alpha).$$



2 случай. $\alpha = 90° \Rightarrow O \equiv O_1 \Rightarrow OO_1 = 0.$

Ответ: если $0° < \alpha < 90°$, то $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot ctg\,\alpha$;

если $\alpha = 90°$, то 0;

если $90° < \alpha < 180°$, то $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot (-ctg\,\alpha)$;

в общем виде $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot |ctg\,\alpha|$.

ПГ НГ