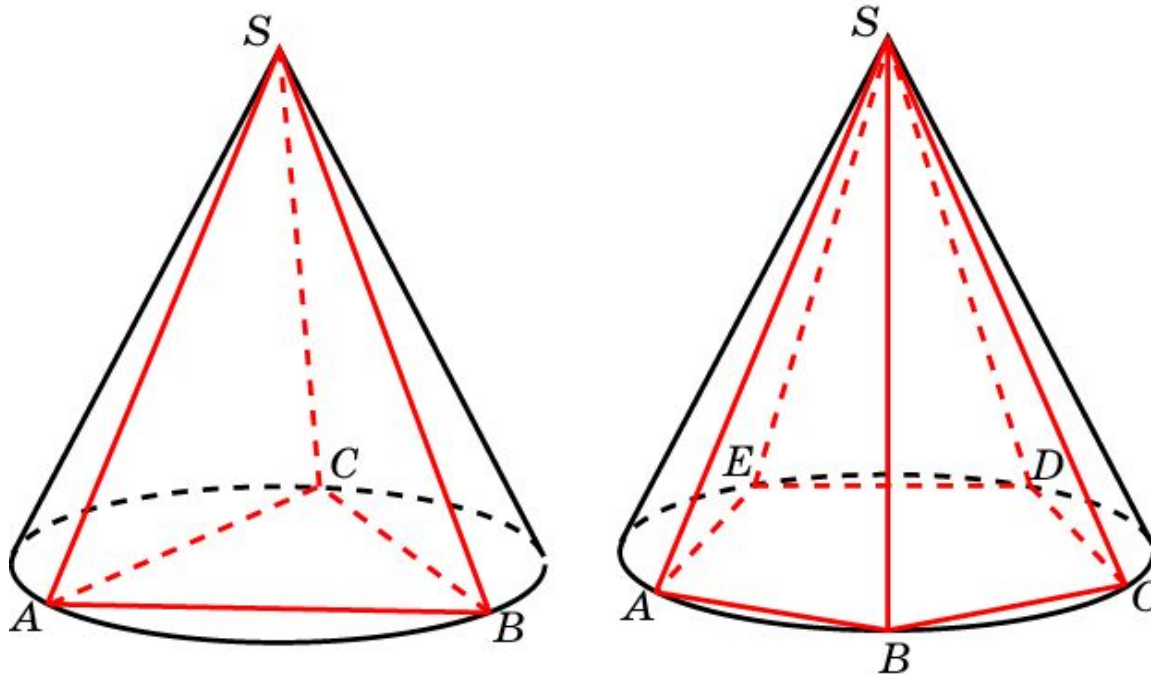


# Пирамида, вписанная в конус

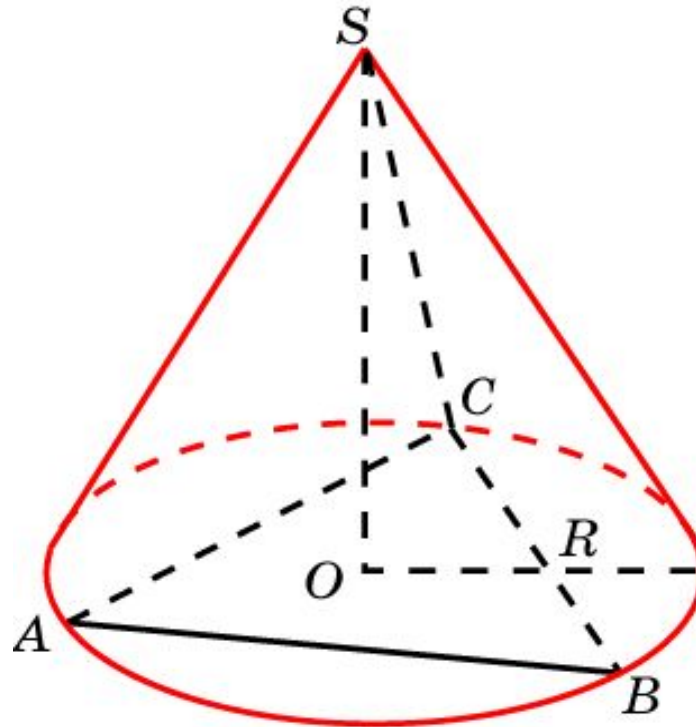
Пирамида называется вписанной в конус, если ее основание вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус называется описанным около пирамиды.

Около пирамиды можно описать конус тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность.



# Упражнение 1

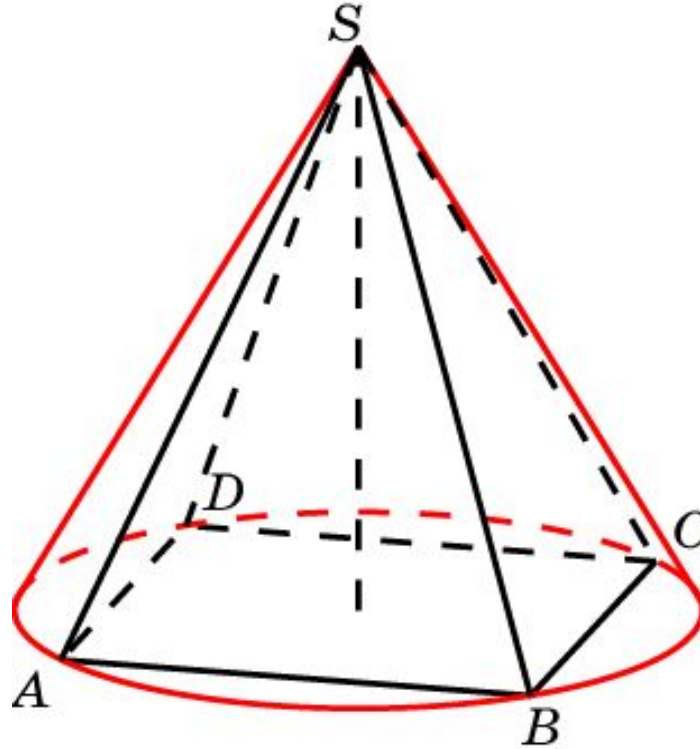
Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус, радиус основания которого равен 1.



Ответ:  $\sqrt{3}$ .

## Упражнение 2

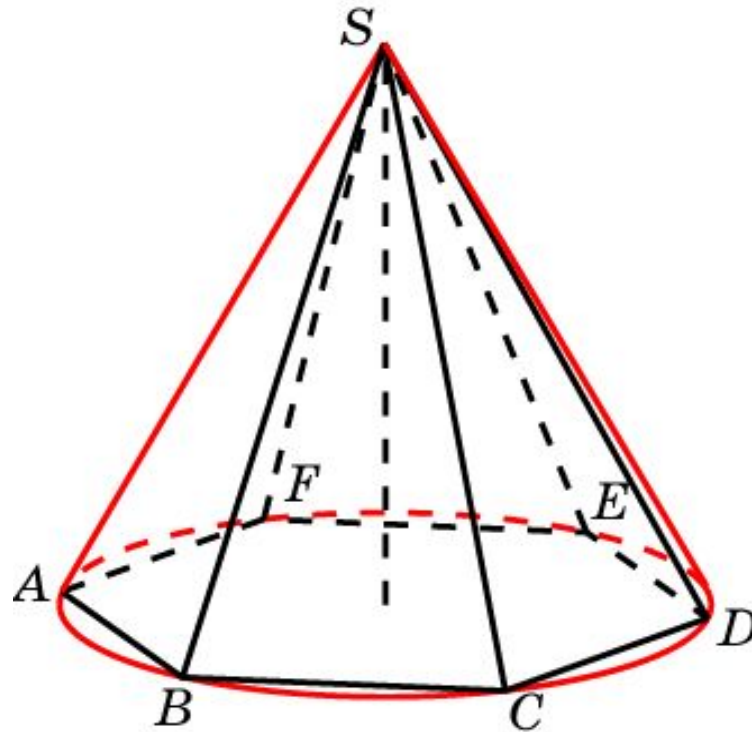
Найдите сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в конус, радиус основания которого равен 1.



Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

## Упражнение 3

Найдите сторону основания правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус, радиус основания которого равен 1.

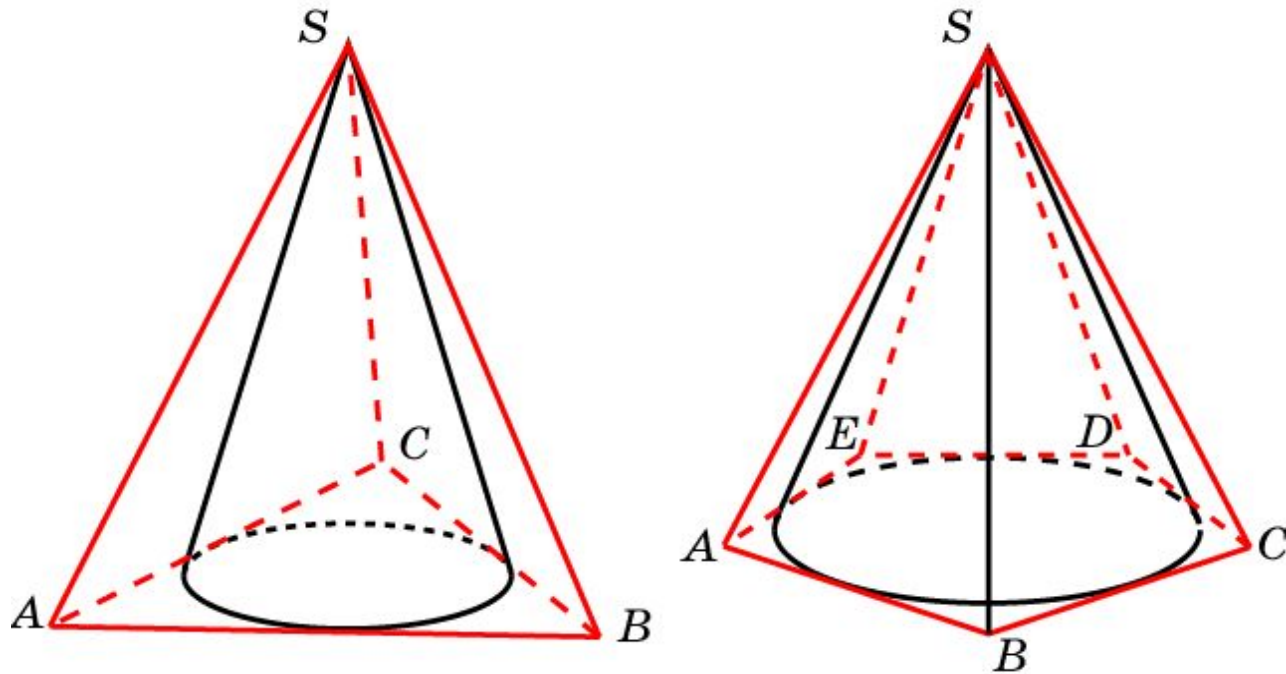


Ответ: 1.

# Пирамида, описанная около конуса

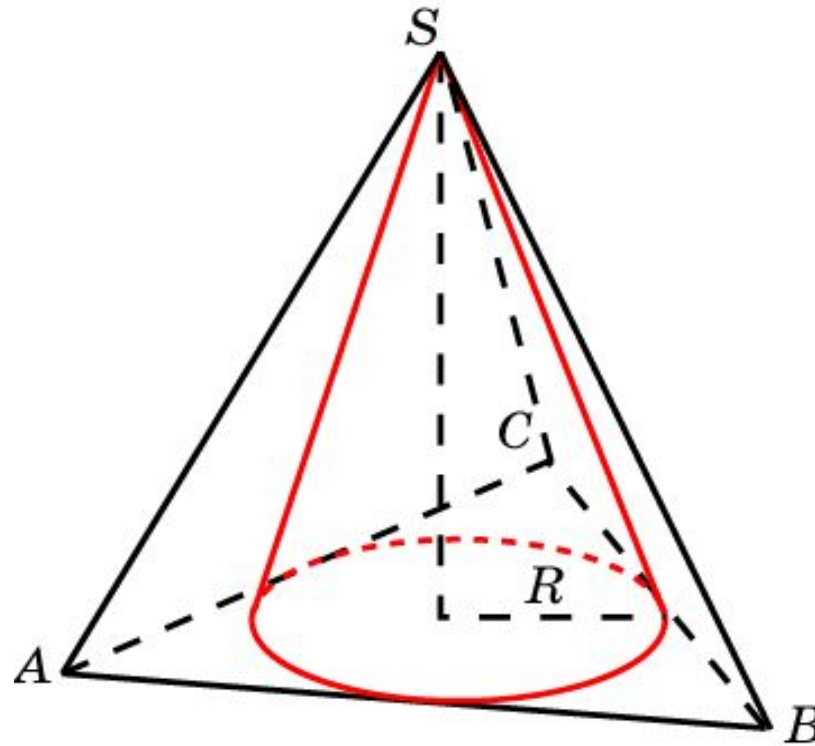
Пирамида называется описанной около конуса, если ее основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус называется вписанным в пирамиду.

В пирамиду можно вписать конус тогда и только тогда, когда в ее основание можно вписать окружность.



# Упражнение 1

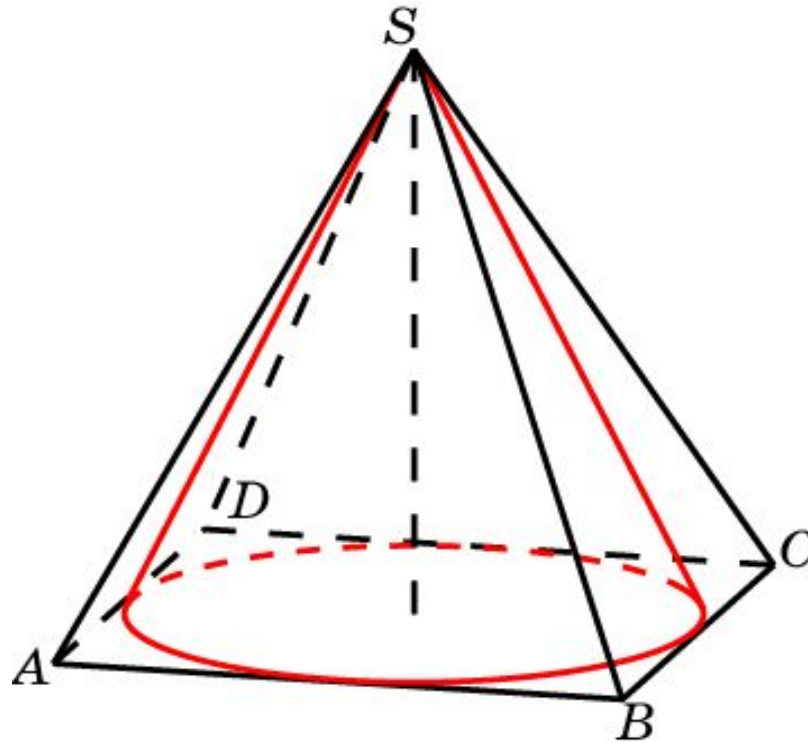
Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды, описанной около конуса, радиус основания которого равен 1.



Ответ:  $2\sqrt{3}$ .

## Упражнение 2

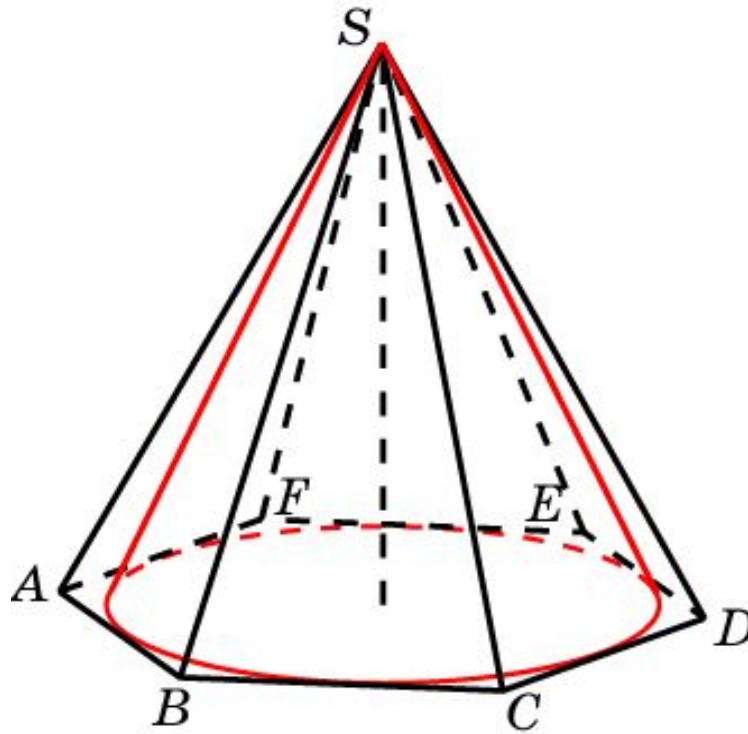
Найдите сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, описанной около конуса, радиус основания которого равен 1.



Ответ: 2.

## Упражнение 3

Найдите сторону основания правильной шестиугольной пирамиды, описанной около конуса, радиус основания которого равен 1.

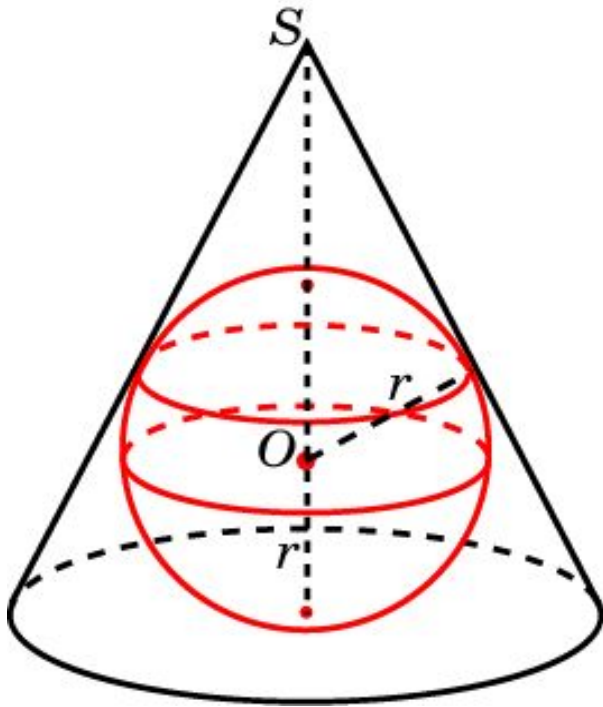


Ответ:  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .



# Сфера, вписанная в конус

Сфера называется вписанной в конус, если она касается его основания и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом конус называется описанным около сферы.



В любой конус (прямой, круговой) можно вписать сферу. Ее центр находится на высоте конуса, а радиус равен радиусу окружности, вписанной в треугольник, являющийся осевым сечением конуса.

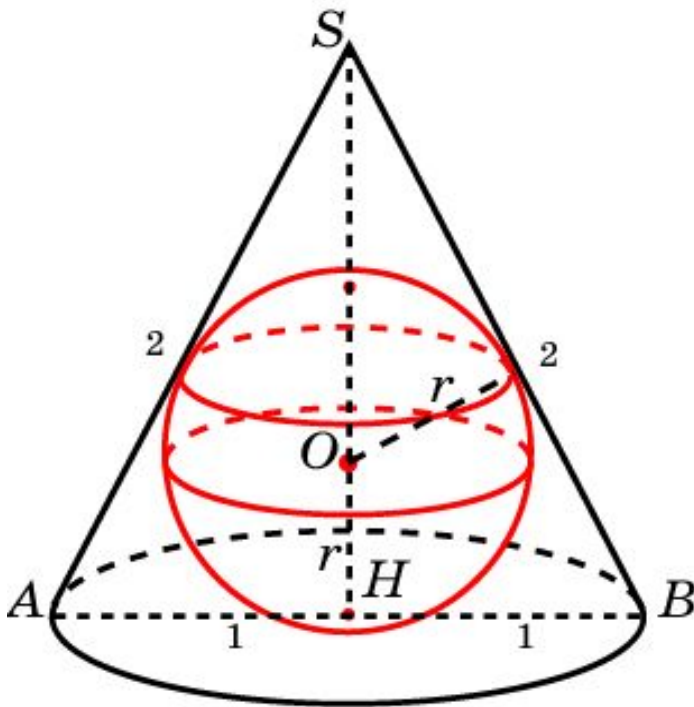
Напомним, что радиус  $r$  окружности, вписанный в треугольник, находится по формуле

$$r = \frac{S}{p},$$

где  $S$  – площадь,  $p$  – полупериметр треугольника.

# Упражнение 1

В конус, радиус основания которого равен 1, а образующая равна 2, вписана сфера. Найдите ее радиус.

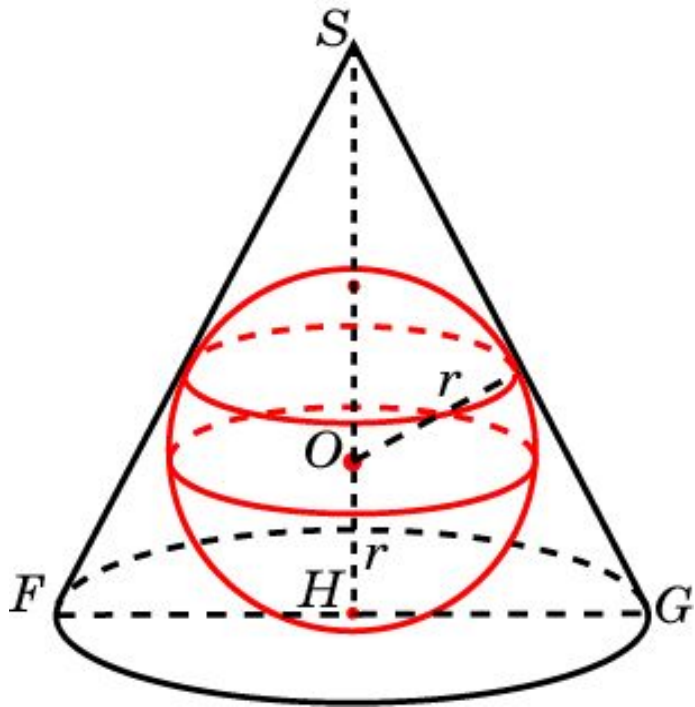


**Решение.** Треугольник  $SAB$  равнобедренный. Высота  $SH$  равна  $\sqrt{3}$ . Площадь  $S$  равна  $\sqrt{3}$ . Полупериметр  $p$  равен  $3$ . По формуле  $r = S/p$  получаем

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

## Упражнение 2

В конус, радиус основания которого равен 2, вписана сфера радиуса 1. Найдите высоту конуса.



**Решение.** Обозначим  $h$  высоту  $SH$  конуса. Из формулы  $r = S/p$  имеем:

$$h = \frac{2rp}{a},$$

где  $r = 1$ ,  $a = FG = 4$ ,  $p = 2 + \sqrt{4 + h^2}$ .

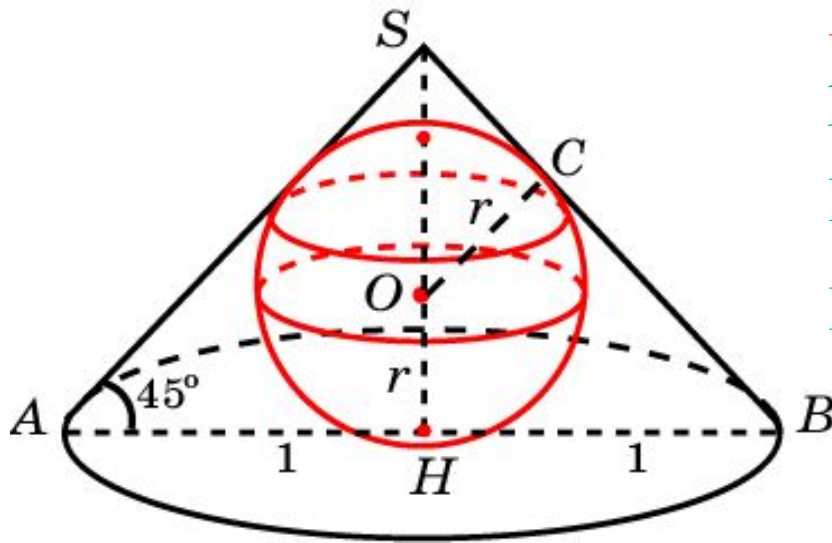
Решая уравнение  $2h = 2 + \sqrt{4 + h^2}$ ,

находим

$$h = \frac{8}{3}.$$

## Упражнение 3

Радиус основания конуса равен 1. Образующая наклонена к плоскости основания под углом  $45^\circ$ . Найдите радиус вписанной сферы.



**Решение.** Высота  $SH$  конуса равна 1. Образующая  $\sqrt{2}$ .  
Полупериметр  $p$  равен  $1 + \sqrt{2}$ .

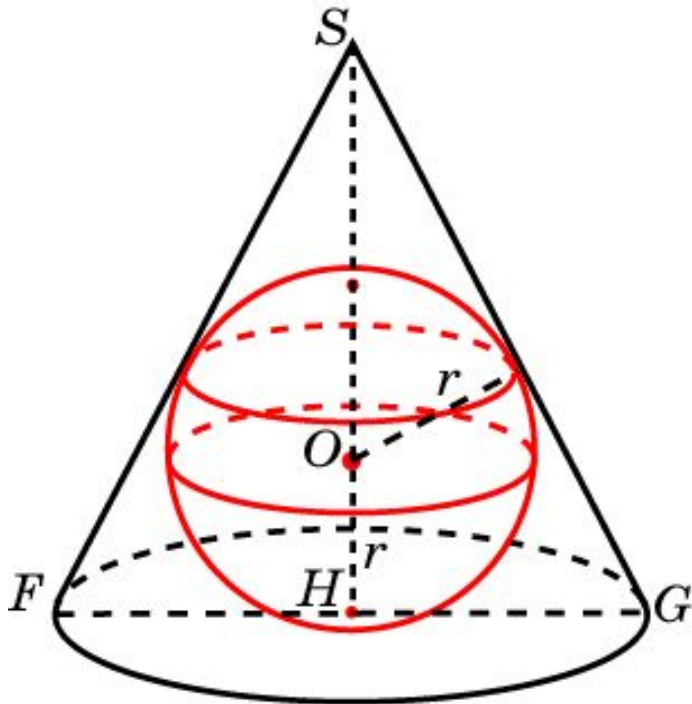
По формуле  $r = S/p$ , имеем

$$r = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

**Ответ:**  $r = \sqrt{2} - 1$ .

## Упражнение 4

Высота конуса равна 8, образующая 10. Найдите радиус вписанной сферы.

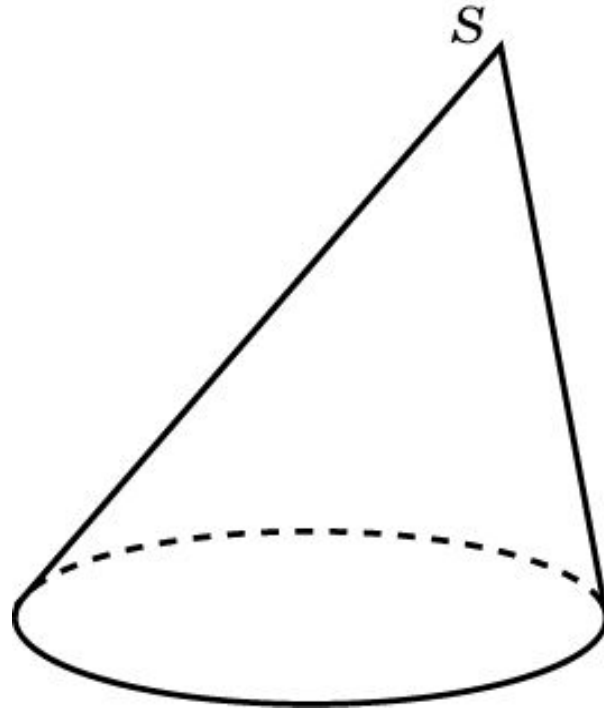


**Решение.** Радиус основания конуса равен 6. Площадь треугольника  $SFG$  равна 48, полупериметр 16. По формуле  $r = S/p$  имеем  $r = 3$ .

**Ответ:**  $r = 3$ .

# Упражнение 5

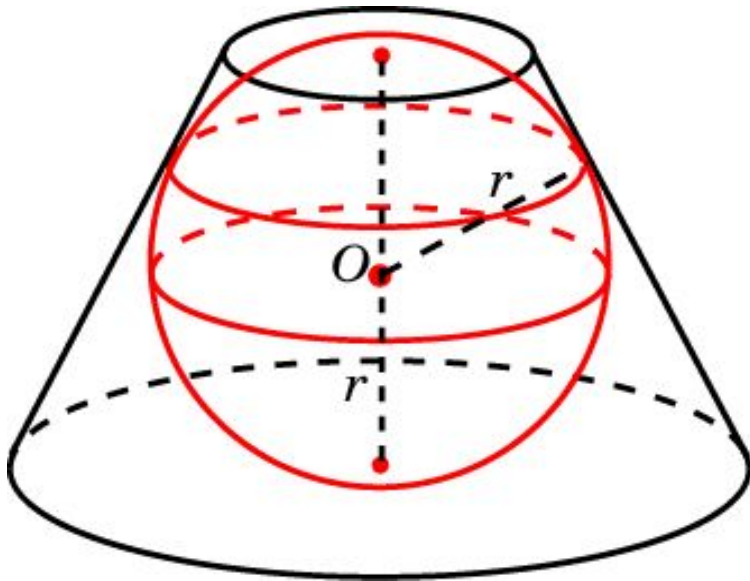
Можно ли вписать сферу в наклонный конус?



Ответ: Нет.

# Сфера, вписанная в усеченный конус

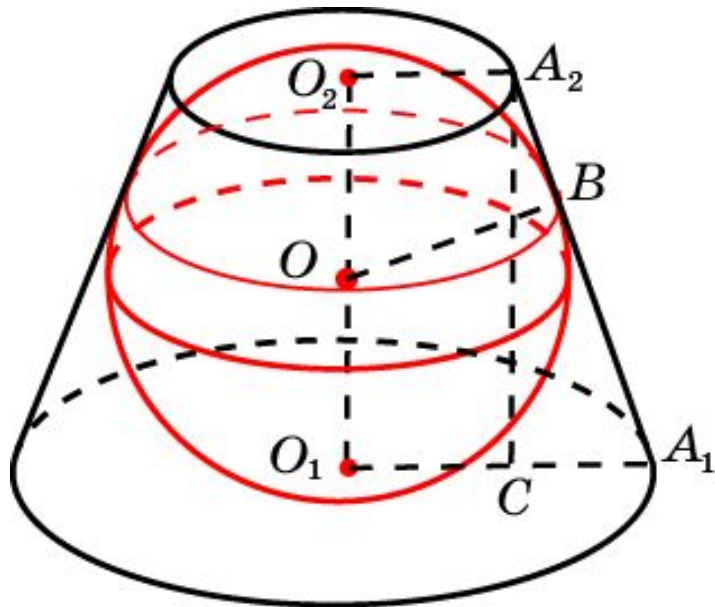
Сфера называется вписанной в усеченный конус, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом усеченный конус называется описанным около сферы.



В усеченный конус можно вписать сферу, если в его осевое сечение можно вписать окружность. Радиус этой окружности будет равен радиусу вписанной сферы.

# Упражнение 1

В усеченный конус, радиусы оснований которого равны 2 и 1, вписана сфера. Найдите радиус сферы и высоту усеченного конуса.



**Решение.** Имеем:  $A_1B = A_1O_1 = 2$ ,  $A_2B = A_2O_2 = 1$ . Следовательно,  $A_1A_2 = 3$ ,  $A_1C = 1$ .

$$O_1O_2 = A_2C = \sqrt{A_1A_2^2 - A_1C^2} = 2\sqrt{2}.$$

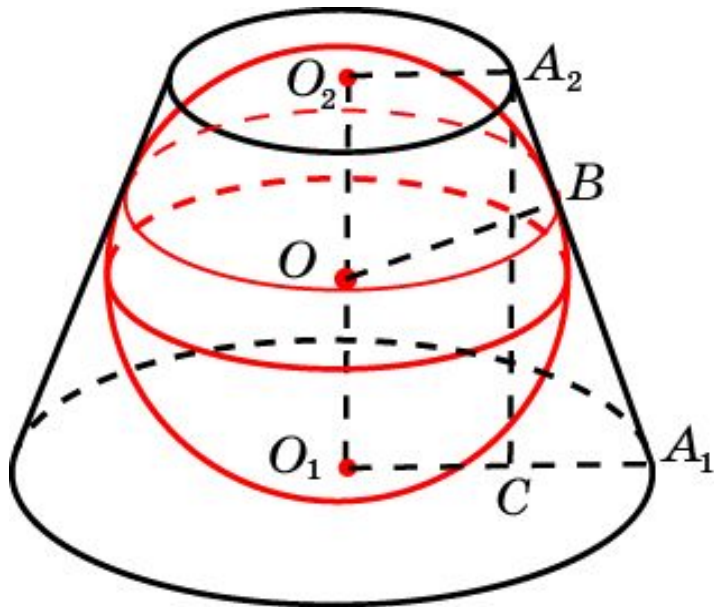
Таким образом,

$$r = \sqrt{2}, h = 2\sqrt{2}.$$



## Упражнение 2

В усеченный конус, радиус одного основания которого равен 2, вписана сфера радиуса 1. Найдите радиус второго основания.

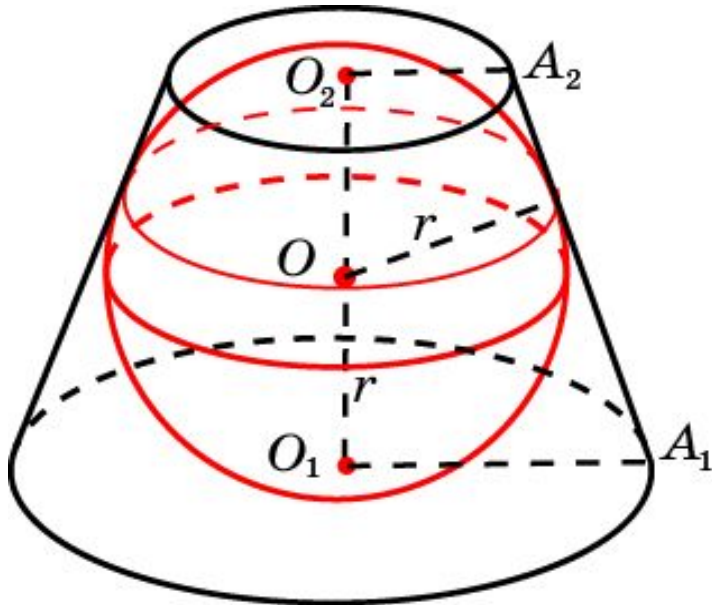


**Решение.** Пусть  $A_1O_1 = 2$ . Обозначим  $r = A_2O_2$ . Имеем:  $A_1A_2 = 2 + r$ ,  $A_1C = 2 - r$ . По теореме Пифагора, имеет место равенство  $O_1O_2^2 = A_1A_2^2 - A_1C^2$ , из которого следует, что выполняется равенство  $4 = (r + 2)^2 - (2 - r)^2$ . Решая полученное уравнение относительно  $r$ , находим

$$r = \frac{1}{2}.$$

## Упражнение 3

В усеченном конусе радиус большего основания равен 2, образующая наклонена к плоскости основания под углом  $60^\circ$ . Найдите радиус вписанной сферы.

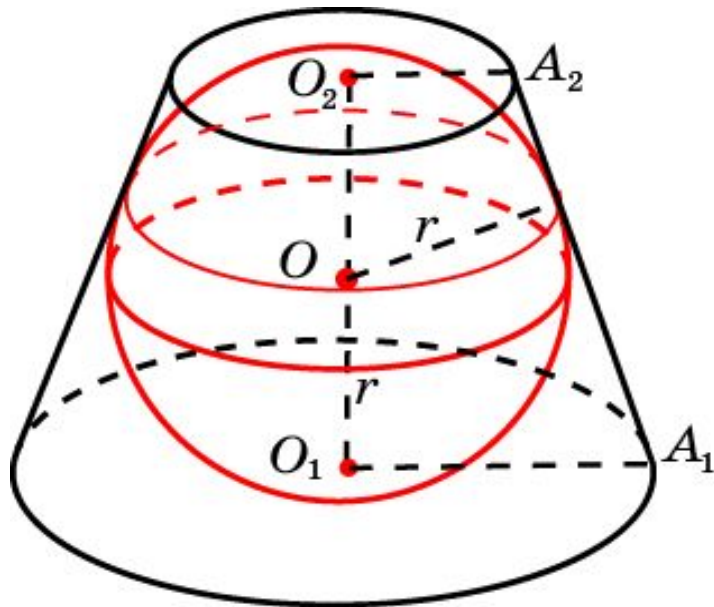


**Решение.** Заметим, что осевым сечением конуса, из которого получен усеченный конус, является равносторонний треугольник со стороной 2. Радиус  $r$  сферы, вписанной в усеченный конус, равен радиусу окружности, вписанной в этот равносторонний треугольник, т. е.

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

## Упражнение 4

Образующая усеченного конуса равна 2, площадь осевого сечения 3. Найдите радиус вписанной сферы.

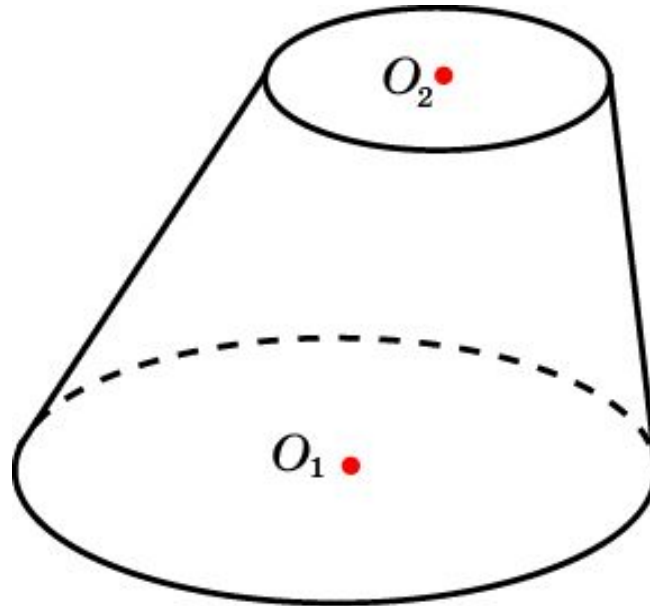


**Решение.** Воспользуемся формулой  $r = S/p$ , где  $S$  – площадь осевого сечения,  $p$  – полупериметр. В нашем случае  $S = 3$ . Для нахождения полупериметра напомним, что для четырехугольника, описанного около окружности, суммы противоположных сторон равны. Значит, полупериметр равен удвоенной образующей цилиндра, т. е.  $p = 4$ . Следовательно,  $r = 3/4$ .

Ответ:  $r = \frac{3}{4}$ .

## Упражнение 5

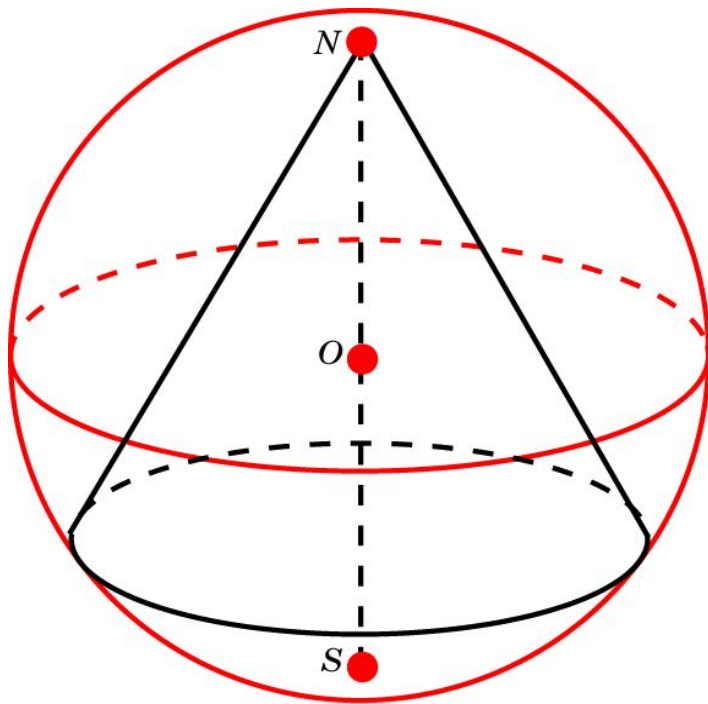
Можно ли вписать сферу в усеченный наклонный конус.



Ответ: Нет.

# Сфера, описанная около конуса

Сфера называется описанной около конуса, если вершина и окружность основания конуса лежат на сфере. При этом конус называется вписанным в сферу.

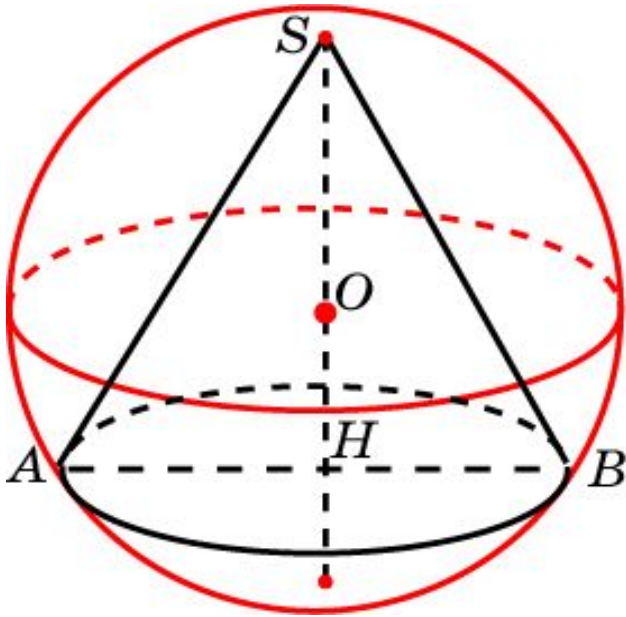


Около любого конуса (прямого, кругового) можно описать сферу. Ее центр находится на высоте конуса, а радиус равен радиусу окружности, описанной около треугольника, являющимся осевым сечением конуса.

Напомним, что радиус  $R$  окружности, описанной около треугольника, находится по формуле  $R = \frac{abc}{4S}$ , где  $S$  – площадь,  $a, b, c$  – стороны треугольника.

# Упражнение 1

Около конуса, радиус основания которого равен 1, а образующая равна 2, описана сфера. Найдите ее радиус.

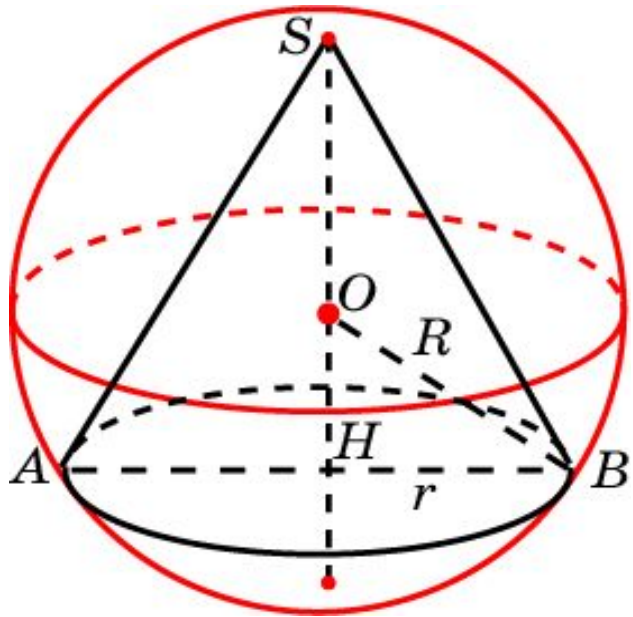


**Решение.** Треугольник  $SAB$  равносторонний со стороной 2. Высота  $SH$  равна  $\sqrt{3}$ . Площадь  $S$  равна  $\sqrt{3}$ . По формуле  $R = abc/4S$  получаем

$$R = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

## Упражнение 2

Около конуса, радиус основания которого равен 4, описана сфера радиуса 5. Найдите высоту  $h$  конуса.

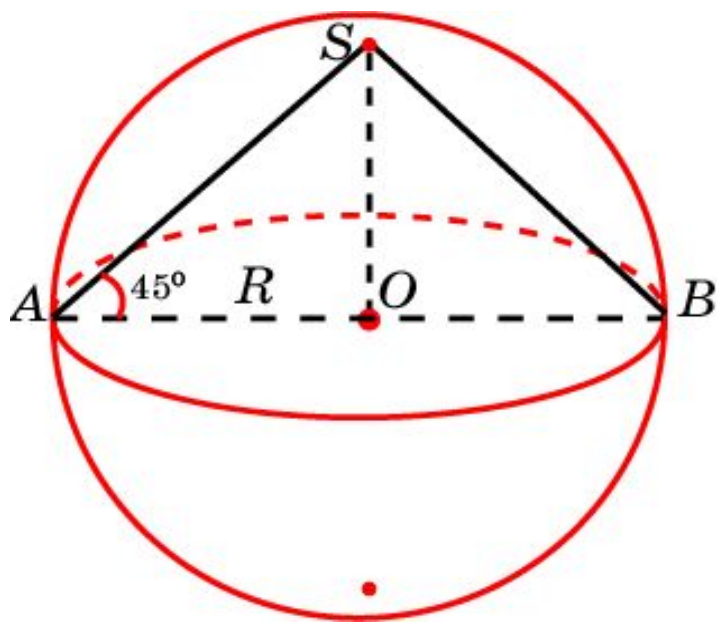


**Решение.** Имеем,  $OB = 5$ ,  $HB = 4$ .  
Следовательно,  $OH = 3$ . Учитывая,  
что  $SO = OB = 5$ , получаем  $h = 8$ .

**Ответ:**  $h = 8$ .

## Упражнение 3

Радиус основания конуса равен 1. Образующая наклонена к плоскости основания под углом  $45^\circ$ . Найдите радиус описанной сферы.



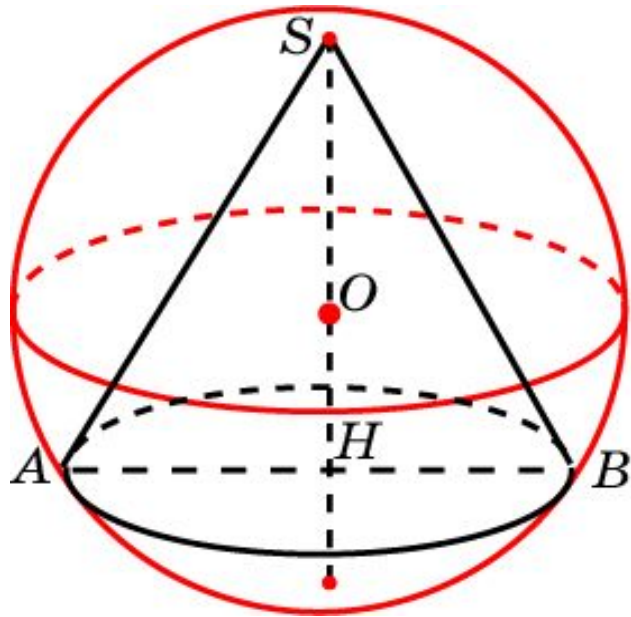
**Решение.** Треугольник  $SAB$  – прямоугольный, равнобедренный. Следовательно, радиус  $R$  описанной сферы равен радиусу основания цилиндра, т.е.  $R = 1$ .

**Ответ:**  $R = 1$ .



## Упражнение 4

Высота конуса равна 8, образующая 10. Найдите радиус описанной сферы.

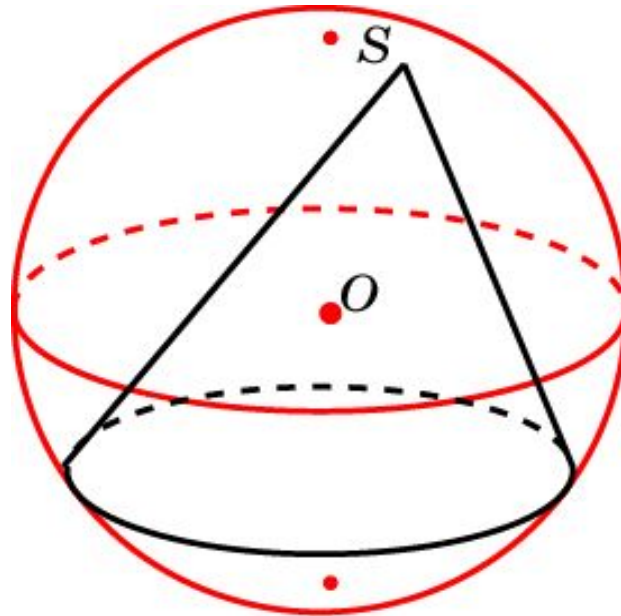


**Решение.** В треугольнике  $SAB$  имеем:  $SA = SB = 10$ ,  $SH = 8$ . По теореме Пифагора,  $AH = 6$  и, следовательно,  $S = 48$ . Используя формулу  $R = abc/4S$ , получаем

$$R = \frac{25}{6}.$$

# Упражнение 5

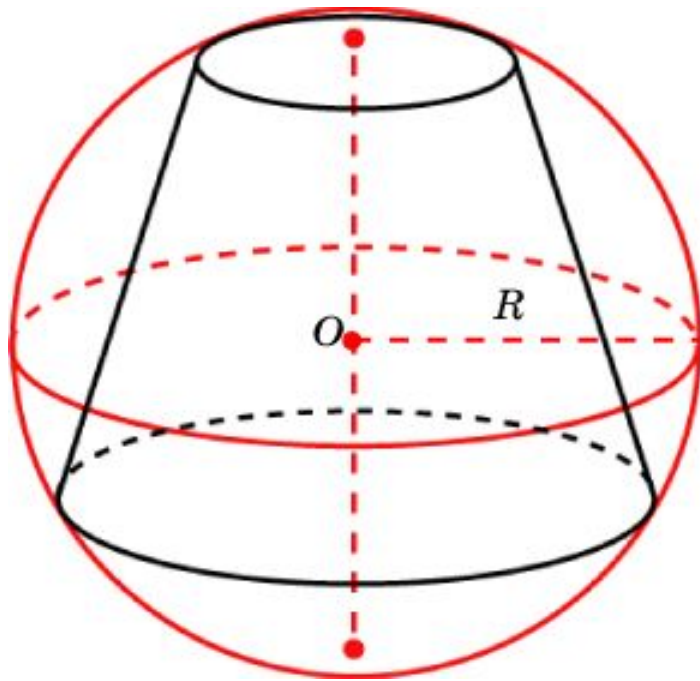
Можно ли описать сферу около наклонного конуса?



Ответ: Да.

# Сфера, описанная около усеченного конуса

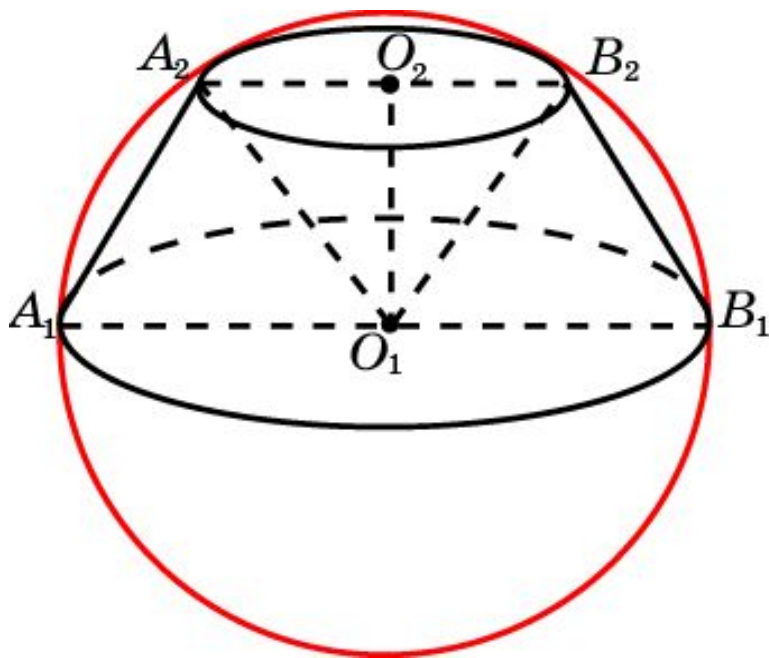
Сфера называется описанной около усеченного конуса, если окружности оснований усеченного конуса лежат на сфере. При этом усеченный конус называется вписанным в сферу.



Около усеченного конуса можно описать сферу, если около его осевого сечения можно описать окружность. Радиус этой окружности будет равен радиусу описанной сферы.

# Упражнение 1

Около усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 2 и 1, а образующая равна 2, описана сфера. Найдите ее радиус.

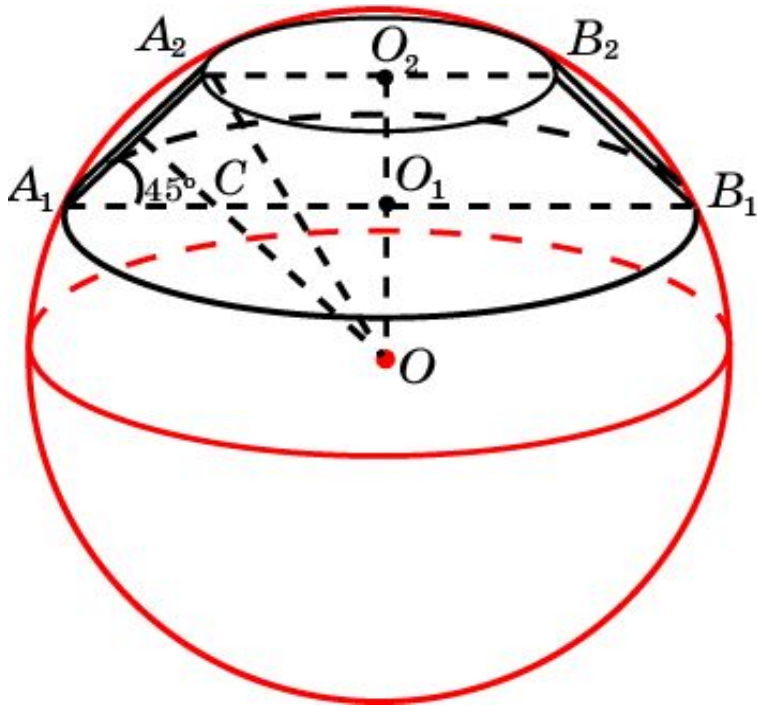


**Решение.** Заметим, что  $A_1O_1B_2O_2$  и  $O_1B_1B_2A_2$  – ромбы. Треугольники  $A_1O_1A_2$ ,  $O_1A_2B_2$ ,  $O_1B_1B_2$  – равносторонние и, значит,  $A_1B_1$  – диаметр. Следовательно,  $R = 2$ .

**Ответ:**  $R = 2$ ,

## Упражнение 2

Радиус меньшего основания усеченного конуса равен 1, образующая равна 2 и составляет угол  $45^\circ$  с плоскостью другого основания. Найдите радиус описанной сферы.

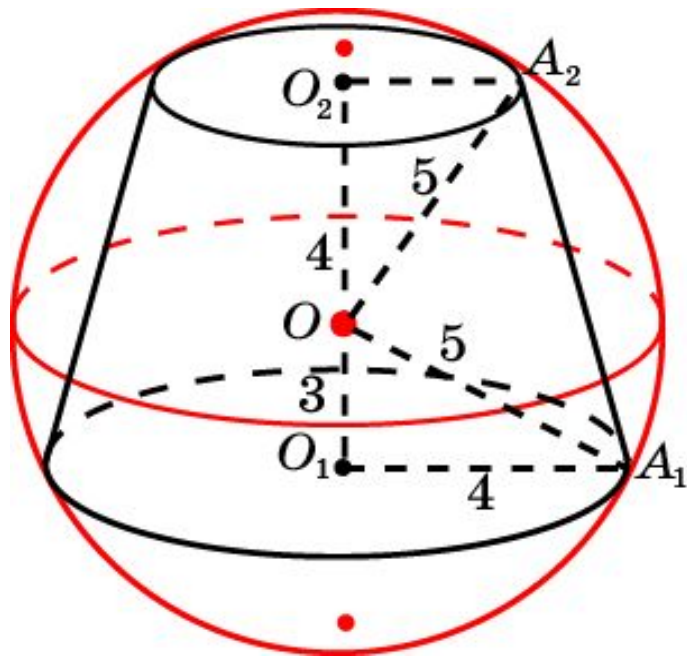


**Решение.** Имеем  $A_2O_2 = 1$ ,  $A_1A_2 = 2$ ,  
 $O_1O_2 = \sqrt{2}$ ,  $OO_1 = O_1C = 1$ .  
Следовательно,  $OO_2 = 1 + \sqrt{2}$  и,  
значит,

$$R = AO_2 = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

## Упражнение 3

Радиус одного основания усеченного конуса равен 4, высота 7, радиус описанной сферы 5. Найдите радиус второго основания усеченного конуса.

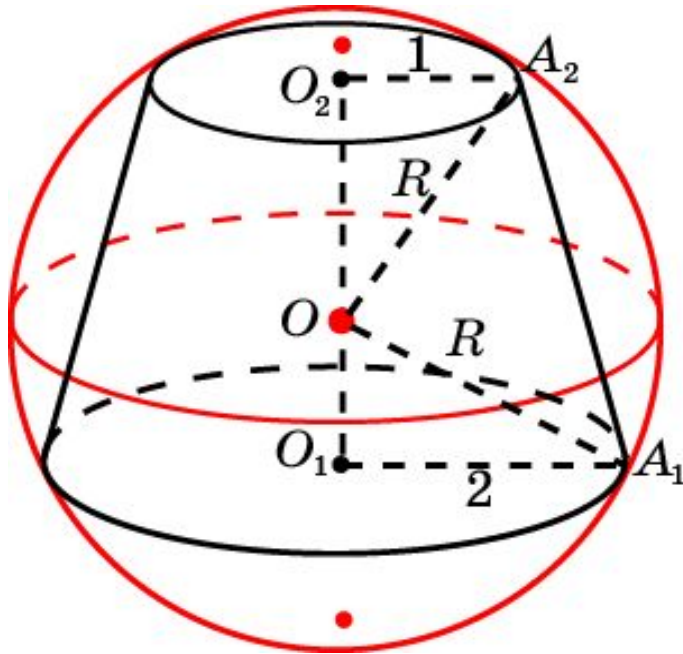


**Решение.** Имеем  $OO_1 = 3$ ,  $OO_2 = 4$  и, следовательно,  $O_2A_2 = 3$ .

**Ответ:** 3.

## Упражнение 4

Найдите радиус сферы, описанной около усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 2 и 4, а высота равна 5.



**Решение.** Обозначим  $R$  радиус описанной сферы. Тогда

$$OO_1 = \sqrt{R^2 - 4}, \quad OO_2 = \sqrt{R^2 - 1}.$$

Учитывая, что  $O_1O_2 = 5$ , имеем равенство

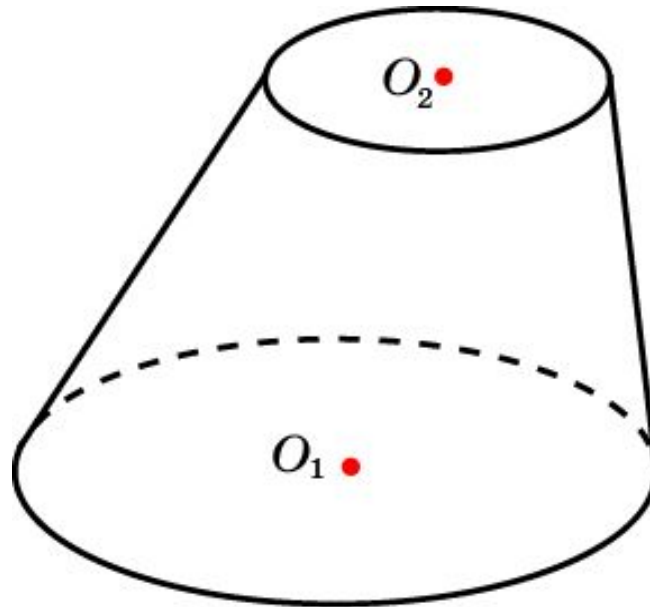
$$5 = \sqrt{R^2 - 4} + \sqrt{R^2 - 1}.$$

Решая его относительно  $R$ , находим

$$R = \frac{\sqrt{221}}{5}.$$

## Упражнение 5

Можно ли описать сферу около усеченного наклонного конуса.



Ответ: Нет.