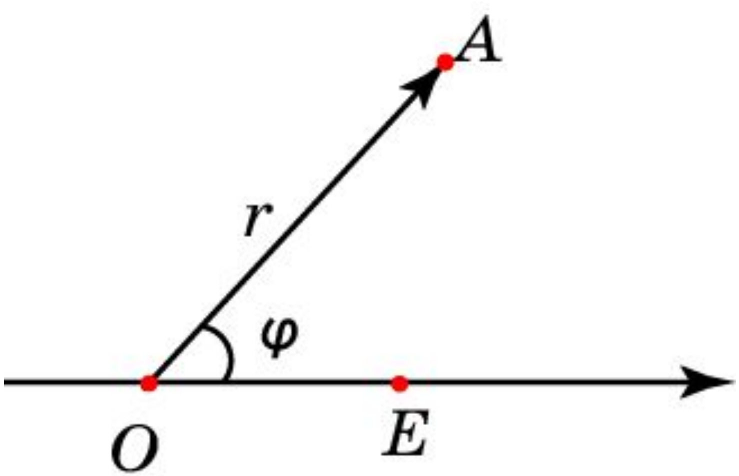
Полярные координаты

Пусть на плоскости задана координатная прямая с выделенной точкой *O* и единичным отрезком *OE*. Эта прямая в данном случае будет называться **полярной осью**. Точка *O* называется **полюсом**.

Полярными координатами точки *A* на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r, ϕ), где r - расстояние от точки *A* до точки *O*, ϕ - угол между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый в направлении против часовой стрелки, если ϕ > 0 и по часовой стрелке, если ϕ < 0.

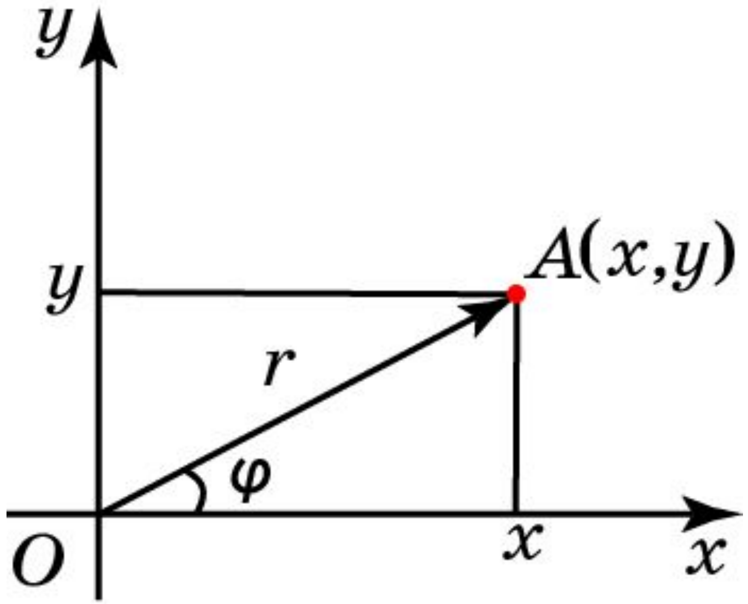


При этом первая координата r называется **полярным радиусом**, а вторая ϕ - **полярным углом**. Полярный угол можно задавать в градусах или радианах.

Полярные координаты

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полюс принимается начало координат и за полярную ось – ось *Ox*. В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами (x, y) можно сопоставить полярные координаты (r, ϕ). При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$



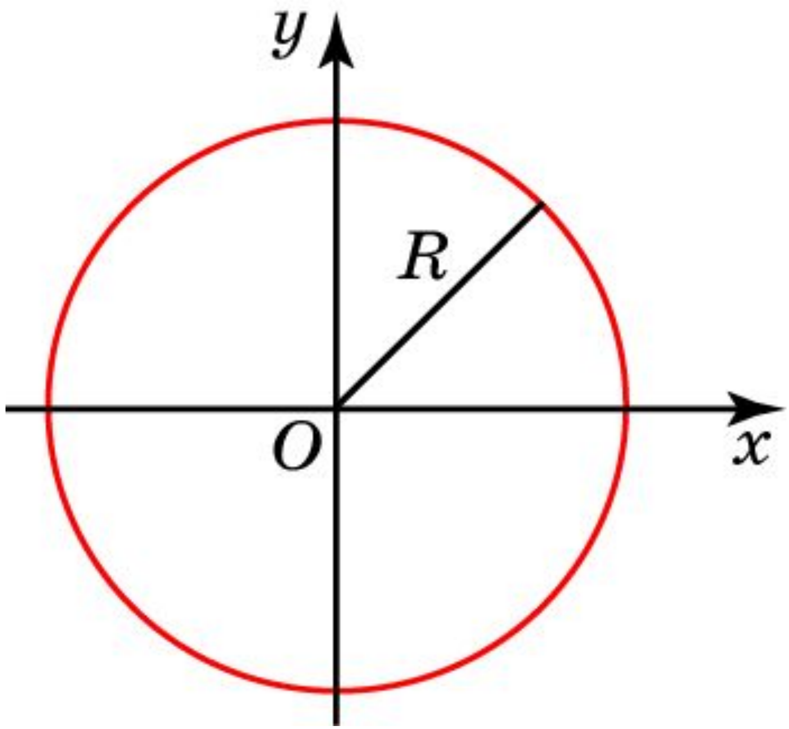
Наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Окружность

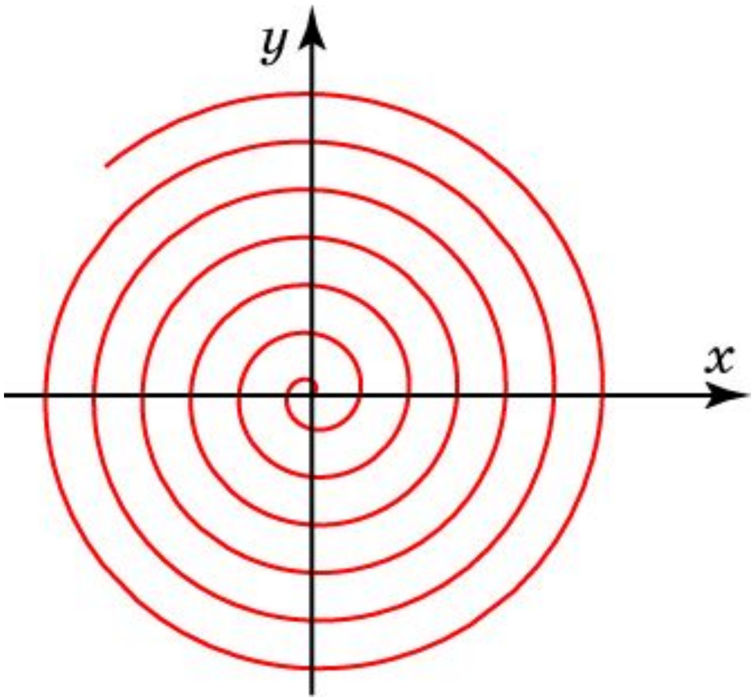
Окружность радиуса R с центром в точке O задается уравнением $r = R$.



Действительно, окружность является геометрическим местом точек, удаленных от точки O на расстояние R. Все такие точки удовлетворяют равенству $r = R$. При этом, если угол увеличивается, то соответствующая точка на окружности движется в направлении против часовой стрелки, описывая круги. Если же угол уменьшается, то соответствующая точка описывает круги в направлении по часовой стрелке.

Спираль Архимеда

Спираль Архимеда - кривая, задаваемая уравнением $r = a\phi$, где a - некоторое фиксированное число, угол ϕ задается в радианах.



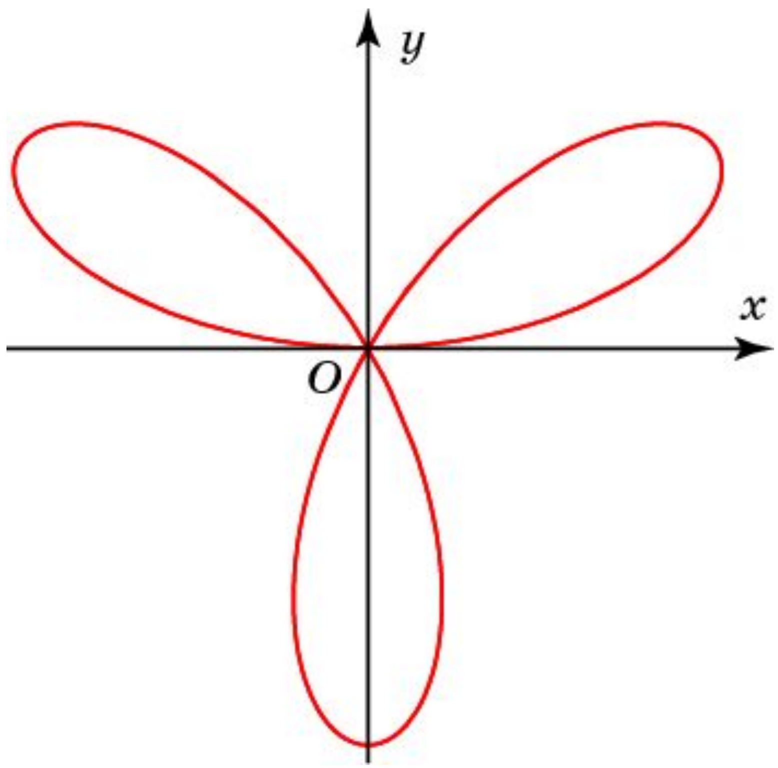
Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками, каждое из них равно $2\pi a$. Действительно, если угол увеличивается на 2π, т.е. точка делает один, то радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками.

Трилистник

Трилистник – кривая, задаваемая уравнением $r = \sin 3\phi$.

Для построения этой кривой сначала заметим, что, поскольку радиус неотрицателен, должно выполняться неравенство $\sin 3\phi \geq 0$, решая которое находим область допустимых значений углов :

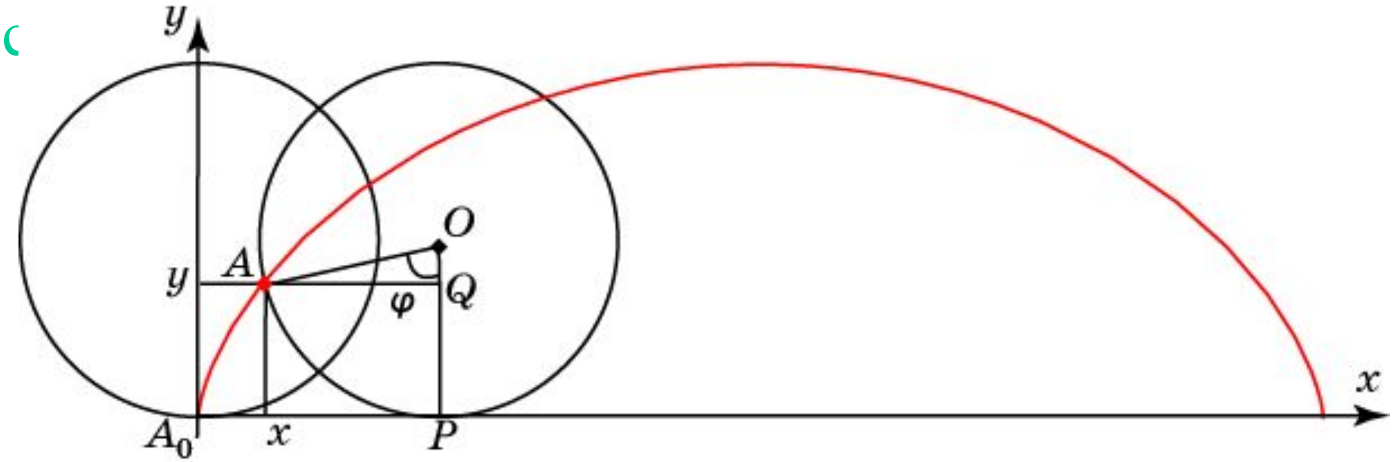
$$0^o \leq \phi \leq 60^o;\ 120^o \leq \phi \leq 180^o;\ 240^o \leq \phi \leq 300^o.$$



Если угол ϕ изменяется от нуля до 30^o, то радиус r изменяется от нуля до единицы. Если угол ϕ изменяется от 30^o до 60^o, то радиус изменяется от единицы до нуля. Таким образом, при изменении угла от 0^o до 60^o точка описывает кривую, похожую на очертания лепестка. Такие же лепестки получаются когда угол изменяется в пределах от 120^o до 180^o и от 240^o до 300^o.

Циклоида

Циклоида - кривая, которую описывает точка, закрепленная на окружнос



Найдем уравнения циклоиды. Предположим, что окружность радиуса R катится по оси Ox, и в начальный момент времени закрепленная точка A_0 находилась в начале координат. Если окружность повернется на угол ϕ, то закрепленная точка переместится в положение A. Поскольку дуга AP прокатилась по отрезку A_0P, то их длины равны, т.е. $AP = A_0P = R$. Для координат x, y точки A имеем:

$$x = AP - AQ = R - R\sin\phi = R(\phi - \sin\phi),$$

$$y = OP - OQ = R - R\cos\phi = R(1 - \cos\phi).$$

Упражнение 1

Для следующих точек с заданными полярными координатами найдите их декартовы координаты: а) $(1, \frac{\pi}{3})$; б) $(2, -\frac{\pi}{4})$.

Ответ: а) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; б) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Упражнение 2

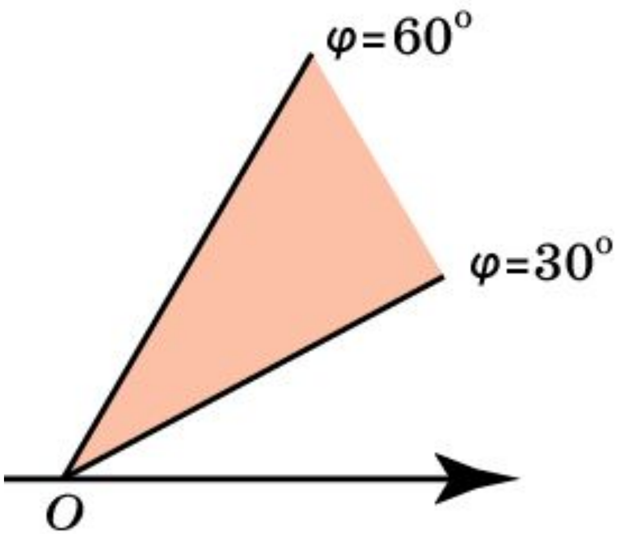
Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты: а) ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$); б) (-10, 0); в) (1, -$\sqrt{3}$); г) (-$\sqrt{3}$, 1).

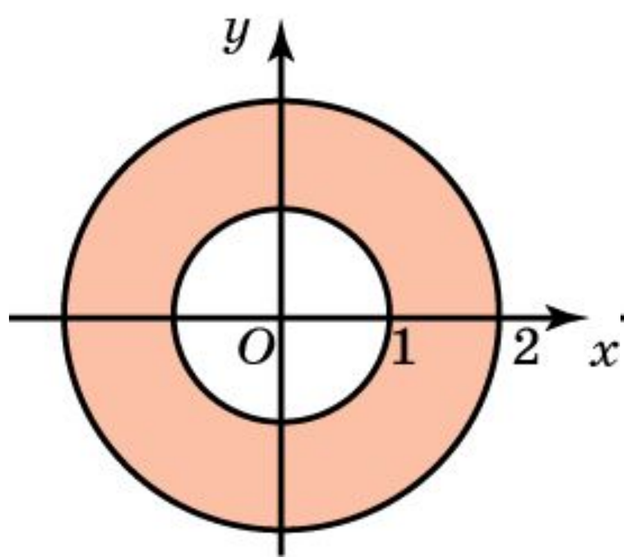
Ответ: а) (2, $\frac{\pi}{4}$); б) (10, π); в) (2, -$\frac{\pi}{3}$); г) (2, $\frac{5\pi}{6}$).

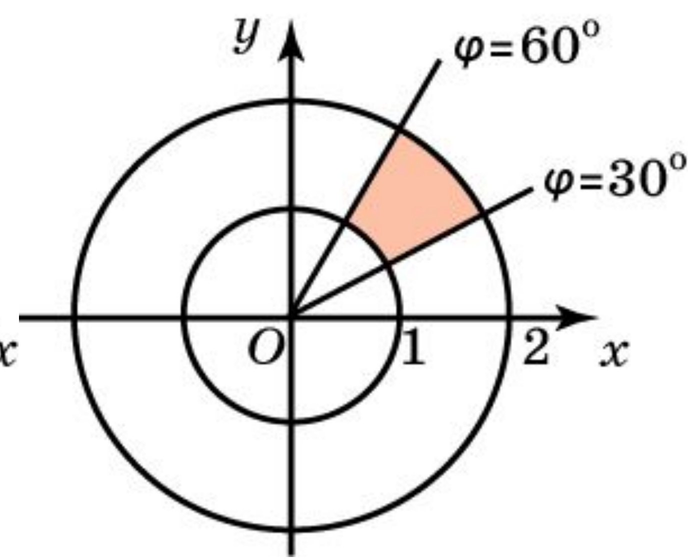
Упражнение 3

Нарисуйте геометрическое место точек на плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют неравенствам: а) 30º < ϕ < 60º; б) 1 < r < 2; в) 30º < ϕ < 60º, 1 < r < 2.

Ответ: а) б) в)



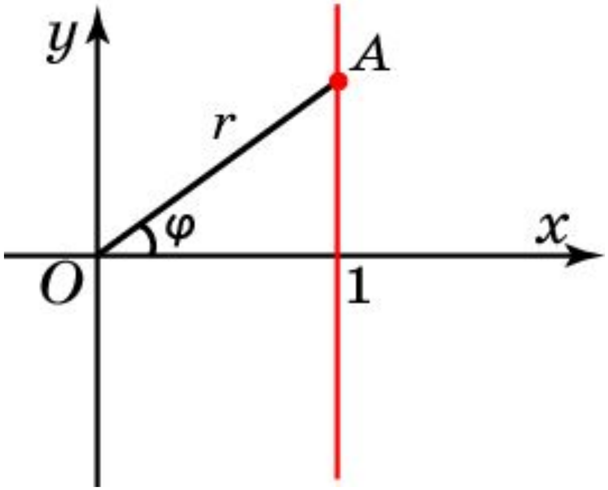


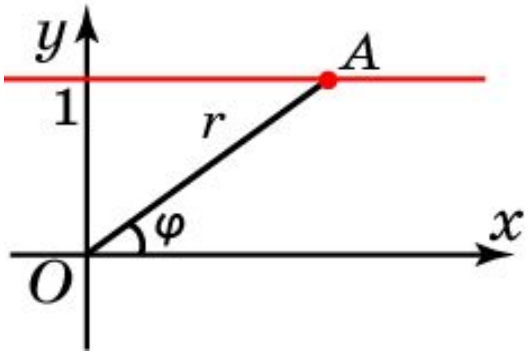


Упражнение 4

Найдите геометрическое место точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $r = \dfrac{1}{\cos\varphi}$; б) $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$.

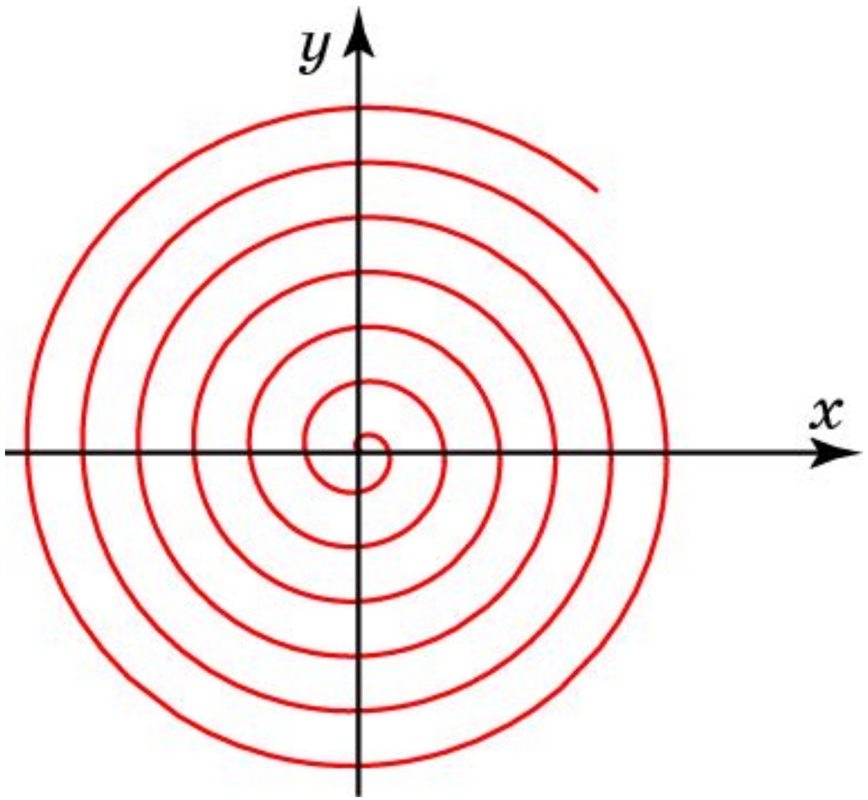
Ответ: а) 

б) 

Упражнение 5

Нарисуйте спираль Архимеда, заданную уравнением $r = -\varphi$.

Ответ:

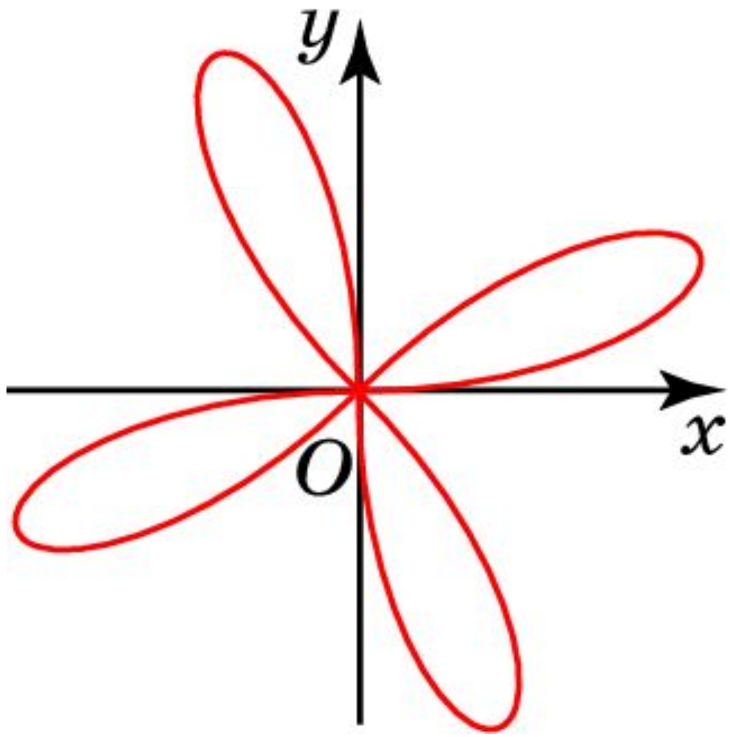


Упражнение 6

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$r = \sin 4\phi$.

Ответ:

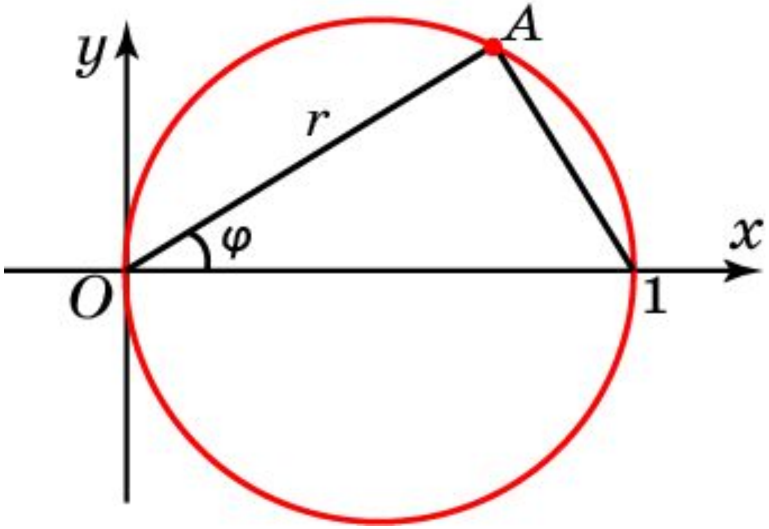


Упражнение 7

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$r = \cos\phi$.

Ответ:

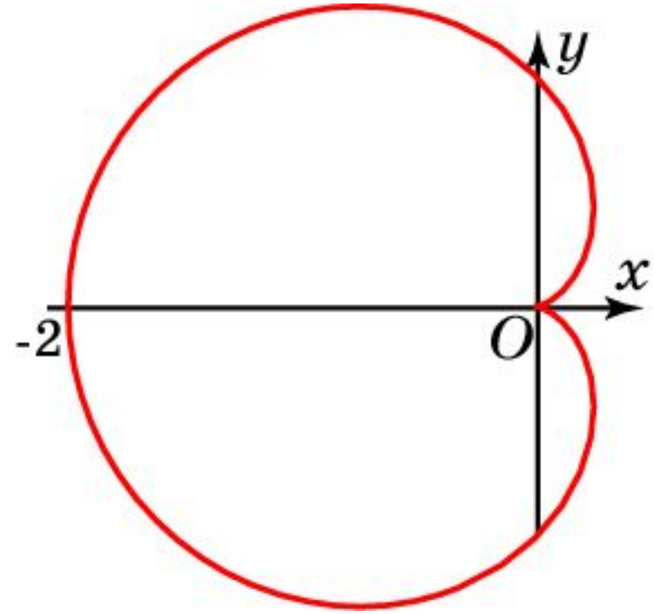


Упражнение 8

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$r = 1 - \cos \phi$.

Ответ: Кардиоида.

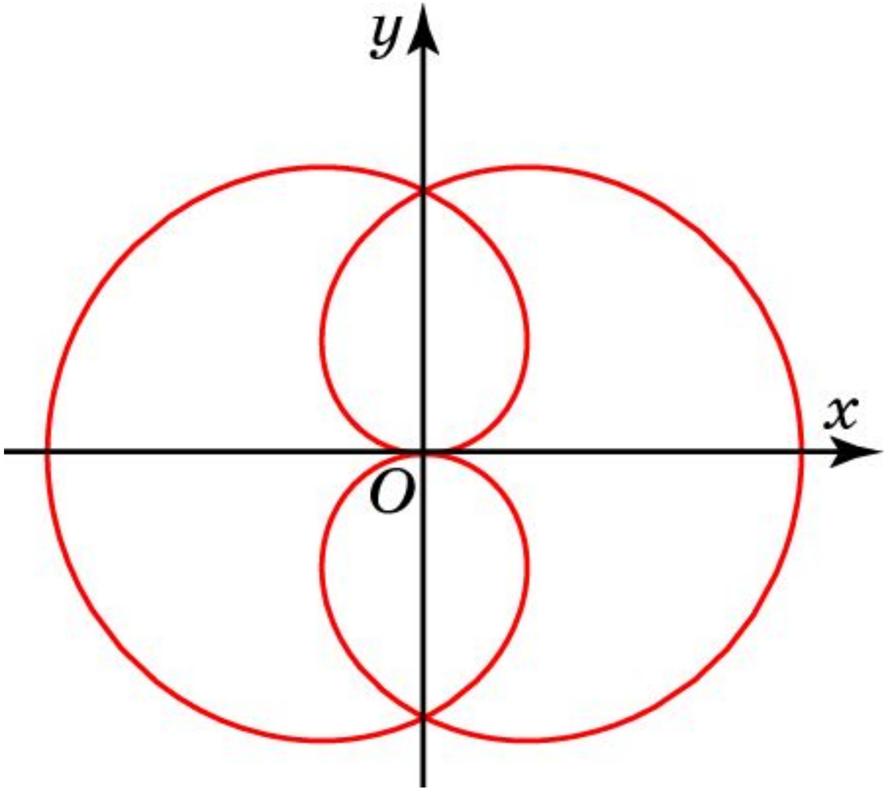


Упражнение 9

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$$r = \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Ответ:

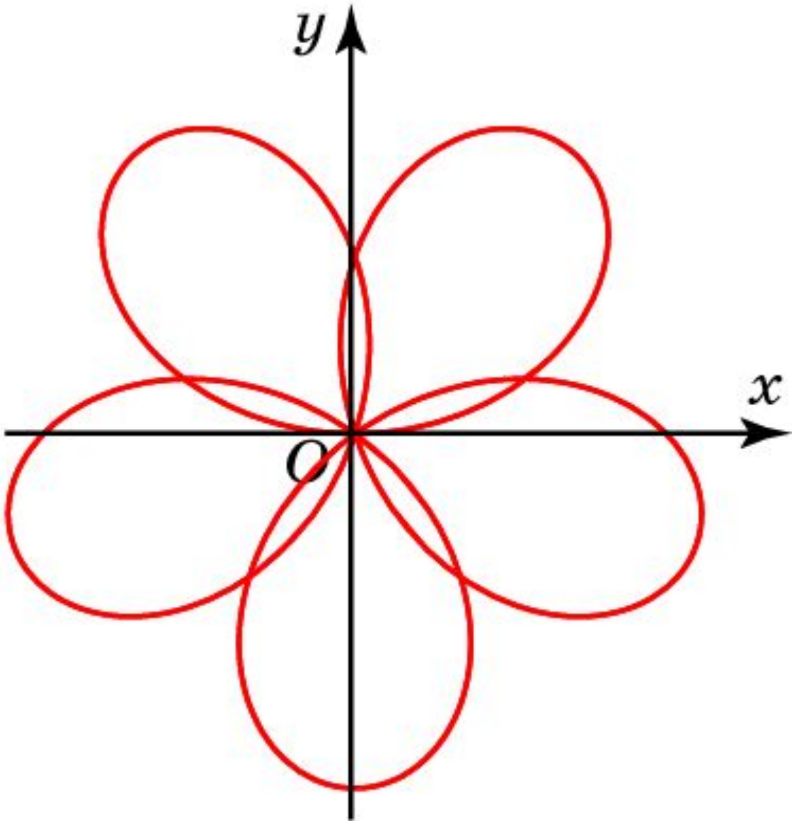


Упражнение 10

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$$r = \sin\frac{5\varphi}{3}.$$

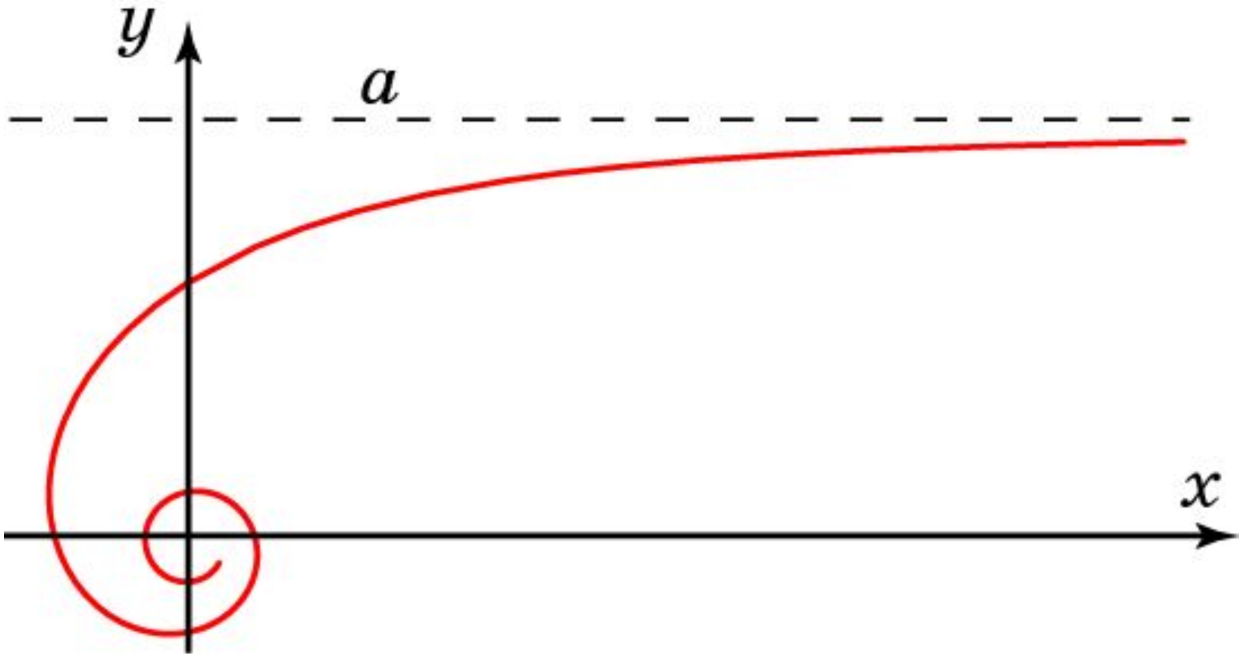
Ответ:



Упражнение 11

Нарисуйте гиперболическую спираль – кривую, задаваемую уравнением $r = a/\phi$.

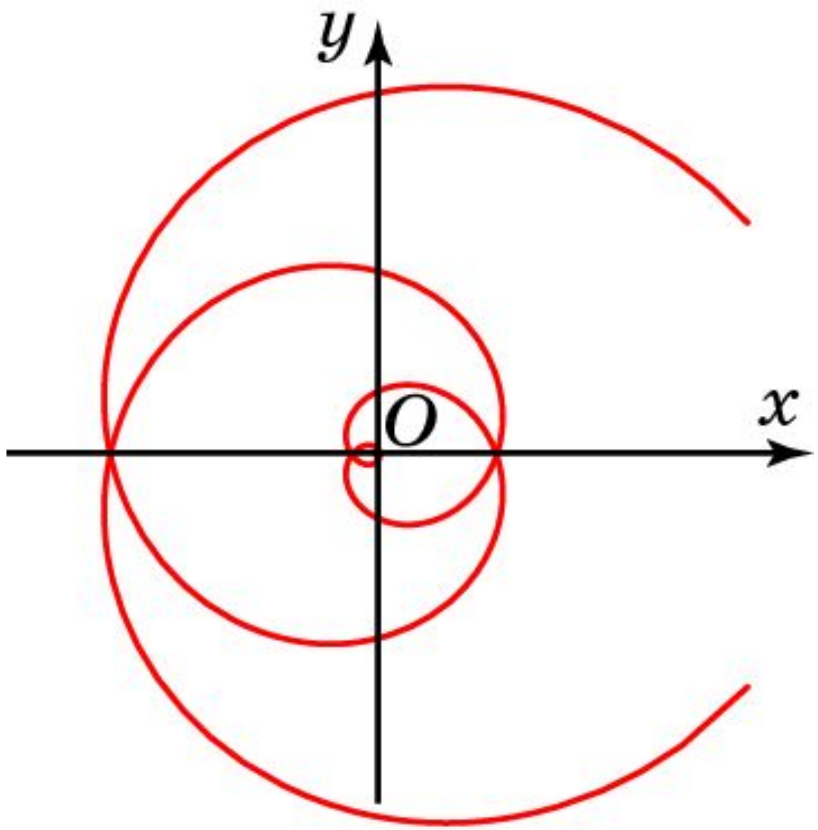
Ответ:



Упражнение 12

Нарисуйте спираль Галилея – кривую, задаваемую уравнением $r = a\varphi^2$.

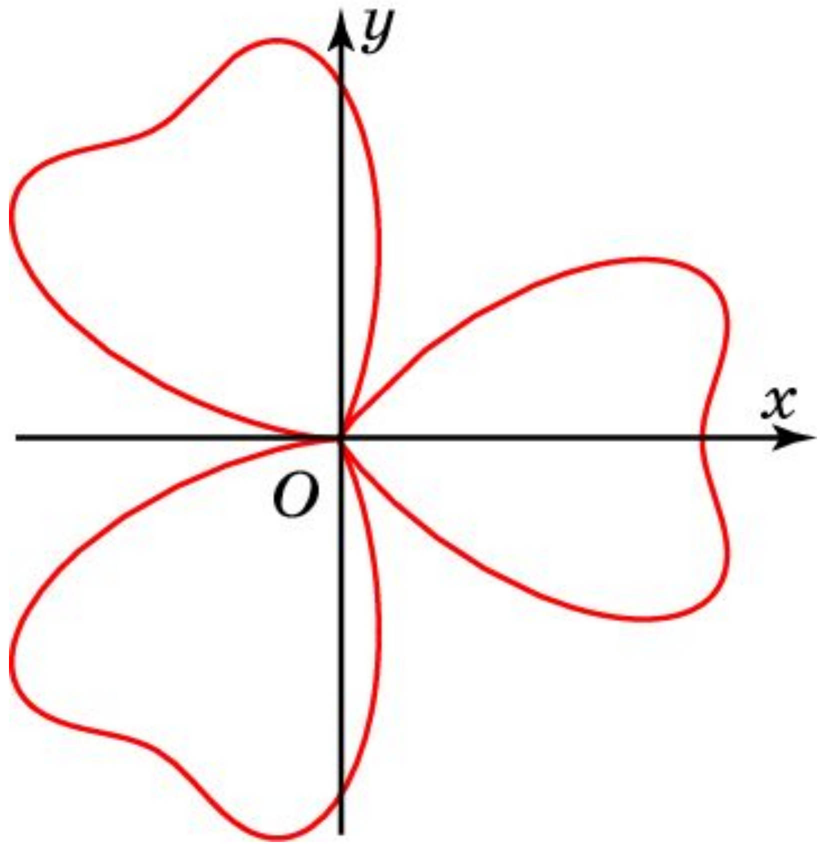
Ответ:



Упражнение 13

Нарисуйте кривую, напоминающую лист клевера и задаваемую уравнением $r = 1 + \cos 3\phi + \sin^2 3\phi$.

Ответ:



Упражнение 14

Человек идет с постоянной скоростью вдоль радиуса вращающейся карусели. Какой будет его траектория относительно земли?

Ответ: Спираль Архимеда.