



## Предмет стереометрии.

## Аксиомы стереометрии

#### Уроки геометрии 1-5 в 10 классе

Учитель математики МБОУ лицея №20 Первомайского района города Ростова-на-Дону Шемчук Н. К.

## ПРЕДМЕТ СТЕРЕОМЕТРИИ. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

5

## Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии

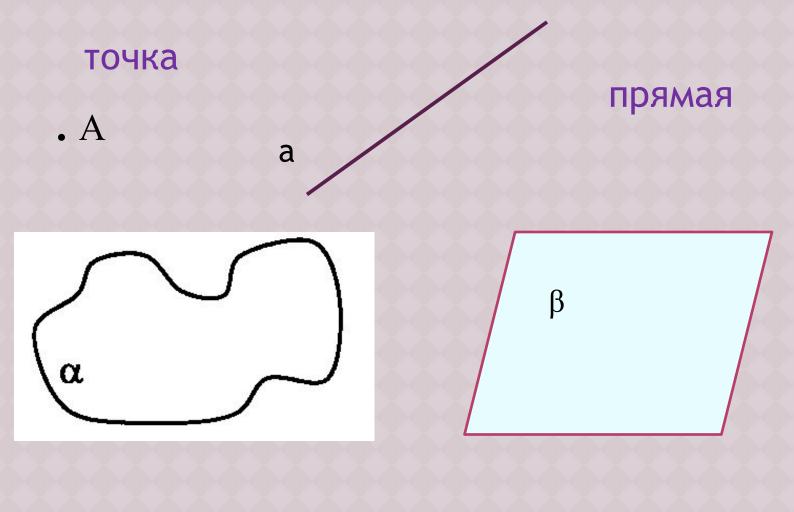
## Что такое геометрия?

Геометрия наука о свойствах геометрических фигур.

Планиметрия изучает свойства фигур на плоскости.

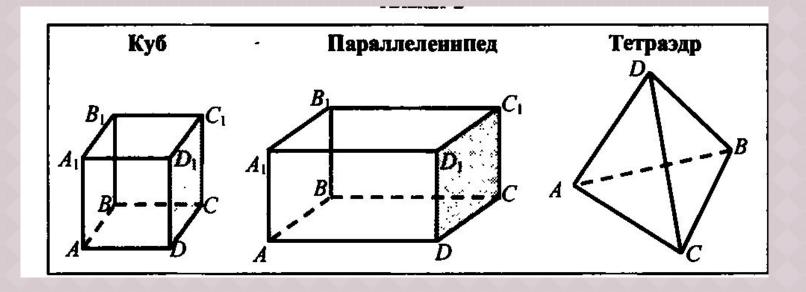
Стереометрия изучает свойства фигур в пространстве.

## Основные понятия планиметрии



плоскость

## СТЕРЕОМЕТРИЯ ИЗУЧАЕТ СВОЙСТВА ТЕЛ, ИХ ОБЪЁМЫ И ПЛОЩАДИ



#### ЧТО ТАКОЕ АКСИОМА?

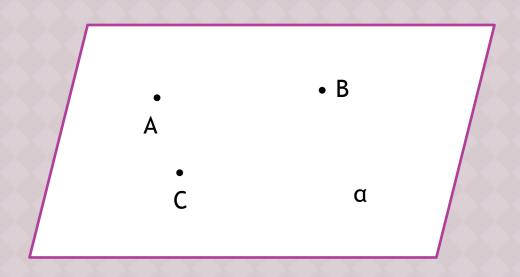
УТВЕРЖДЕНИЕ ПРИНИМАЕМОЕ БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, НАЗЫВАЕТСЯ АКСИОМОЙ

> Какие аксиомы планиметрии вы знаете?

- Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну
- из трех точек прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими

## АКСИОМА СТЕРЕОМЕТРИИ №1

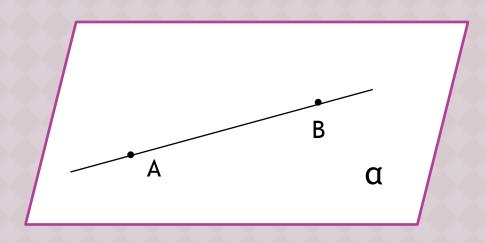
 Через три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна



## АКСИОМА СТЕРЕОМЕТРИИ №2

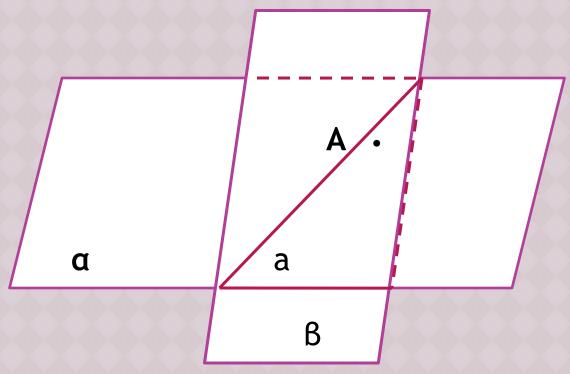
• Если две точки прямой лежат в плоскости, то и все

точки прямой лежат в плоскости

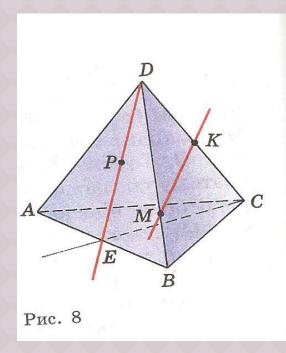


## АКСИОМА СТЕРЕОМЕТРИИ №3

• Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей



## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ



#### $N_{2}1$ a),6)

По рисунку 8 назовите:

- а) плоскости, в которых лежат прямые PE,MK,DB,AB,EC
- б) точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC, прямой CE с плоскостью ADB

#### Ответ

а) Точки P и E лежат в плоскости (ADB), а значит и прямая PE лежит в плоскости (ADB) (по  $A_2$ ). Аналогично MK лежит в плоскости (BDC). Точки B и D лежат одновременно в плоскостях (ADB) и (BDC), а значит прямая BD лежит в плоскостях (ADB) и (ABC).

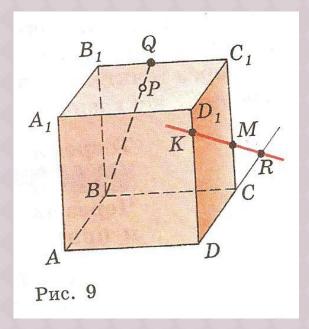
Аналогично AB лежит в плоскостях (ADB) и (ABC).

Точки C и E лежат одновременно в плоскостях (ABC) и (DEC), а значит прямая CE лежит в этих же плоскостях.

б) Заметим, что точка C лежит на прямой (DK) и в плоскости ABC, а следовательно,  $DK \cap (ABC)$  в точке C, так как точек пересечения более одной (прямая не лежит в плоскости), то это единственная точка.

Аналогично CE пересекается с плоскостью (ADB) в точке E.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ



№2 (a)

По рисунку 9 назовите: а) точки, лежащие в плоскостях DCE1 и BQC

#### Ответ

В плоскости DCC1: D,C, C1, D1, K,M,R

В плоскости BQC: B1,B,P, Q,C1,M,C

## НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

#### Сформулируйте аксиомы планиметрии

- Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну
- из трех точек прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими

#### Сформулируйте аксиомы стереометрии

- Через три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна
- Если две точки прямой лежат в плоскости, то и все точки прямой лежат в плоскости
- •Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

No3

## Верно ли, что:

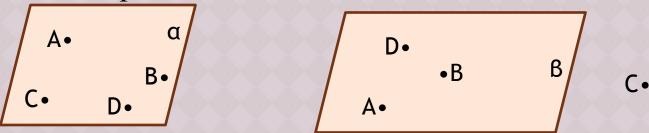
- а) любые три точки лежат в одной плоскости;
- б) любые четыре точки лежат в одной плоскости;
- в) любые четыре точки не лежат в одной плоскости;
- г) через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна

## РЕШЕНИЕ №3

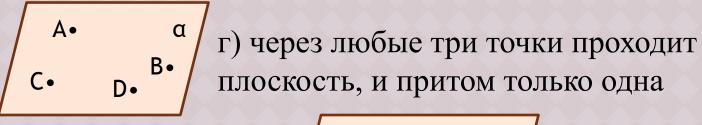
• а) любые три точки лежат в одной плоскости;

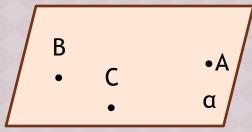


б) любые четыре точки лежат в одной плоскости



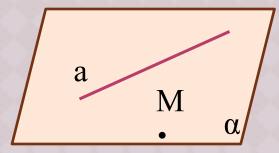
в) любые четыре точки не лежат в одной плоскости;





## TEOPEMA 1

• Через прямую и не лежащую на ней току проходит плоскость, и притом только одна.



Дано:  $a, M \in a$ .

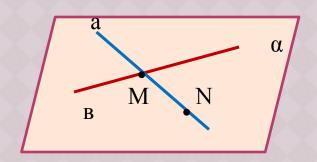
Доказать: (а, М) ⊂ а

Доказательство

- 1. Рассмотрим прямую а не лежащую на ней точку М.отметим на прямой а две точки Р и Q. Точки Р, Q, М не лежат на одной прямой, поэтому согласно аксиоме А1 через эти точки проходит некоторая плоскость α. Так как 2 точки прямой а ( Р и Q)лежат в плоскости α, то по аксиоме А2 плоскость αпроходит через прямую а.
- 2. Единственность плоскости, проходящей через прямую а и точку M, следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямую а и точку M, проходит через точки P, M и Q. Следовательно эта плоскость совпадает с плоскостью α, так как по аксиоме A1 через точки P, M и Q проходи только одна плоскость.

## TEOPEMA 2

## Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только она



Дано: прямые а и в ,а  $\cap$  в =M, а  $\in$  α, в  $\in$  α.

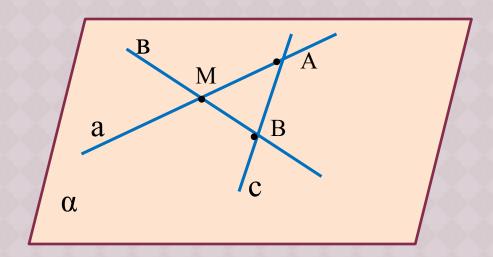
Доказать: а и в  $\epsilon$   $\alpha$ 

#### Доказательство:

- 1. Дополнительное построение ( точка N).
- 2. Плоскость α проходит через прямую в и точку N.
- 3. Аксиома А2. ( две точки прямой а лежат в плоскости α).
- 4. Вывод.
- 5. Единственность ( Любая плоскость, проходящая через прямые а и в, проходит через точку N).
- 6. Плоскости совпадают.

## YPOK 2

## УСТНО

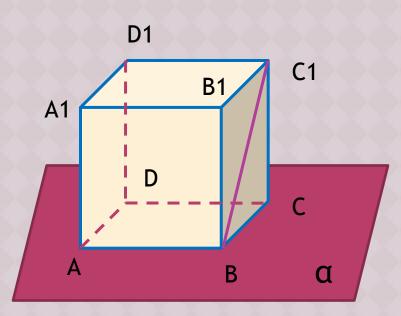


Заполните пропуски, чтобы получилось верное :высказывание

- 1) Если А  $\epsilon$   $\alpha$ , а  $\subseteq$   $\alpha$ , то А ...  $\alpha$
- 2) A  $\epsilon \alpha$ , B  $\alpha$ , To AB ... $\alpha$
- 3)  $A \in \alpha$ ,  $B \in \alpha$ ,  $C \in \alpha$ , to  $C \dots \alpha$
- 4) Если  $M \in \alpha, M \in \beta, \alpha = a, \text{ то } M \dots a$

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ АКСИОМ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ СЛЕДСТВИЙ

#### Устно

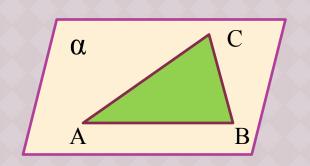


Дан куб. Найдите:

- 1) Несколько точек, которые лежат в плоскости α;
- 2) Несколько точек, которые не лежат в плоскости α;
- 3) Несколько прямых, которые лежат в плоскости α;
- 4) Несколько прямых, которые не лежат в плоскости α;
- 5) Несколько прямых, которые пересекают прямую ВС.
- 6) Несколько прямых, которые не пересекают прямую ВС.

## ЗАДАЧА №6

Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.



Дано: АВ, ВС, АС - отрезки

Доказать: (AB, BC, AC)  $\subset$  (ABC)

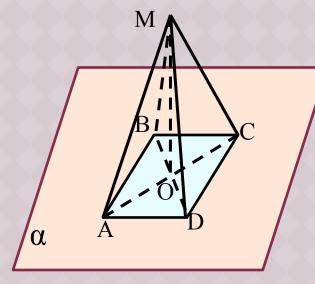
Доказательство:

- 1. (A,B,C)  $\epsilon$   $\alpha$ , так как две точки принадлежат одной прямой, то по A2 (A, B, C)  $\epsilon$  (ABC)
- 2. (A,B,C)  $\epsilon$   $\alpha$ . Через A, B, C по аксиоме A1 проходит единственная плоскость. Две точки каждого из отрезков AB, BC, AC лежат в плоскости, следовательно по аксиоме A2 прямые AB, BC, AC , а значит и отрезки AB, BC, AC лежат в плоскости  $\alpha$ , ч.т.д.

## РЕШИТЬ ЗАДАЧУ

АВСD- ромб, точка —О точка пересечения его диагоналей, М- точка пространства, не лежащая в плоскости ромба. Точки A, O, D лежат в плоскости α. Дайте ответ на вопросы с необходимым обоснованием.

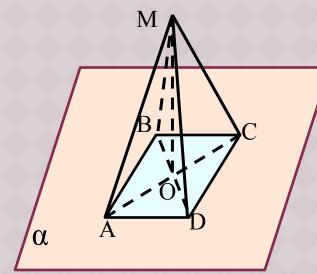
- 1) Лежат ли точки В и С в плоскости а?
- 2) Лежит ли в плоскости МОВ точка D?
- 3) Назовите линию пересечения плоскостей МОВ и АОD.
- 4) Вычислите площадь ромба, если сторона его равна 4 см, а угол равен  $60^{\circ}$



Дано : ABCD- ромб, AC BD = O, M  $\epsilon$   $\alpha$ , (A,D,O)  $\epsilon$   $\alpha$ , AB = 4cm,  $\bot$  A=60°.

Найти: (B,C)  $\epsilon$  α, D  $\epsilon$  MOB, MOB  $\cap$  AOD, Spomба

Решение



Дано : ABCD- ромб, AC BD = O, M  $\epsilon$   $\alpha$ , (A,D,O)  $\epsilon$   $\alpha$ , AB = 4cm,  $\bot$  A=60°.

Найти: (B,C)  $\epsilon$  α, D  $\epsilon$  MOB, MOB  $\cap$  AOD, Spoмба

Решение

- 1)  $D \in \alpha$ ,  $O \in \alpha$ , по A2  $DO \subset \alpha$ , так как  $B \in DO$ , то  $B \in \alpha$ . Аналогично  $A \in \alpha$ ,  $O \in \alpha$ , то по A2  $AO \in \alpha$ , так как  $C \in AO$ , то  $C \in \alpha$ .
  - 2) OB  $\epsilon$  MOB, D  $\epsilon$  OB, TO D  $\epsilon$  MOB.
  - 3) O  $\epsilon$  MOB, O  $\epsilon$  AOD.

В є МОВ,В є АОD , следовательно, МОВ  $\,\cap$  АОD=ВО, но так как ВО часть ВD, то АОВ  $\,$   $\,$  АОD=ВD

Если 2 плоскости имеют общие точки, то они пересекаются по прямой, проходящей через эти точки

4) Spoмба= $4 \cdot 4 \cdot \sin 60^{\circ} = 8 \sqrt{3} \text{ (cm}^2)$ 

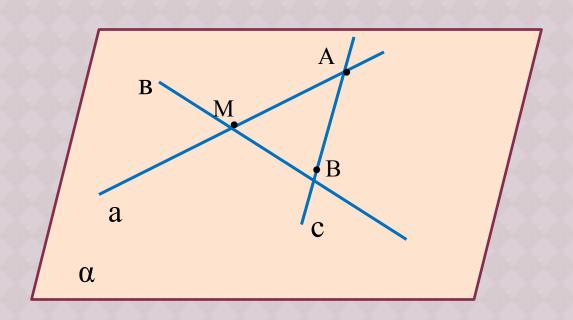
## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

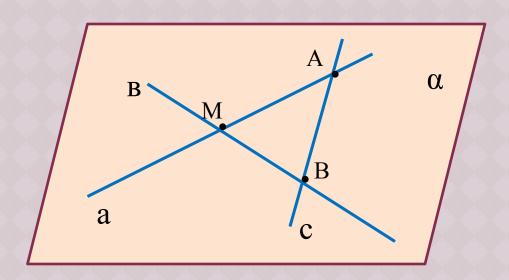
#### Задача №7

Дано: а  $\cap$  в = M, с  $\cap$  а = B,M  $\notin$ с.

Доказать: 1) а  $\subset \alpha$ , в  $\subset \alpha$ , с  $\subset \alpha$ 

2) Лежат ли в одной плоскости все прямые проходящие через точку М?





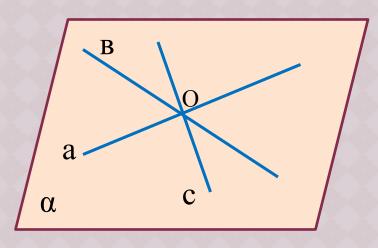
#### Решение

- 1. Согласно второму следствию, пересекающиеся прямые а и в принадлежат плоскости α, следовательно по аксиоме A2 прямая с лежит в плоскости α
- 2. Все прямые проходящие через точку М, не обязательно лежат в одной плоскости

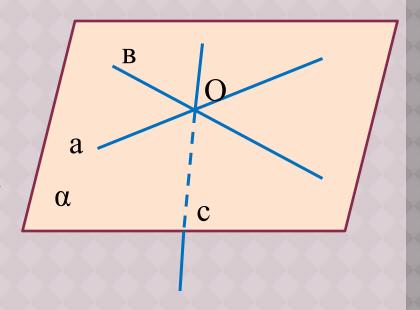
## ЗАДАЧА №14

#### Решение

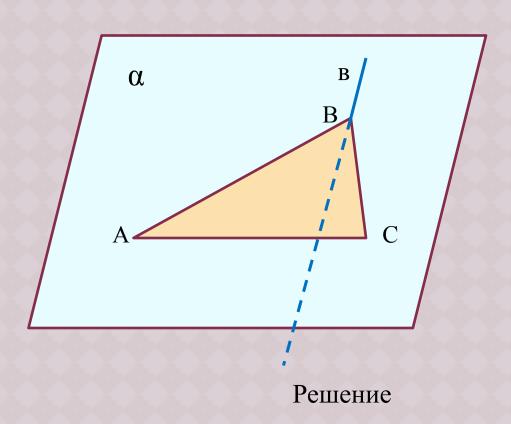
1.Все прямые а,в,с лежат в одной плоскости. По следствию 2 проходит единственная плоскость.



Одна из трех прямых не лежит в плоскости α, определяемой прямыми а и в.В этом случае через заданные три прямые проходит три различные плоскости .

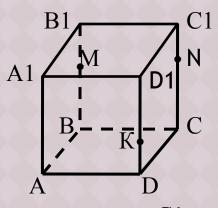


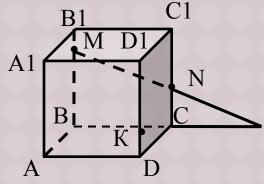
## ЗАДАЧА №10 РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО

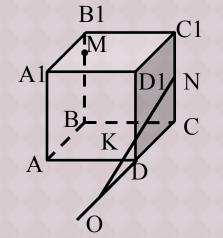


Дан куб ABCDA1B1C1D1.
Точка М лежит на ребре BB1, точка N лежит на ребре CC1, точка К на ребре DD1.

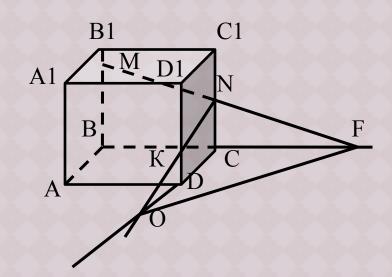
- а) Назовите плоскости, в которых лежат точки М, N
- б) Найти точку F пересечения прямых MN и BC. Каким свойством обладает точка F?
- в) Найдите точку пересечения прямой KN и плоскости ABC.
- г) Найдите линию пересечения плоскостей MNK и ABC.







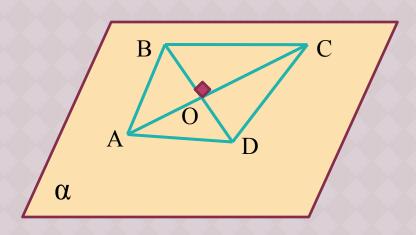
- a) A1B1B и B1BC; B1C1C и DD1C
  - б) 1. MN  $\cap$  BC = F;
  - 2.  $F \in MN$ ,  $F \in BC \rightarrow F \in BB1C$  и  $F \in ABC$ 
    - B) KN  $\cap$  ABC = O
      - $\Gamma$ ) OF  $\cap$  ABC = MNK
      - 1. KN $\cap$  DC = O
      - 2.  $O \in KN, DC \rightarrow O \in ADC и O \in DCC1$



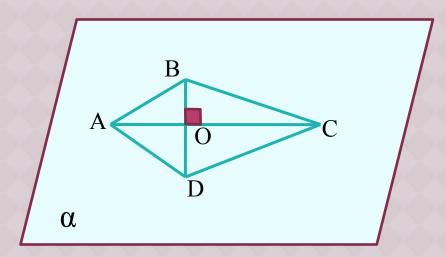
## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Докажите, что все вершины четырехугольника ABCD лежат в одной плоскости, если его диагонали AC и BD пересекаются.

Вычислите площадь четырехугольника, если AC BD, AC = 10см, CD = 12см.



#### РЕШЕНИЕ



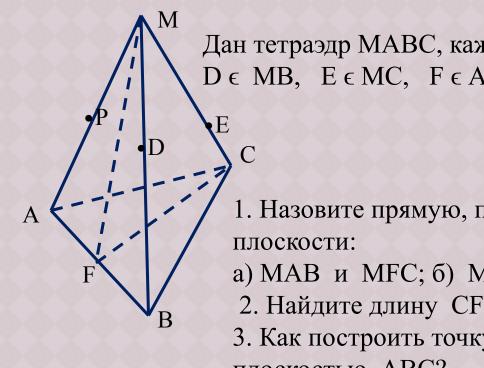
По следствию из аксиом, пересекающиеся прямые АСи ВD определяют некоторую плоскость α. Прямая АС лежит в плоскости α, значит, все точки этой прямой лежат в этой плоскости. Аналогично доказывается, что точки В и D принадлежат плоскости α.

По формуле  $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$  найдем площадь четырехугольника

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \sin 90^{\circ} = 60 (cm^{2}).$$

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ АКСИОМ И СЛЕДСТВИЙ ИЗ АКСИОМ.

## Решить задачи.

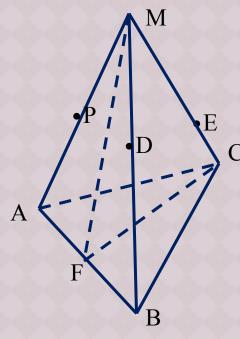


Дан тетраэдр МАВС, каждое ребро которого равно 6 см  $D \in MB$ ,  $E \in MC$ ,  $F \in AB$ , AF = FB,  $P \in MA$ .

- 1. Назовите прямую, по которой пересекаются
- а) MAB и MFC; б) MFC и ABC;
- 2. Найдите длину СF и площадь ABC.
- 3. Как построить точку пересечения прямой DE с плоскостью АВС?

## РЕШЕНИЕ





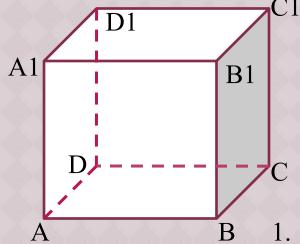
б)  $C \in MCF$ ,  $C \in ABC$ ,  $F \in MFC$ ,  $F \in ABC$   $\rightarrow$  по аксиоме A3  $MCF \cap ABC = FC$ 

2.  $\triangle$ ABC – равносторонний → FC - медиана, высота, биссектриса.  $\triangle$ CFB- прямоугольный : CB=6(см), FB = 3(см). По теореме Пифагора FC=3√3 (см).

S $\triangle$ ABC= $\frac{1}{2}$  AB · CF; S  $\triangle$  ABC=  $9\sqrt{3}$  (cm<sup>2</sup>).

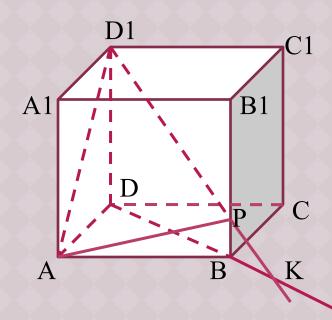
- Как еще можно найти длину FC?
- Как по- другому найти S∆ABC?
- 3.DE и BC лежат в плоскости BMC. Пусть они пересекаются в точке K,так как K $\epsilon$  BC, значит K  $\epsilon$  ABC по аксиоме A2;
- 1) DE  $\epsilon$  BMC, BC  $\epsilon$  BMC;
- 2) DE  $\epsilon$ BC = K, K  $\epsilon$  BC  $\rightarrow$  K  $\epsilon$  ABC.

Дан куб АВСДА1В1С1Д1, Р€ ВВ1,В1Р=РВ



- 1. Как построить точку пересечения плоскости ABC с прямой Д1Р?
- 2. Как построить линию пересечения плоскости АД1В и АВВ1?
- 3. Вычислите длину отрезков AP и AД1, если AB = a

## РЕШЕНИЕ

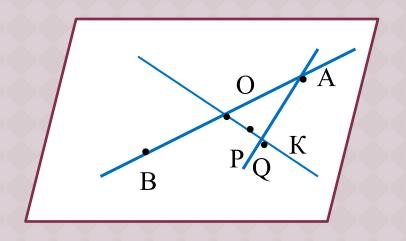


2. 
$$(AD1P) \cap ABB1 = AP$$

3. По теореме Пифагора

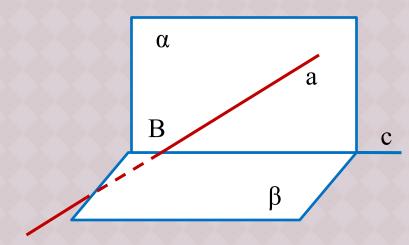
$$AP = \frac{1}{2} a \sqrt{5},$$

$$AD1 = a\sqrt{2}$$



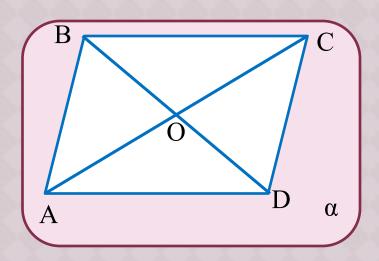
Точки A, B, C не лежат на одной прямой  $M \in AB$ ,  $K \in AC$ ,  $P \in MK$  Докажите, что точка P лежит в плоскости ABC.

## Задача 4



Плоскости а и в пересекаются по прямой с. Прямая а лежит в плоскости а и пересекает плоскость в . Пересекаются ли прямые а и с? Почему?

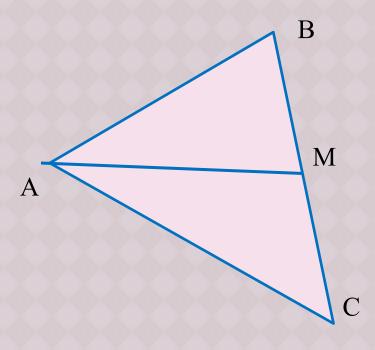
## ЗАДАЧА 5.



Дан прямоугольник ABCDO — точка пересечения его диагоналей. Известно, что точки A, B, O лежат в плоскости α . Докажите, что точки C и D также лежат в плоскости α. Вычислите площадь прямоугольника, если AC = 8(см), L AOB = 60°

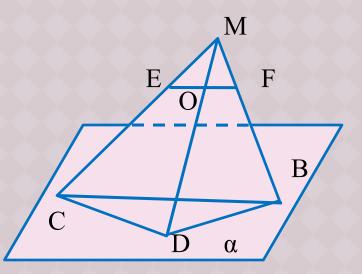
Ответ :  $16\sqrt{3}$  (см<sup>2</sup>)

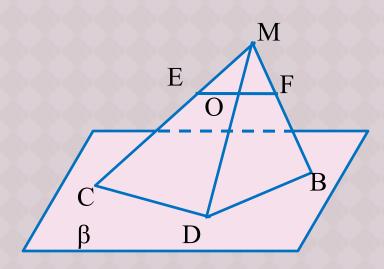
Стороны AB и AC треугольника ABC лежат в плоскости  $\alpha$ . Докажите, что и медиана его лежит в плоскости  $\alpha$ .



## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

В чем ошибка чертежа?





## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА