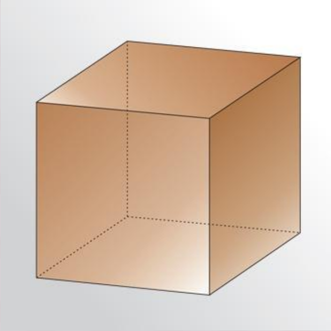
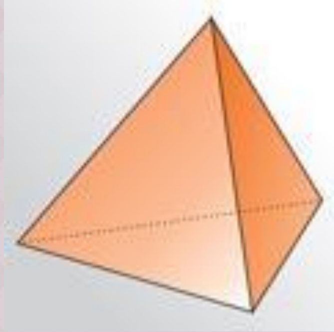
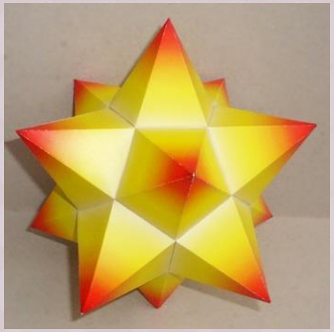






Предмет стереометрии.

Аксиомы стереометрии

Уроки геометрии 1-5 в 10 классе

Учитель математики МБОУ лицея №20 Первомайского района города Ростова-на-Дону

Шемчук Н. К.

ПРЕДМЕТ СТЕРЕОМЕТРИИ. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

1

2

3

4

5

Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии

Что такое геометрия?

Геометрия наука о свойствах геометрических фигур.

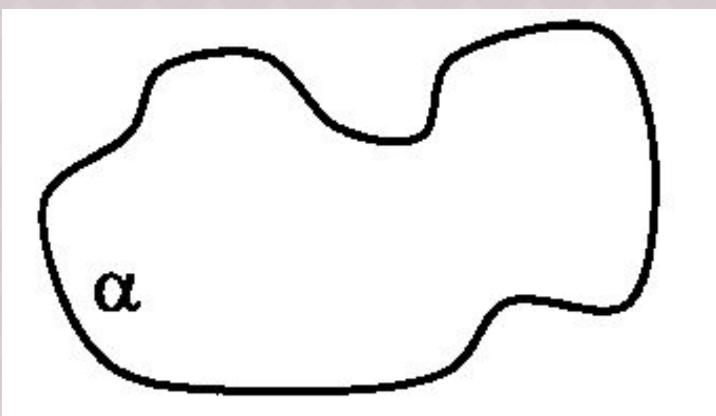
Планиметрия изучает свойства фигур на плоскости.
 Стереометрия изучает свойства фигур в пространстве.

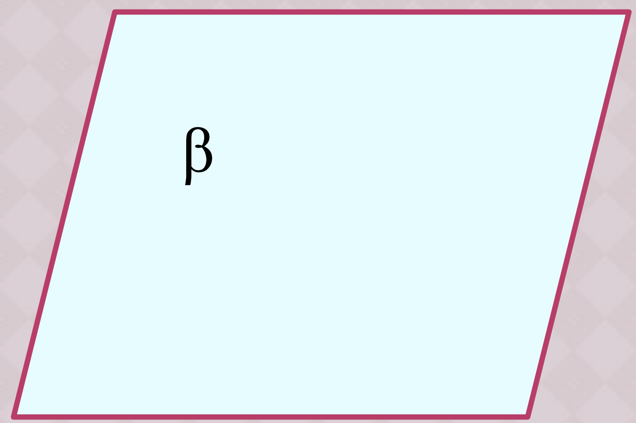
Основные понятия планиметрии

точка

. A

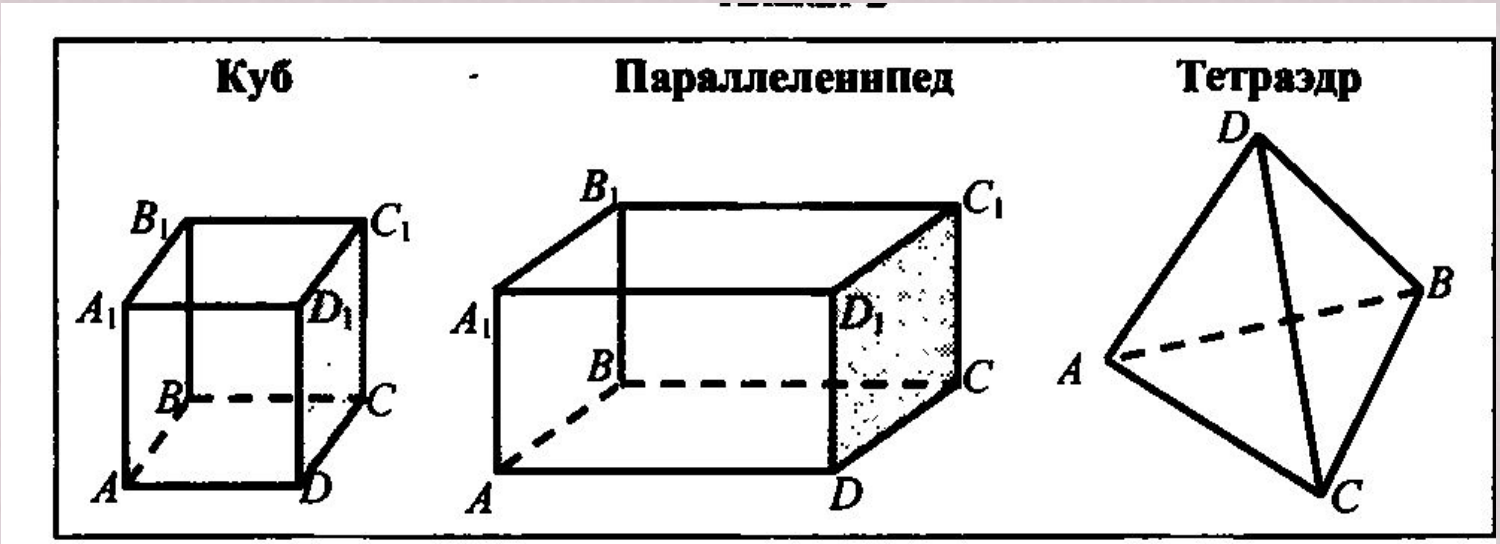
прямая





плоскость

СТЕРЕОМЕТРИЯ ИЗУЧАЕТ СВОЙСТВА ТЕЛ, ИХ ОБЪЁМЫ И ПЛОЩАДИ



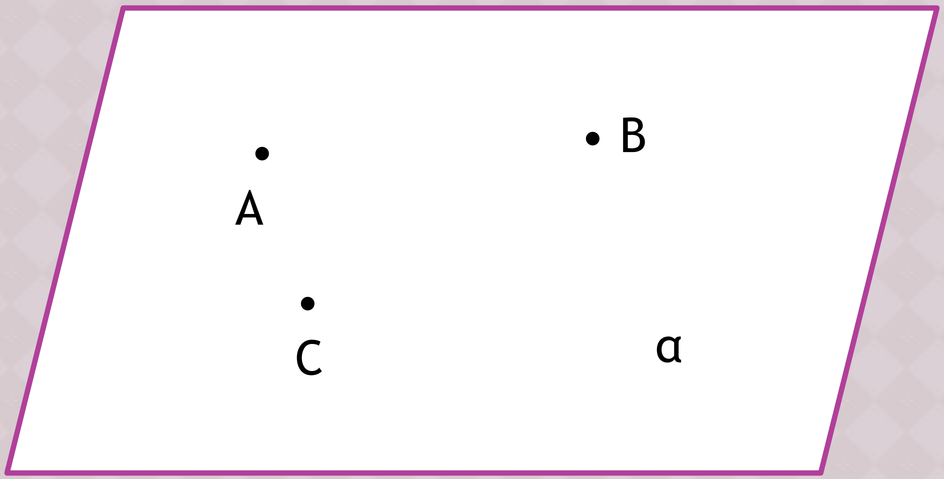
ЧТО ТАКОЕ АКСИОМА?

УТВЕРЖДЕНИЕ ПРИНИМАЕМОЕ БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, НАЗЫВАЕТСЯ АКСИОМОЙ

- **Какие аксиомы планиметрии вы знаете?**
- **Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну**
- **из трех точек прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими**

Аксиома стереометрии №1

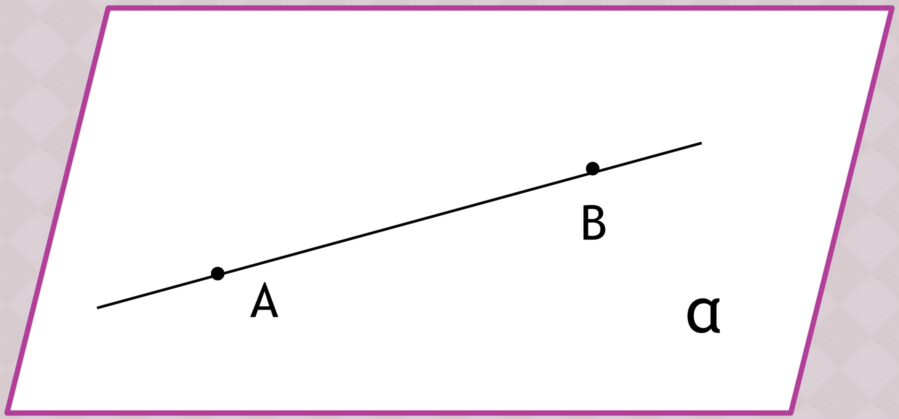
- **Через три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна**



Аксиома стереометрии №2

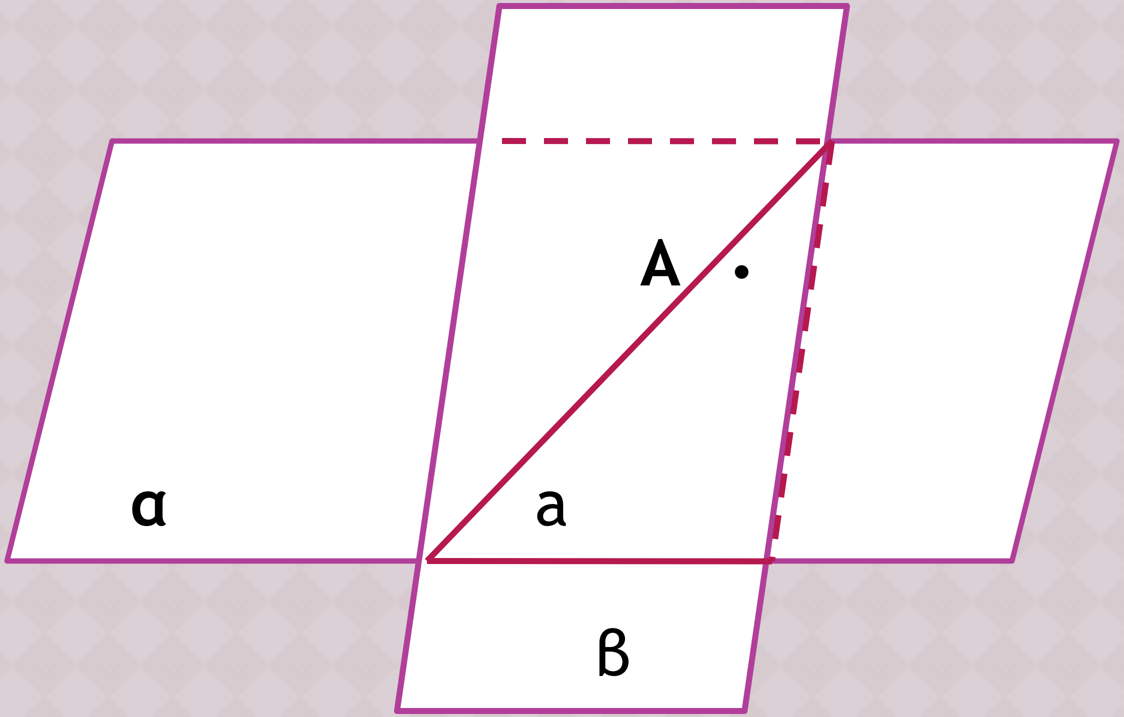
- **Если две точки прямой лежат в плоскости, то и все**

точки прямой лежат в плоскости



Аксиома стереометрии №3

- **Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей**



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

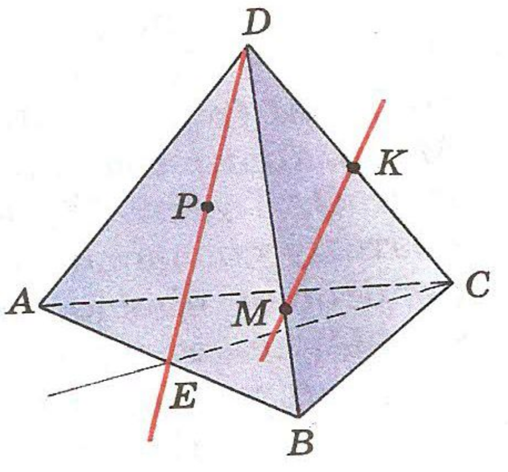


Рис. 8

№1 а),б)

По рисунку 8 назовите:

а) плоскости, в которых лежат прямые PE,MK,DB,AB,EC

б) точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC, прямой CE с плоскостью ADB

Ответ

а) Точки P и E лежат в плоскости (ADB), а значит и прямая PE лежит в плоскости (ADB) (по A_2). Аналогично MK лежит в плоскости (BDC). Точки B и D лежат одновременно в плоскостях (ADB) и (BDC), а значит прямая BD лежит в плоскостях (ADB) и (ABC).

Аналогично AB лежит в плоскостях (ADB) и (ABC).

Точки C и E лежат одновременно в плоскостях (ABC) и (DEC), а значит прямая CE лежит в этих же плоскостях.

б) Заметим, что точка C лежит на прямой (DK) и в плоскости ABC, а следовательно, $DK \cap (ABC)$ в точке C, так как точек пересечения более одной (прямая не лежит в плоскости), то это единственная точка.

Аналогично CE пересекается с плоскостью (ADB) в точке E.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

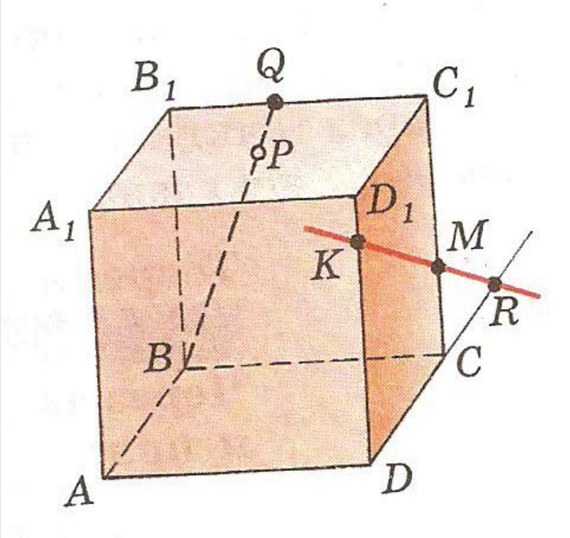


Рис. 9

№2 (а)

По рисунку 9 назовите:
а) точки, лежащие в плоскостях DCE1 и BQC

Ответ

В плоскости DCC1: D,C, C1, D1, K,M,R
В плоскости BQC: B1,B,P, Q,C1,M,C

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

Сформулируйте аксиомы планиметрии

- **Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну**
- **из трех точек прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими**

Сформулируйте аксиомы стереометрии

- **Через три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна**
- **Если две точки прямой лежат в плоскости, то и все точки прямой лежат в плоскости**

- **Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей**

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

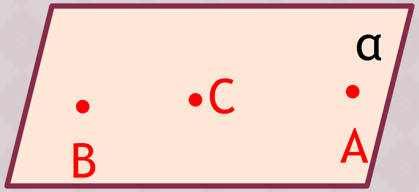
№3

Верно ли, что:

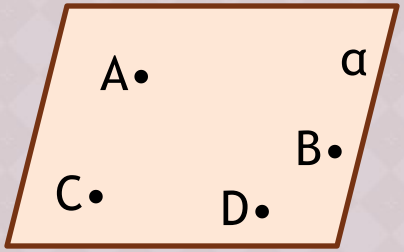
- а) любые три точки лежат в одной плоскости;
- б) любые четыре точки лежат в одной плоскости;
- в) любые четыре точки не лежат в одной плоскости;
- г) через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна

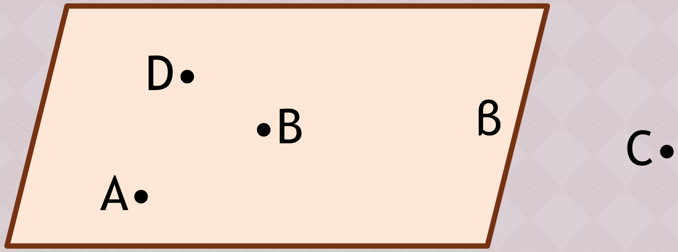
РЕШЕНИЕ №3

- а) любые три точки лежат в одной плоскости;

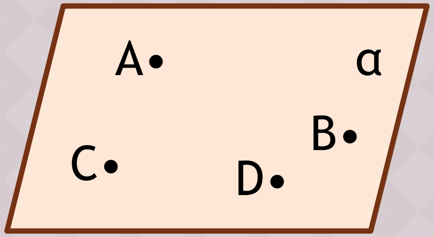


б) любые четыре точки лежат в одной плоскости

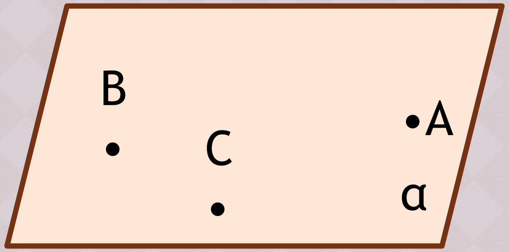




в) любые четыре точки не лежат в одной плоскости;

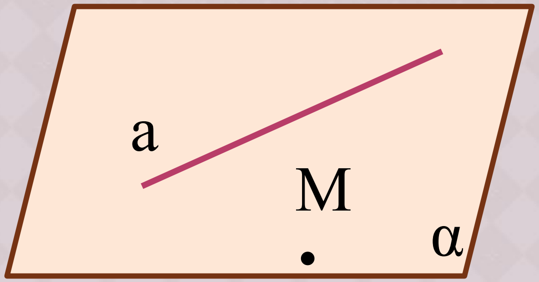


г) через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна



ТЕОРЕМА 1

- **Через прямую и не лежащую на ней току проходит плоскость, и притом только одна.**



Дано: a, M ϵ a.

Доказать: (a , M) ⊂ α

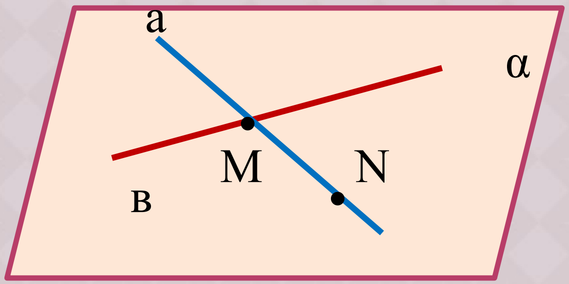
Доказательство

1. Рассмотрим прямую a не лежащую на ней точку М.отметим на прямой а две точки Р и Q. Точки P, Q, M не лежат на одной прямой, поэтому согласно аксиоме А1 через эти точки проходит некоторая плоскость α. Так как 2 точки прямой а (Р и Q)лежат в плоскости α, то по аксиомеА2 плоскость αпроходит через прямую а.

2. Единственность плоскости, проходящей через прямую а и точку М, следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямую а и точку М, проходит через точки Р, М и Q. Следовательно эта плоскость совпадает с плоскостью α, так как по аксиоме А1 через точки Р, М и Q проходи только одна плоскость.

Теорема 2

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только она



Дано: прямые а и в ,а ∩ в =М,
а ϵ α, в ϵ α.

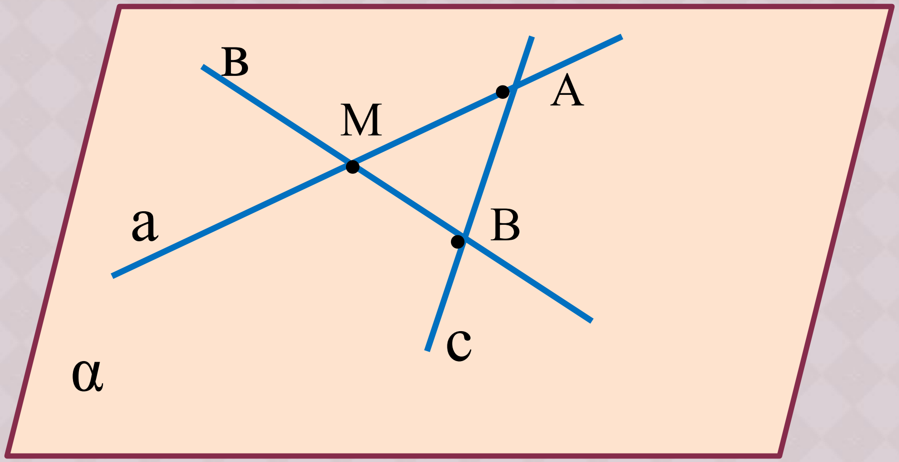
Доказать: а и в ϵ α

Доказательство:

1. Дополнительное построение (точка N).
2. Плоскость α проходит через прямую в и точку N.
3. Аксиома А2. (две точки прямой а лежат
в плоскости α).
4. Вывод.
5. Единственность (Любая плоскость, проходящая
через прямые а и в, проходит через точку N).
6. Плоскости совпадают.

УРОК 2

УСТНО



Заполните пропуски, чтобы получилось верное :высказывание

1) Если $A \in \alpha$, $a \subset \alpha$,
то $A \ldots \alpha$

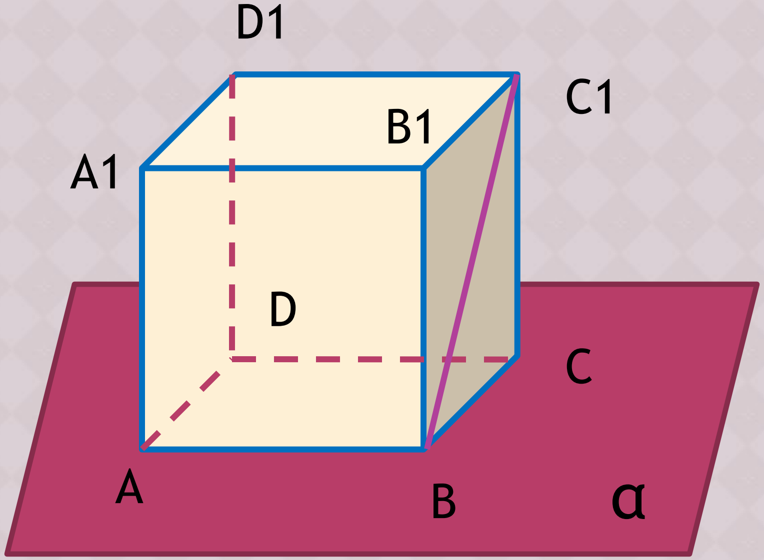
2) $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$, то $AB \ldots \alpha$

3) $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, то $C \ldots \alpha$

4) Если $M \in \alpha$, $M \in \beta$, $\alpha \subset \quad \beta = a$, то $M \ldots a$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ АКСИОМ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ СЛЕДСТВИЙ

Устно

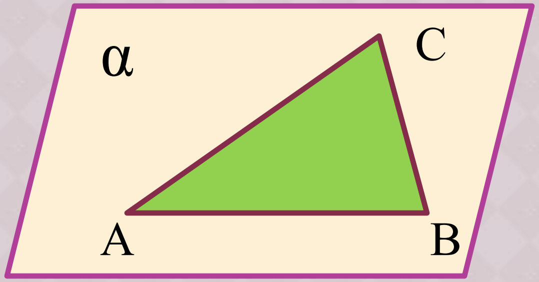


Дан куб.
Найдите:

1) Несколько точек, которые лежат в плоскости α;
2) Несколько точек, которые не лежат в плоскости α;
3) Несколько прямых, которые лежат в плоскости α;
4) Несколько прямых, которые не лежат в плоскости α;
5) Несколько прямых, которые пересекают прямую ВС.
6) Несколько прямых, которые не пересекают прямую ВС.

ЗАДАЧА №6

Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.



Дано: AB, BC, AC - отрезки

Доказать: (AB, BC, AC) ⊂ (ABC)

Доказательство:

1. (A,B,C) ϵ α, так как две точки принадлежат одной прямой, то по А2 (A, B, C) ϵ (ABC)

2. (A,B,C) ϵ α. Через A, B, C по аксиоме А1 проходит единственная плоскость. Две точки каждого из отрезков AB, BC, AC лежат в плоскости, следовательно по аксиоме А2 прямые AB, BC, AC , а значит и отрезки AB, BC, AC лежат в плоскости α, ч.т.д.

РЕШИТЬ ЗАДАЧУ

ABCD- ромб, точка –O точка пересечения его диагоналей, M- точка пространства, не лежащая в плоскости ромба. Точки A, O, D

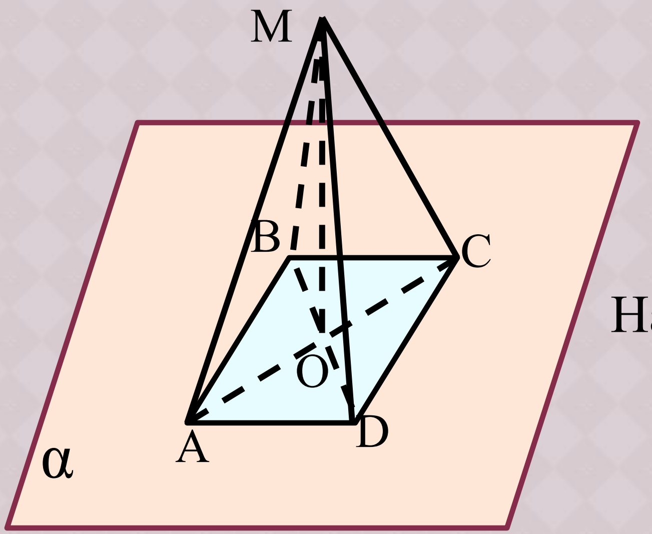
лежат в плоскости α. Дайте ответ на вопросы с необходимым обоснованием.

1) Лежат ли точки B и C в плоскости α?

2)Лежит ли в плоскости MOB точка D?

3) Назовите линию пересечения плоскостей MOB и AOD.

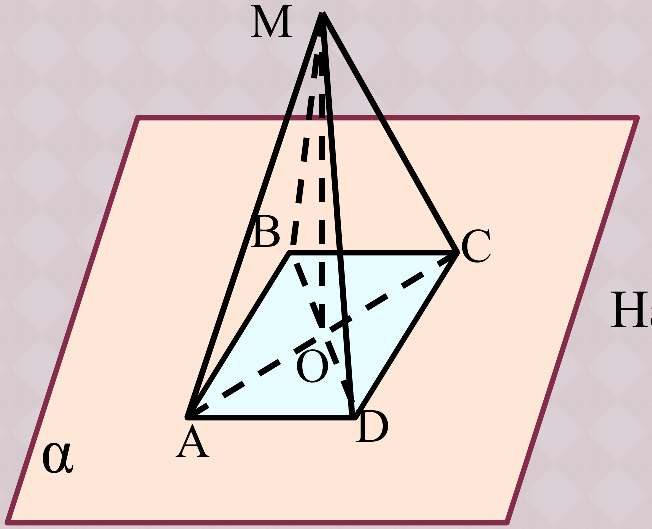
4) Вычислите площадь ромба, если сторона его равна 4 см, а угол равен 60°



Дано : ABCD- ромб, AC BD = O, M ϵ α, (A,D,O) ϵ α, AB = 4см, ∟A=60°.

Найти: (B,C) ϵ α, D ϵ MOB, MOB ∩ AOD, Sромба

Решение



Дано : ABCD- ромб, AC   BD = O, M ϵ α, (A,D,O) ϵ α, AB = 4см, ∟A=60°.

Найти: (B,C) ϵ α, D ϵ MOB, MOB ∩ AOD, Sромба

Решение

1) D ϵ α, O ϵ α, по А2 DO ⊂ α, так как B ϵ DO, то B ϵ α. Аналогично A ϵ α, O ϵ α, то по А2 AO ϵ α, так как C ϵ AO, то C ϵ α.

2) OB ϵ MOB, D ϵ OB, то D ϵ MOB.

3) O ϵ MOB, O ϵ AOD.

B ϵ MOB,B ϵ AOD , следовательно, MOB ∩ AOD=BO, но так как BO часть BD, то AOB ∩ AOD=BD

Если 2 плоскости имеют общие точки, то они пересекаются по прямой, проходящей через эти точки

4) Sромба=4· 4 ·sin60°=8 √3 (см²)

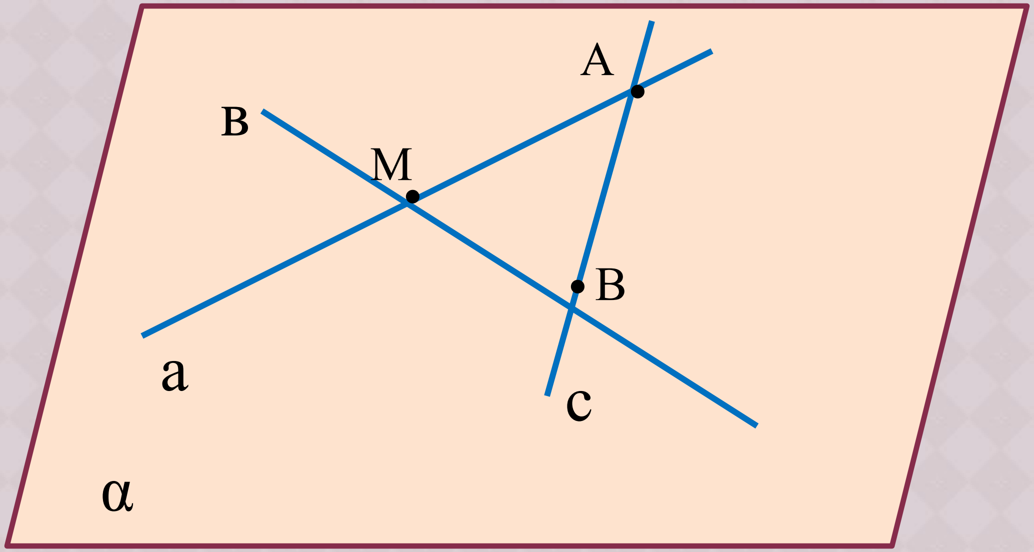
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

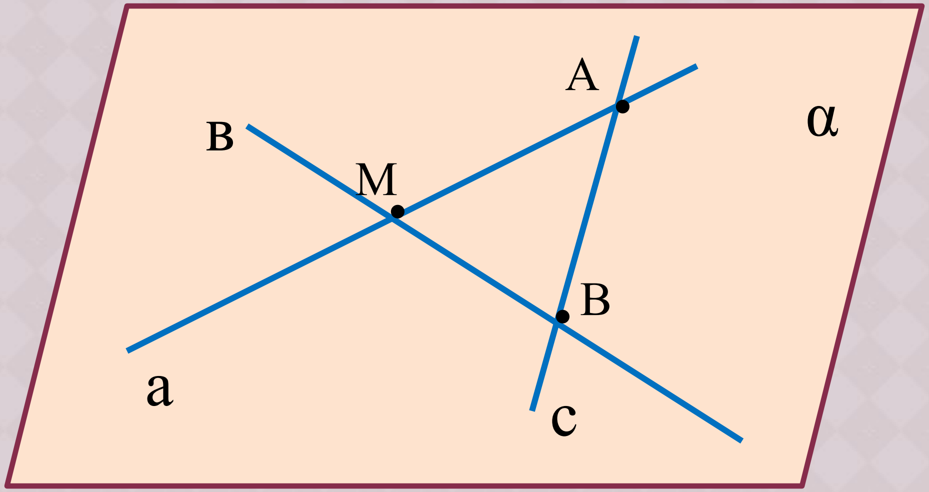
Задача №7

Дано: $а \cap в = М$, $с \cap а = В$, $М \notin с$.

Доказать: 1) $а \subset \alpha$, $в \subset \alpha$, $с \subset \alpha$

2) Лежат ли в одной плоскости все прямые проходящие через точку М?





Решение

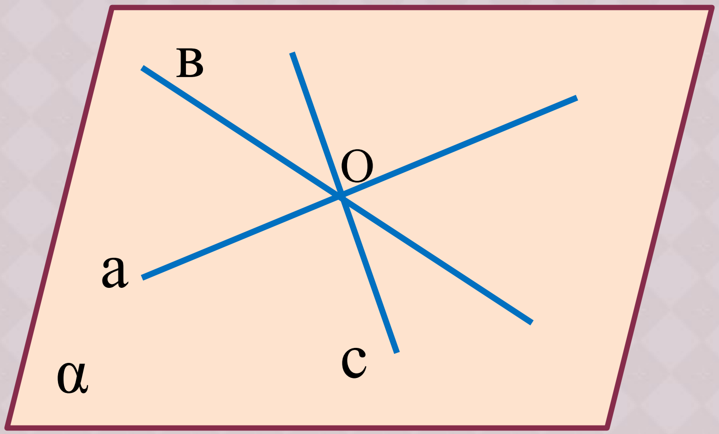
1. Согласно второму следствию, пересекающиеся прямые а и в принадлежат плоскости α, следовательно по аксиоме А2 прямая с лежит в плоскости α

2. Все прямые проходящие через точку М, не обязательно лежат в одной плоскости

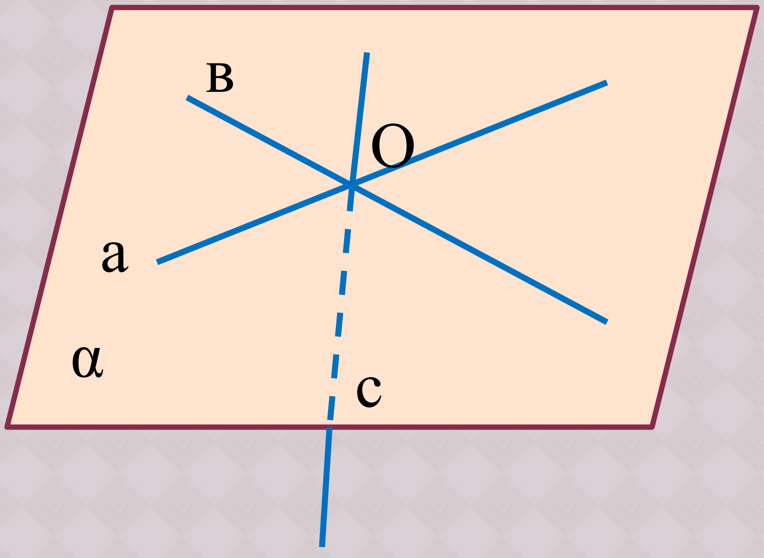
ЗАДАЧА №14

Решение

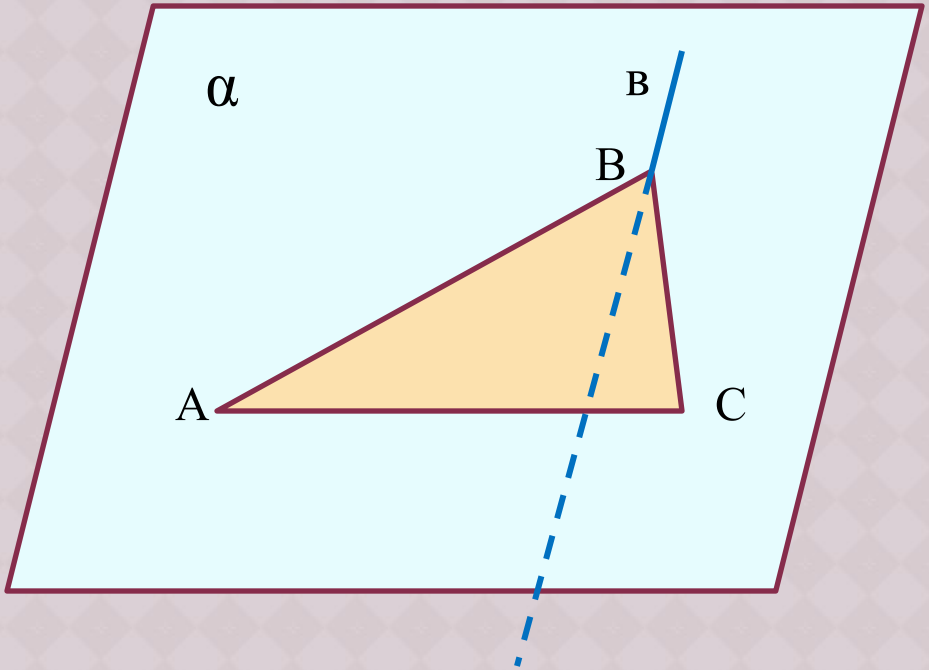
1. Все прямые а,в,с лежат в одной плоскости. По следствию 2 проходит единственная плоскость.



Одна из трех прямых не лежит в плоскости α, определяемой прямыми а и в.В этом случае через заданные три прямые проходит три различные плоскости .



ЗАДАЧА №10
РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО



Решение

ЗАДАЧА

Дан куб ABCDA1B1C1D1.
Точка M лежит на ребре BB1, точка N лежит
на ребре CC1, точка K на ребре DD1.

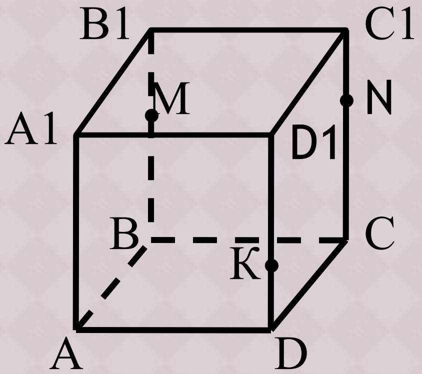
а) Назовите плоскости, в которых лежат точки M, N

б) Найти точку F - пересечения прямых MN и BC. Каким свойством обладает точка F?

в) Найдите точку пересечения прямой KN и плоскости ABC.

г) Найдите линию пересечения плоскостей MNK и ABC.

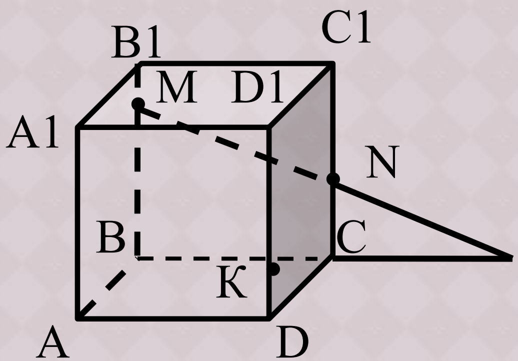
ЗАДАЧА



а) A1B1B и B1BC; B1C1C и DD1C

б) 1. MN ∩ BC = F;

2. F ϵ MN, F ϵ BC→ F ϵ BB1C и Fϵ ABC

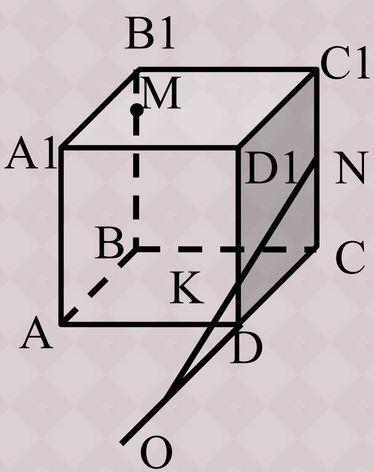


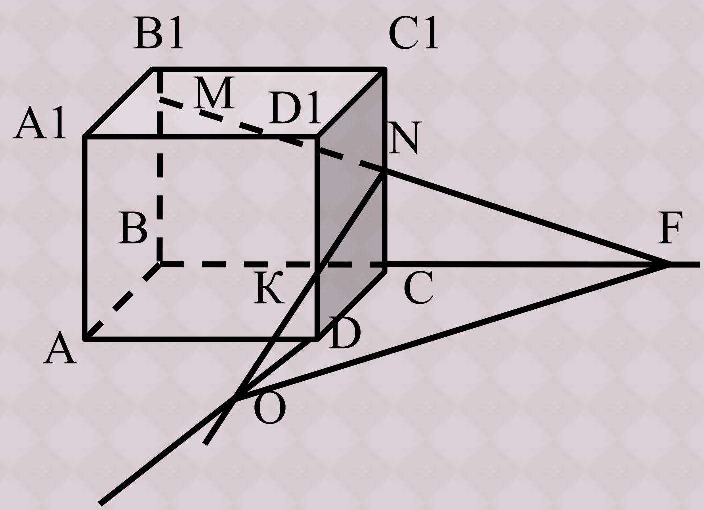
в) KN ∩ ABC = O

г) OF ∩ ABC = MNK

1. KN∩ DC = O

2. O ϵ KN, DC→ O ϵ ADC и O ϵ DCC1

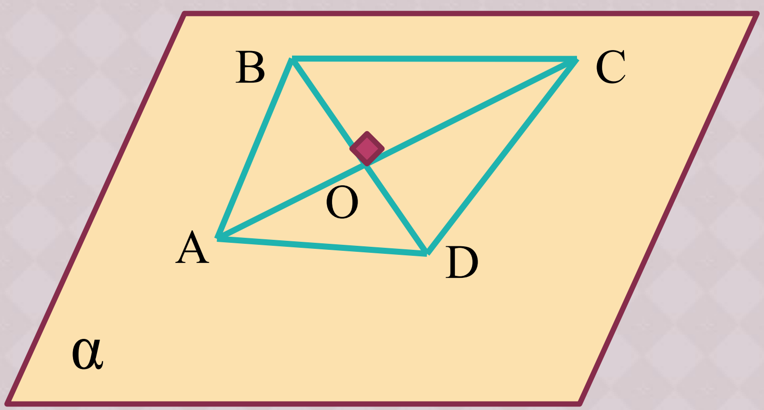




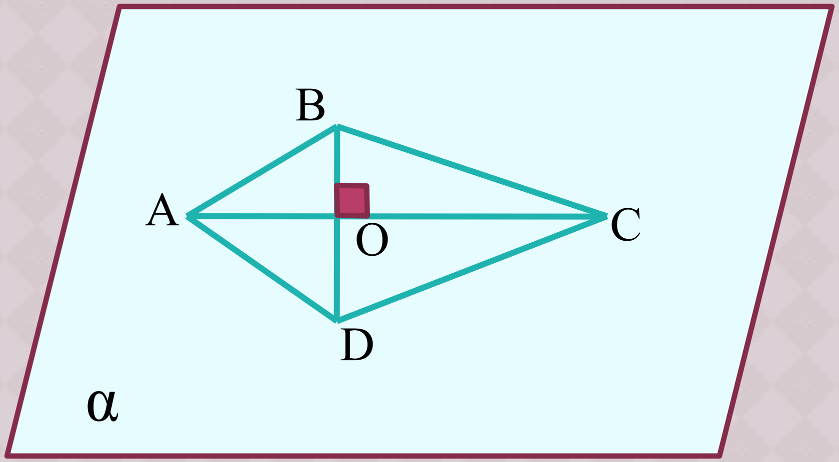
ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Докажите, что все вершины четырехугольника ABCD лежат в одной
плоскости, если его диагонали AC и BD пересекаются.

Вычислите площадь четырехугольника, если AC BD, AC = 10см, CD =12см.



РЕШЕНИЕ



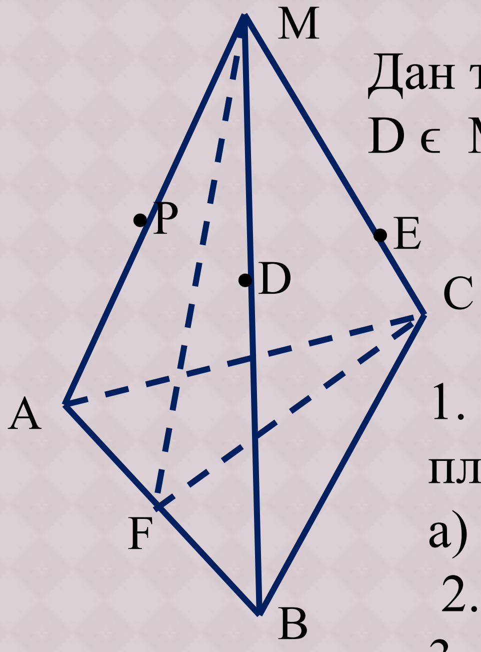
По следствию из аксиом, пересекающиеся прямые ACи BD определяют некоторую плоскость α. Прямая AC лежит в плоскости α, значит, все точки этой прямой лежат в этой плоскости. Аналогично доказывается, что точки B и D принадлежат плоскости α.

По формуле $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$ найдем площадь четырехугольника

$S = ½ \cdot 10 \cdot 12 \sin 90° = 60$ (см^2).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ АКСИОМ И СЛЕДСТВИЙ ИЗ АКСИОМ.

Решить задачи .



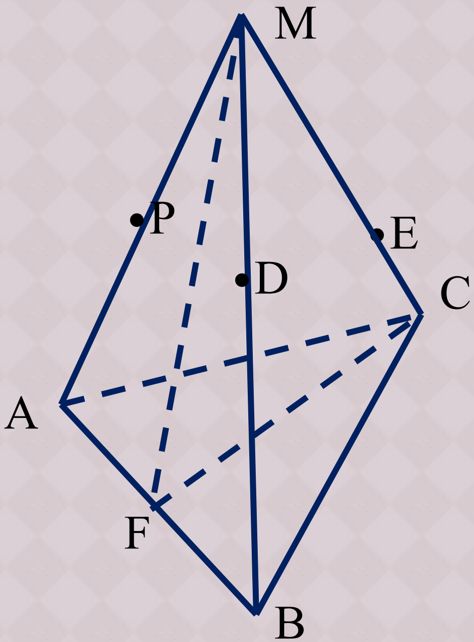
Дан тетраэдр MABC, каждое ребро которого равно 6 см.
D ϵ MB, E ϵ MC, F ϵ AB, AF= FB, P ϵ MA.

1. Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости:
а) MAB и MFC; б) MFC и ABC;
2. Найдите длину CF и площадь ABC.
3. Как построить точку пересечения прямой DE с плоскостью ABC?

РЕШЕНИЕ

1. а) M ϵABC, M ϵ MCF, F ϵ MAB, F ϵ MFC →по аксиоме А3 MAB∩MFC= MF

б) C ϵ MCF, C ϵ ABC, F ϵ MFC, F ϵ ABC →по аксиоме А3 MCF ∩ ABC = FC

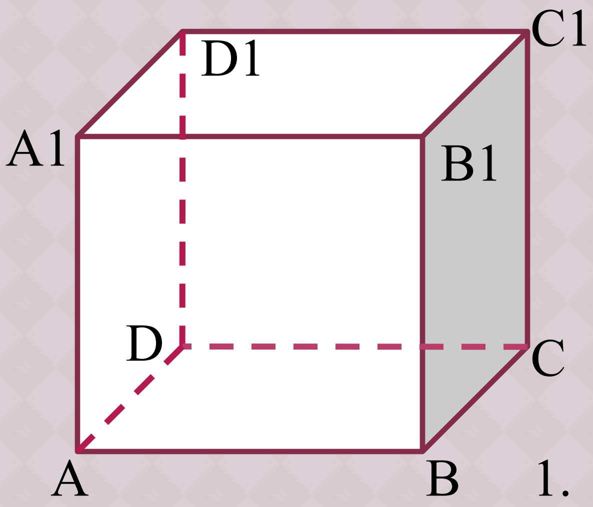


2. ΔABC – равносторонний → FC - медиана, высота, биссектриса. ΔCFB- прямоугольный : CB=6(см), FB = 3(см). По теореме Пифагора FC=$3\sqrt{3}$ (см).
SΔABC=½ AB · CF; S Δ ABC= $9\sqrt{3}$ (см²).
- Как еще можно найти длину FC?
- Как по- другому найти SΔABC?

3.DE и BC лежат в плоскости BMC. Пусть они пересекаются в точке K,так как Kϵ BC, значит K ϵ ABC по аксиоме А2;
1) DE ϵ BMC, BC ϵ BMC;
2) DE ϵBC = K, K ϵ BC → K ϵ ABC.

ЗАДАЧА 2

Дан куб АВСДА1В1С1Д1,
Р є ВВ1,В1Р=РВ



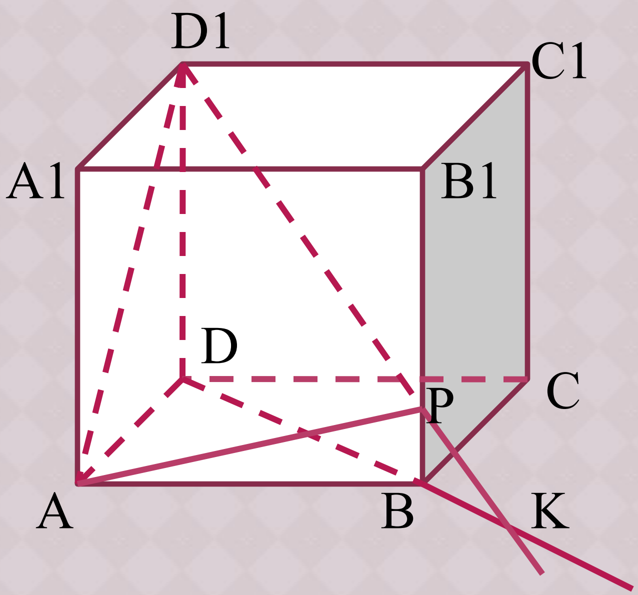
1. Как построить точку пересечения плоскости АВС с прямой Д1Р?

2. Как построить линию пересечения плоскости АД1В и АВВ1?

3. Вычислите длину отрезков АР и АД1, если АВ = а

ЗАДАЧА 2

РЕШЕНИЕ



1. (ABC)∩D1P= К

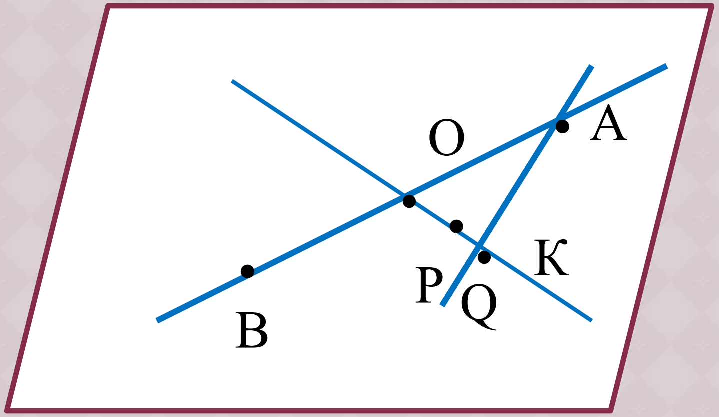
2. (AD1P) ∩ ABB1 =AP

3. По теореме Пифагора

AP =½ a √5,

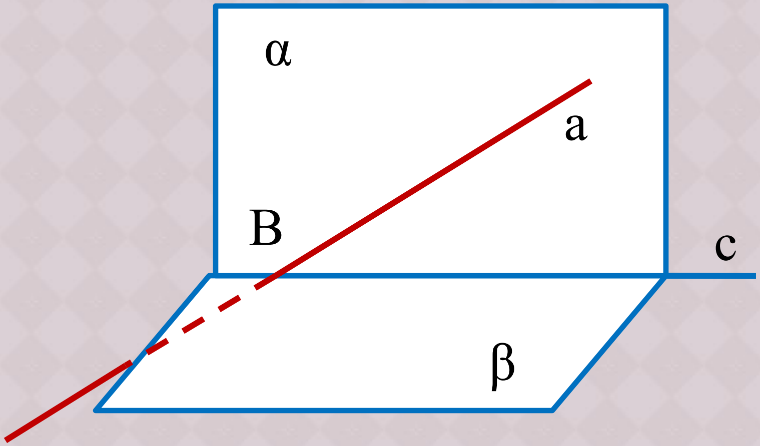
AD1 = a√2

ЗАДАЧА 3



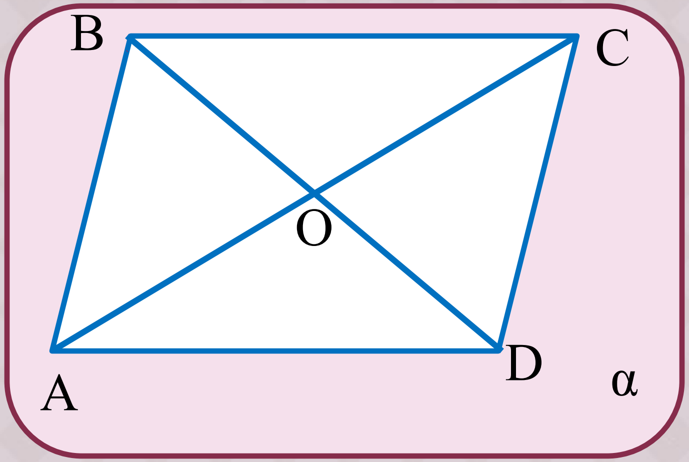
Точки A, B, C не лежат на одной прямой
M ϵ AB, K ϵ AC, P ϵ MK
Докажите, что точка P лежит в плоскости ABC.

Задача 4



Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β. Пересекаются ли прямые a и c? Почему?

ЗАДАЧА 5.

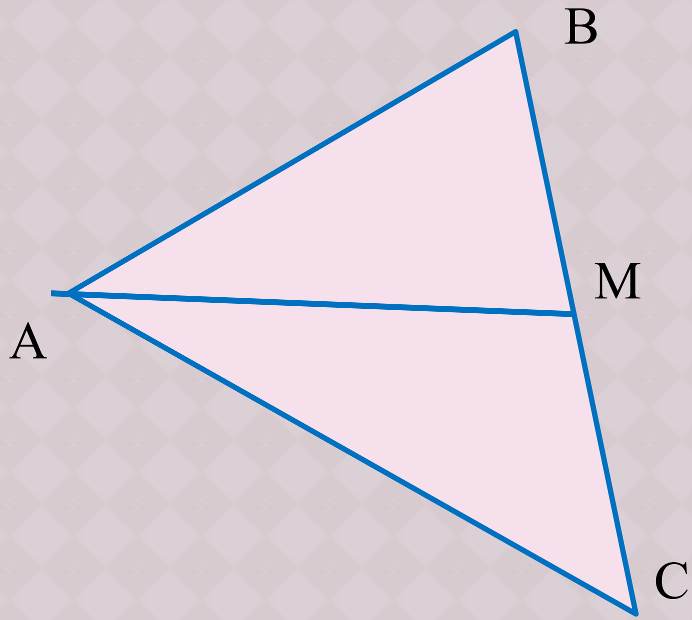


Дан прямоугольник ABCDO –
 точка пересечения его диагоналей.
Известно, что точки A, B, O лежат в плоскости α . Докажите, что точки
 C и D также лежат в плоскости α.
Вычислите площадь прямоугольника,
 если AC = 8(см),∟ AOB = 60º

Ответ : 16√3 (см²)

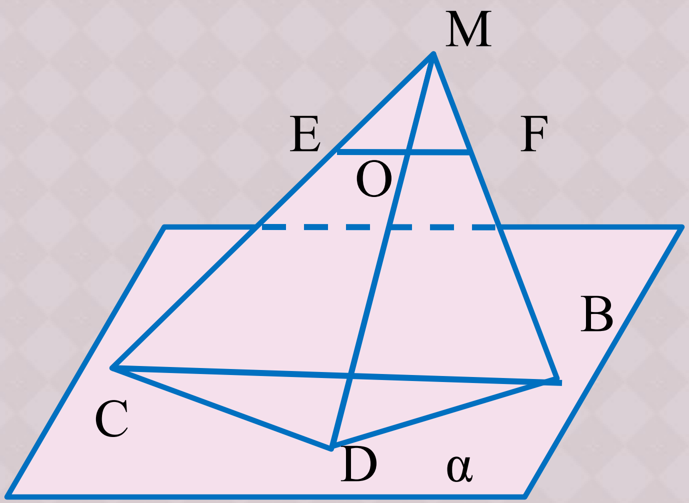
ЗАДАЧА 1

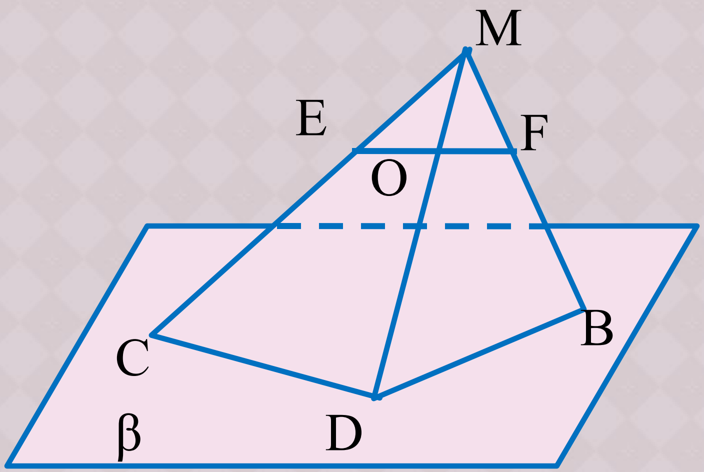
Стороны AB и AC треугольника ABC лежат в плоскости α. Докажите, что и медиана его лежит в плоскости α.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

В чем ошибка чертежа?





САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА