

Предмет стереометрии.

Аксиомы стереометрии

Уроки геометрии 1-5 в 10 классе

**Учитель математики МБОУ лицея №20
Первомайского района города Ростова-на-
Дону**

Шемчук Н. К.

ПРЕДМЕТ СТЕРЕОМЕТРИИ. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

1

2

3

4

5

Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии

Что такое геометрия?

Геометрия наука о свойствах геометрических фигур.

Планиметрия изучает свойства фигур на плоскости.

Стереометрия изучает свойства фигур в пространстве.

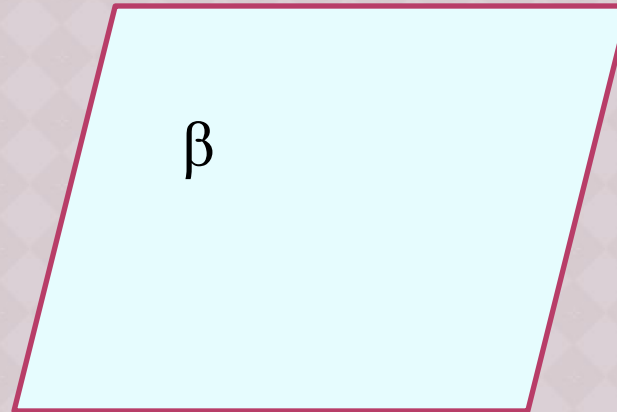
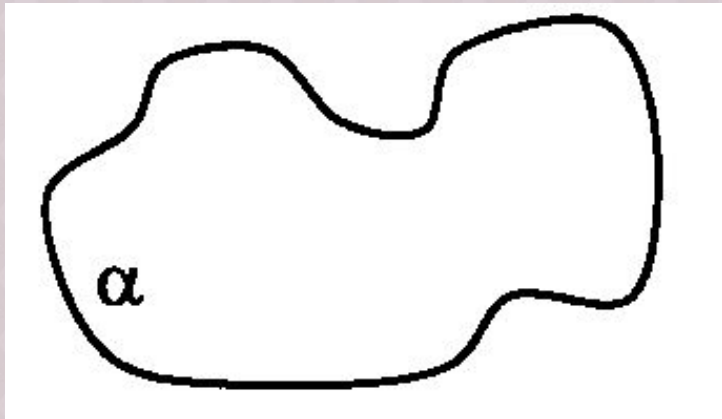
Основные понятия планиметрии

Точка

• A

a

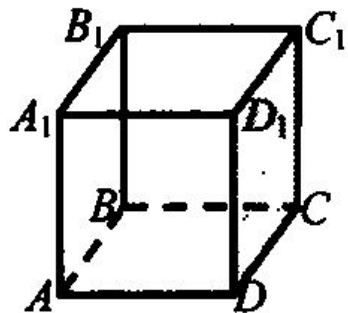
прямая



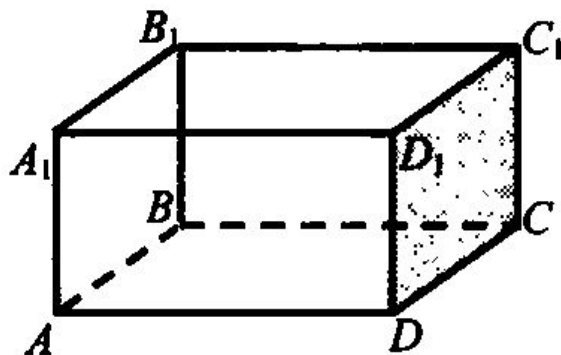
ПЛОСКОСТЬ

СТЕРЕОМЕТРИЯ ИЗУЧАЕТ СВОЙСТВА ТЕЛ, ИХ ОБЪЁМЫ И ПЛОЩАДИ

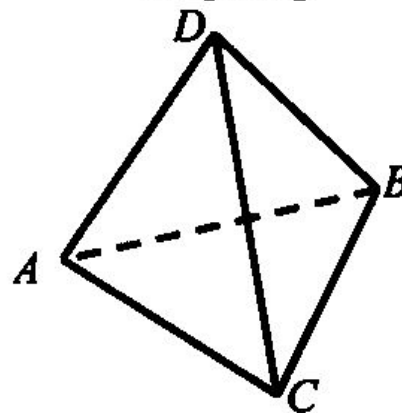
Куб



Параллелепипед



Тетраэдр



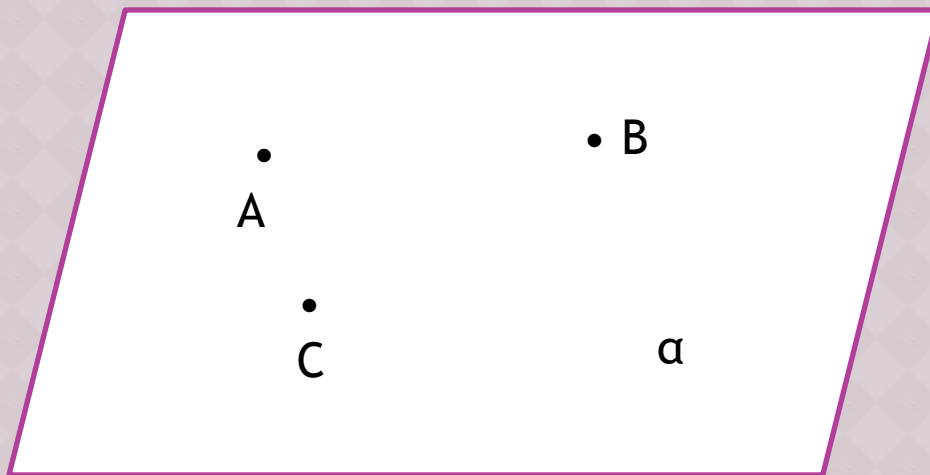
ЧТО ТАКОЕ АКСИОМА?

УТВЕРЖДЕНИЕ ПРИНИМАЕМОЕ БЕЗ
ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, НАЗЫВАЕТСЯ АКСИОМОЙ

- **Какие аксиомы планиметрии вы знаете?**
- **Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну**
- **из трех точек прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими**

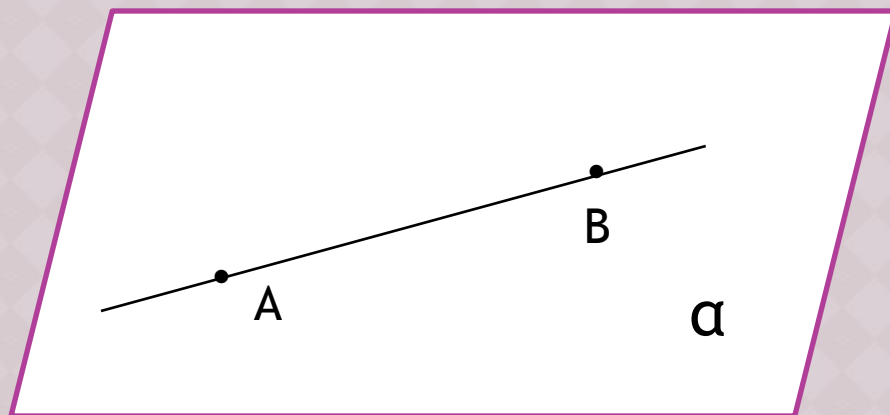
АКСИОМА СТЕРЕОМЕТРИИ №1

- ⊙ **Через три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна**



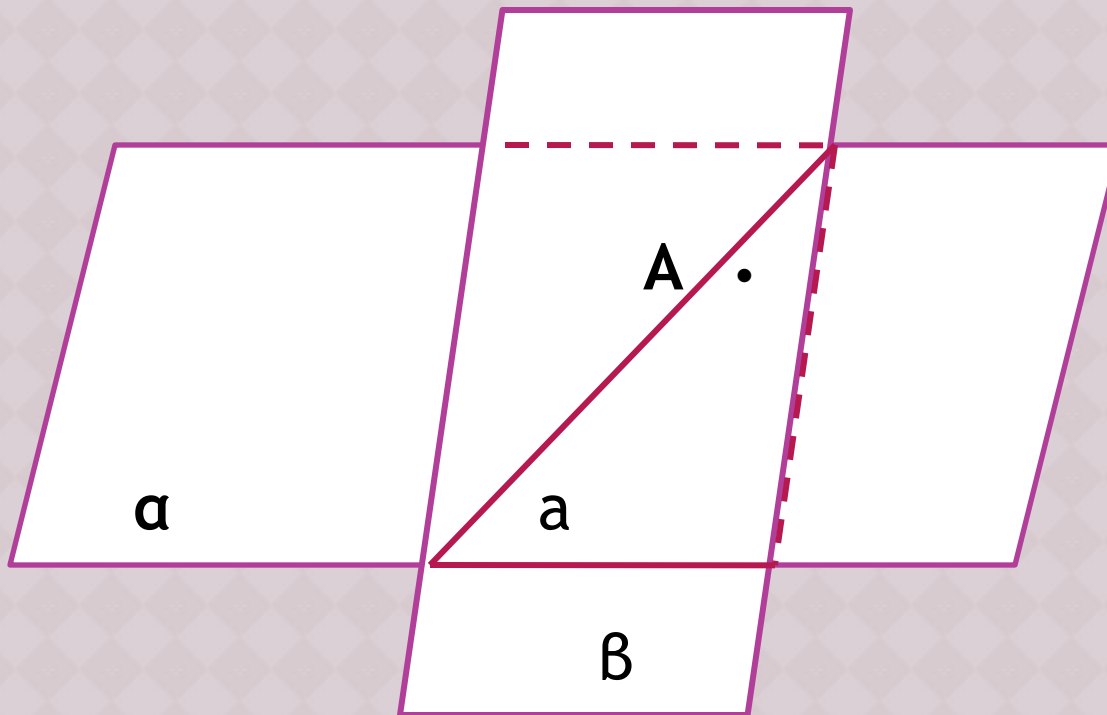
АКСИОМА СТЕРЕОМЕТРИИ №2

- Если две точки прямой лежат в плоскости, то и все точки прямой лежат в плоскости



АКСИОМА СТЕРЕОМЕТРИИ №3

- Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

№1 а),б)

По рисунку 8 назовите:

а) плоскости, в которых лежат прямые PE, MK, DB, AB, EC

б) точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC , прямой CE с плоскостью ADB

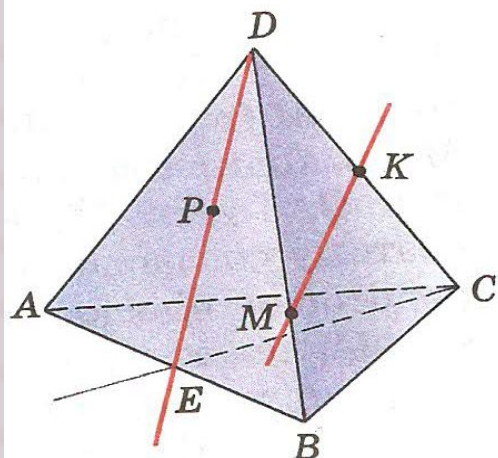


Рис. 8

Ответ

а) Точки P и E лежат в плоскости (ADB) , а значит и прямая PE лежит в плоскости (ADB) (по A_2). Аналогично MK лежит в плоскости (BDC) . Точки B и D лежат одновременно в плоскостях (ADB) и (BDC) , а значит прямая BD лежит в плоскостях (ADB) и (ABC) .

Аналогично AB лежит в плоскостях (ADB) и (ABC) .

Точки C и E лежат одновременно в плоскостях (ABC) и (DEC) , а значит прямая CE лежит в этих же плоскостях.

б) Заметим, что точка C лежит на прямой (DK) и в плоскости ABC , а следовательно, $DK \cap (ABC)$ в точке C , так как точек пересечения более одной (прямая не лежит в плоскости), то это единственная точка.

Аналогично CE пересекается с плоскостью (ADB) в точке E .

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

№2 (а)

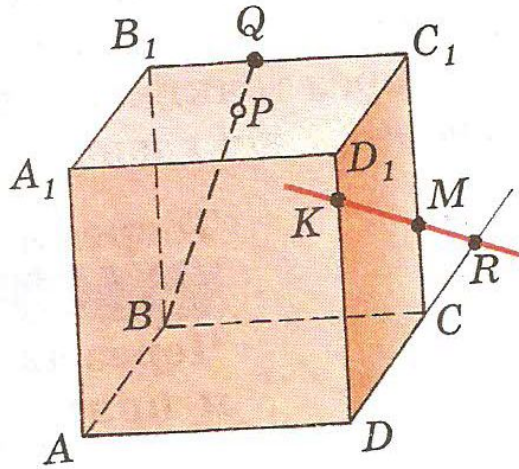


Рис. 9

По рисунку 9 назовите:

а) точки, лежащие в плоскостях
DCE1 и BQC

Ответ

В плоскости DCC1: D, C, C1, D1, K, M, R

В плоскости BQC: B1, B, P, Q, C1, M, C

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

Сформулируйте аксиомы планиметрии

- Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну
- из трех точек прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими

Сформулируйте аксиомы стереометрии

- Через три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна
- Если две точки прямой лежат в плоскости, то и все точки прямой лежат в плоскости
- Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

№3

Верно ли, что:

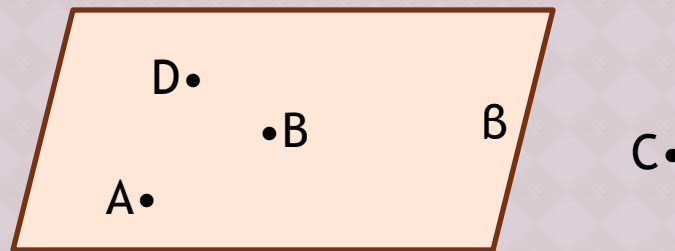
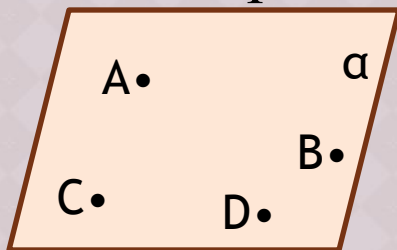
- ⊙ а) любые три точки лежат в одной плоскости;
- ⊙ б) любые четыре точки лежат в одной плоскости;
- ⊙ в) любые четыре точки не лежат в одной плоскости;
- ⊙ г) через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна

РЕШЕНИЕ №3

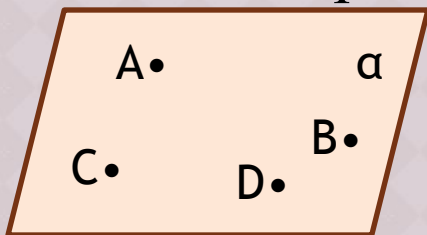
- а) любые три точки лежат в одной плоскости;



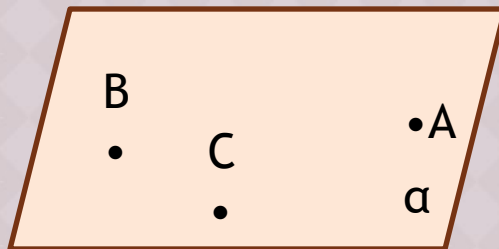
- б) любые четыре точки лежат в одной плоскости



- в) любые четыре точки не лежат в одной плоскости;

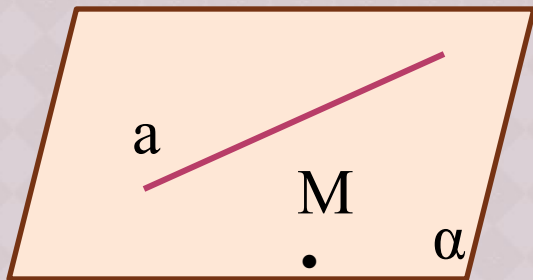


- г) через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна



ТЕОРЕМА 1

- ⊙ **Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.**



Дано: $a, M \notin a$.

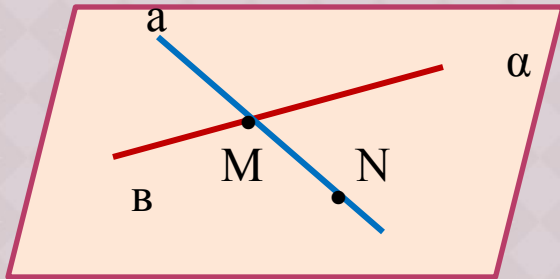
Доказать: $(a, M) \subset \alpha$

Доказательство

1. Рассмотрим прямую a и не лежащую на ней точку M . Отметим на прямой a две точки P и Q . Точки P, Q, M не лежат на одной прямой, поэтому согласно аксиоме $A1$ через эти точки проходит некоторая плоскость α . Так как 2 точки прямой a (P и Q) лежат в плоскости α , то по аксиоме $A2$ плоскость α проходит через прямую a .
2. Единственность плоскости, проходящей через прямую a и точку M , следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямую a и точку M , проходит через точки P, M и Q . Следовательно эта плоскость совпадает с плоскостью α , так как по аксиоме $A1$ через точки P, M и Q проходит только одна плоскость.

ТЕОРЕМА 2

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только она



Дано: прямые a и b , $a \cap b = M$,
 $a \in \alpha$, $b \in \alpha$.

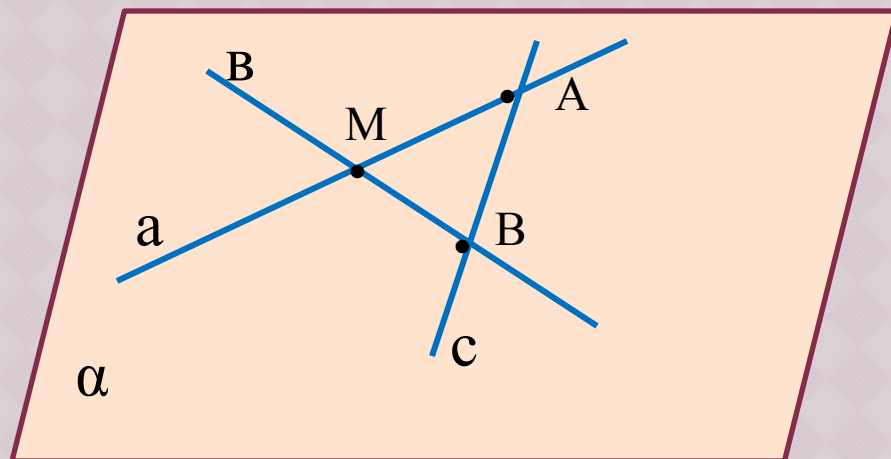
Доказать: a и $b \in \alpha$

Доказательство:

1. Дополнительное построение (точка N).
2. Плоскость α проходит через прямую b и точку N .
3. Аксиома А2. (две точки прямой a лежат в плоскости α).
4. Вывод.
5. Единственность (Любая плоскость, проходящая через прямые a и b , проходит через точку N).
6. Плоскости совпадают.

УРОК 2

УСТНО

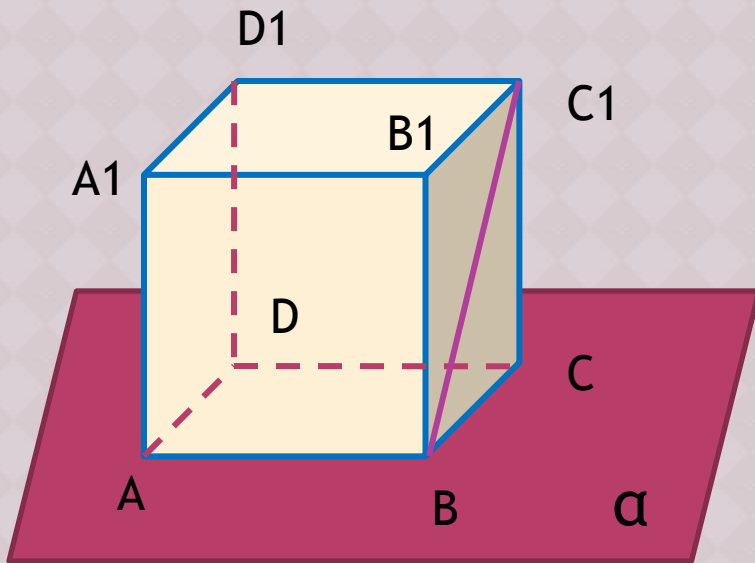


Заполните пропуски, чтобы получилось верное высказывание

- 1) Если $A \in \alpha$, $a \subset \alpha$,
то $A \dots \alpha$
- 2) $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$, то $AB \dots \alpha$
- 3) $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, то $C \dots \alpha$
- 4) Если $M \in \alpha$, $M \in \beta$, $\alpha \cap \beta = a$, то $M \dots a$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ АКСИОМ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ СЛЕДСТВИЙ

Устно



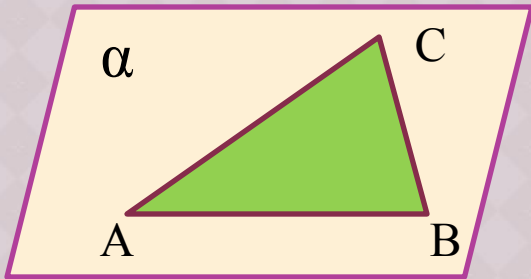
Дан куб.

Найдите:

- 1) Несколько точек, которые лежат в плоскости α ;
- 2) Несколько точек, которые не лежат в плоскости α ;
- 3) Несколько прямых, которые лежат в плоскости α ;
- 4) Несколько прямых, которые не лежат в плоскости α ;
- 5) Несколько прямых, которые пересекают прямую BC .
- 6) Несколько прямых, которые не пересекают прямую BC .

ЗАДАЧА №6

Три данные точки соединены попарно отрезками.
Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.



Дано: AB, BC, AC - отрезки

Доказать: $(AB, BC, AC) \subset (ABC)$

Доказательство:

1. $(A, B, C) \in \alpha$, так как две точки принадлежат одной прямой, то по А2 $(A, B, C) \in (ABC)$

2. $(A, B, C) \in \alpha$. Через A, B, C по аксиоме А1 проходит единственная плоскость. Две точки каждого из отрезков AB, BC, AC лежат в плоскости, следовательно по аксиоме А2 прямые AB, BC, AC , а значит и отрезки AB, BC, AC лежат в плоскости α , ч.т.д.

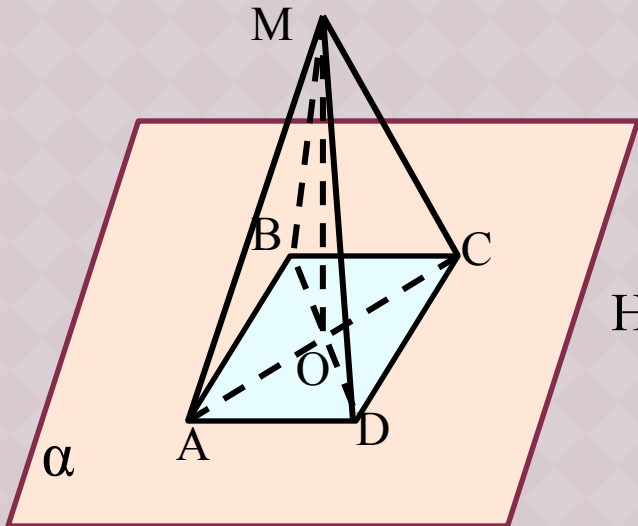
РЕШИТЬ ЗАДАЧУ

ABCD- ромб, точка O точка пересечения его диагоналей,
M- точка пространства, не лежащая в плоскости ромба.

Точки A, O, D

лежат в плоскости α . Дайте ответ на вопросы с
необходимым обоснованием.

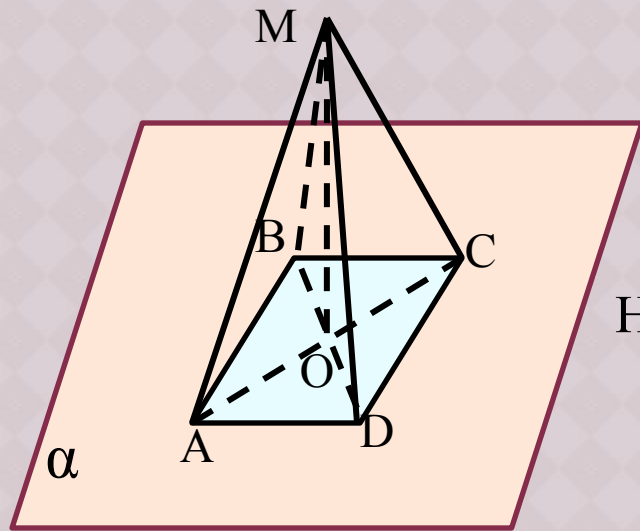
- 1) Лежат ли точки B и C в плоскости α ?
- 2) Лежит ли в плоскости MOB точка D?
- 3) Назовите линию пересечения плоскостей MOB и AOD.
- 4) Вычислите площадь ромба, если сторона его равна 4 см,
а угол равен 60°



Дано : $ABCD$ - ромб, $AC \cap BD = O$, $M \in \alpha$,
 $(A, D, O) \in \alpha$, $AB = 4\text{см}$, $\angle A = 60^\circ$.

Найти: $(B, C) \in \alpha$, $D \in MOB$, $MOB \cap AOD$, $S_{\text{ромба}}$

Решение



Дано : $ABCD$ - ромб, $AC \cap BD = O$, $M \in \alpha$,
 $(A,D,O) \in \alpha$, $AB = 4\text{см}$, $\angle A = 60^\circ$.

Найти: $(B,C) \in \alpha$, $D \in MOB$, $MOB \cap AOD$, $S_{\text{ромба}}$

Решение

1) $D \in \alpha$, $O \in \alpha$, по А2 $DO \subset \alpha$, так как $B \in DO$, то $B \in \alpha$. Аналогично
 $A \in \alpha$, $O \in \alpha$, то по А2 $AO \in \alpha$, так как $C \in AO$, то $C \in \alpha$.

2) $OB \in MOB$, $D \in OB$, то $D \in MOB$.

3) $O \in MOB$, $O \in AOD$.

$B \in MOB$, $B \in AOD$, следовательно, $MOB \cap AOD = BO$, но так как
 BO часть BD , то $MOB \cap AOD = BD$

Если 2 плоскости имеют общие точки, то они пересекаются по
 прямой, проходящей через эти точки

4) $S_{\text{ромба}} = 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 8\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$

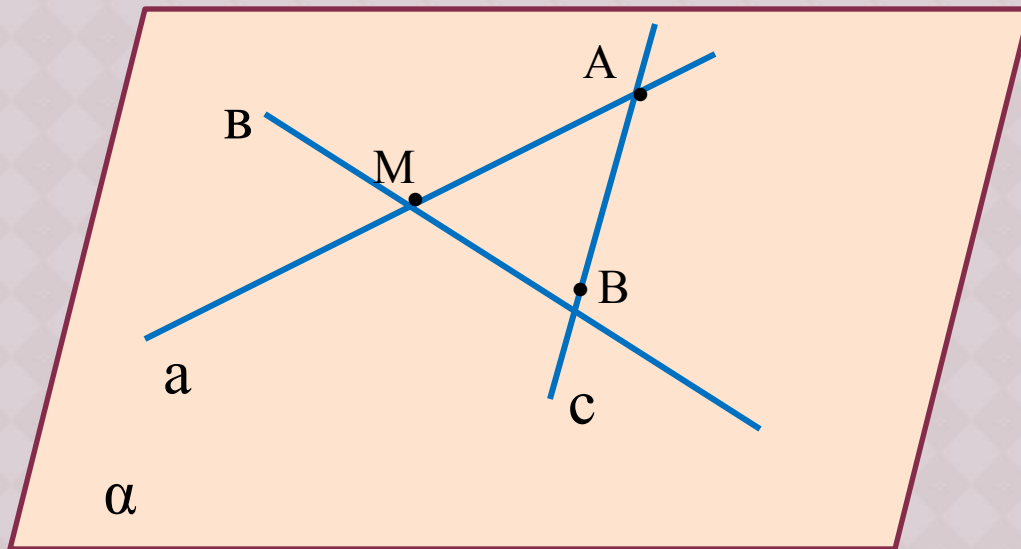
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

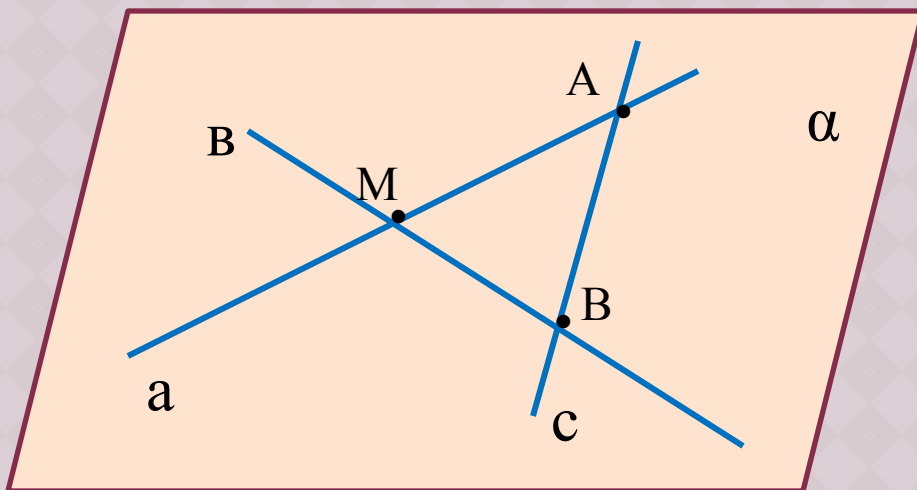
Задача №7

Дано: $a \cap b = M, c \cap a = B, M \notin c$.

Доказать: 1) $a \subset \alpha, b \subset \alpha, c \subset \alpha$

2) Лежат ли в одной плоскости все прямые проходящие через точку M ?





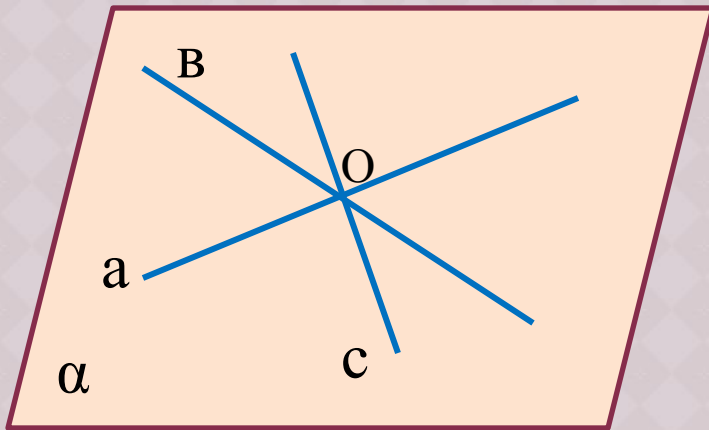
Решение

1. Согласно второму следствию, пересекающиеся прямые a и b принадлежат плоскости α , следовательно по аксиоме A2 прямая c лежит в плоскости α
2. Все прямые проходящие через точку M , не обязательно лежат в одной плоскости

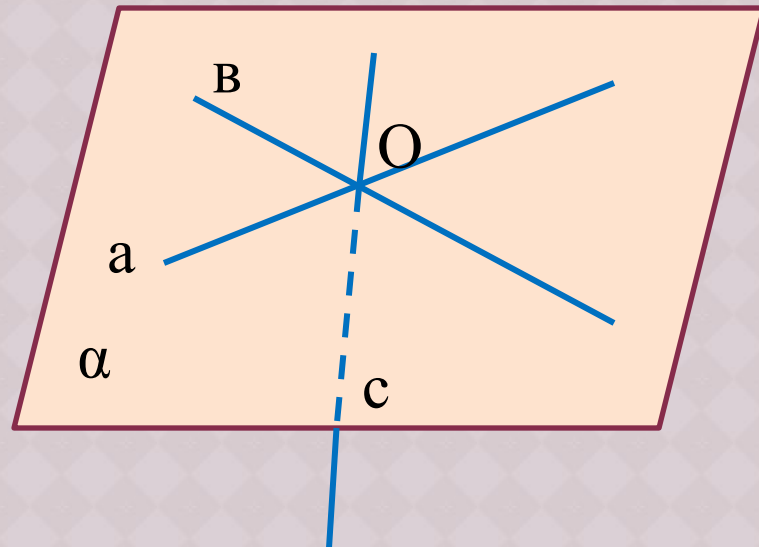
ЗАДАЧА №14

Решение

1. Все прямые a, b, c лежат в одной плоскости. По следствию 2 проходит единственная плоскость.

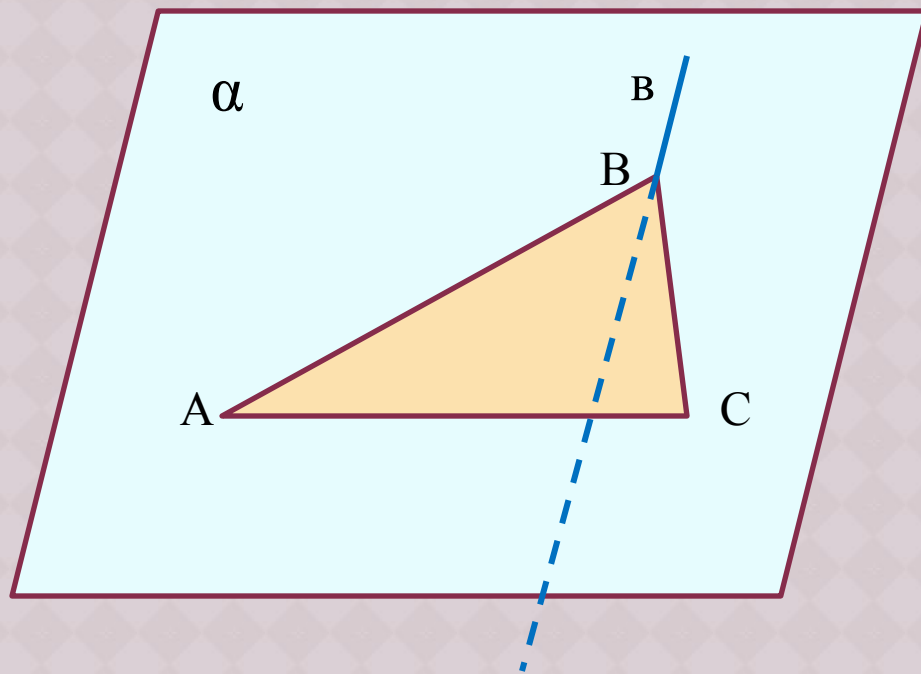


Одна из трех прямых не лежит в плоскости α , определяемой прямыми a и b . В этом случае через заданные три прямые проходит три различные плоскости.



ЗАДАЧА №10

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО



Решение

ЗАДАЧА

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Точка M лежит на ребре BB_1 , точка N лежит на ребре CC_1 , точка K на ребре DD_1 .

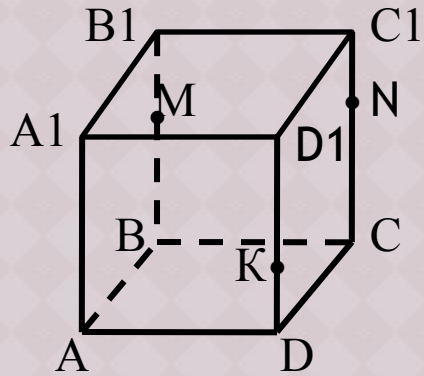
а) Назовите плоскости, в которых лежат точки M, N

б) Найти точку F - пересечения прямых MN и BC . Каким свойством обладает точка F ?

в) Найдите точку пересечения прямой KN и плоскости ABC .

г) Найдите линию пересечения плоскостей MNK и ABC .

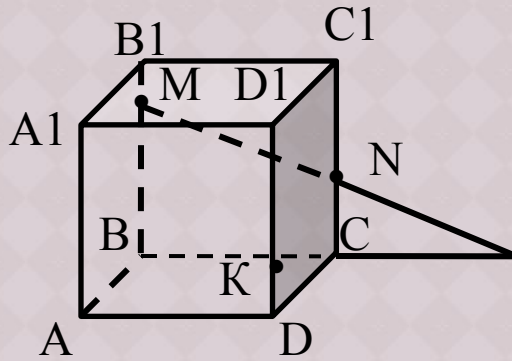
ЗАДАЧА



а) A_1B_1B и B_1BC ; B_1C_1C и DD_1C

б) 1. $MN \cap BC = F$;

2. $F \in MN, F \in BC \rightarrow F \in BB_1C$ и $F \in ABC$

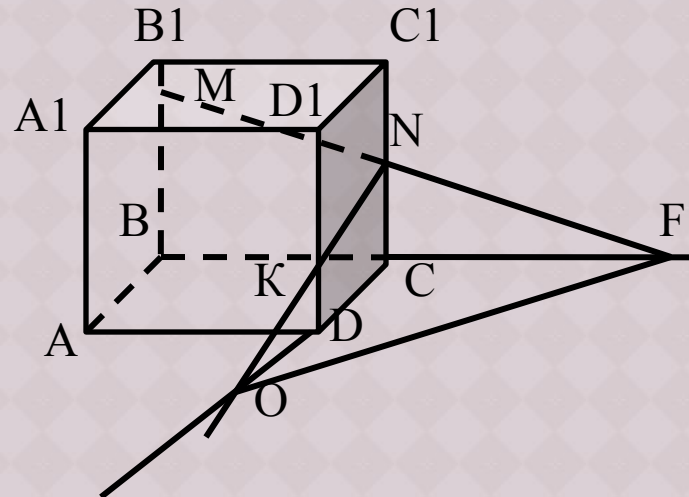
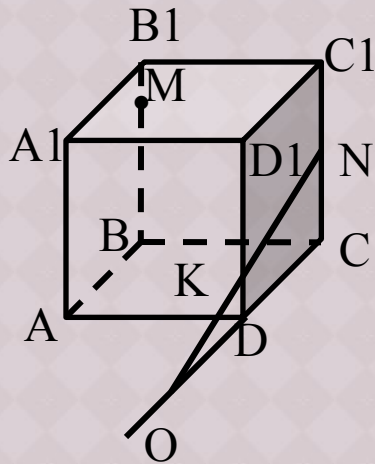


в) $KN \cap ABC = O$

г) $OF \cap ABC = MNK$

1. $KN \cap DC = O$

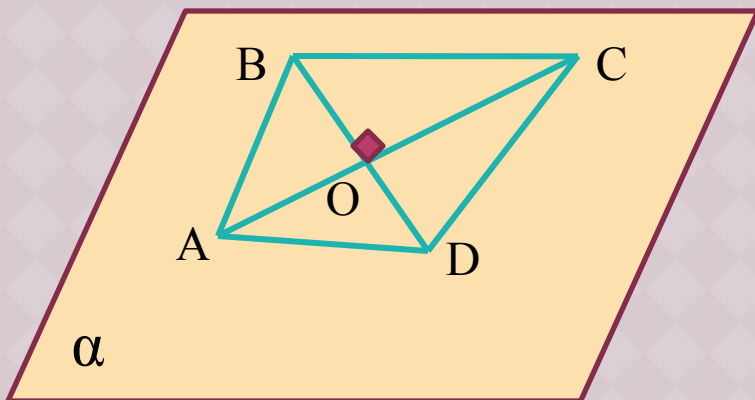
2. $O \in KN, DC \rightarrow O \in ADC$ и $O \in DCC_1$



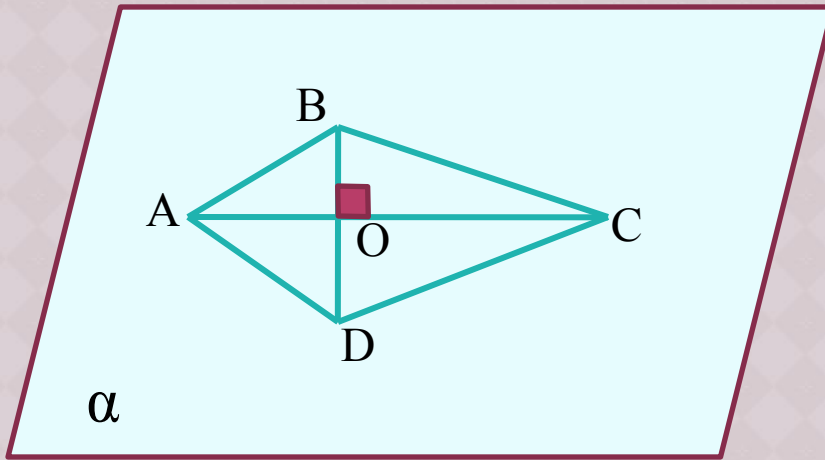
ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Докажите, что все вершины четырехугольника $ABCD$ лежат в одной плоскости, если его диагонали AC и BD пересекаются.

Вычислите площадь четырехугольника, если $AC \perp BD$, $AC = 10\text{см}$, $BD = 12\text{см}$.



РЕШЕНИЕ



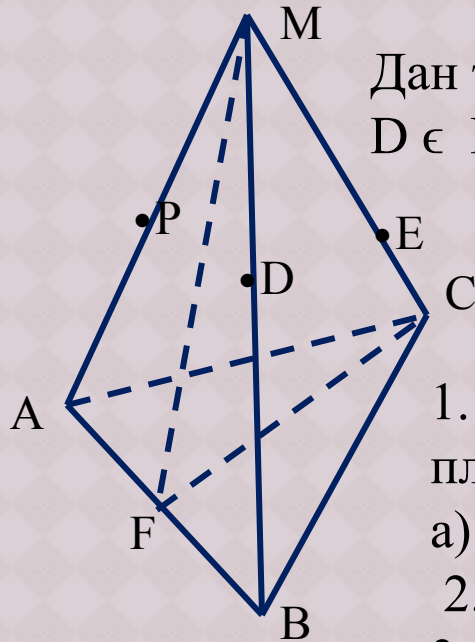
По следствию из аксиом, пересекающиеся прямые AC и BD определяют некоторую плоскость α . Прямая AC лежит в плоскости α , значит, все точки этой прямой лежат в этой плоскости. Аналогично доказывается, что точки B и D принадлежат плоскости α .

По формуле $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$ найдем площадь четырехугольника

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \sin 90^\circ = 60 \text{ (см}^2\text{)}.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ АКСИОМ И СЛЕДСТВИЙ ИЗ АКСИОМ.

Решить задачи .



Дан тетраэдр $MABC$, каждое ребро которого равно 6 см.
 $D \in MB$, $E \in MC$, $F \in AB$, $AF = FB$, $P \in MA$.

1. Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости:

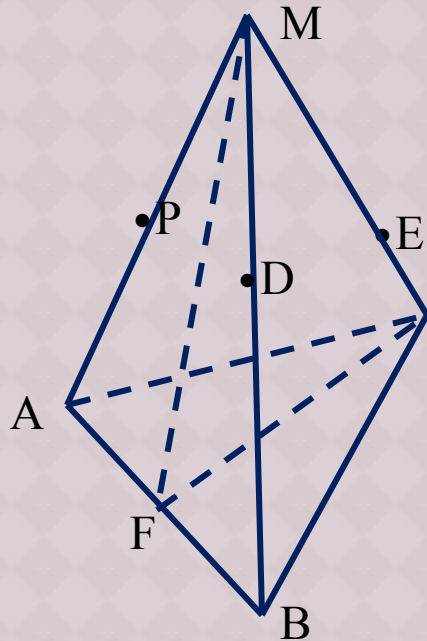
а) MAB и MFC ; б) MFC и ABC ;

2. Найдите длину CF и площадь ABC .

3. Как построить точку пересечения прямой DE с плоскостью ABC ?

РЕШЕНИЕ

$$1. \quad \left. \begin{array}{l} \text{a) } M \in ABC, M \in MCF, \\ F \in MAB, F \in MFC \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{по аксиоме } A3 \\ MAB \cap MFC = MF \end{array}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{б) } C \in MCF, C \in ABC, \\ F \in MFC, F \in ABC \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{по аксиоме } A3 \\ MCF \cap ABC = FC \end{array}$$

2. $\triangle ABC$ – равносторонний $\rightarrow FC$ – медиана, высота, биссектриса. $\triangle CFB$ – прямоугольный: $CB=6$ (см), $FB=3$ (см). По теореме Пифагора $FC=3\sqrt{3}$ (см).

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CF; \quad S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

- Как еще можно найти длину FC ?
- Как по- другому найти $S_{\triangle ABC}$?

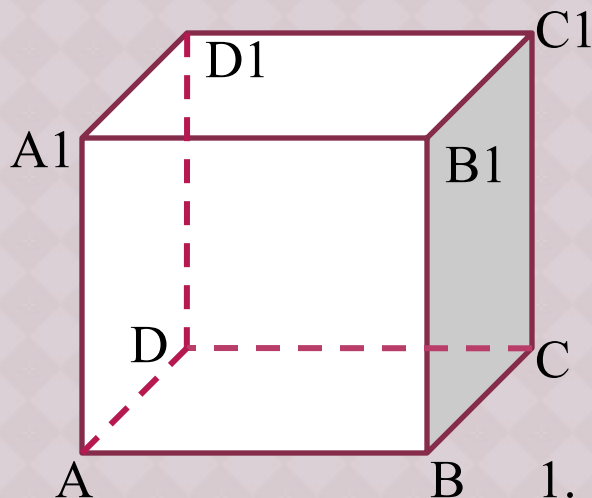
3. DE и BC лежат в плоскости BMC . Пусть они пересекаются в точке K , так как $K \in BC$, значит $K \in ABC$ по аксиоме $A2$;

1) $DE \in BMC, BC \in BMC$;

2) $DE \in BC = K, K \in BC \rightarrow K \in ABC$.

ЗАДАЧА 2

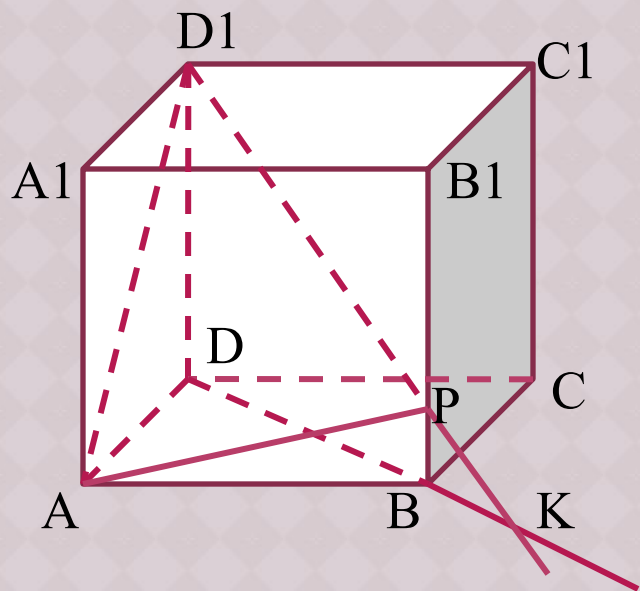
Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$,
 $P \in BB_1, B_1 P = PB$



1. Как построить точку пересечения плоскости ABC с прямой $D_1 P$?
2. Как построить линию пересечения плоскости $AD_1 B$ и ABB_1 ?
3. Вычислите длину отрезков AP и AD_1 , если $AB = a$

ЗАДАЧА 2

РЕШЕНИЕ



1. $(ABC) \cap AD_1P = K$

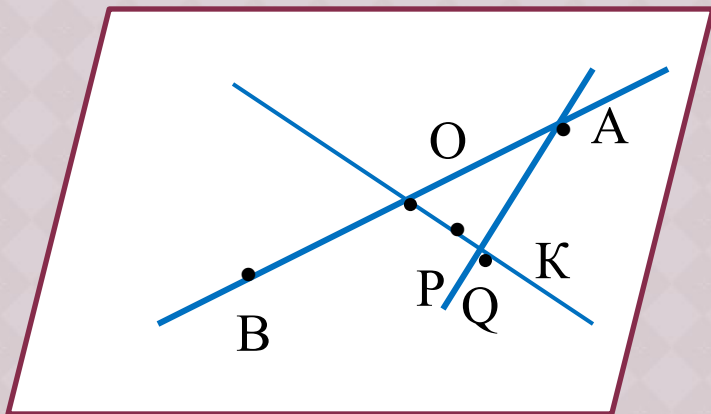
2. $(AD_1P) \cap ABB_1 = AP$

3. По теореме Пифагора

$$AP = \frac{1}{2} a \sqrt{5},$$

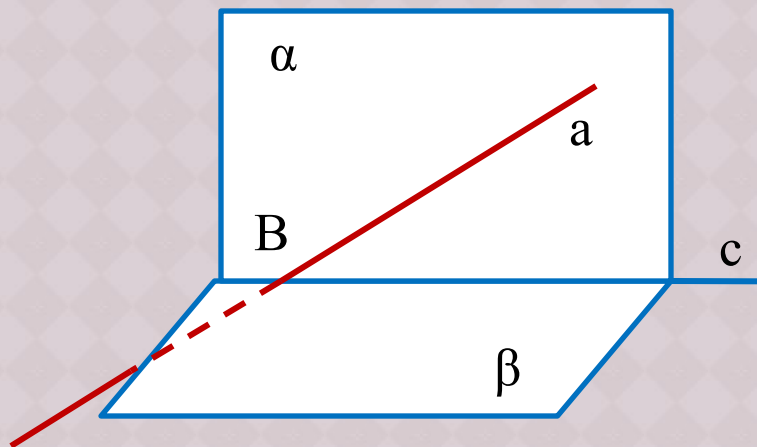
$$AD_1 = a\sqrt{2}$$

ЗАДАЧА 3



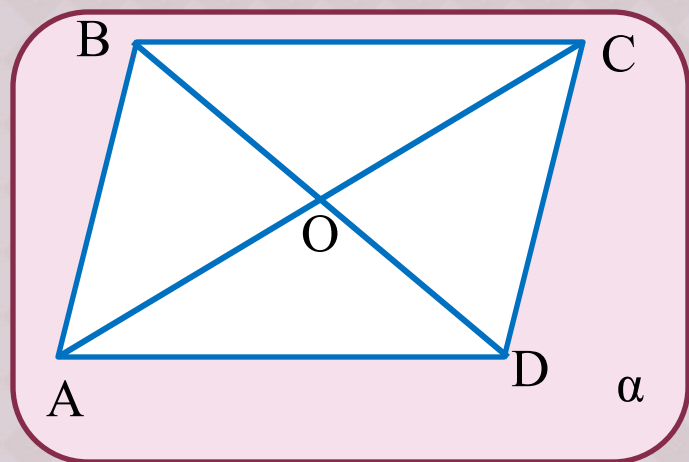
Точки A, B, C не лежат на одной прямой
 $M \in AB, K \in AC, P \in MK$
Докажите, что точка P лежит в плоскости ABC .

Задача 4



Плоскости α и β пересекаются по прямой c . Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β . Пересекаются ли прямые a и c ? Почему?

ЗАДАЧА 5.

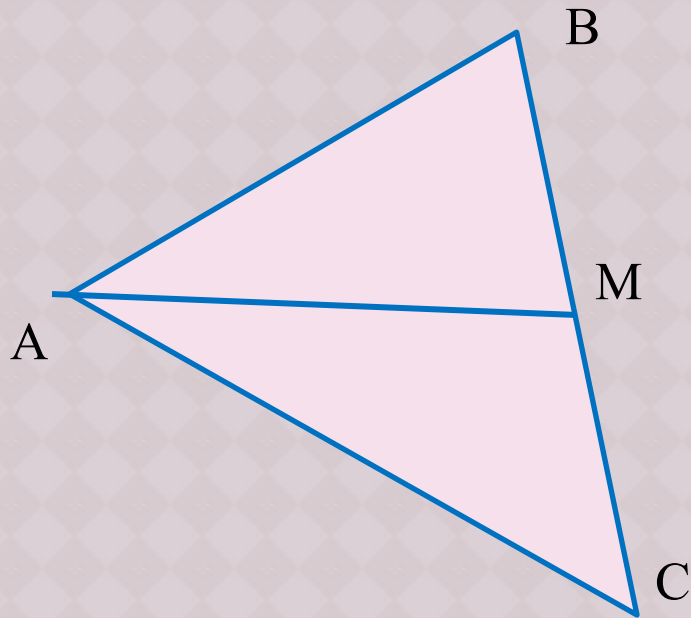


Дан прямоугольник ABCDO – точка пересечения его диагоналей. Известно, что точки A, B, O лежат в плоскости α . Докажите, что точки C и D также лежат в плоскости α . Вычислите площадь прямоугольника, если $AC = 8(\text{см})$, $\angle AOB = 60^\circ$

Ответ : $16\sqrt{3} (\text{см}^2)$

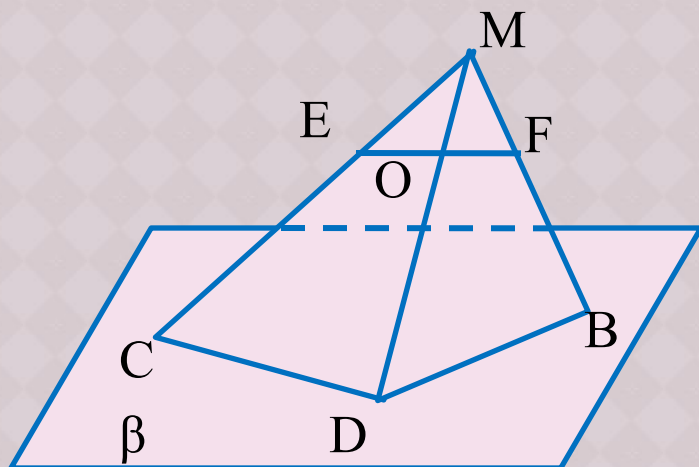
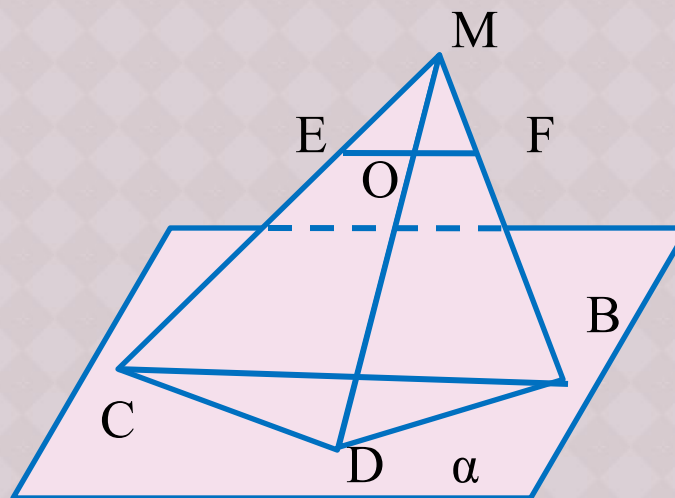
ЗАДАЧА 1

Стороны AB и AC треугольника ABC лежат в плоскости α .
Докажите, что и медиана его лежит в плоскости α .



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

**В чем ошибка
чертежа?**



САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА