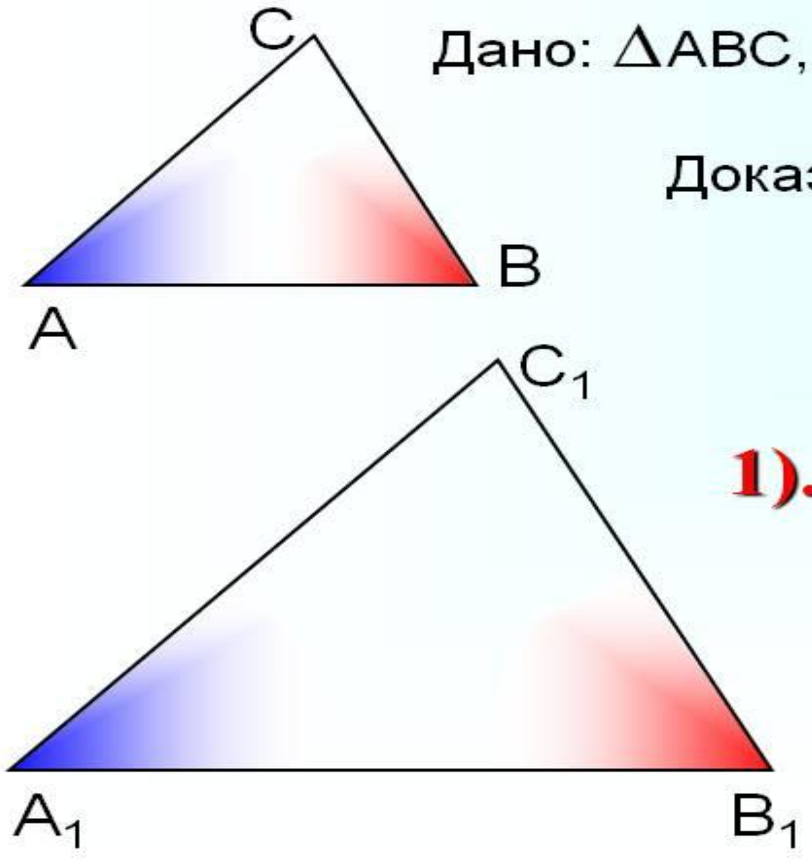
Подобие фигур

Признаки подобия треугольников

- Признак 1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то они подобны



Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,

Доказать: $\Delta ABC \infty \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

1). $\angle C = 180^0 - \angle A - \angle B$

$\angle C_1 = 180^0 - \angle A_1 - \angle B_1$

$\angle C = \angle C_1$

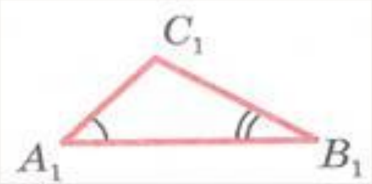
Признаки подобия треугольников

- Признак 2. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, а стороны, образующие этот угол в одном треугольнике, пропорциональны соответствующим сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Признаки подобия треугольников

- Признак 3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, у которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$.

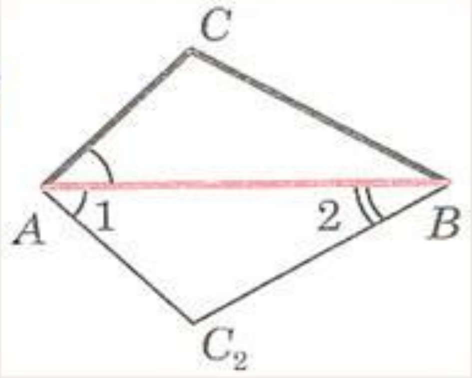


Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство: Достаточно доказать, что $\angle A = \angle A_1$.

Рассмотрим ΔABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$

Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1}$.



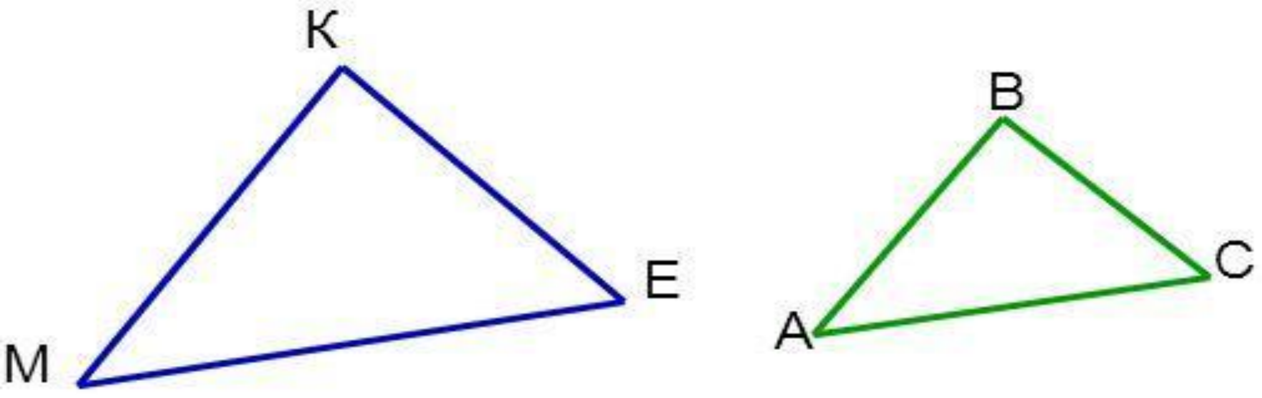
Сравнивая эти равенства с равенствами, которые записаны в дано, получаем: $BC = BC_2$, $CA = C_2A$.

$\Delta ABC = \Delta ABC_2$ по трем сторонам. Отсюда следует, что $\angle A = \angle 1$,

а так как $\angle 1 = \angle A_1$, то $\angle A = \angle A_1$.

Площади подобных треугольников

- Теорема. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.



Дано: $\triangle MKE \sim \triangle ABC$,

K – коэффициент подобия.

Доказать: $S_{MKE} : S_{ABC} = k^2$

Доказательство:

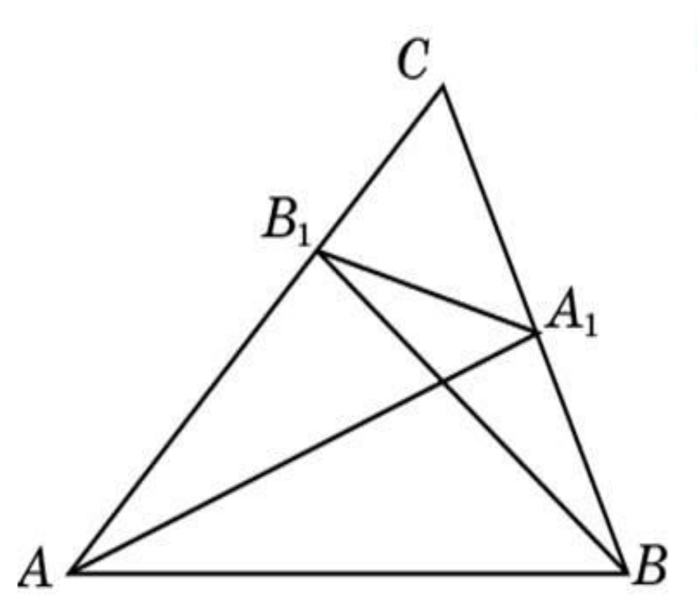
Т. к. по условию $\triangle MKE \sim \triangle ABC$, k – коэффициент подобия, то

$\angle M = \angle A$, $\dfrac{MK}{AB} = \dfrac{ME}{AC} = k$, значит, $MK = k \cdot AB$, $ME = k \cdot AC$.

$$\frac{S_{MKE}}{S_{ABC}} = \frac{MK \cdot ME}{AB \cdot AC} = \frac{k \cdot AB \cdot k \cdot AC}{AB \cdot AC} = k^2$$

Задача 1

В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC.



Доказательство. Прямоугольные треугольники AA_1C_1 и BB_1C подобны по трем углам.

Значит, $A_1C : AC = B_1C : BC$.

Следовательно, треугольники A_1B_1C и ABC подобны по второму признаку подобия треугольников.

Задача 2

Площади двух подобных треугольников равны 50 дм^2 и 32 дм^2, сумма их периметров равна 117 дм. Найдите периметр каждого треугольника.

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle PEK$ подобны, $S_{ABC} = 50$ дм^2, $S_{PEK} = 32$ дм^2,
$P_{ABC} + P_{PEK} = 117$дм.
Найти: P_{ABC}, P_{PEK}
Решение:
Т. к. по условию треугольники ABC и PEK подобны, то:

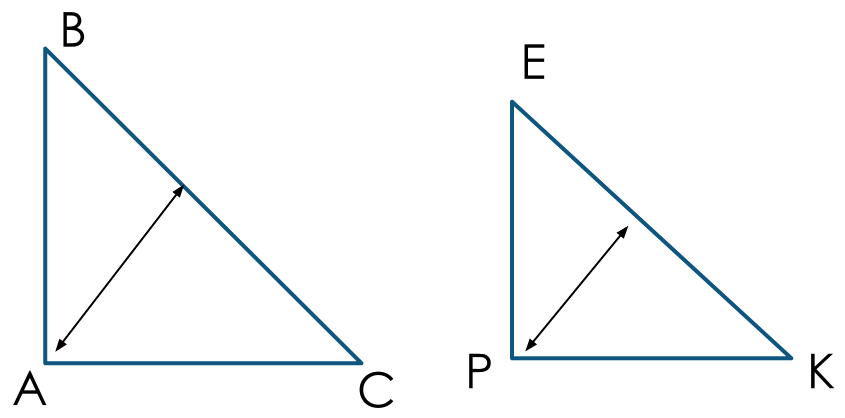
$$\frac{S_{ABC}}{S_{PEK}} = \frac{50}{32} = \frac{25}{16} = K^2. \qquad \text{Значит, } k = \frac{5}{4}$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{PEK}} = K, \qquad \frac{P_{ABC}}{P_{PEK}} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \qquad \text{Значит, } P_{ABC} = 1{,}25\, P_{PEK}$$

Пусть $P_{PEK} = x$ дм, тогда $P_{ABC} = 1{,}25\,x$ дм

Т. к. по условию $P_{ABC} + P_{PEK} = 117$дм, то $1{,}25\,x + x = 117$, $x = 52$.

Значит, $P_{PEK} = 52$ дм, $P_{ABC} = 117 – 52 = 65$ (дм). Ответ: 65 дм, 52 дм.



Задача 3

У треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ угол A равен углу A_1; угол B равен углу B_1; AB равна 5м; BC равна 7м; A_1B_1 равна 10м; A_1C_1 равна 8м . Найдите остальные стороны треугольников

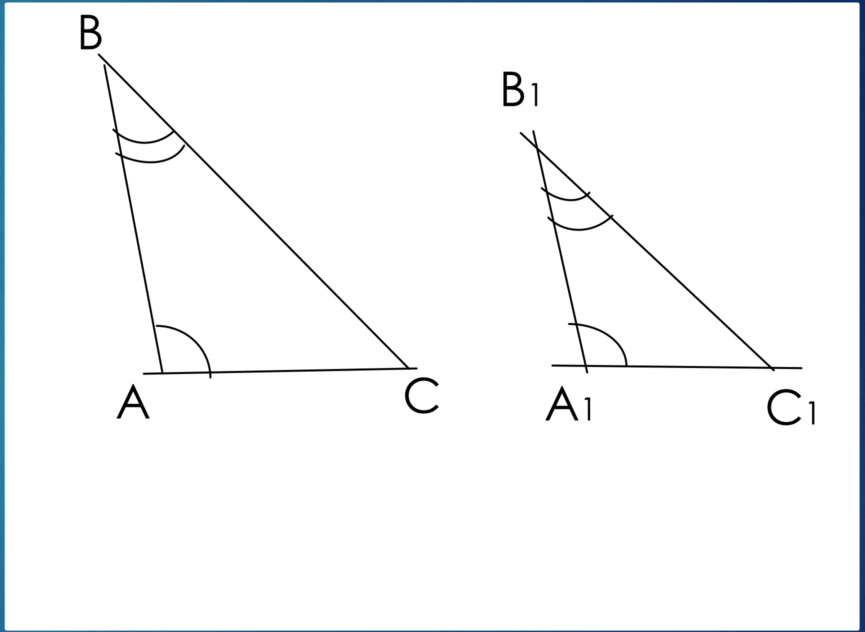
решение

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, (по двум углам). Значит

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}.$$

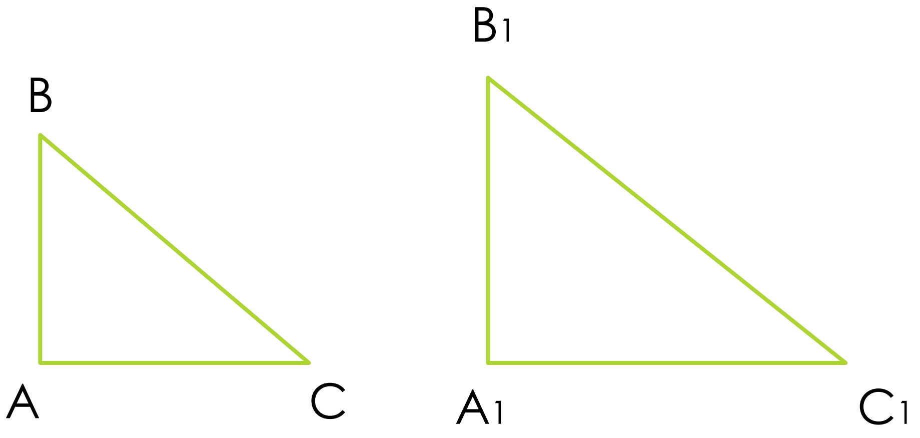
Так что $B_1C_1=\dfrac{A_1B_1\cdot BC}{AB}=\dfrac{10\cdot 7}{5}=14$ м и $AC=\dfrac{AB\cdot A_1C_1}{A_1B_1}=\dfrac{5\cdot 8}{10}=4$ м.

Ответ: AC = 4 м, B_1C_1 = 14 м.



Задача 4

У подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = 30°$, $AB = 1$ м, $BC = 2$ м, $B_1C_1 = 3$ м. Чему равны угол A_1 и сторона A_1B_1?



Так как подобие сохраняет углы, то $\angle A = \angle A_1 = 30°$. Далее $B_1C_1 = kBC$, а значит:

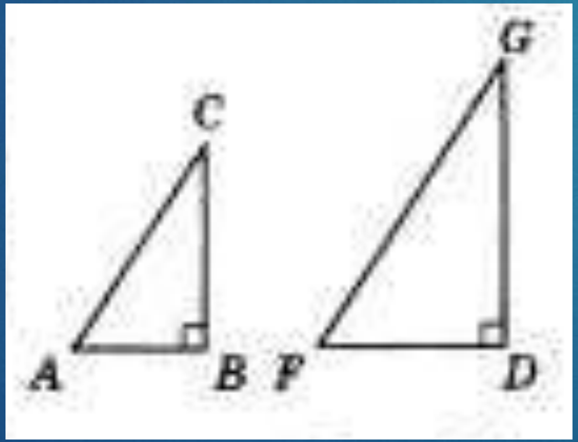
$$k = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Также $A_1B_1 = kAB = 1{,}5 \cdot 1 = 1{,}5$ (м).

Ответ: $\angle A_1 = 30°$, $A_1B_1 = 1{,}5$ (м).

Задача 5

Один из углов одного прямоугольника равен 30 градусам ,а один из углов другого треугольника 60 градусам . Установите, подобны ли данные треугольники



Дано: ΔABC и ΔFDG — прямоугольные, $\angle B$ и $\angle D$ — прямые, $\angle F = 60°$, $\angle C = 30°$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta FDG$.

Доказательство. Треугольник ABC — прямоугольный и $\angle C = 30°$, по теореме о сумме углов треугольника $\angle A = 60°$. В треугольниках ABC и FDG: $\angle B$ и $\angle D$ — прямые и $\angle A = \angle F$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta FDG$, что и требовалось доказать.