

---

# *Взаимное расположение прямых в пространстве.*

---

*Угол между прямыми.*



*ФГКОУ НСВУ МВД России  
Вабищевич С.Н.*

# Цели урока:

- *Ввести формулировку и доказательство теоремы о равенстве углов с сонаправленными сторонами.*
- *Научиться находить угол между прямыми в пространстве.*



# Повторение.

Верно ли утверждение: если две прямые имеют общие точки, то они параллельны?

Нет

Две прямые параллельны некоторой плоскости. Могут ли эти прямые а) пересекаться?

Да

б) быть скрещивающимися?

Да

Могут ли скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  быть параллельными прямыми?

Нет

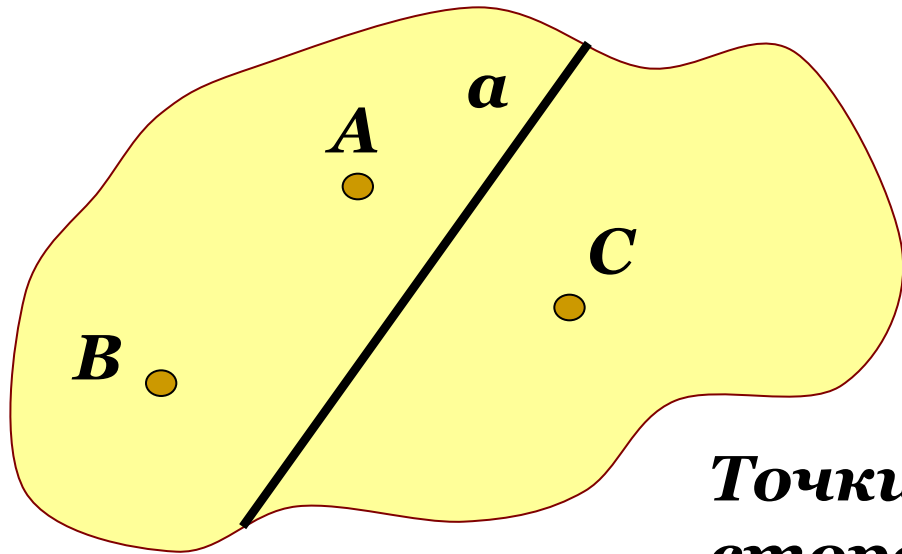
Даны две скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$ . Точки  $A$  и  $A_1$  лежат на прямой  $a$ , точки  $B$  и  $B_1$  лежат на прямой  $b$ . Как бы расположена прямая  $AB$  и  $A_1B_1$ ?  
Как бы расположена прямая  $AB$  и  $A_1B_1$ ?

$A_1B_1$

Прямая  $a$  скрещивается с прямой  $b$ , а прямая  $b$  скрещивается с прямой  $c$ . Следовательно, прямые  $a$  и  $c$  скрещиваются.

Нет

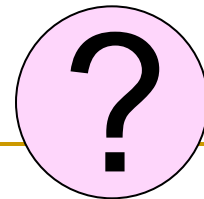
Любая прямая  $a$ , лежащая в плоскости, разделяет плоскость на две части, называемые **полуплоскостями**.



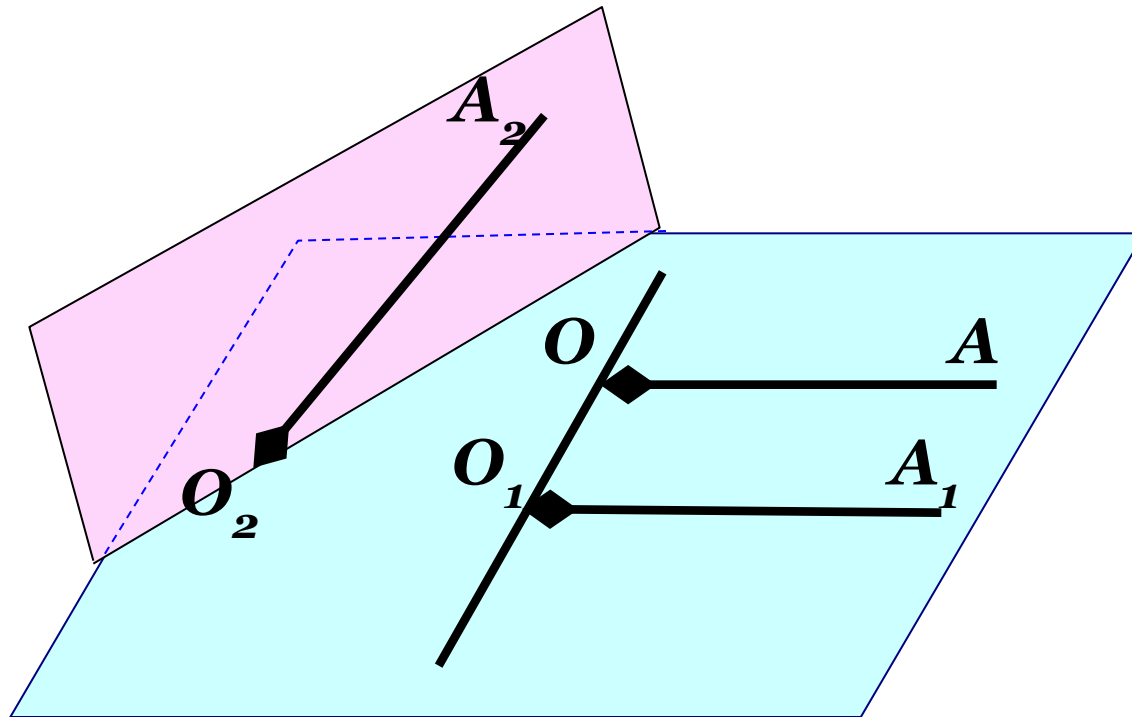
$a$  – граница полуплоскостей.

Точки  $A$  и  $B$  лежат по одну сторону от прямой  $a$ .

Точки  $A$  и  $C$  лежат по разные стороны от прямой  $a$ .



## Углы с сонаправленными сторонами.



Лучи  $OA$  и  $O_1A_1$  не лежат на одной прямой, параллельны, лежат в одной полуплоскости с границей  $OO_1 \rightarrow$

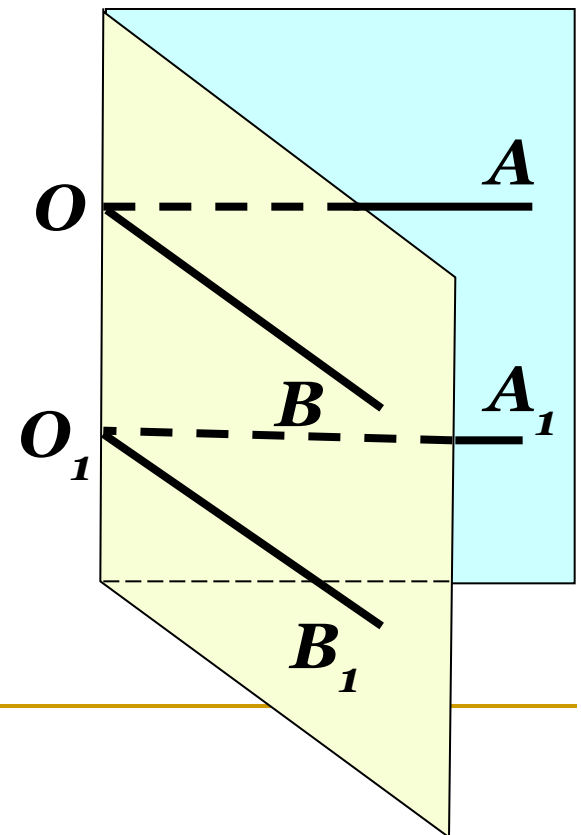
**сонаправленные**

# Теорема об углах с сонаправленными сторонами

*Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.*

*Дано: угол  $O$  и угол  $O_1$   
с сонаправленными  
сторонами.*

*Доказать:  $\angle O = \angle O_1$*



# Теорема об углах с сонаправленными сторонами

*Доказательство:*

Отметим точки  $A, B, A_1$  и  $B_1$ , такие что  $OA = O_1A_1$  и  $OB = O_1B_1$ .

1. Рассмотрим  $OAA_1O_1$ :

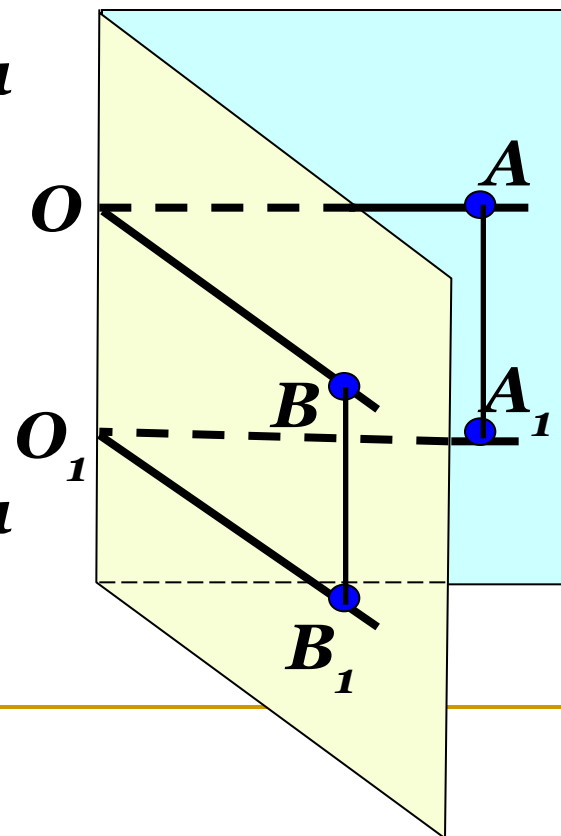
$OA \parallel O_1A_1$   $\left| \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{orange arrow}} \\ OA = O_1A_1 \end{array} \right. \begin{array}{l} OAA_1O_1 \text{ -- параллелограмм} \\ \text{( по признаку )}. \end{array}$

Значит,  $AA_1 \parallel OO_1$  и  $AA_1 = OO_1$ .

2. Рассмотрим  $OBV_1O_1$ :

$OB \parallel O_1B_1$   $\left| \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{orange arrow}} \\ OB = O_1B_1 \end{array} \right. \begin{array}{l} OBV_1O_1 \text{ -- параллелограмм} \\ \text{( по признаку )}. \end{array}$

Значит,  $BB_1 \parallel OO_1$  и  $BB_1 = OO_1$ .



# Теорема об углах с сонаправленными сторонами

**Вывод:**

$$AA_1 \parallel OO_1 \text{ и } BB_1 \parallel OO_1, \implies AA_1 \parallel BB_1$$

$$AA_1 = OO_1 \text{ и } BB_1 = OO_1, \implies AA_1 = BB_1$$

Следовательно,  
четырехугольник  $AA_1B_1B$  –  
параллелограмм (по признаку).

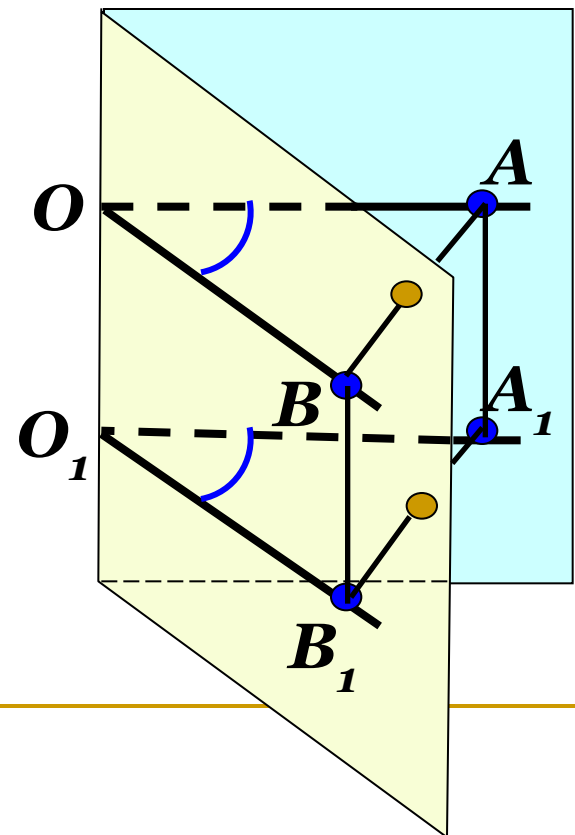
$$AB = A_1B_1$$

3. Рассмотрим  $\triangle ABO$  и  $\triangle A_1B_1O_1$ .

$$\triangle ABO = \triangle A_1B_1O_1$$

(по трем сторонам)

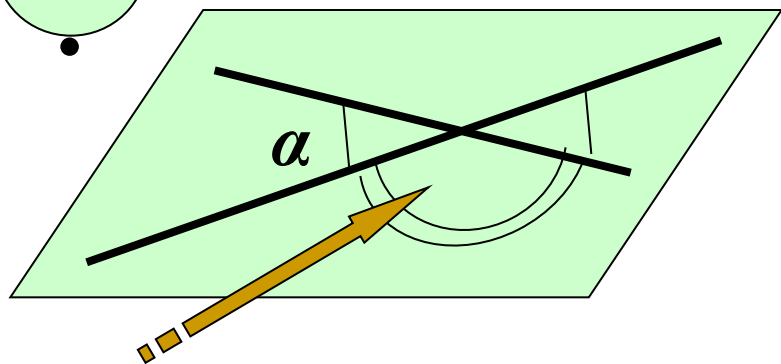
**Вывод:**  $\angle O = \angle O_1$



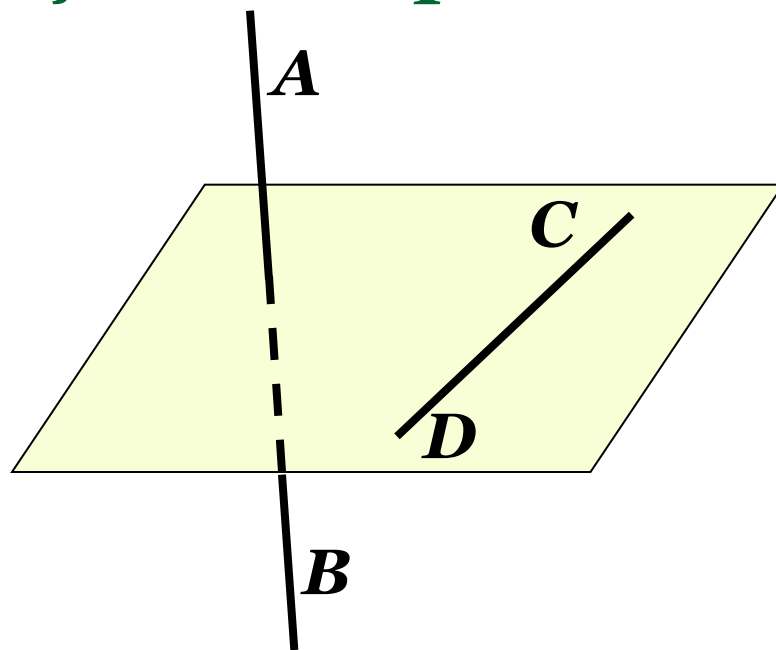


# Угол между скрещивающимися прямыми.

1

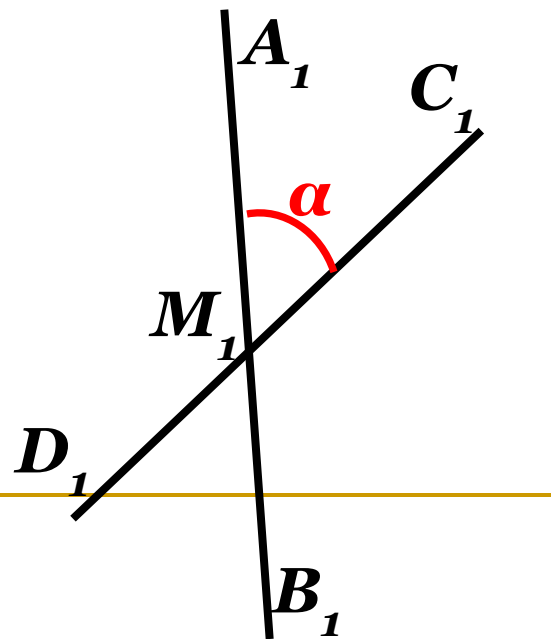


$$180^\circ - \alpha \quad 0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$



2

Угол между скрещивающимися прямыми  $AB$  и  $CD$  определяется как угол между пересекающимися прямыми  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$ , при этом  $A_1B_1 \parallel AB$  и  $C_1D_1 \parallel CD$ .



### 3

## Практическое задание.

- **Выбрать любую точку  $M_2$ .**
- **Построить  $A_2B_2 \parallel AB$  и  $C_2D_2 \parallel CD$ .**
- **Ответить на вопросы:**

**1. Почему  $A_2B_2 \parallel A_1B_1$  и  $C_2D_2 \parallel C_1D_1$ ?**

**2. Являются ли углы  $A_1M_1D_1$  и  $A_2M_2D_2$  углами с соответственно параллельными сторонами?**

**Вывод:**

**1.  $\angle A_1M_1D_1 = \angle A_2M_2D_2$**

**2. Величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки.**



Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .  
Найдите угол между прямыми:

1.  $BC$  и  $CC_1$

$90^\circ$

2.  $AC$  и  $BC$

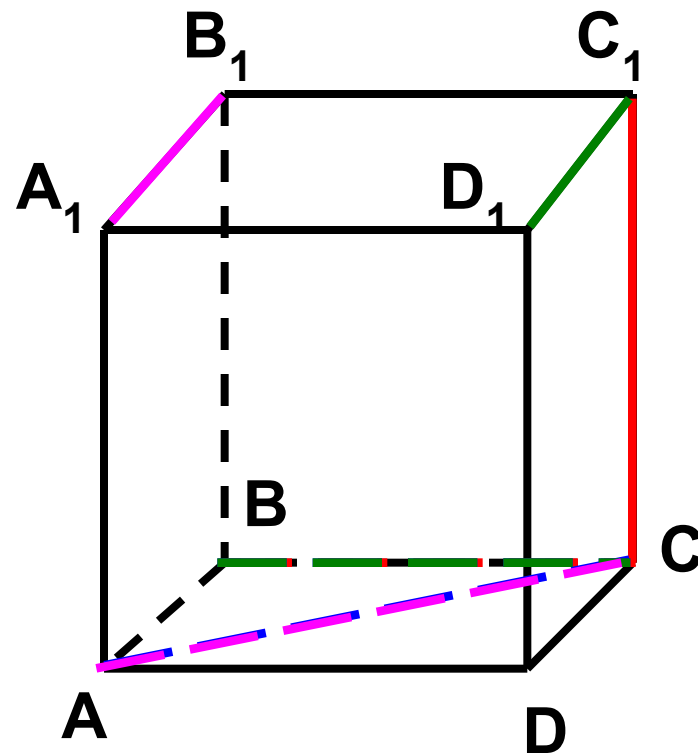
$45^\circ$

3.  $D_1 C_1$  и  $BC$

$90^\circ$

4.  $A_1 B_1$  и  $AC$

$45^\circ$





## Задача №44.

Дано:  $OB \parallel CD$ ,  
 $OA$  и  $CD$  – скрещивающиеся.  
Найти угол между  $OA$  и  $CD$ , если:

а)  $\angle AOB = 40^\circ$

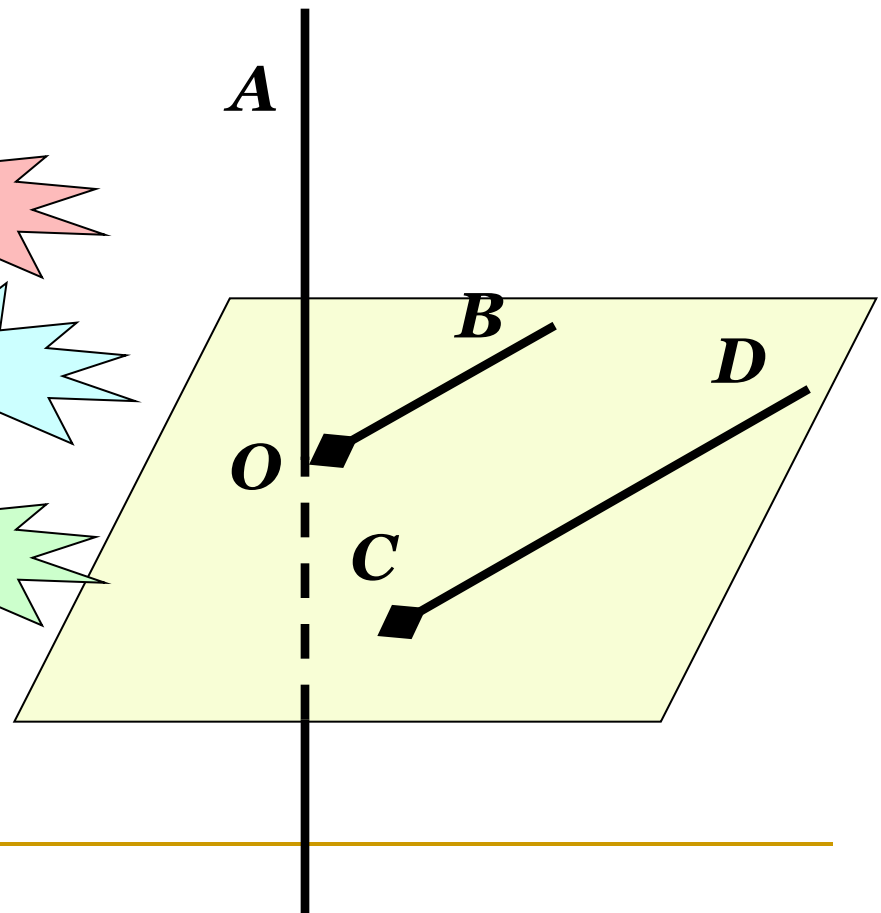
$40^\circ$

б)  $\angle AOB = 135^\circ$

$45^\circ$

в)  $\angle AOB = 90^\circ$

$90^\circ$





## Дополнительная задача.

Треугольники  $ABC$  и  $ADC$  лежат в разных плоскостях.  $PK$  – средняя линия  $\triangle ADC$  с основанием  $AC$ .

Определить взаимное расположение прямых  $PK$  и  $AB$ , найти угол между ними, если  $\angle C = 80^\circ$ ,  $\angle B = 40^\circ$

