
***Взаимное
расположение прямых
в пространстве.***

Угол между прямыми.



***ФГКОУ НСВУ МВД России
Вабищевич С.Н.***

Цели урока:

- *Ввести формулировку и доказательство теоремы о равенстве углов с сонаправленными сторонами.*
- *Научиться находить угол между прямыми в пространстве.*



Повторение.

Верно ли утверждение: если две прямые имеют общие точки, то они параллельны?

Нет

Две прямые параллельны некоторой плоскости. Могут ли эти прямые а) пересекаться?

Да

б) быть скрещивающимися?

Да

Могут ли скрещивающиеся прямые a и b быть параллельными прямыми?

Нет

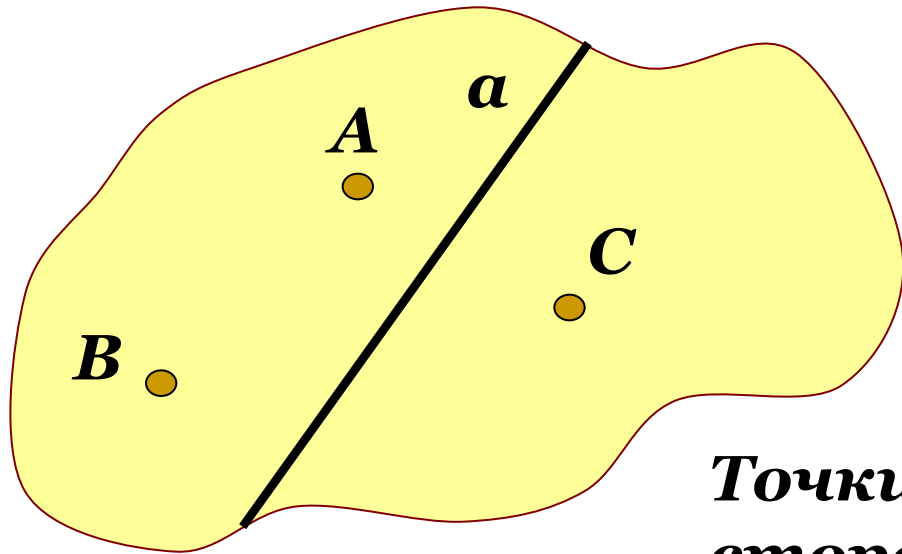
Даны две скрещивающиеся прямые a и b . Точки A и A_1 лежат на прямой a , точки B и B_1 лежат на прямой b . Как бы расположена прямая AB и A_1B_1 ?
Как бы расположена прямая AB и A_1B_1 ?

A_1B_1

Прямая a скрещивается с прямой b , а прямая b скрещивается с прямой c . Следовательно, прямые a и c скрещиваются.

Нет

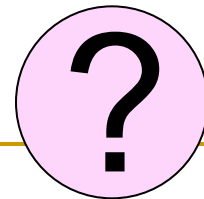
Любая прямая a , лежащая в плоскости, разделяет плоскость на две части, называемые **полуплоскостями**.



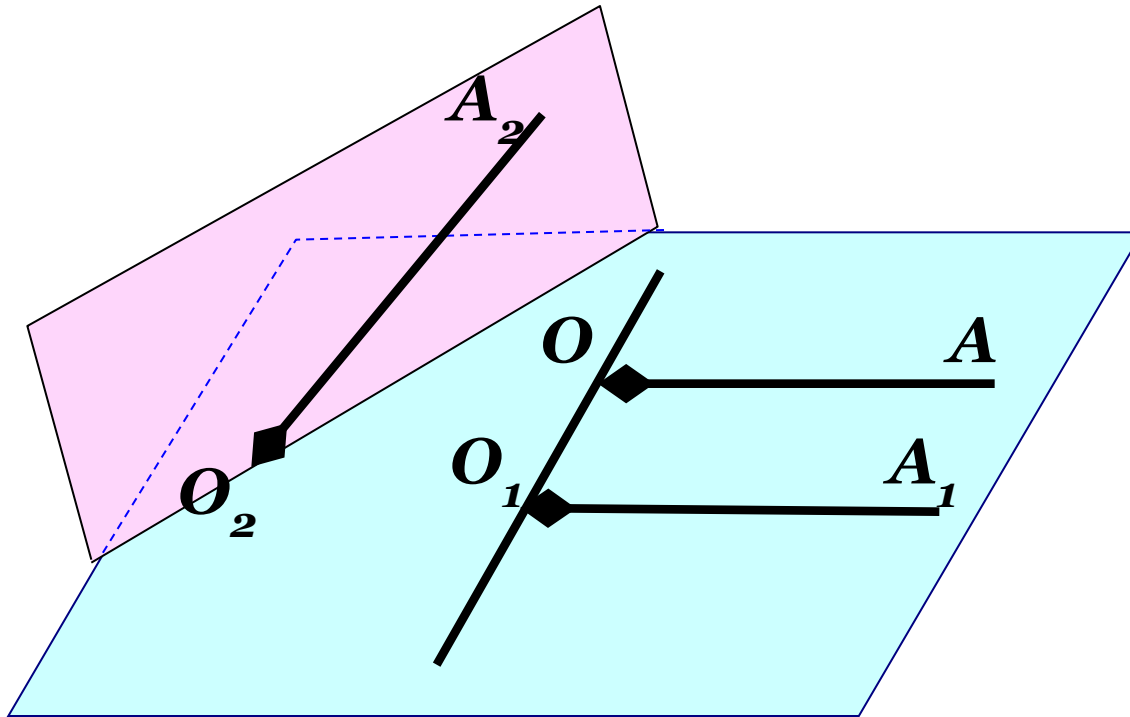
a – граница полуплоскостей.

Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a .

Точки A и C лежат по разные стороны от прямой a .



Углы с сонаправленными сторонами.



Лучи OA и O_1A_1 не лежат на одной прямой, параллельны, лежат в одной полуплоскости с границей $OO_1 \rightarrow$

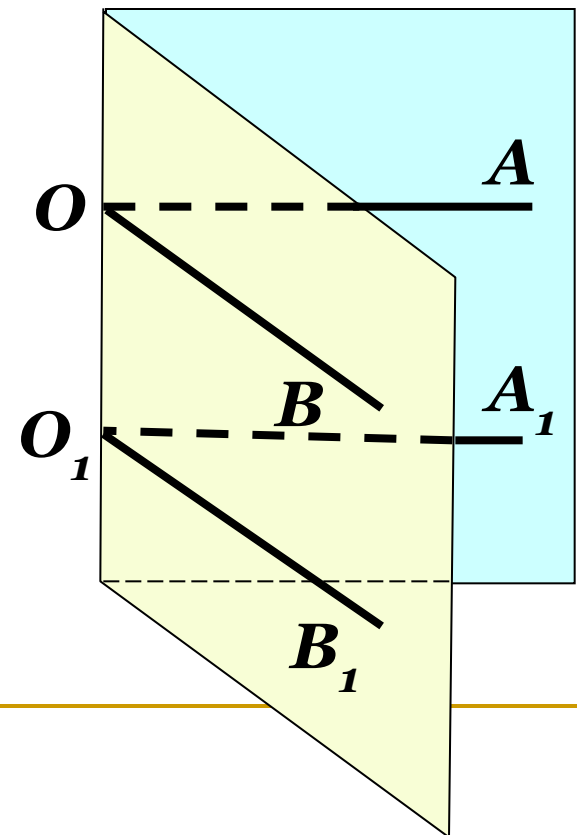
сонаправленные

Теорема об углах с сонаправленными сторонами

Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.

*Дано: угол O и угол O_1
с сонаправленными
сторонами.*

Доказать: $\angle O = \angle O_1$



Теорема об углах с сонаправленными сторонами

Доказательство:

Отметим точки A, B, A_1 и B_1 , такие что
 $OA = O_1A_1$ и $OB = O_1B_1$.

1. Рассмотрим OAA_1O_1 :

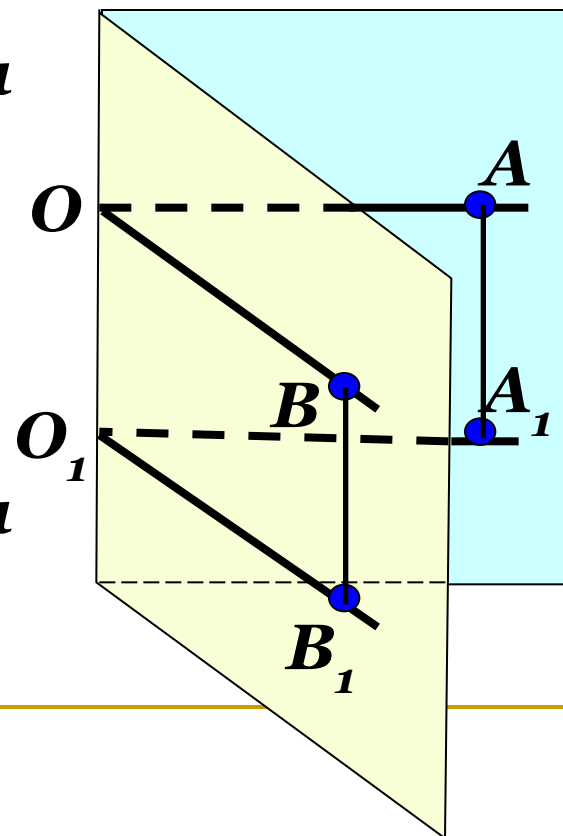
$OA \parallel O_1A_1$ $\left| \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{желтый}} \\ OA = O_1A_1 \end{array} \right. \begin{array}{l} OAA_1O_1 - \text{параллелограмм} \\ \text{(по признаку)}. \end{array}$

Значит, $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 = OO_1$.

2. Рассмотрим OBV_1O_1 :

$OB \parallel O_1B_1$ $\left| \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{желтый}} \\ OB = O_1B_1 \end{array} \right. \begin{array}{l} OBV_1O_1 - \text{параллелограмм} \\ \text{(по признаку)}. \end{array}$

Значит, $BB_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 = OO_1$.



Теорема об углах с сонаправленными сторонами

Вывод:

$$AA_1 \parallel OO_1 \text{ и } BB_1 \parallel OO_1, \implies AA_1 \parallel BB_1$$

$$AA_1 = OO_1 \text{ и } BB_1 = OO_1, \implies AA_1 = BB_1$$

Следовательно,
четырехугольник AA_1B_1B –
параллелограмм (по признаку).

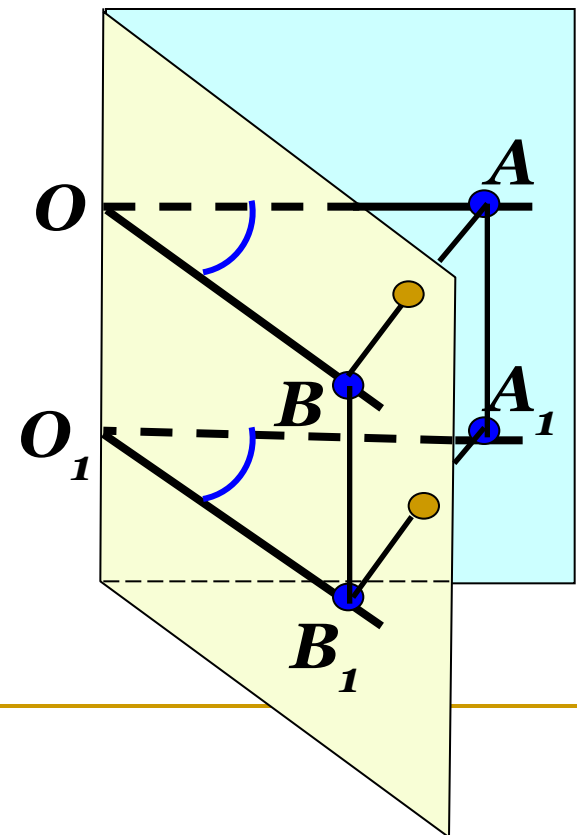
$$AB = A_1B_1$$

3. Рассмотрим $\triangle ABO$ и $\triangle A_1B_1O_1$.

$$\triangle ABO = \triangle A_1B_1O_1$$

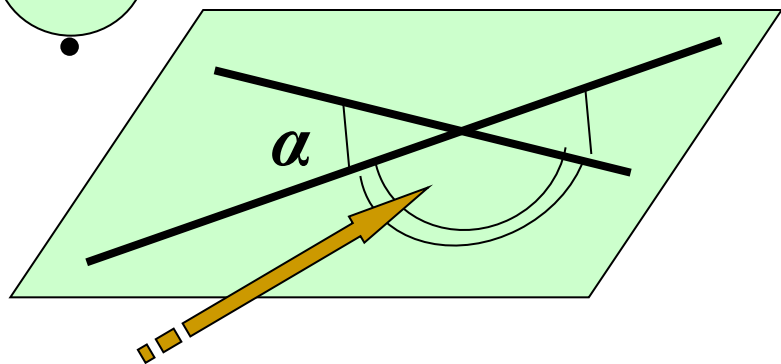
(по трем сторонам)

Вывод: $\angle O = \angle O_1$

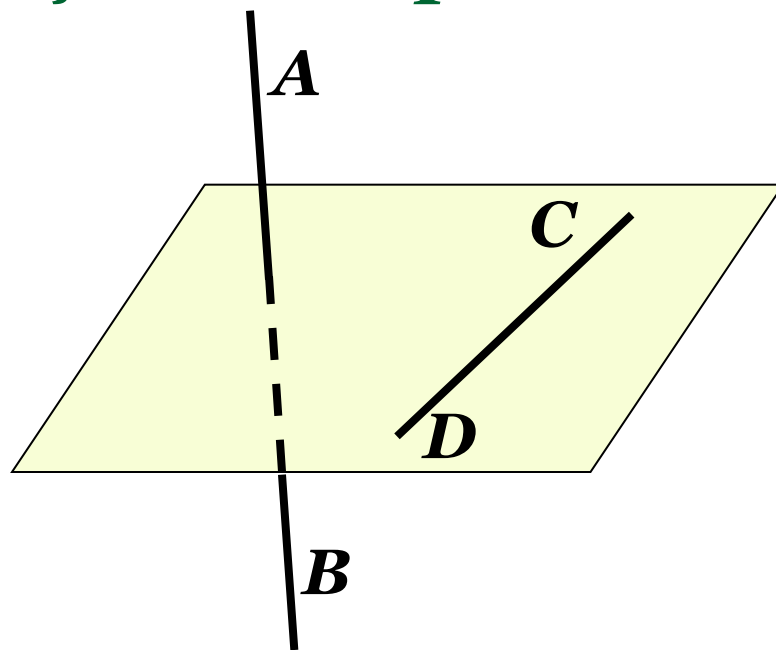


Угол между скрещивающимися прямыми.

1

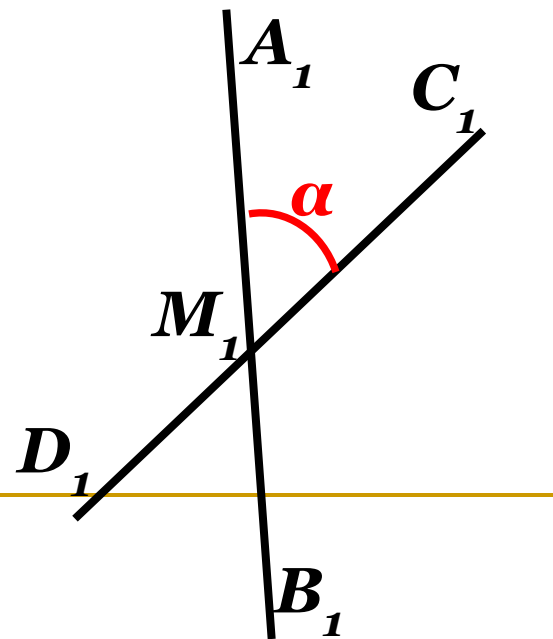


$$180^\circ - \alpha \quad 0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$



2

Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD определяется как угол между пересекающимися прямыми A_1B_1 и C_1D_1 , при этом $A_1B_1 \parallel AB$ и $C_1D_1 \parallel CD$.



3

Практическое задание.

- **Выбрать любую точку M_2 .**
- **Построить $A_2B_2 \parallel AB$ и $C_2D_2 \parallel CD$.**
- **Ответить на вопросы:**

1. Почему $A_2B_2 \parallel A_1B_1$ и $C_2D_2 \parallel C_1D_1$?

2. Являются ли углы $A_1M_1D_1$ и $A_2M_2D_2$ углами с соответственно параллельными сторонами?

Вывод:

1. $\angle A_1M_1D_1 = \angle A_2M_2D_2$

2. Величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки.



Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
Найдите угол между прямыми:

1. BC и CC_1

90°

2. AC и BC

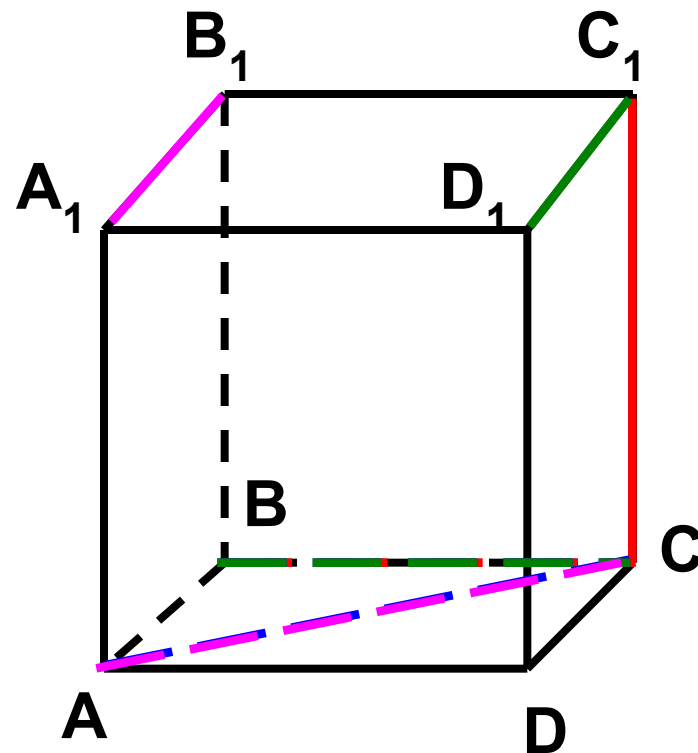
45°

3. $D_1 C_1$ и BC

90°

4. $A_1 B_1$ и AC

45°





Задача №44.

Дано: $OB \parallel CD$,
 OA и CD – скрещивающиеся.
Найти угол между OA и CD , если:

а) $\angle AOB = 40^\circ$

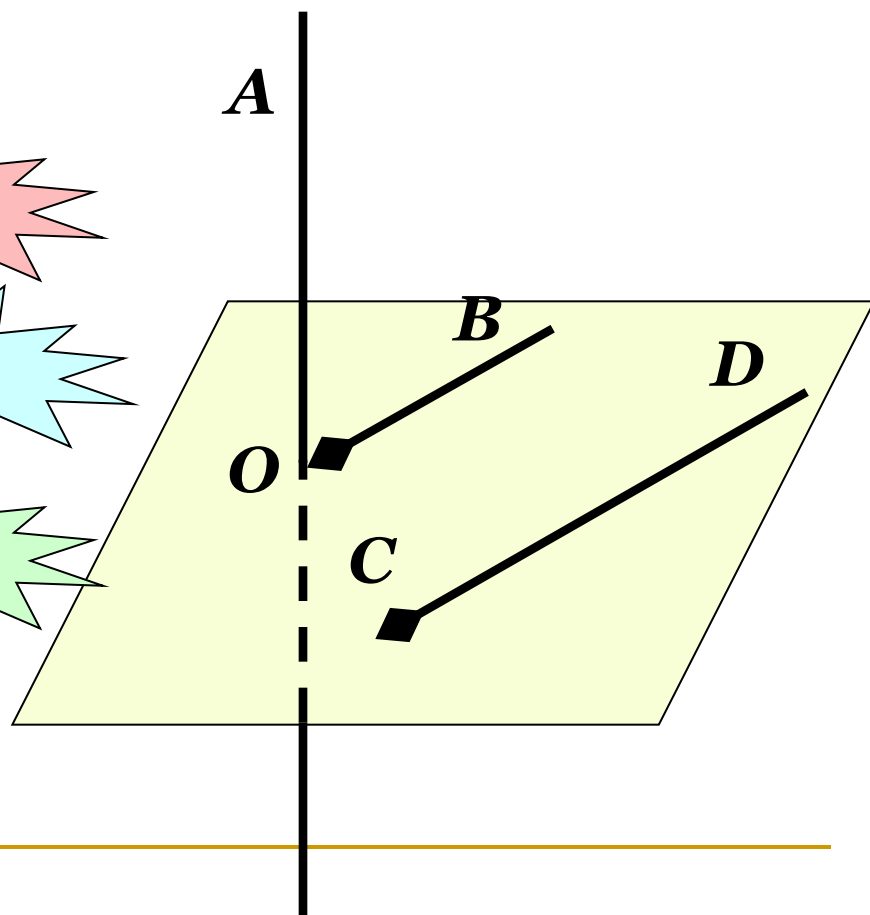
40°

б) $\angle AOB = 135^\circ$

45°

в) $\angle AOB = 90^\circ$

90°





Дополнительная задача.

Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях. PK – средняя линия $\triangle ADC$ с основанием AC .

Определить взаимное расположение прямых PK и AB , найти угол между ними, если $\angle C = 80^\circ$, $\angle B = 40^\circ$

