

*муниципальное автономное общеобразовательное  
учреждение*

*средняя общеобразовательная школа № 45*

**Методическое пособие для учащихся 11  
классов**

# **«Поверхности вращ**



*Составил  
учитель математики  
первой категории  
Гавинская Елена  
Вячеславовна.*

г.Калининград  
2015-2016 учебный год

# поверхность – одно из основных геометрических понятий!!!

- 1) В математике под **поверхностью** подразумевается **непрерывное множество точек, между координатами которых может быть установлена зависимость, определяемая в декартовой системе координат уравнением вида  $F(x, y, z) = 0$ , где  $F(x, y, z)$  — многочлен  $n$ -й степени, или в форме какой-либо трансцендентной функции. В первом случае **поверхности** называют **алгебраическими**, во втором — **трансцендентными**.**

графически, поэтому целесообразно рассматривать **поверхность** как **совокупность всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии.**

3) В школьном курсе геометрии рассматриваются некоторые кривые поверхности. Каждая из кривых поверхности определяется специальным способом, чаще всего как множество точек, удовлетворяющих некоторым условиям. Например, поверхность шара - множество точек, находящихся на заданном расстоянии от данной точки. Понятие "Поверхность" лишь поясняется, а не определяется.

Например, говорят, что **поверхность есть**

# Виды поверхностей

**Линейчат  
ые**

(образующая  
– прямая  
линия )

**Развертывающиес  
я**

(можно без складок  
и разрывов  
развернуть на  
плоскость )

**Не  
линейчатые**

(образующая –  
кривая линия)

**Не  
развертывающиеся**

# Виды поверхностей

**Поверхности  
вращения**

**Винтовые  
поверхности**

**Поверхности  
переноса**

**Поверхности  
с плоскостью  
параллелизма**

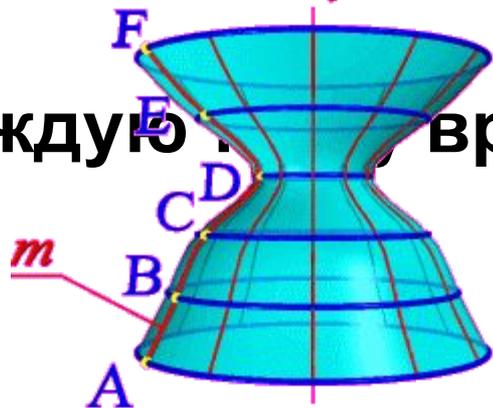
# **Образование поверхности вращения.**

**Поверхности вращения** – это поверхности, созданные при вращении образующей  $m$  вокруг оси  $i$  (рис.1).

**Геометрическая часть** состоит из двух линий: образующей  $m$  и оси  $i$  (рис 1.б).

**Алгоритмическая часть** включает две операции:

1. на образующей  $m$  выделяют ряд точек  $A, B, C, \dots, F$ ,
2. каждую точку вращают вокруг оси  $i$ .



а) модель



б) эюр

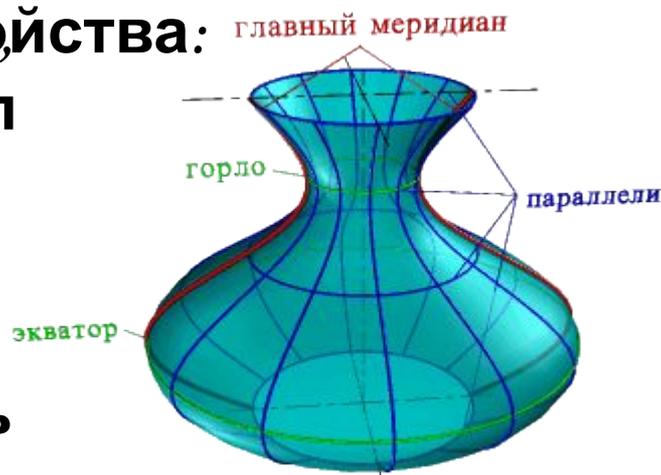
Так создается каркас **поверхности, состоящей из множества окружностей**, плоскости которых расположены перпендикулярно оси  $i$ . Эти окружности называются **параллелями**; наименьшая параллель называется **горлом**, наибольшая – **экватором**. Два

**основных свойства:**

перпендикулярная оси вращения, пересекает поверхность по окружности –

**параллели.**

Плоскость, проходящая через ось параллельно фронтальной плоскости проекций, называется плоскостью главного меридиана, а линия, полученная в сечении, – **главным меридианом**.



2. Плоскость, проходящая через ось вращения, пересекает поверхность по двум симметричным относительно оси

линиям –

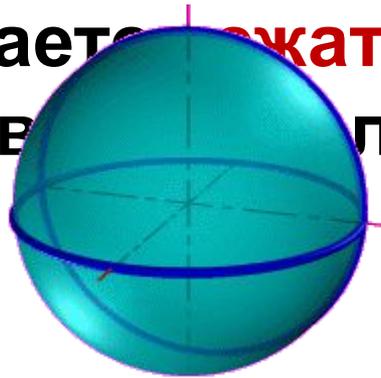
**меридианам.**

Наиболее распространенные поверхности вращения с криволинейными образующими.

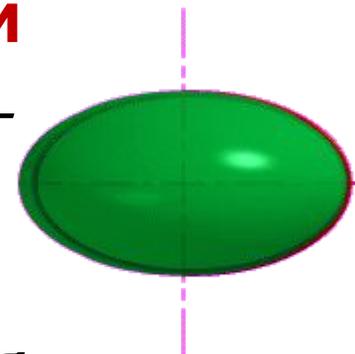
**Сфера** – образуется вращением окружности вокруг её диаметра. При сжатии или растяжении сферы она преобразуется в **эллипсоиды**, которые могут быть получены вращением эллипса вокруг одной из осей: если вращение вокруг малой оси, то эллипсоид называется **сжатым** или **сфероидом**, если вращение вокруг большей – **вытянутым**.



Образование сфероида

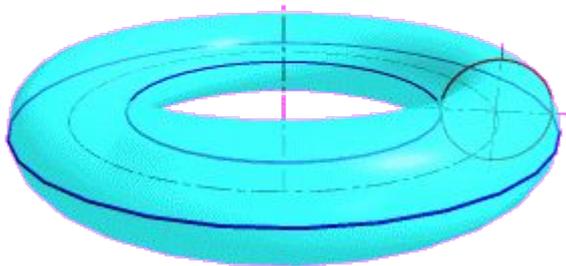


Образование сферы

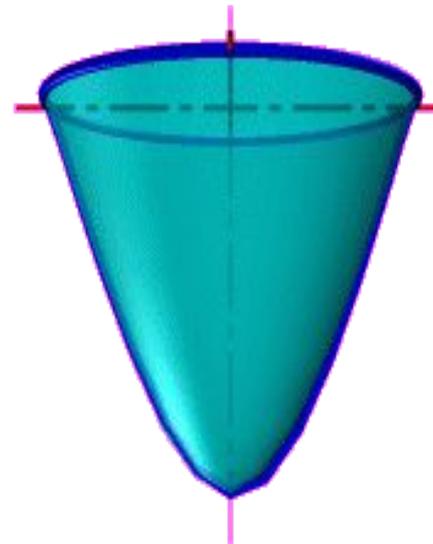


Образование вытянутого эллипсоида

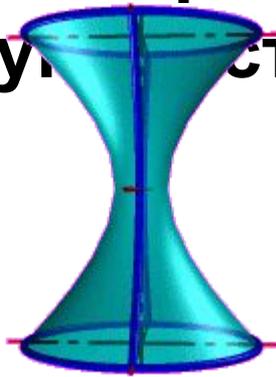
**Тор** образуется при вращении окружности вокруг оси, не проходящей через центр окружности.



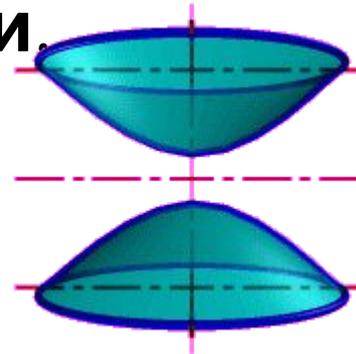
**Параболоид вращения** образуется при вращении параболы вокруг своей оси.



**Гиперболоид вращения.** Различают **однополостной** и **двухполостной** гиперболоиды вращения. Первый получается при вращении вокруг мнимой оси, а второй – вращением гиперболы вокруг действительной оси.

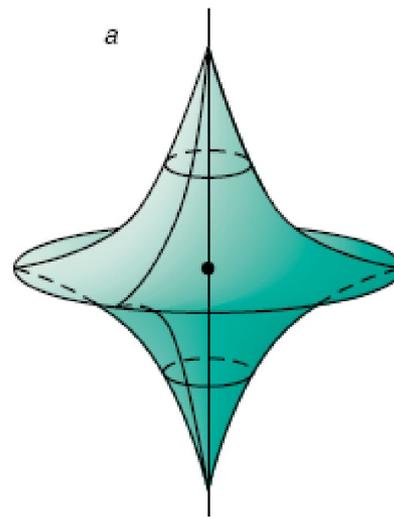
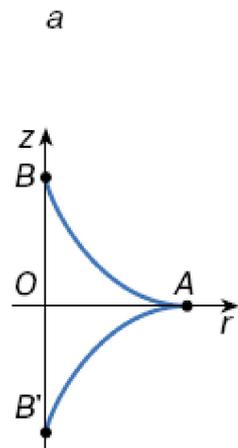


**однополостной**

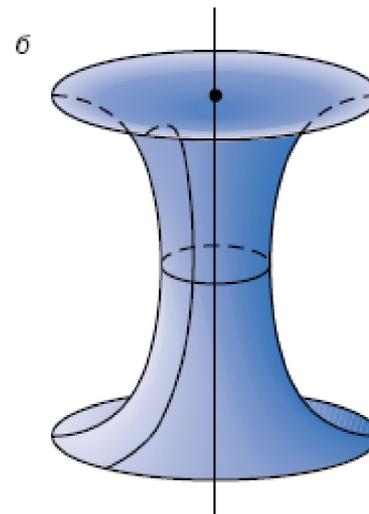
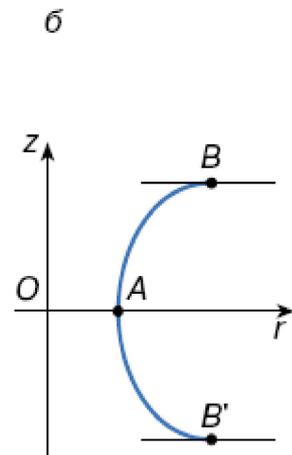


**двуполостной**

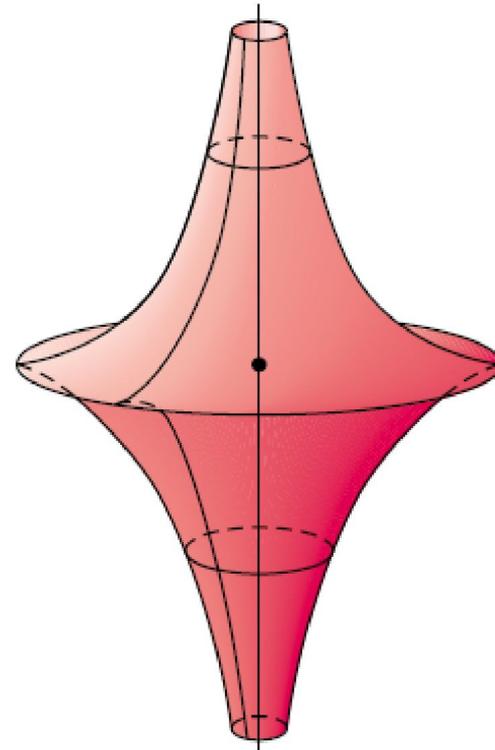
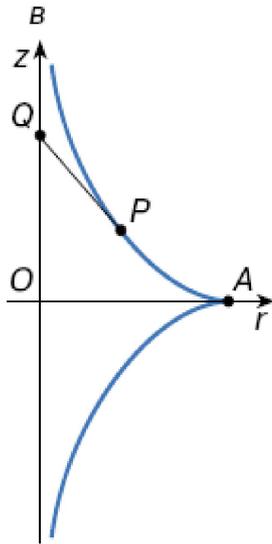
# Волчок Миндинга и его график меридиана.



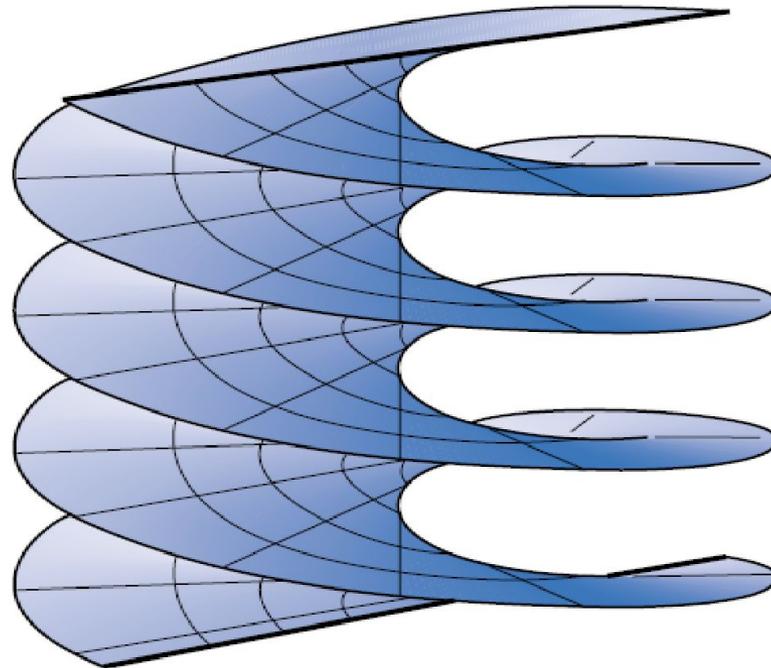
# Катушка Миндинга и её график меридиана.



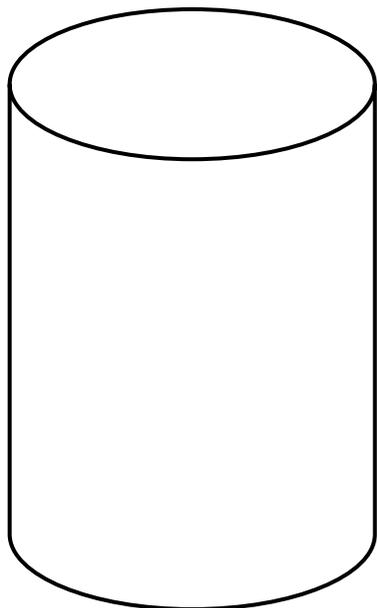
# Псевдосфера и её график меридиана.



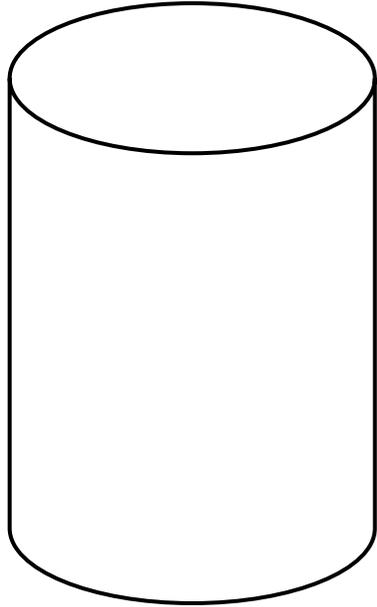
# Геликоид (винтовая поверхность).



# Цилиндр.



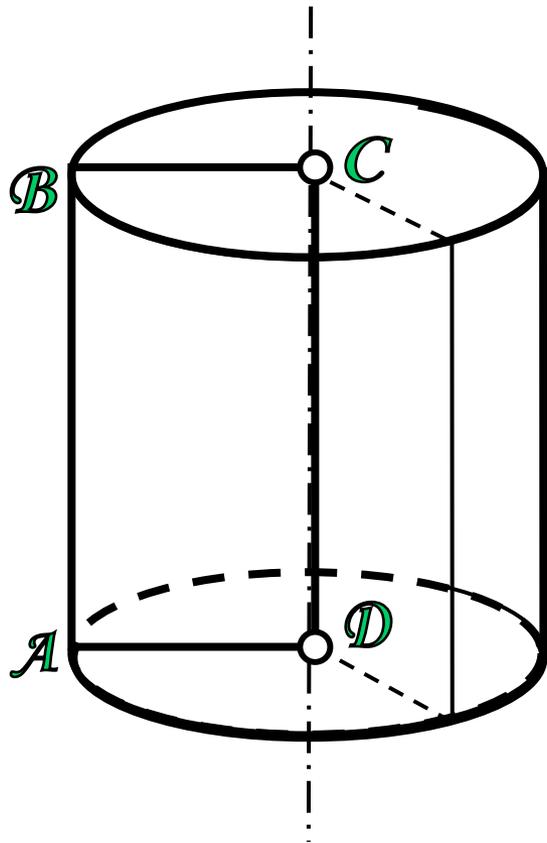
Когда люди стали строить здания из камня, пришлось перетаскивать тяжелые каменные глыбы. Для этого издавна применяли катки. И было замечено, что перекатка тяжелого камня становится легче, если для катка взято прямое дерево и от него отрезан кусок с почти одинаковой толщиной в начале и в конце. Так люди познакомились с одной из



**Скалками цилиндрической формы пользовались и женщины, раскатывая белье после стирки.**

**Перевозить грузы на катках стало довольно трудно, потому что сами древесные стволы весили много.**

**Чтобы облегчить работу, стали вырезать из стволов тонкие круглые пластики и с их помощью перетаскивали грузы. Так появилось первое колесо. Это было**



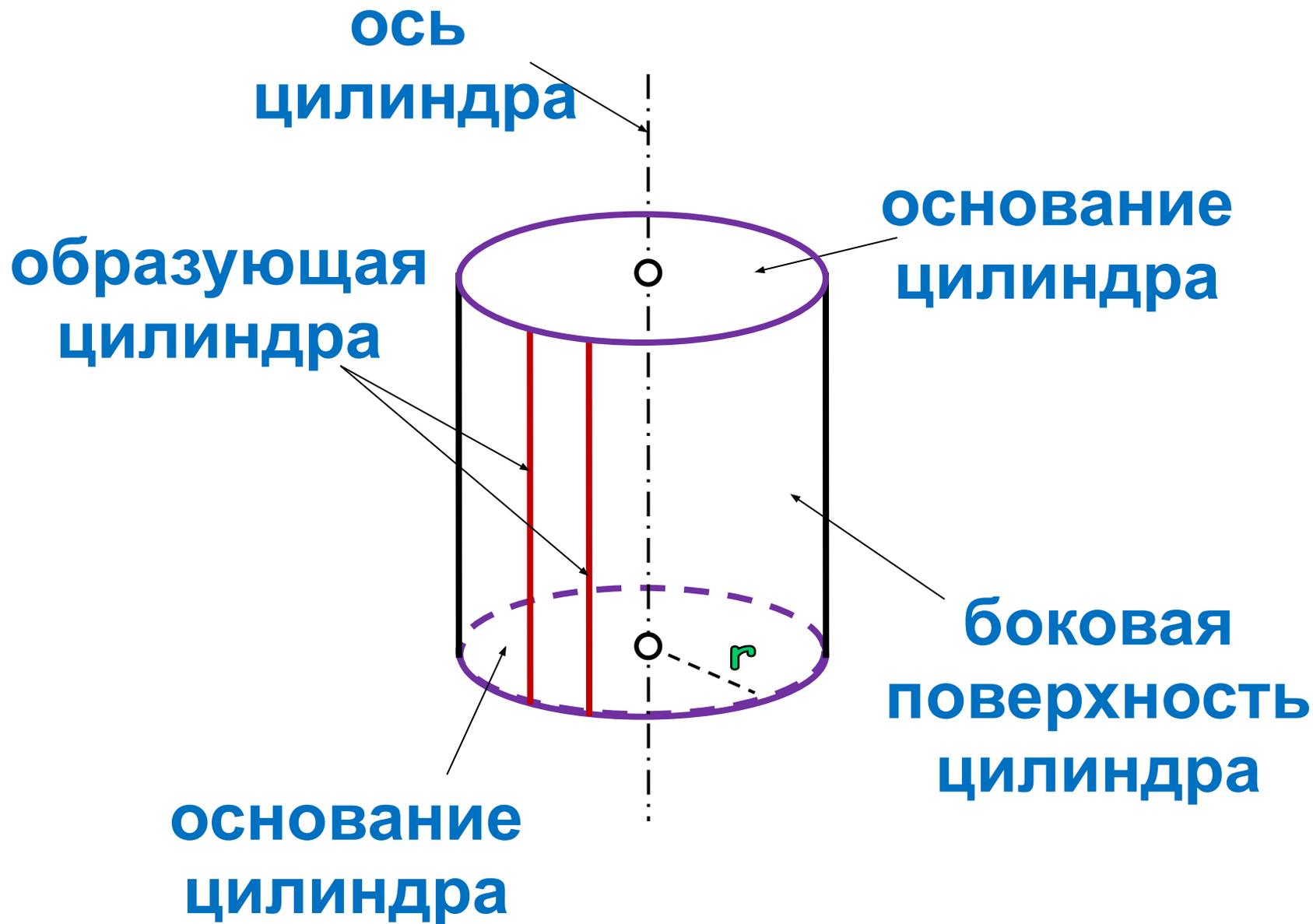
**Цилиндр** —  
геометрическое тело,  
полученное путем  
вращения  
прямоугольника  
(или, как частный  
случай  
прямоугольника,  
квадрата)  
вокруг одной из его  
сторон.

Бесконечное тело, ограниченное замкнутой бесконечной цилиндрической поверхностью, называется **бесконечным цилиндром**.

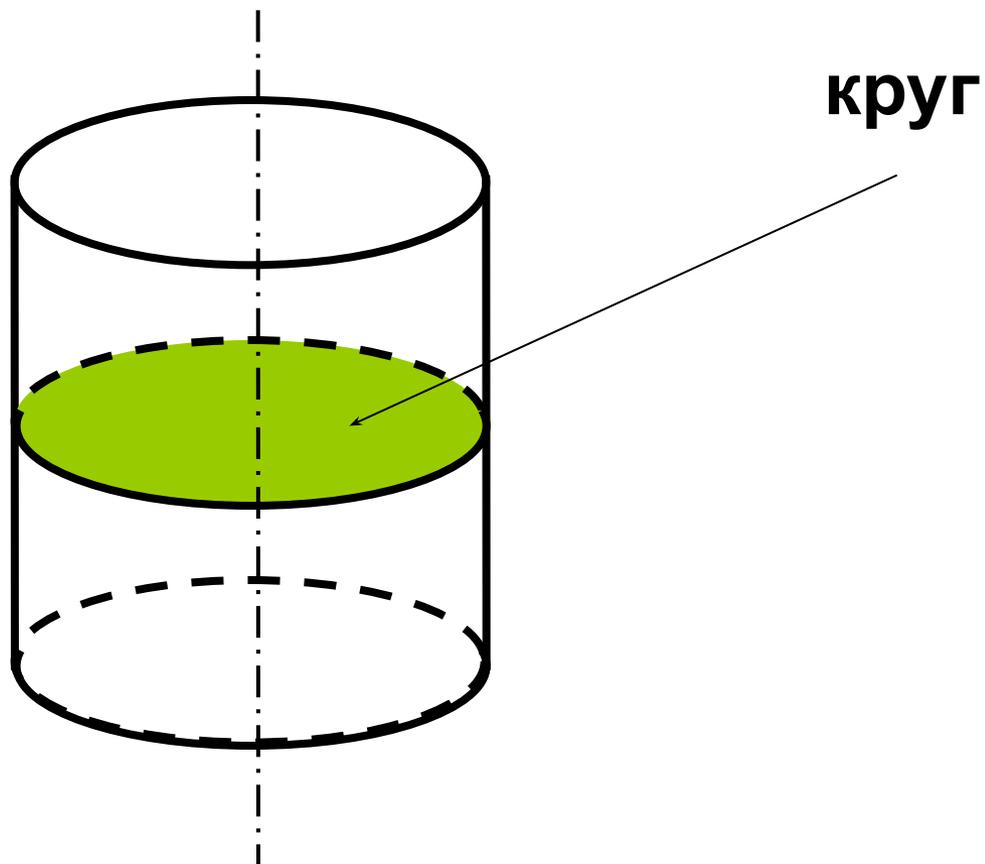
Бесконечное тело, ограниченное замкнутым цилиндрическим лучом и его основанием, называется **открытым цилиндром**. Основание и образующие цилиндрического луча называют соответственно основанием и образующими открытого цилиндра.

Конечное тело, ограниченное замкнутой конечной цилиндрической поверхностью и двумя выделившими её сечениями, называется **КОНЕЧНЫМ ЦИЛИНДРОМ**, или собственно **цилиндром**.

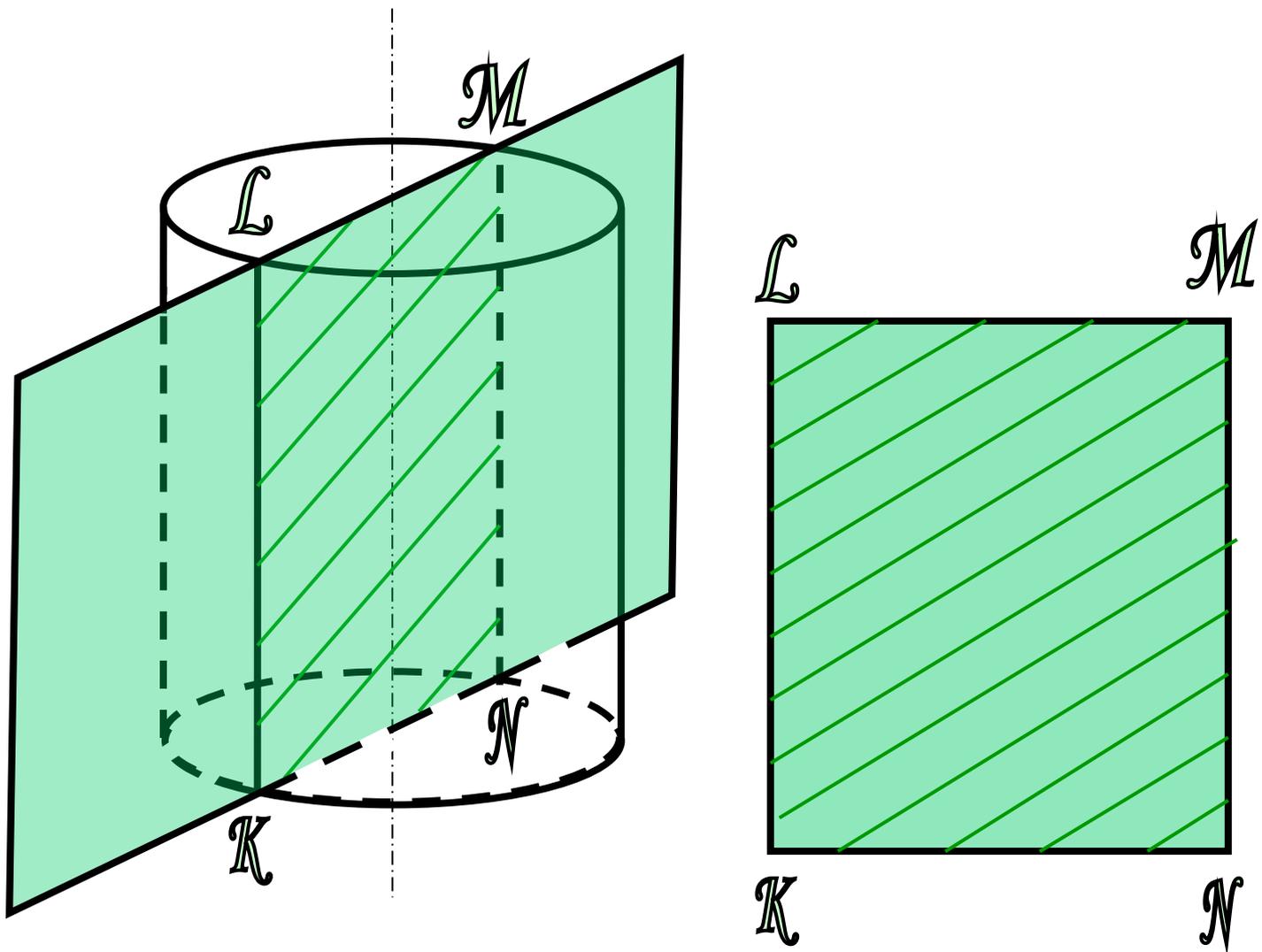
Сечения называются основаниями цилиндра. По определению конечной цилиндрической поверхности, основания цилиндра равны.



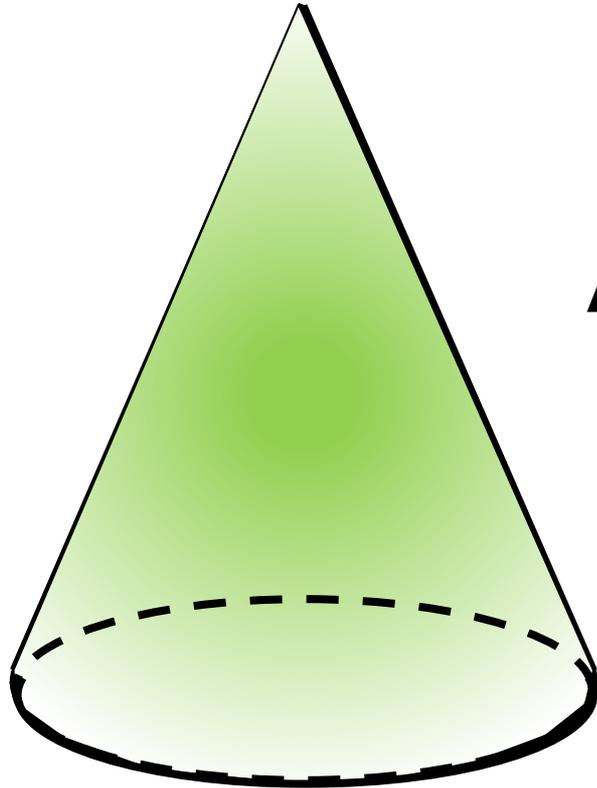
# Поперечное сечение.



# Осевое сечение.



# Конус.

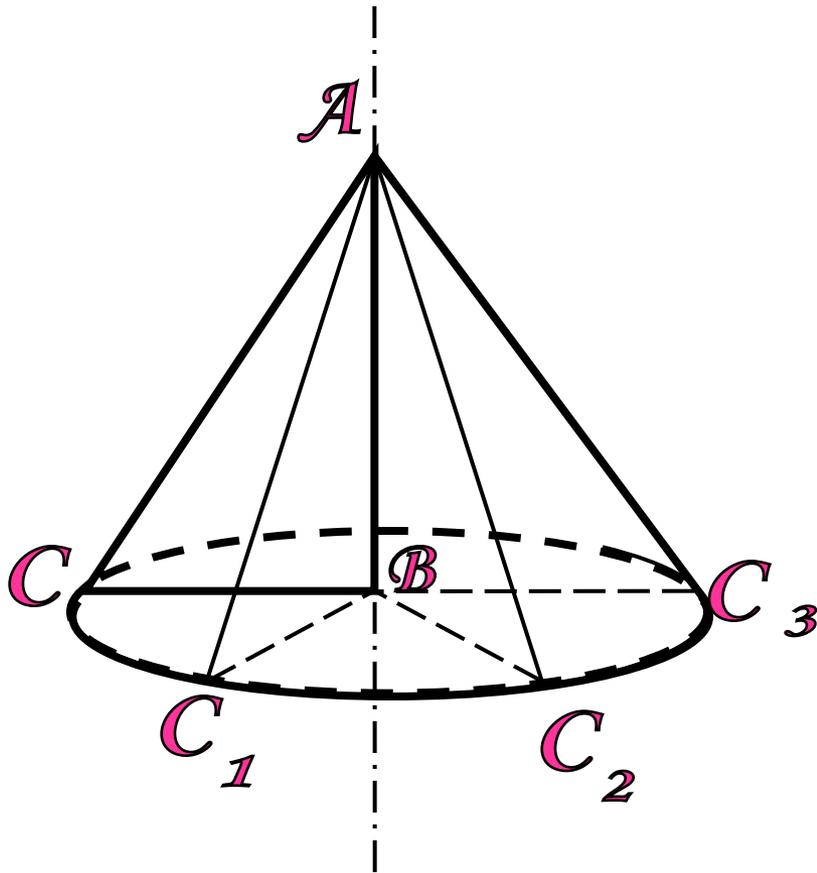


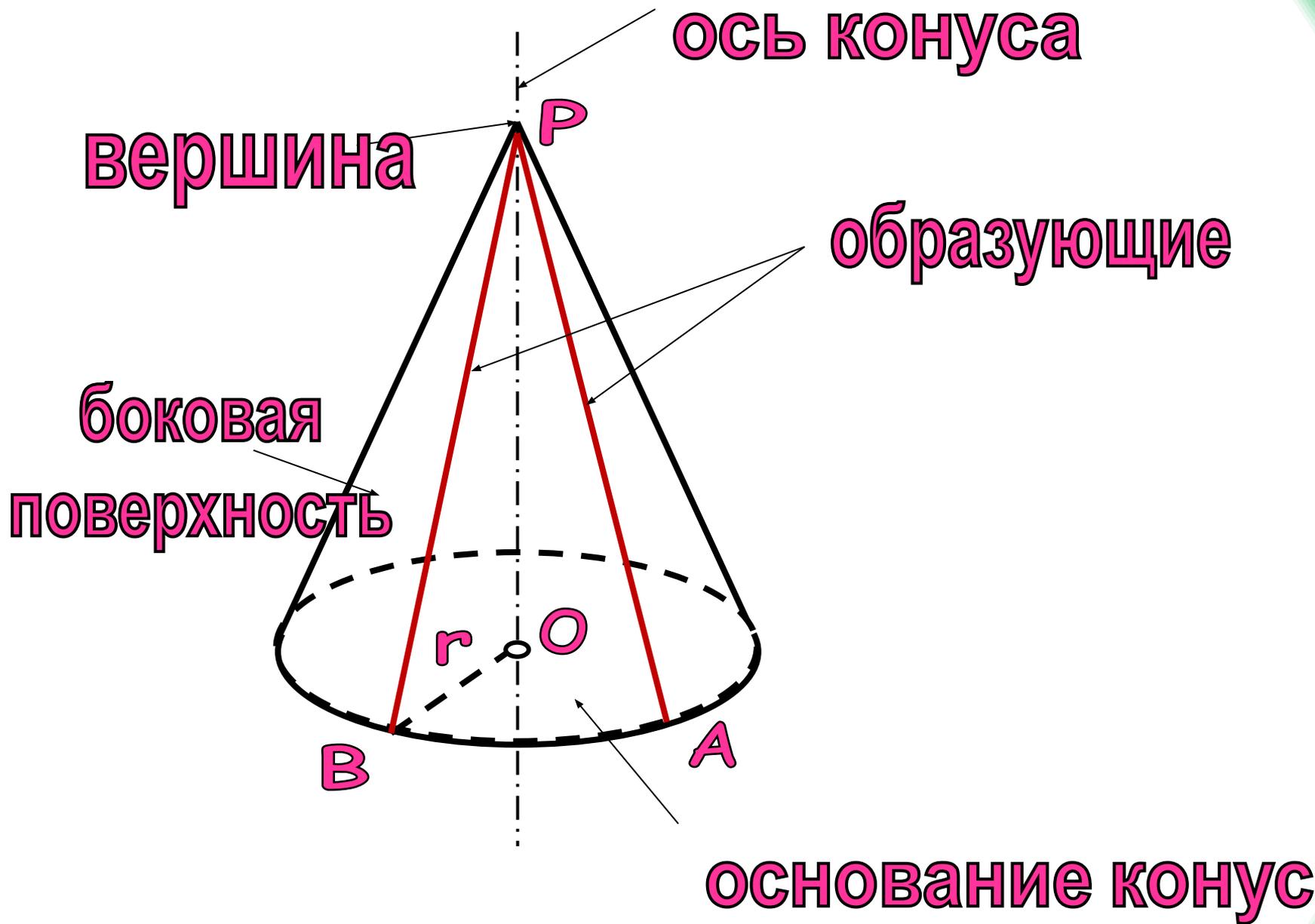
Конус -с греческого “*κωνος*” “сосновая шишка”. С конусом люди знакомы с глубокой древности. В 1906 году была обнаружена книга Архимеда (287-212 гг. до н.э.) “О методе”, в которой дается решение задачи об объеме общей части пересекающихся цилиндров. Архимед приписывает честь открытия этого принципа Демокриту (470-380 гг. до н.э.) – древнегреческому философу. С помощью этого

# Разные определения конуса.

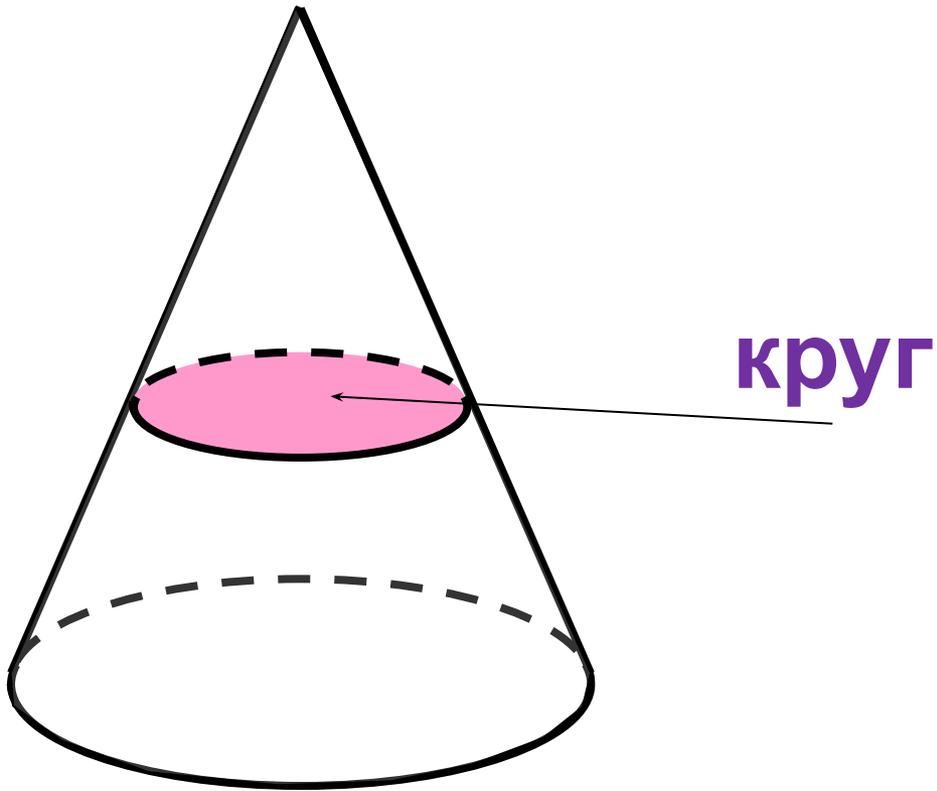
1. **«Конусами»** называется семейство морских моллюсков.
2. В геологии существует понятие **«конус выноса»** вынесение породы горными реками.
3. В биологии есть понятие **«конус нарастания»**. Это верхушка побега.
4. Громоотводы создают вокруг себя **«конус безопасности»**. Чем выше громоотвод, тем больше объем такого конуса.

**Конус** – тело,  
полученное  
вращением  
прямоугольно  
го  
треугольника  
вокруг одного  
из катетов.

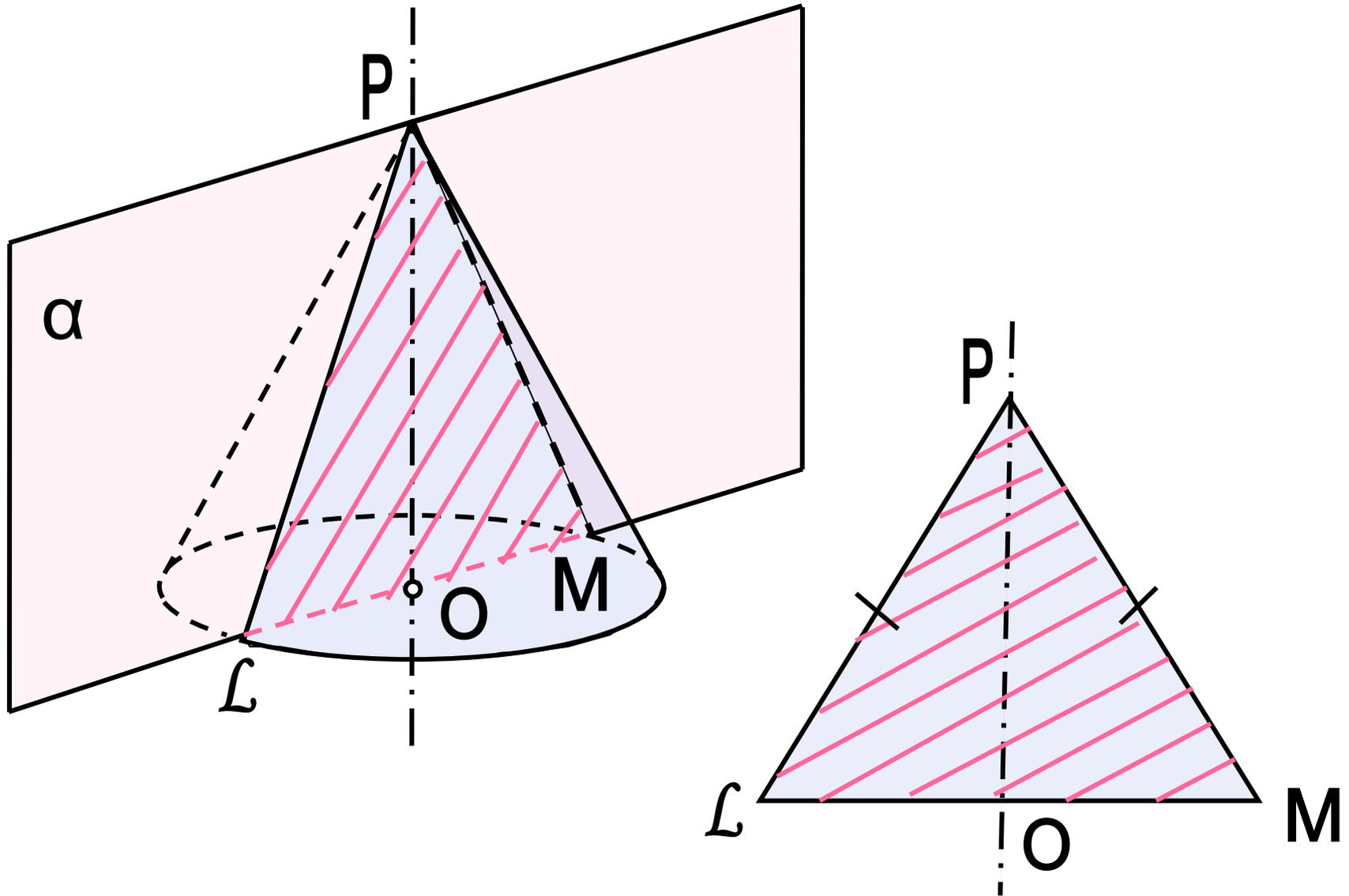




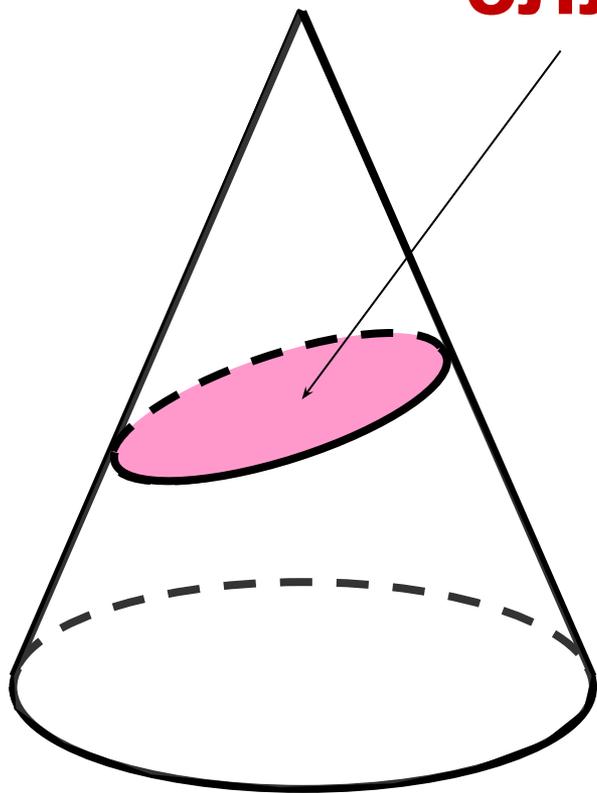
# Поперечное сечение конуса.



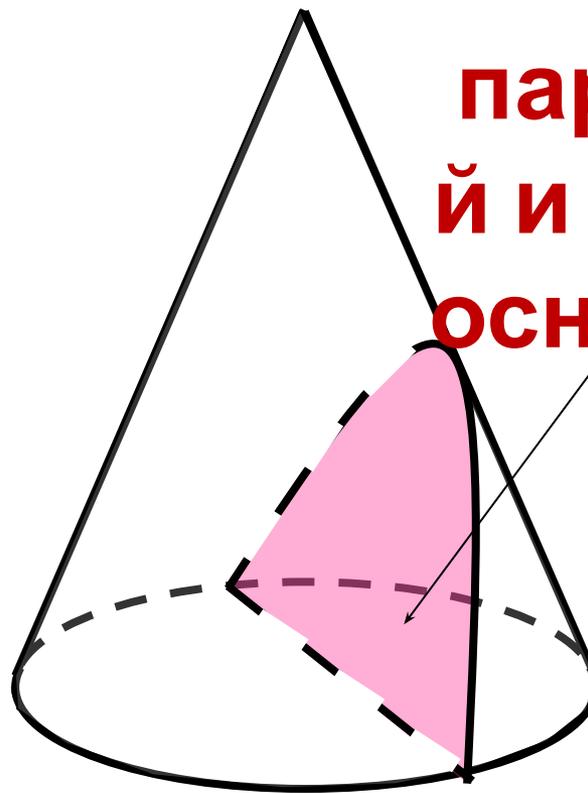
# Осевое сечение конуса.

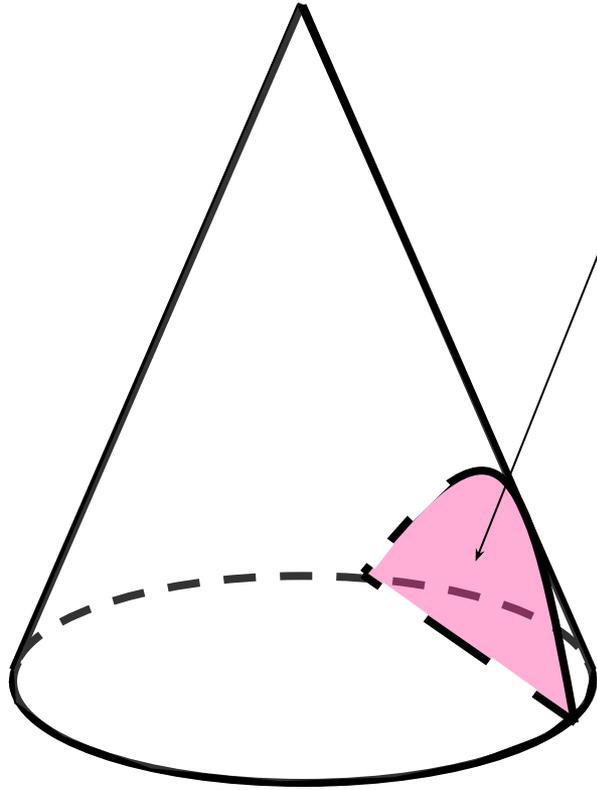


**сечение –  
эллипс**



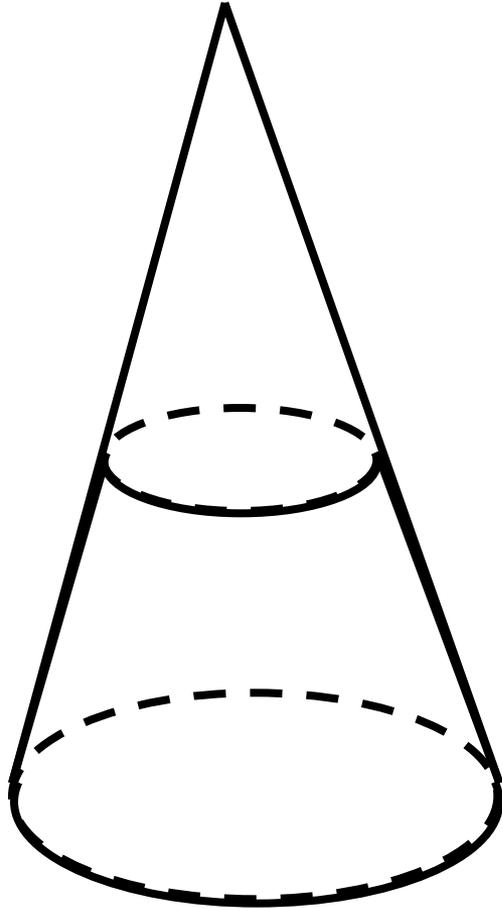
**Сечение -  
фигура,  
ограничен  
ная  
параболо  
й и хордой  
основания**





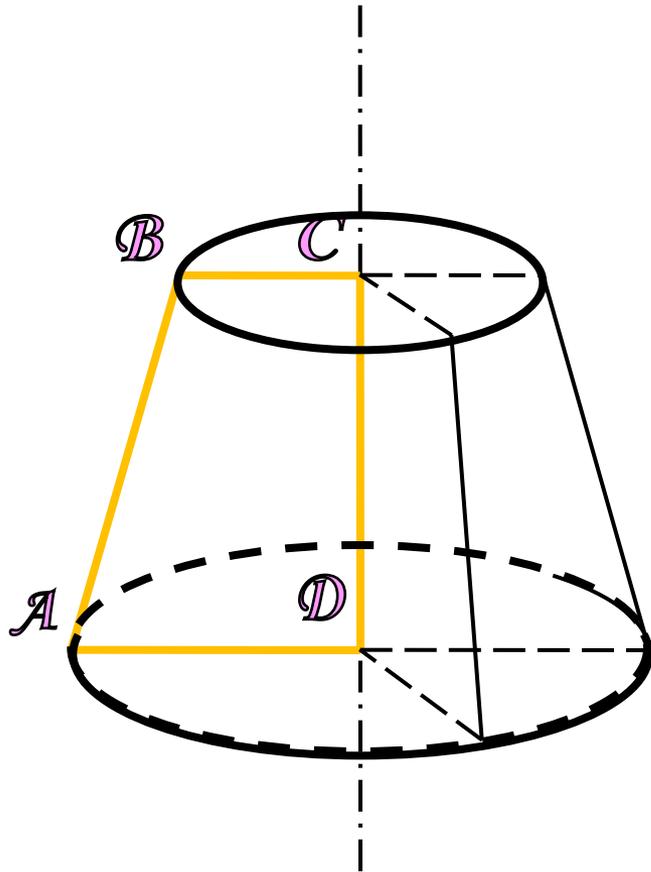
**Сечение -  
фигура,  
ограничен  
ная  
гиперболо  
й и хордой  
основания**

**Большой трактат о конических сечениях был написан Аполлонием Пергским (260-170 гг. до н.э.) – учеником Евклида (II в. до н.э.), который создал великий труд из 15 книг под названием “Начала”. Эти книги издаются и по сей день, а в школах Англии по ним учатся.**



**Возьмем произвольный конус и проведем секущую плоскость, перпендикулярную к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется**

**усеченным конусом.**

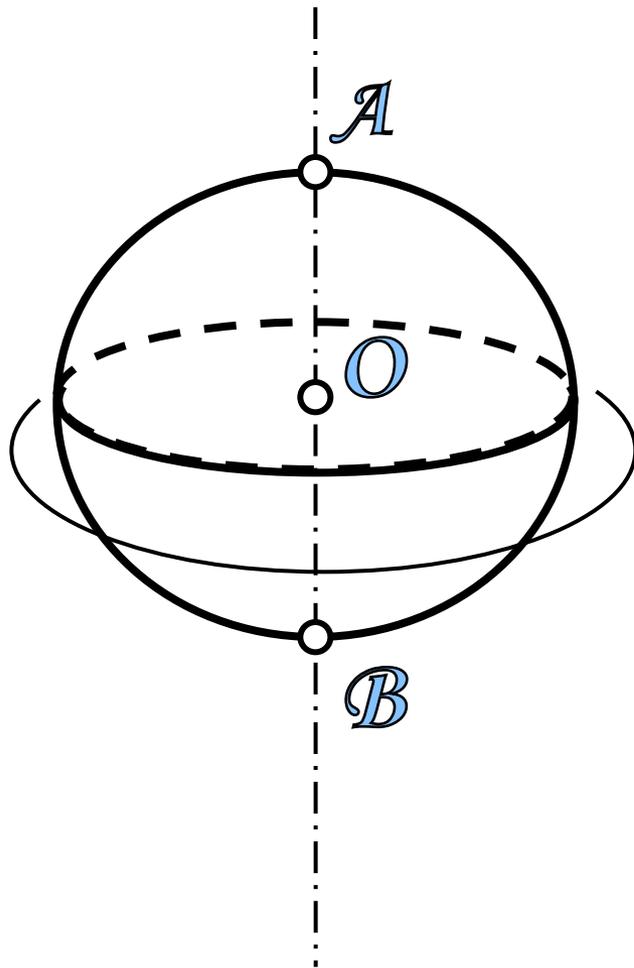


**Усеченный конус**  
– тело, полученное  
вращением  
прямоугольной  
трапеции вокруг  
боковой стороны,  
содержащей  
прямой угол.

# Сфера и шар.

По-гречески так назывался мяч, с которым играли дети.

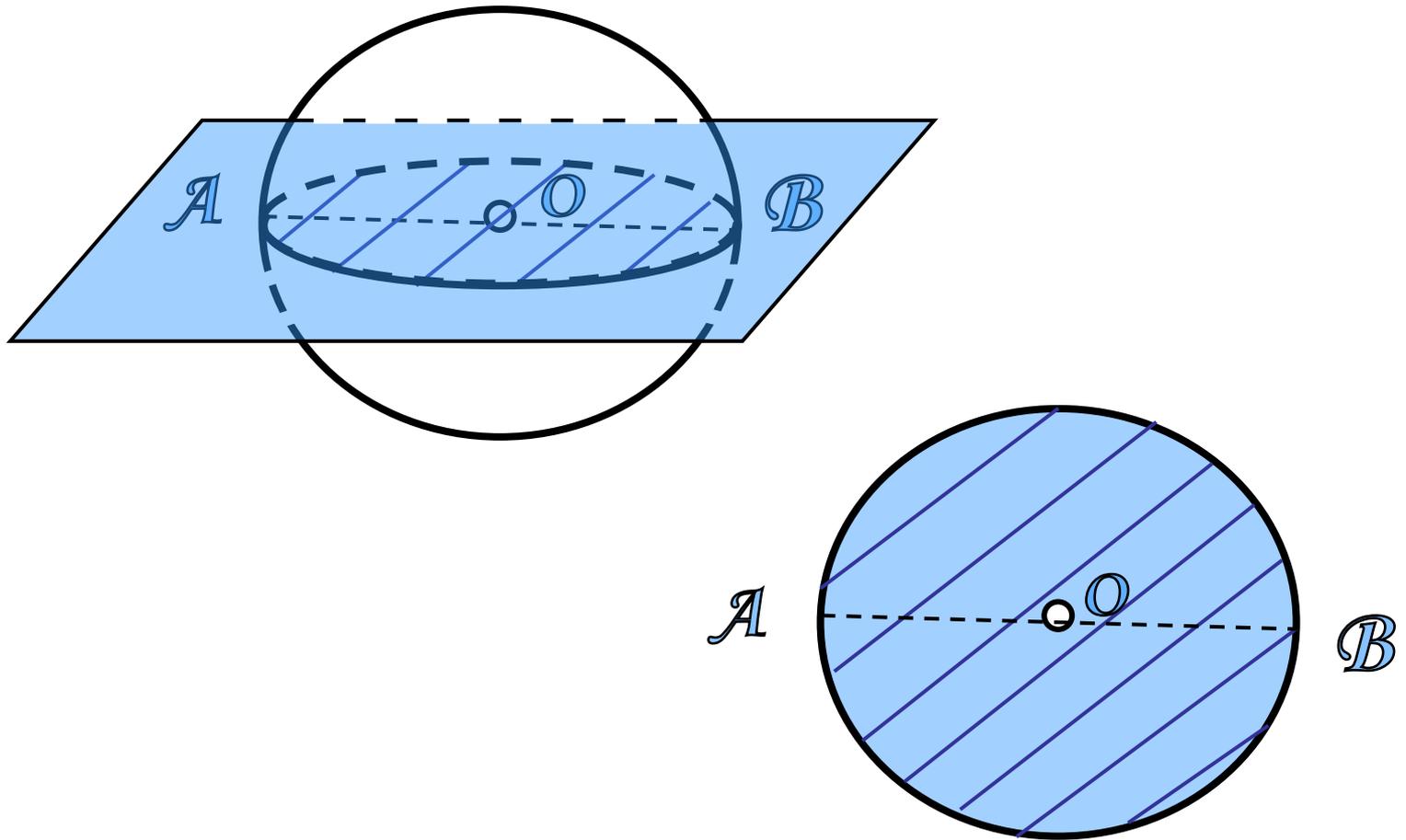
Множество учёных геометров, да и простых людей, интересовались такой фигурой как шар и его «оболочкой», носящей название сфера. Удивительно, но шар является единственным телом, обладающим большей площадью поверхности при объёме, равном объёму других сравниваемых тел, таких как куб, призма или прочие всевозможные многогранники. С шарами мы имеем дело ежедневно. К примеру, почти каждый человек пользуется шариковый ручкой в конец стержня которой вмонтирован



**Сфера** – тело,  
полученное  
вращением  
окружности  
вокруг  
диаметра.

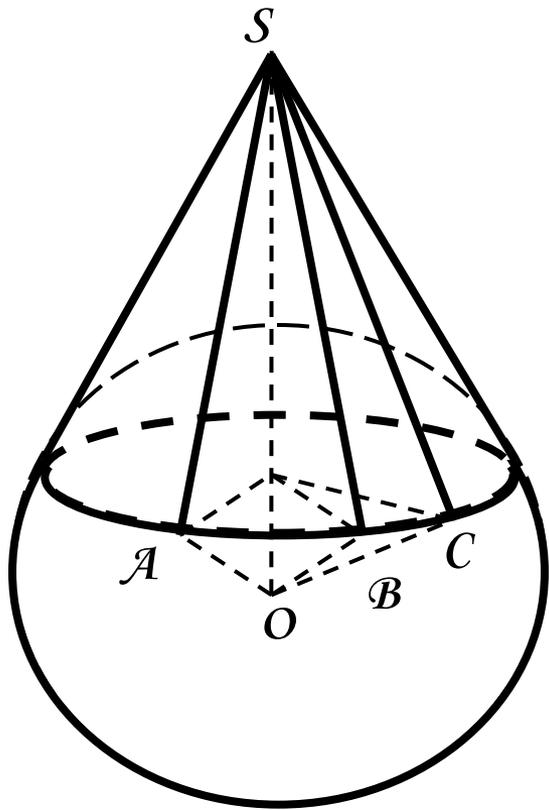
**Шар** – тело,  
ограниченное  
сферой.

# Осевое сечение шара.



# Свойство касательной плоскости к

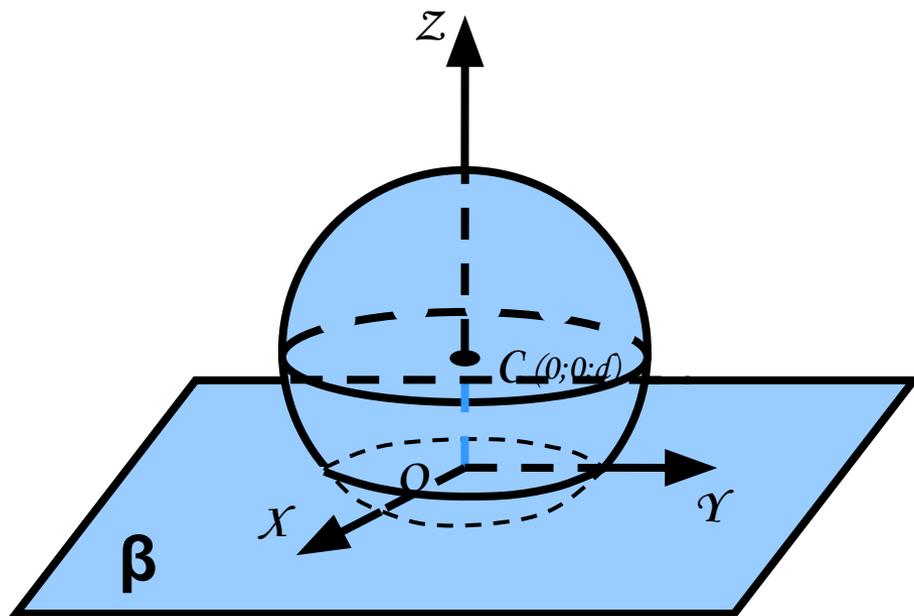
**сфере.**  
Все касательные к сфере, проведенные из одной внешней точки, равны между собой.



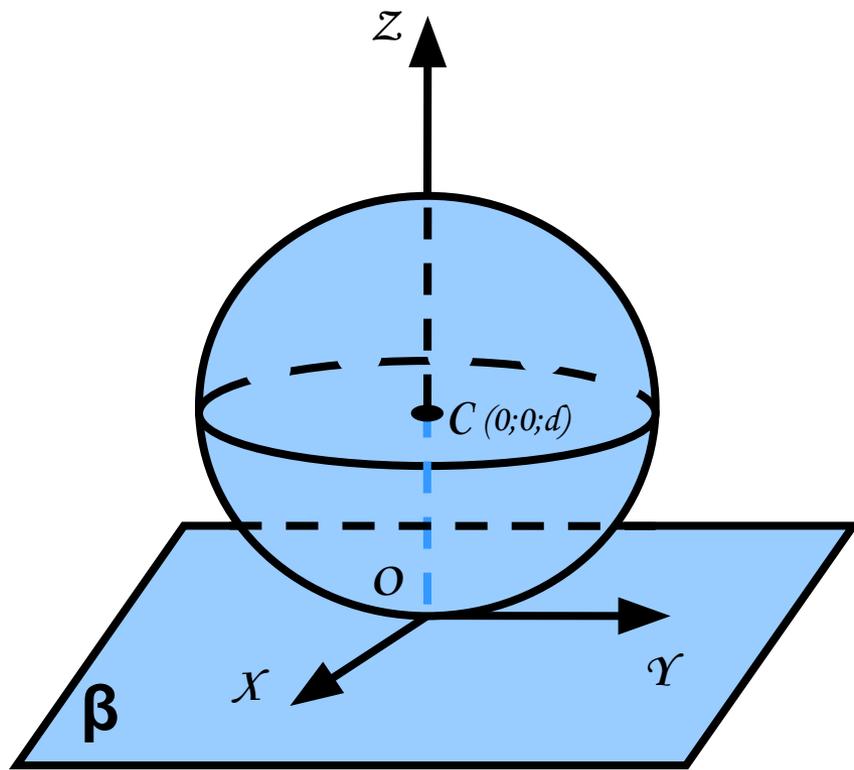
Проведем из внешней точки  $S$  касательные к сфере  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ . Точки их прикосновения  $A$ ,  $B$ ,  $C$  соединим с центром сферы  $O$ . Прямоугольные треугольники  $AOS$ ,  $BOS$ ,  $COS$  имеют общую гипотенузу  $SO$  и равные катеты  $OA = OB = OC$ , а потому они равны между

# Взаимное расположение сферы и

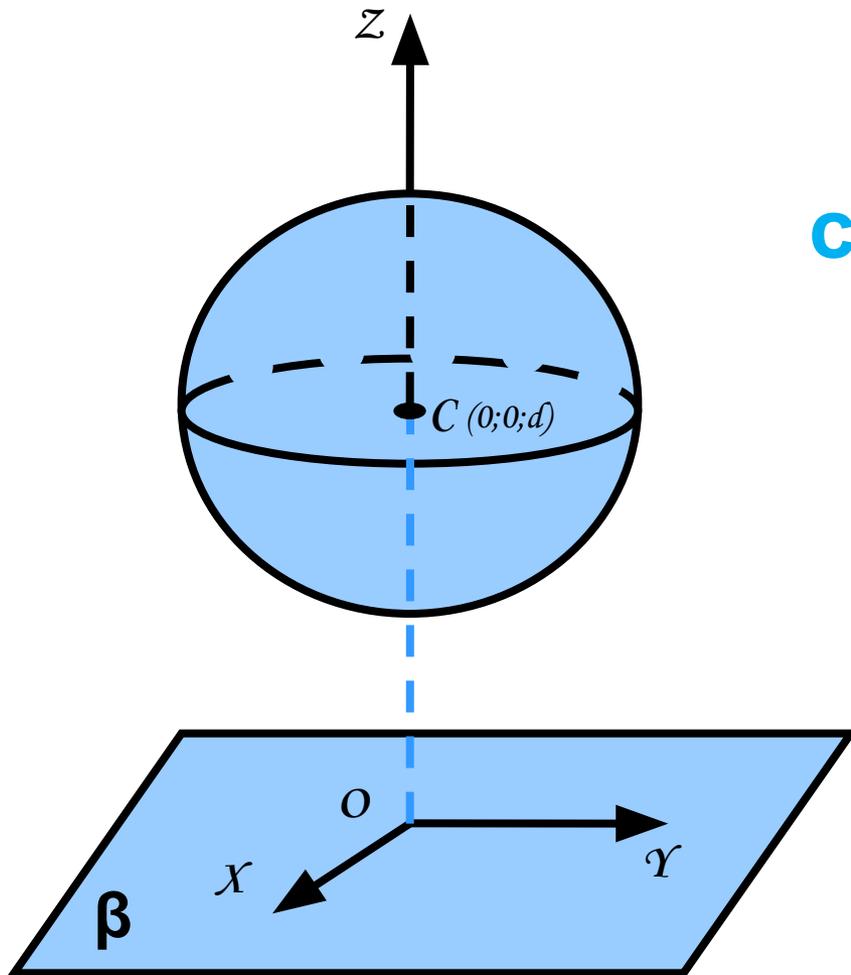
шара. 1) Если  $d < R$ , то плоскость  $\beta$  и сфера пересекаются по окружности.



Сечение шара плоскостью есть круг. Если секущая плоскость проходит через центр шара, то в сечении получается круг радиуса  $R$ . Такой



2) Если  $d = R$ , то сфера и плоскость именуют только одну общую точку. В этом случае  $a$  называют **касательной плоскостью к сфере**, а  $O$  - точкой соприкосновения плоскости и шара.



3) Если  $d > R$ , то сфера и плоскость не имеют общих точек.

## Науки, связанные со сферами.

- **Сферическая тригонометрия** - область математики в которой изучаются зависимости между сторонами и углами сферических треугольников (т. е. треугольников на поверхности сферы), образующихся при пересечении трёх больших кругов. Сферическая тригонометрия тесно связана со сферической астрономией.
- **Сферические функции (шаровые)** – специальные функции, применяемые для изучения физических явлений в

- **Сферическая астрономия** – раздел астрономии, разрабатывающий математические методы решения задач, связанных с изучением видимого расположения и движения космических тел (звезд, Солнца, планет, искусственных спутников Земли и др.) на небесной сфере, в частности разработка теоретических основ счета времени.

- **Сферическая геометрия** – область математики, в которой изучаются геометрические фигуры на сфере

**Архимед доказал, что любые две плоскости, параллельные основаниям описанного около сферы цилиндра (рис.1), высекают на сфере и на цилиндре «пояски» одинаковой площади.**

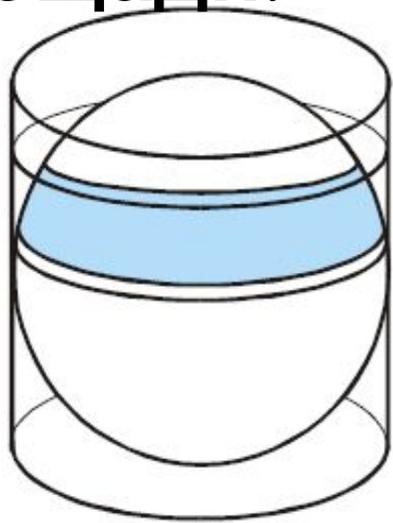
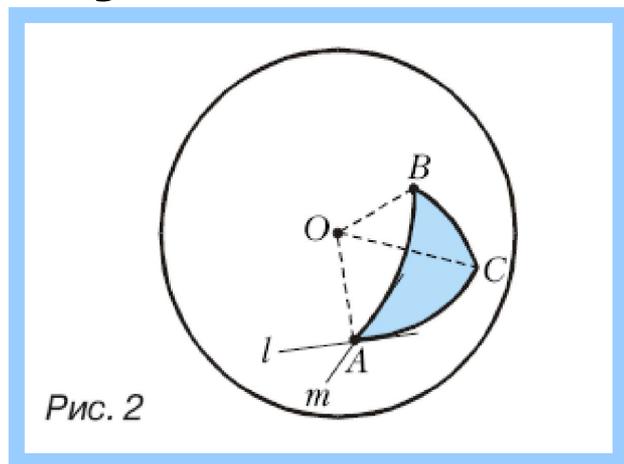


Рис. 1

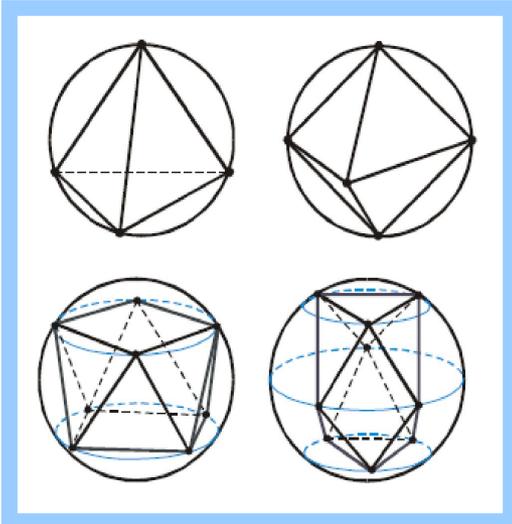
**(В частности, площадь всей сферы равна площади боковой поверхности цилиндра)**

Трехгранный угол с вершиной в центре сферы высекает на ней сферический треугольник (рис.2).

Стороны сферического треугольника – дуги больших кругов

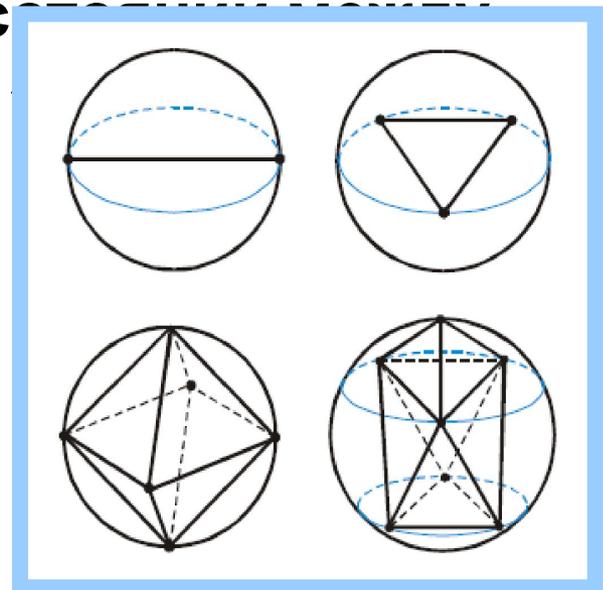


Москольку  
касательные  $m$  и  $l$  к  
сфере  
перпендикулярны  
радиусу  $OA$ , то  
величины  $A$ ,  $B$  и  $C$   
углов сферического  
треугольника равны  
величинам



Как расположить на сфере  $n$  точек, чтобы наименьшее из всех расстояний между ними было как можно больше? Эта задача не решена до сих пор. Оптимальные расположения при  $n=2, 3, \dots, 9$  показаны на рисунках, где линиями соединены те точки, расстояния между которыми равны

При  $n > 9$  решение известно для  $n=12$  (вершины икосаэдра) и  $n=24$  (вершины полуправильного 38-гранника (полуправильный многоугольник-многоугольник, получаемый при проектировании правильного многоугольника на какую-либо плоскость), ограниченного 32 равносторонними треугольниками и 6 квадратами; в



Можно ли расположить *13* одинаковых шаров, чтобы все они касались одного шара того же радиуса? Джеймс Грегори (1638-1675) надеялся, что можно. Исаак Ньютон (1643-1727) утверждал, что нельзя. Точку в их споре поставил в 1953 году К. Шютте и Б. Л. Ван-дер-Варден. Прав оказался Ньютон.

