муниципальное автономное общеобразовательное

учреждение

средняя общеобразовательная школа № 45

Методическое пособие для учащихся 11 классов

«Поверхности враш

Составил

учитель математики

первой категории

Гавинская Елена

Вячеславовна.

г.Калининград

2015-2016 учебный год

Поверхность –
одно из основных геометрических понятий!!!

1) В математике под **поверхностью** подразумевается **непрерывное множество точек, между координатами которых может быть установлена зависимость, определяемая в декартовой системе координат уравнением вида** $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ — многочлен п-й степени, или в форме какой-либо трансцендентной функции. В первом случае **поверхности** называют **алгебраическими**, во втором — **трансцендентными**.

графически, поэтому целесообразно рассматривать **поверхность как совокупность всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии.**

3) В школьном курсе геометрии рассматриваются некоторые кривые поверхности. Каждая из кривых поверхности определяется специальным способом, чаще всего как множество точек, удовлетворяющих некоторым условиям. Например, поверхность шара - множество точек, находящихся на заданном расстоянии от данной точки. Понятие "Поверхность" лишь поясняется, а не определяется.

Например, говорят, что **поверхность есть**

Виды поверхностей

Линейчатые (образующая – прямая линия)

Не линейчатые (образующая – кривая линия)

Развертывающиеся (можно без складок и разрывов развернуть на плоскость)

Не развертывающиеся

Виды поверхностей

- Поверхности вращения
- Винтовые поверхности
- Поверхности переноса
- Поверхности с плоскостью параллелизма

Образование поверхности вращения.

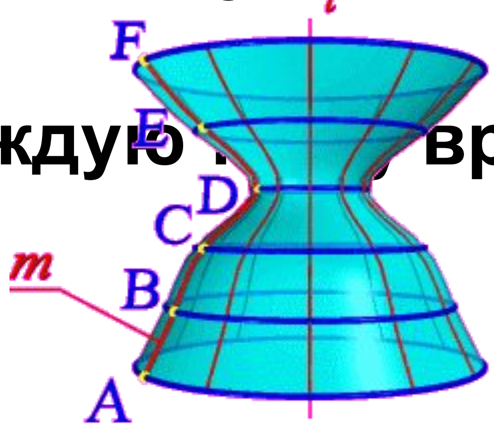
Поверхности вращения – это поверхности, созданные при вращении образующей *m* вокруг оси *i* (рис.1).

Геометрическая часть состоит из двух линий: образующей *m* и оси *i* (рис 1.б).

Алгоритмическая часть включает две операции:

1. на образующей *m* выделяют ряд точек *A, B, C, …F,*

2. каждую т[illegible] вращают вокруг оси *i*.



а) модель

б) эпюр

Так создается каркас поверхности, состоящей из множества окружностей, плоскости которых расположены перпендикулярно оси i. Эти окружности называются параллелями; наименьшая параллель называется горлом, наибольшая – экватором. Два основных свойства:

1. Плоскость, перпендикулярная оси вращения, пересекает поверхность по окружности – параллели.

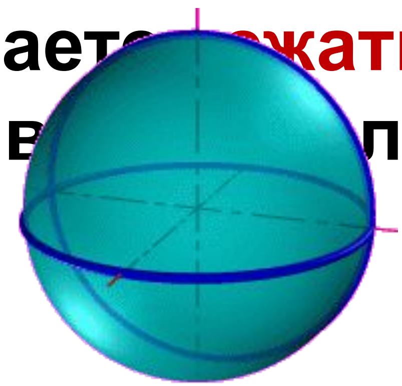
2. Плоскость, проходящая через ось вращения, пересекает поверхность по двум симметричным относительно оси линиям – меридианам.

Плоскость, проходящая через ось параллельно фронтальной плоскости проекций, называется плоскостью главного меридиана, а линия, полученная в сечении, – главным меридианом.

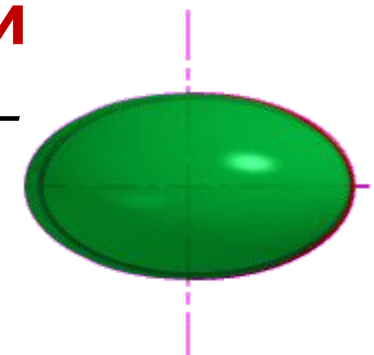
Наиболее распространенные поверхности вращения с криволинейными образующими.

Сфера – образуется вращением окружности вокруг её диаметра. При сжатии или растяжении сферы она преобразуется в **эллипсоиды**, которые могут быть получены вращением эллипса вокруг одной из осей: если вращение вокруг малой оси, то эллипсоид называет[illegible] **[illegible]жатым или сф[illegible]ом**, если в[illegible]льшой – **в[illegible]м.**

Образование сфероида

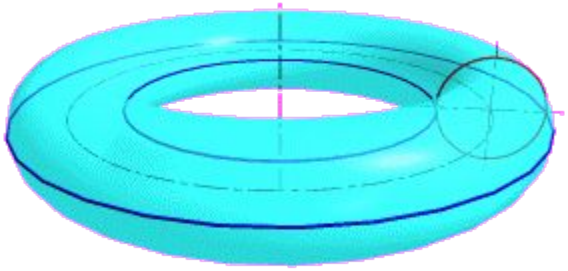


Образование сферы

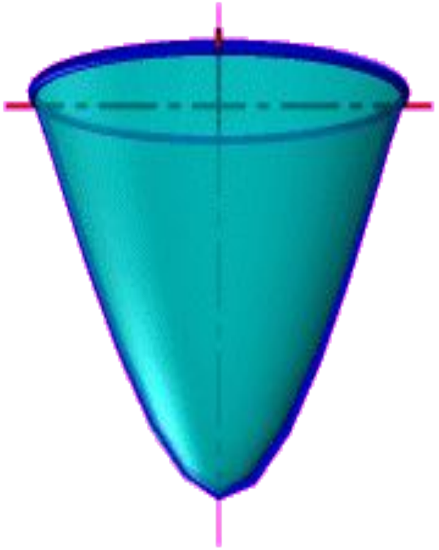


Образование вытянутого эллипсоида

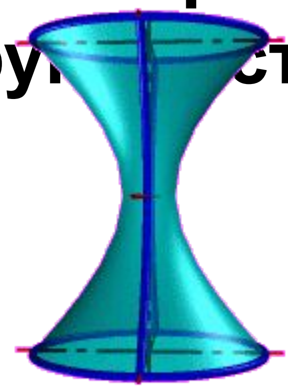
Тор образуется при вращении окружности вокруг оси, не проходящей через центр окружности.



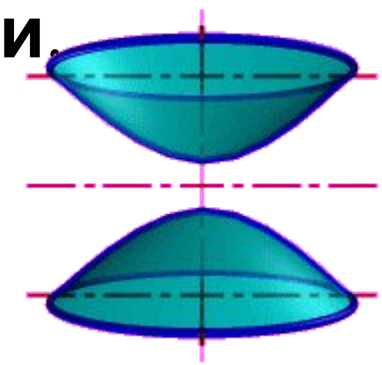
Параболоид вращения образуется при вращении параболы вокруг своей оси.



Гиперболоид вращения. **Различают однополостной** **и** **двухполостной** **гиперболоиды вращения. Первый получается при вращении вокруг мнимой оси, а второй – вращением гиперболы вокру[illegible]ствительной оси.**

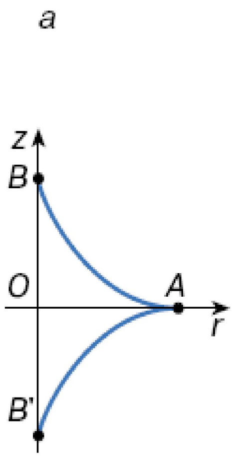


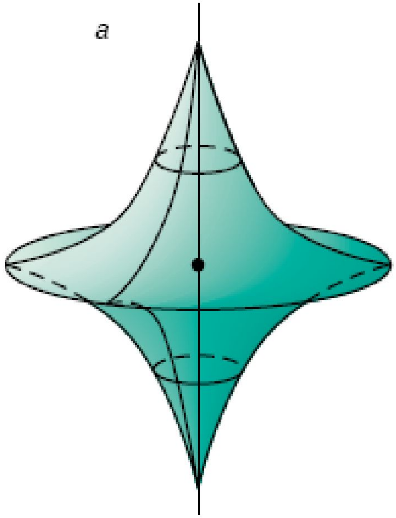
однополостной



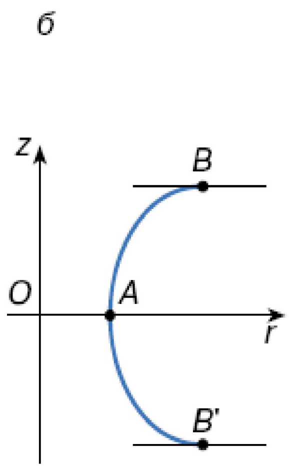
**двуполостн
ой**

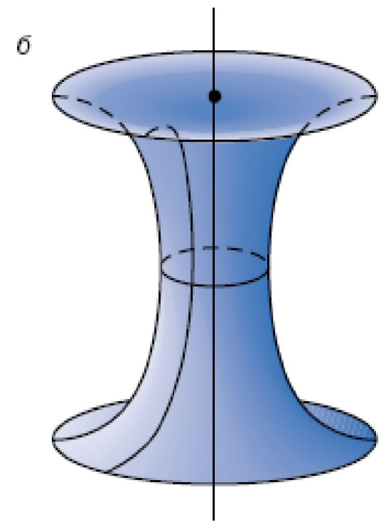
Волчок Миндинга
и его график меридиана.



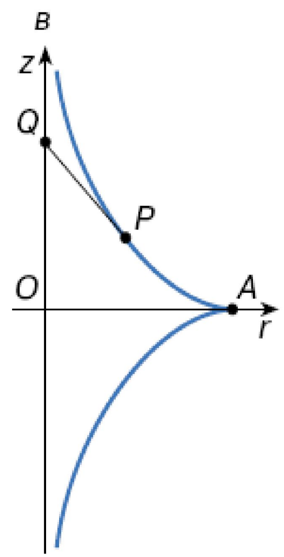


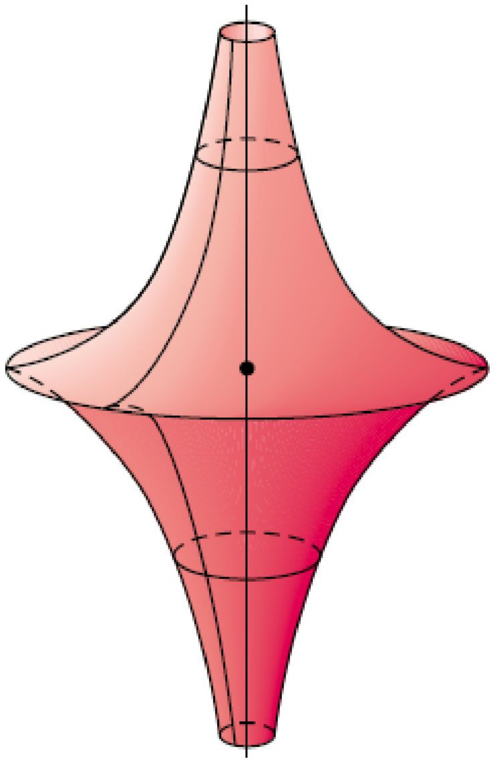
Катушка Миндинга
и её график меридиана.



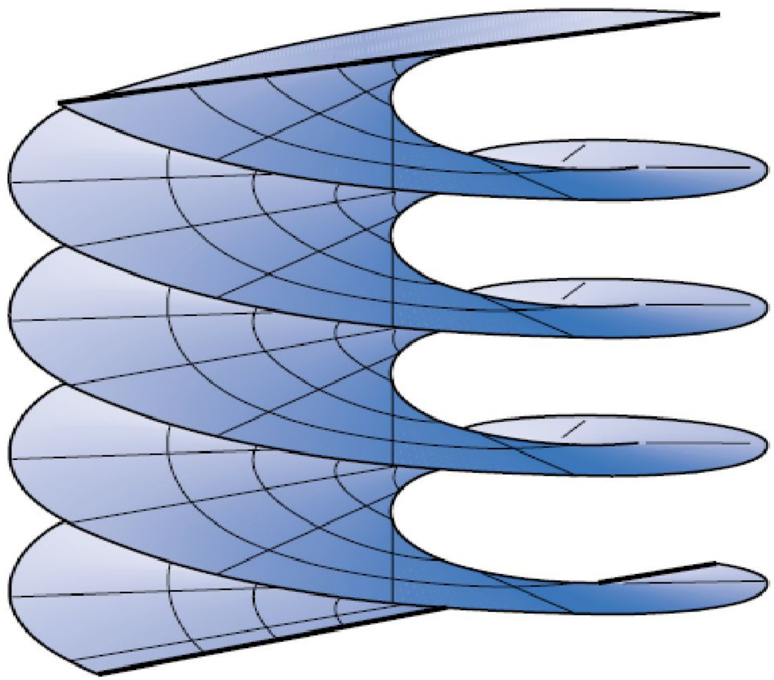


Псевдосфера
и её график меридиана.

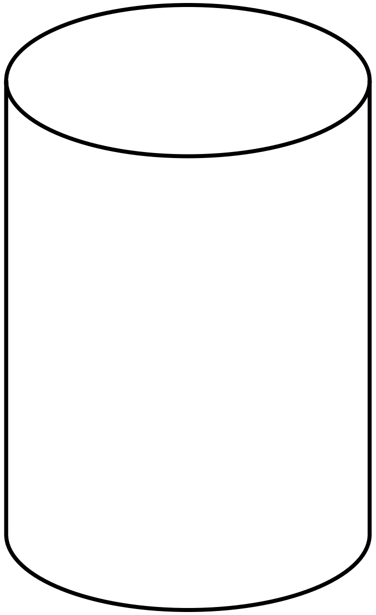




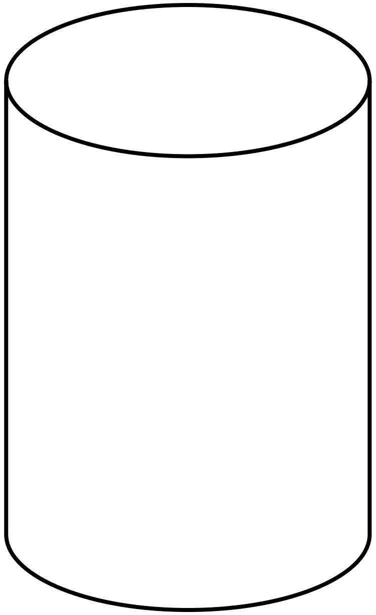
Геликоид
(винтовая поверхность).



Цилиндр.

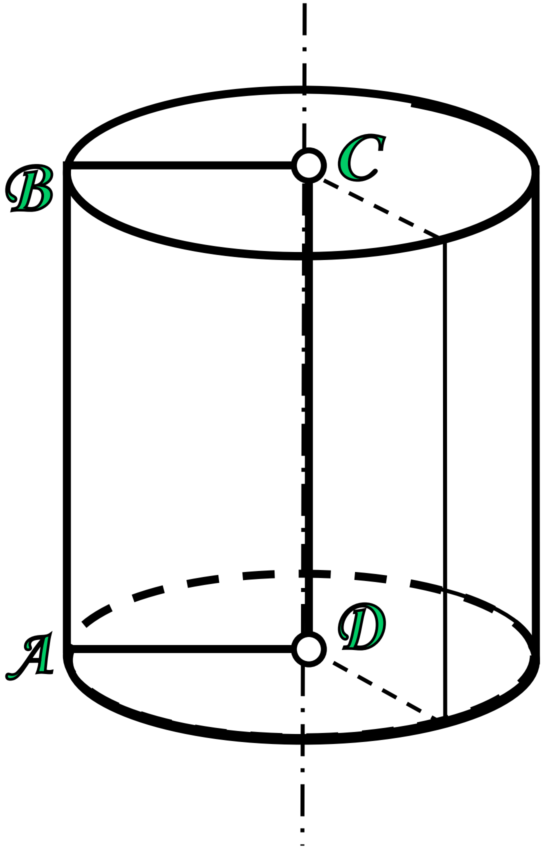


Когда люди стали строить здания из камня, пришлось перетаскивать тяжелые каменные глыбы. Для этого издавна применяли катки. И было замечено, что перекатка тяжелого камня становится легче, если для катка взято прямое дерево и от него отрезан кусок с почти одинаковой толщиной в начале и в конце. Так люди познакомились с одной из



Скалками цилиндрической формы пользовались и женщины, раскатывая белье после стирки.

Перевозить грузы на катках стало довольно трудно, потому что сами древесные стволы весили много. Чтобы облегчить работу, стали вырезать из стволов тонкие круглые пластики и с их помощью перетаскивали грузы. Так появилось первое колесо. Это было



Цилиндр —

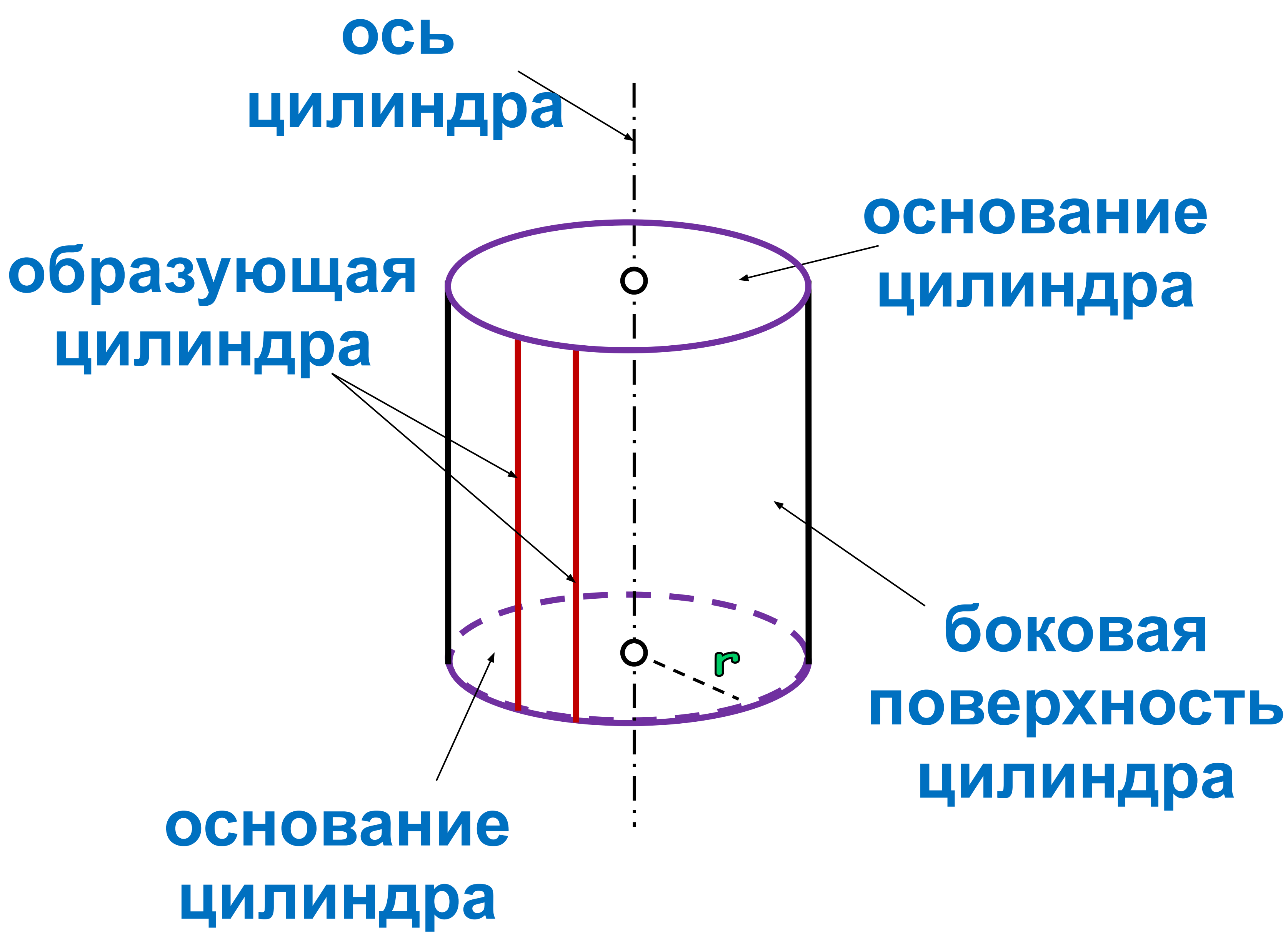
геометрическое тело, полученное путем вращения прямоугольника (или, как частный случай прямоугольника, квадрата) вокруг одной из его сторон.

Бесконечное тело, ограниченное замкнутой бесконечной цилиндрической поверхностью, называется бесконечным цилиндром.

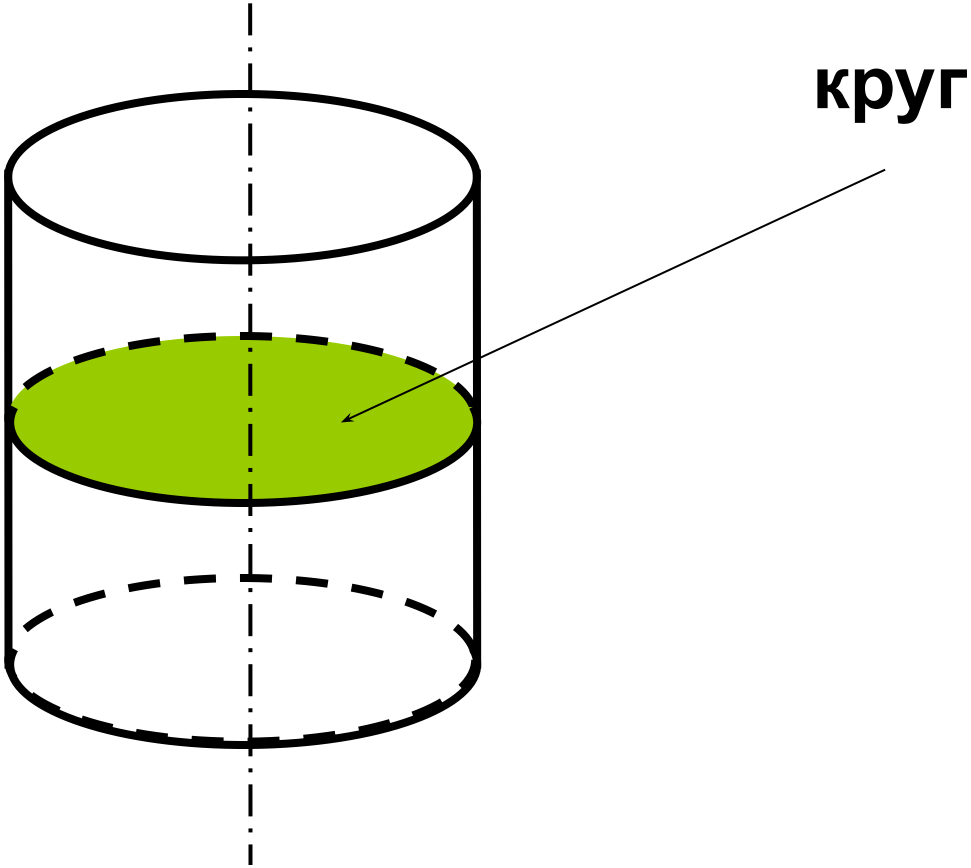
Бесконечное тело, ограниченное замкнутым цилиндрическим лучом и его основанием, называется открытым цилиндром. Основание и образующие цилиндрического луча называют соответственно основанием и образующими открытого цилиндра.

Конечное тело, ограниченное замкнутой конечной цилиндрической поверхностью и двумя выделившими её сечениями, называется конечным цилиндром, или собственно цилиндром.

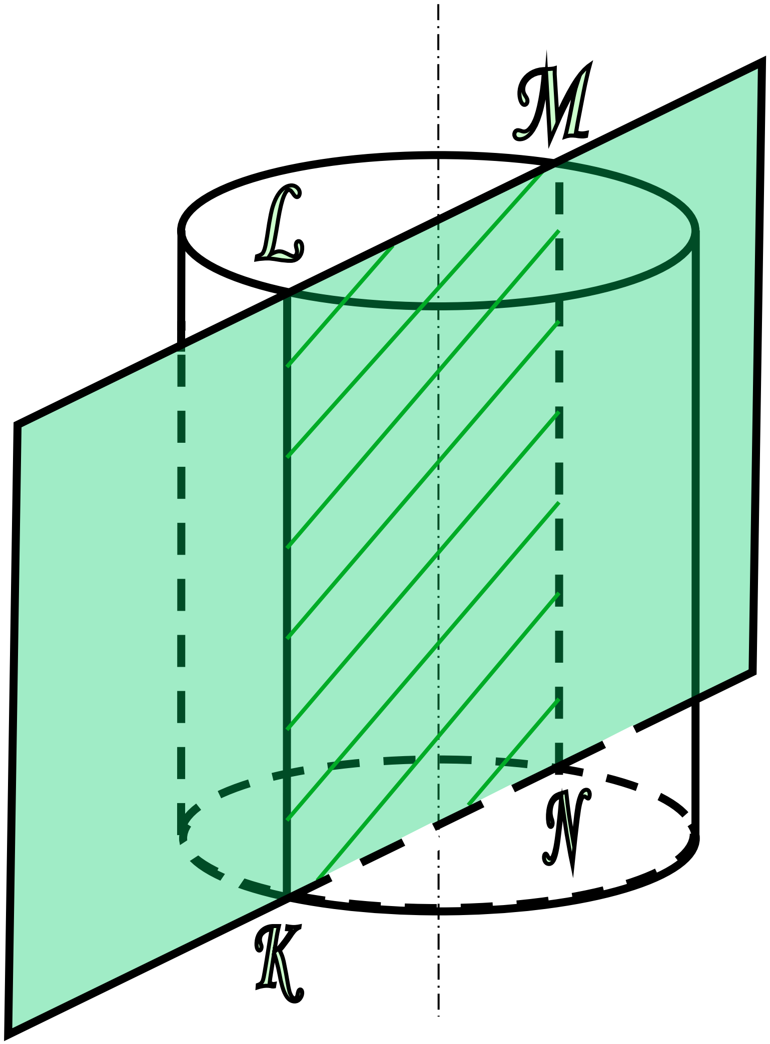
Сечения называются основаниями цилиндра. По определению конечной цилиндрической поверхности, основания цилиндра равны.

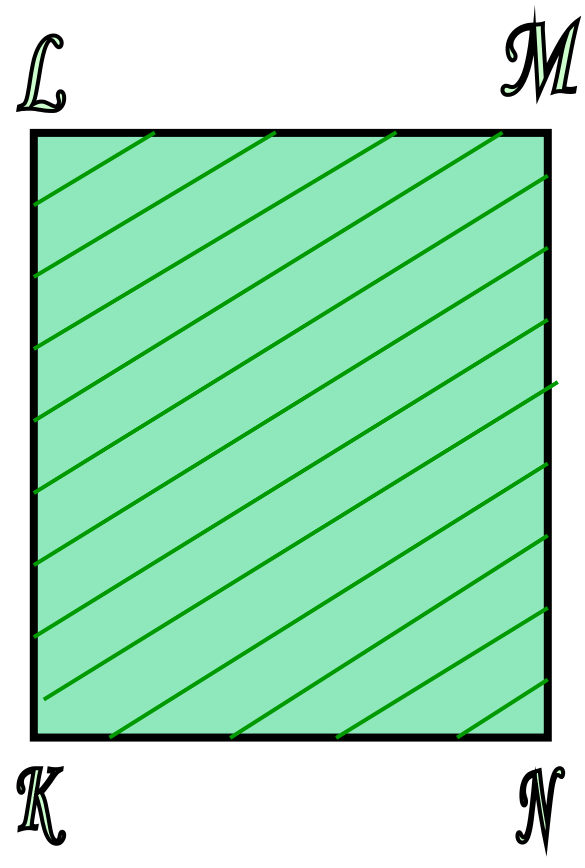

ось
цилиндра
основание
цилиндра
образующая
цилиндра
r
боковая
поверхность
цилиндра
основание
цилиндра

Поперечное сечение.

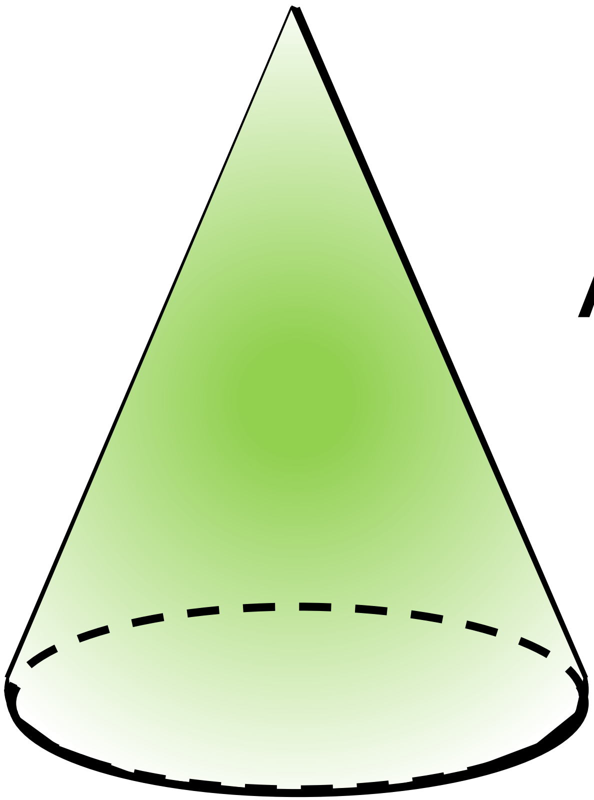


Осевое сечение.





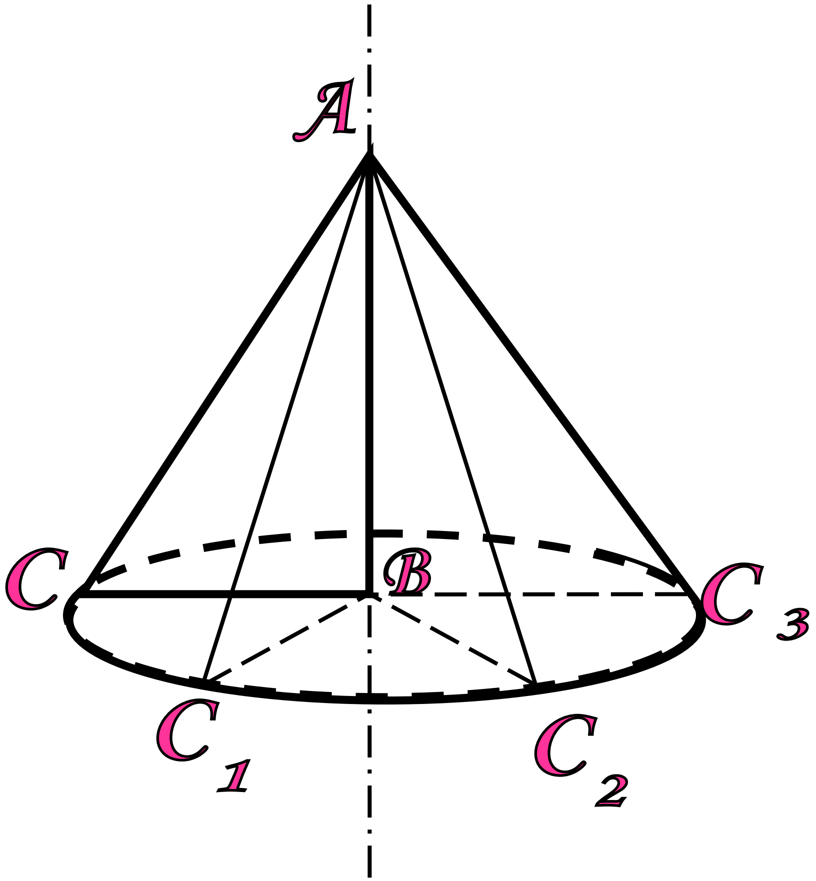
Конус.



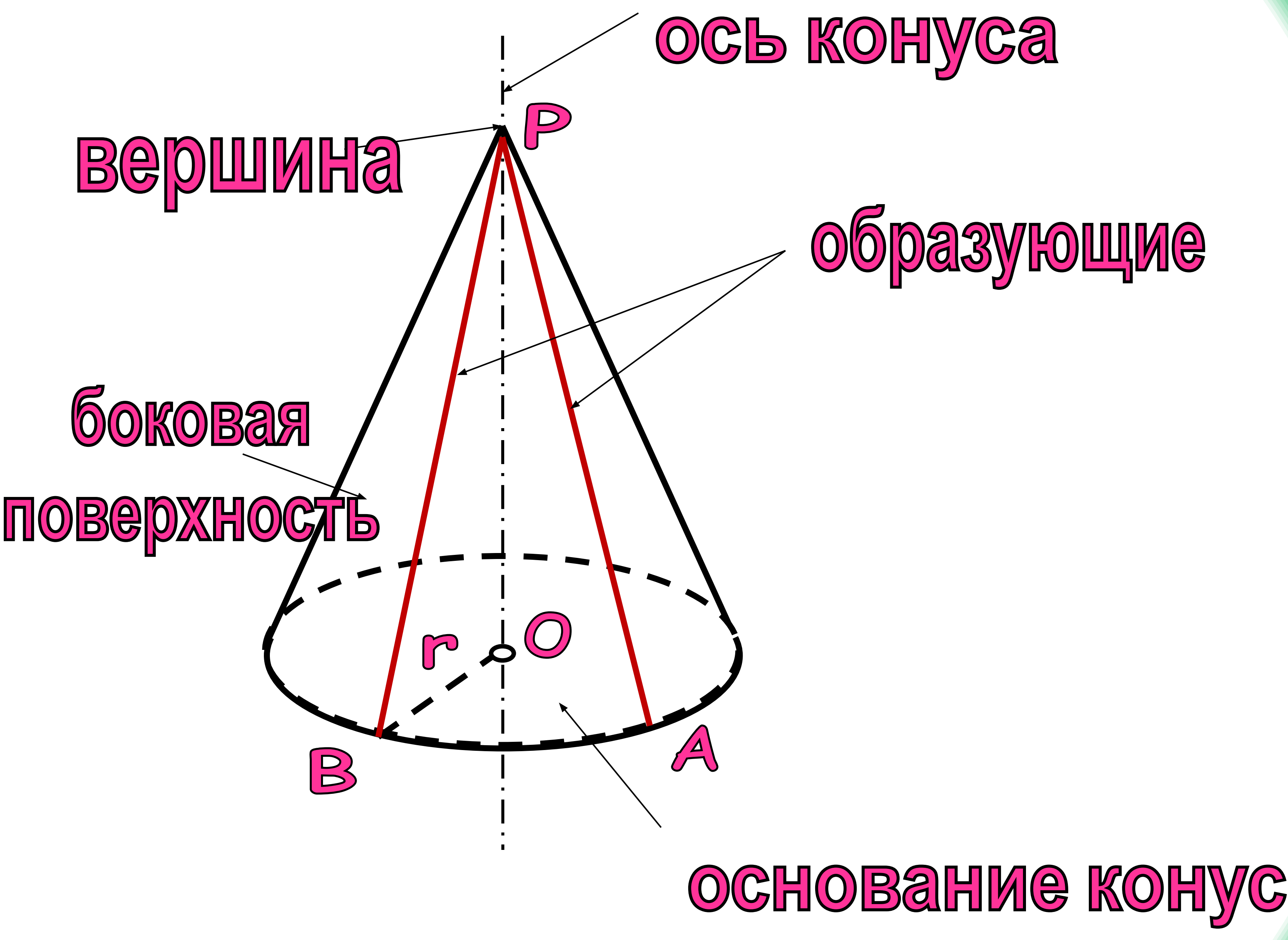
Конус –с греческого "*konos*""сосновая шишка". С конусом люди знакомы с глубокой древности. В *1906* году была обнаружена книга Архимеда *(287-212* гг. до н.э.) "О методе", в которой дается решение задачи об объеме общей части пересекающихся цилиндров. Архимед приписывает честь открытия этого принципа Демокриту *(470-380* гг. до н.э.) – древнегреческому философу. С помощью этого

Разные определения конуса.

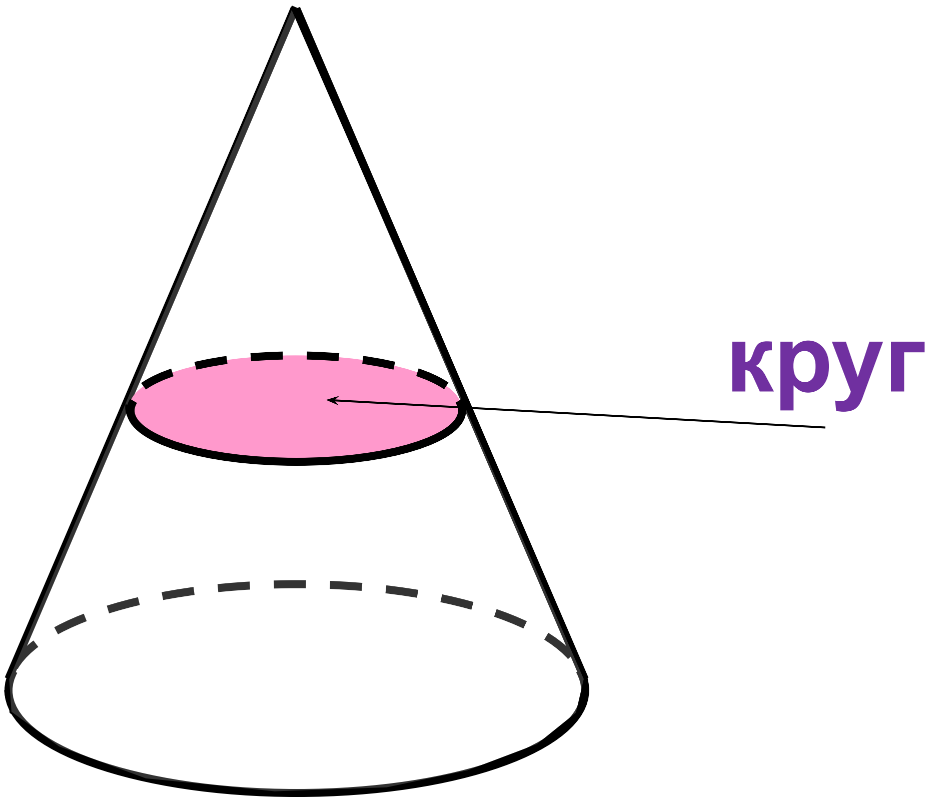
1. «Конусами» называется семейство морских моллюсков.
2. В геологии существует понятие «конус выноса» вынесение породы горными реками.
3. В биологии есть понятие «конус нарастания». Это верхушка побега.
4. Громоотводы создают вокруг себя «конус безопасности». Чем выше громоотвод, тем больше объем такого конуса.



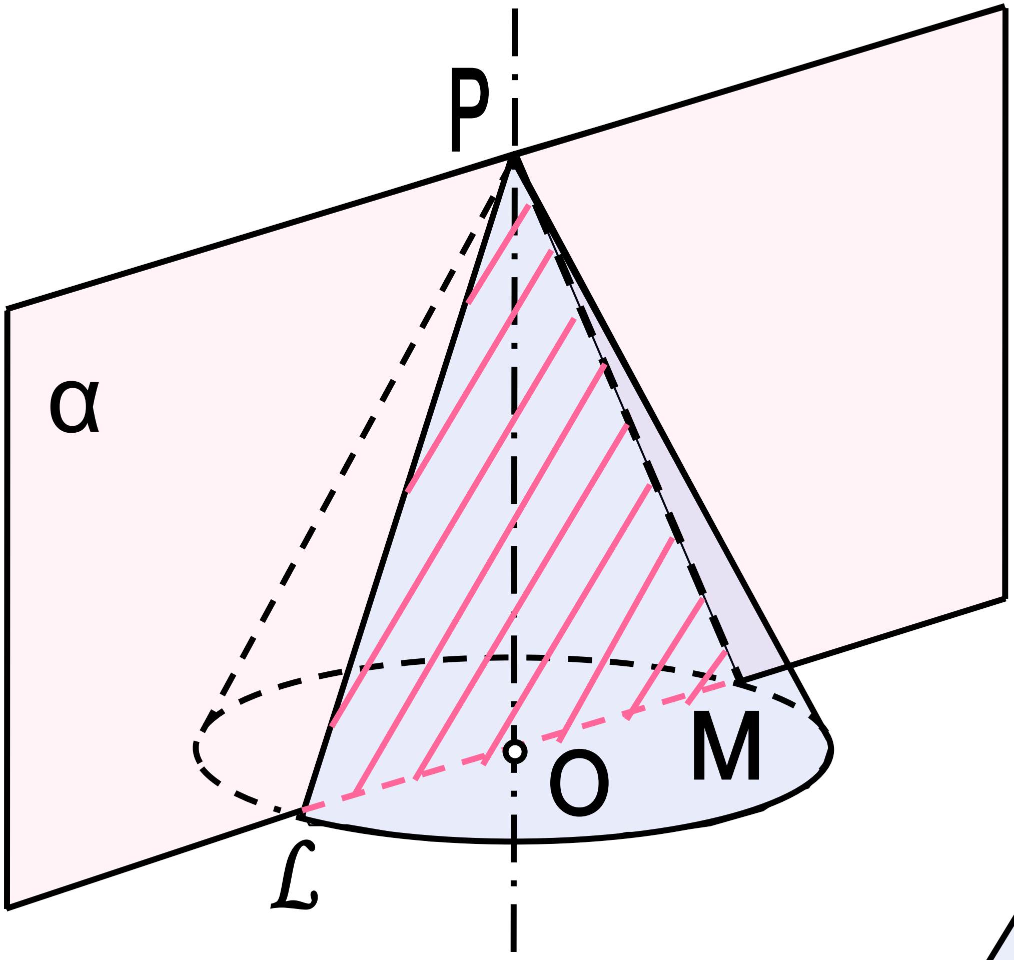
Конус – тело, полученное вращением прямоугольно го треугольника вокруг одного из катетов.

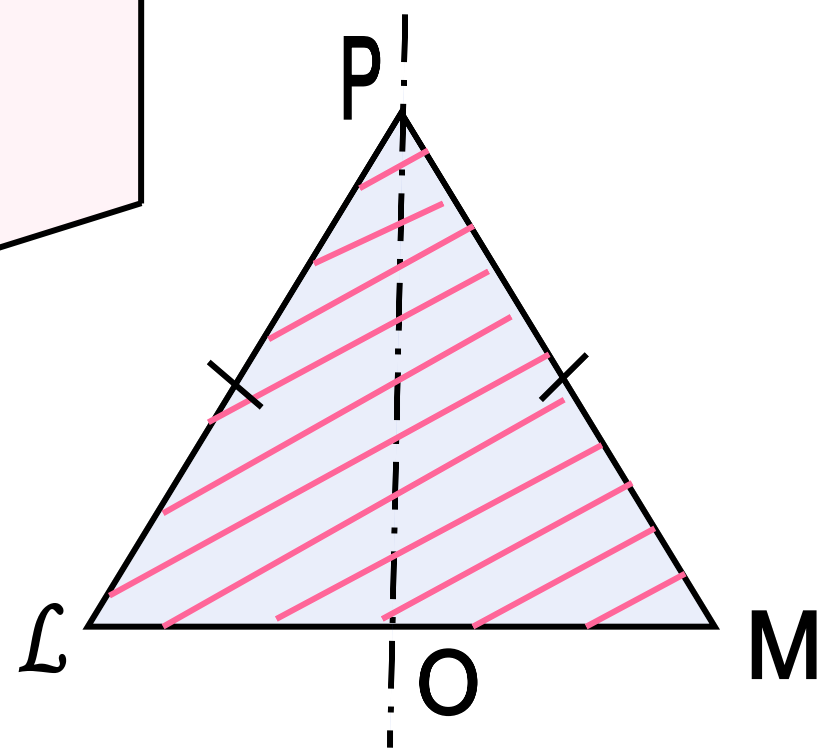

ось конуса
P
вершина
образующие
боковая
поверхность
O
r
B
A
основание конус

Поперечное сечение конуса.

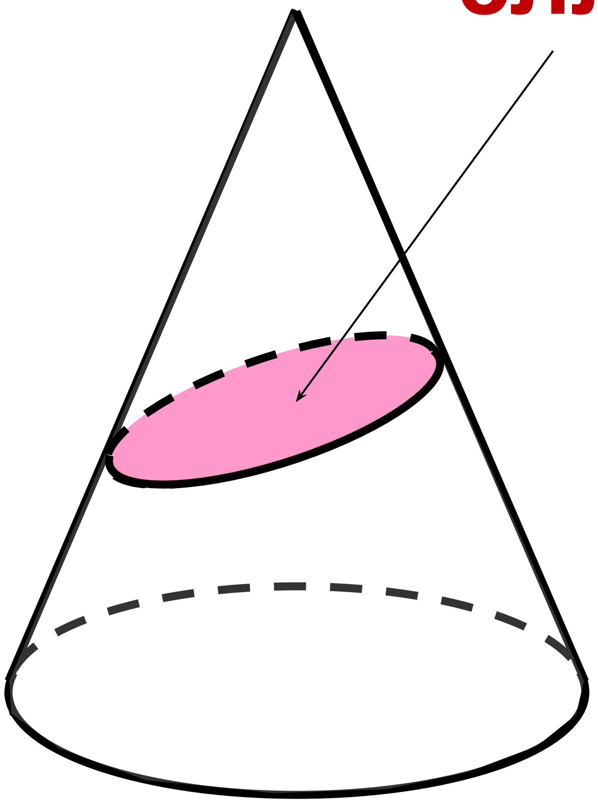


Осевое сечение конуса.

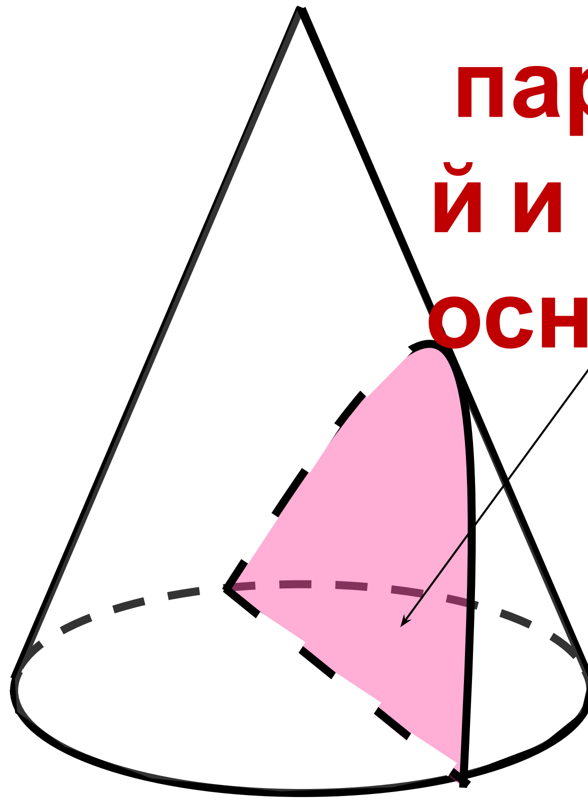


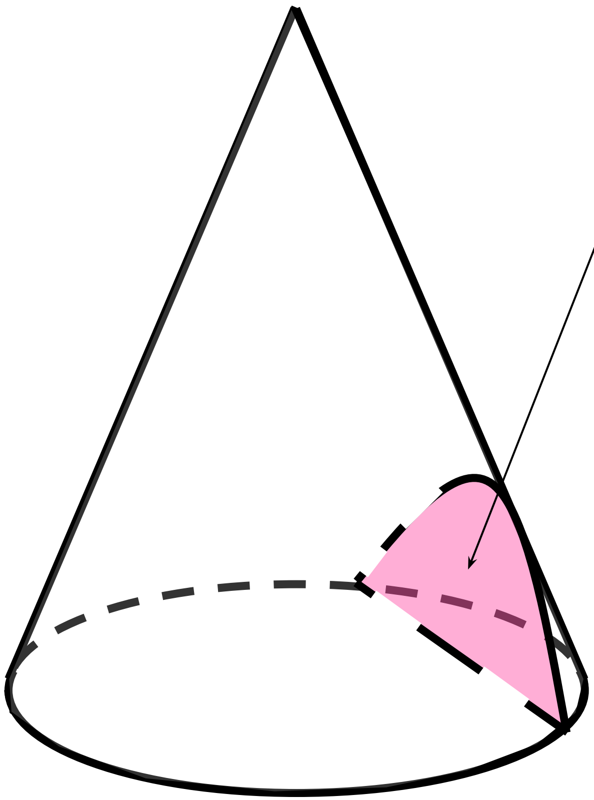


сечение –
эллипс



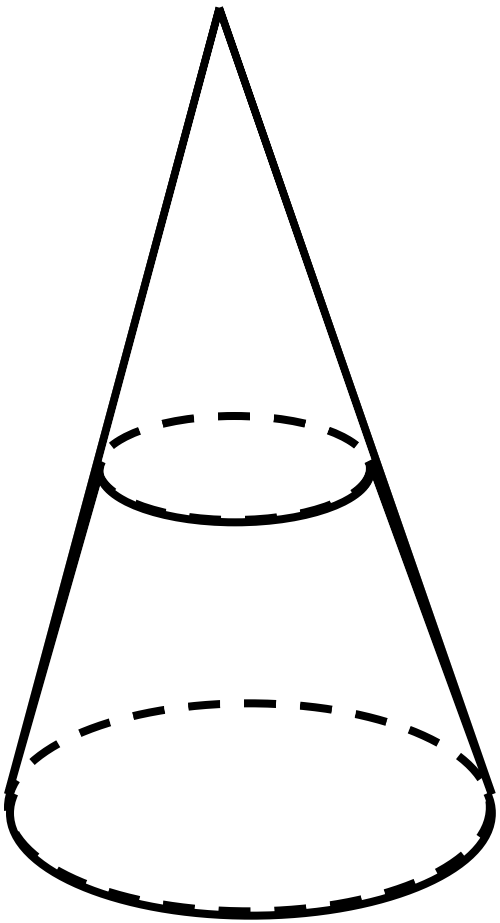
Сечение -
фигура,
ограничен
ная
параболо
й и хордой
основания





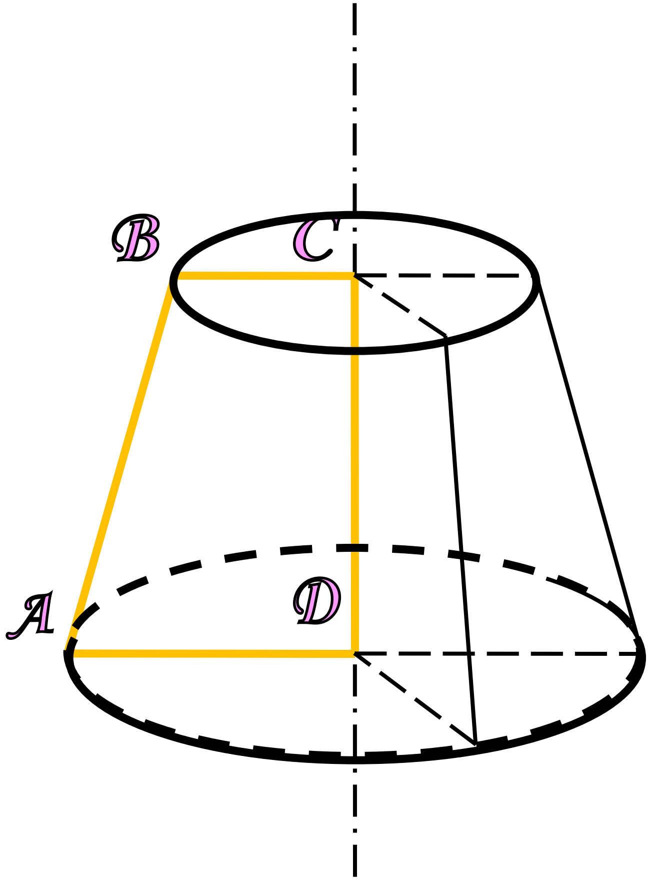
Сечение - фигура, ограниченная гиперболой и хордой основания

Большой трактат о конических сечениях был написан Аполлонием Пергским *(260-170* гг. до н.э*.) –* учеником Евклида *(II* в. до н.э*.)*, который создал великий труд из *15* книг под названием "Начала". Эти книги издаются и по сей день, а в школах Англии по ним учатся.



Возьмем произвольный конус и проведем секущую плоскость, перпендикулярную к его оси.

Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется усеченным конусом.

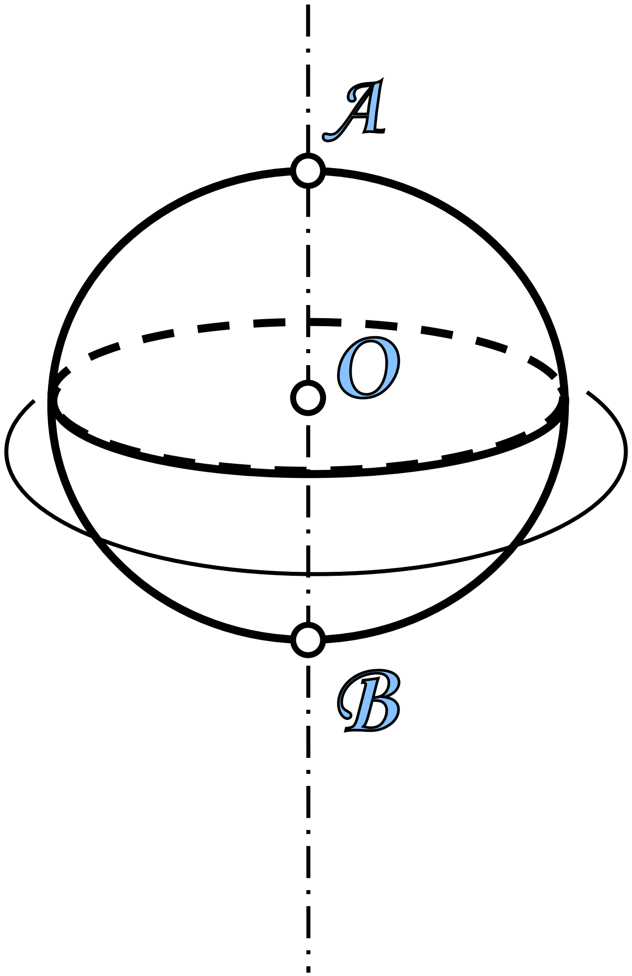


Усеченный конус – тело, полученное вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, содержащей прямой угол.

Сфера и шар.

По-гречески так назывался мяч, с которым играли дети.

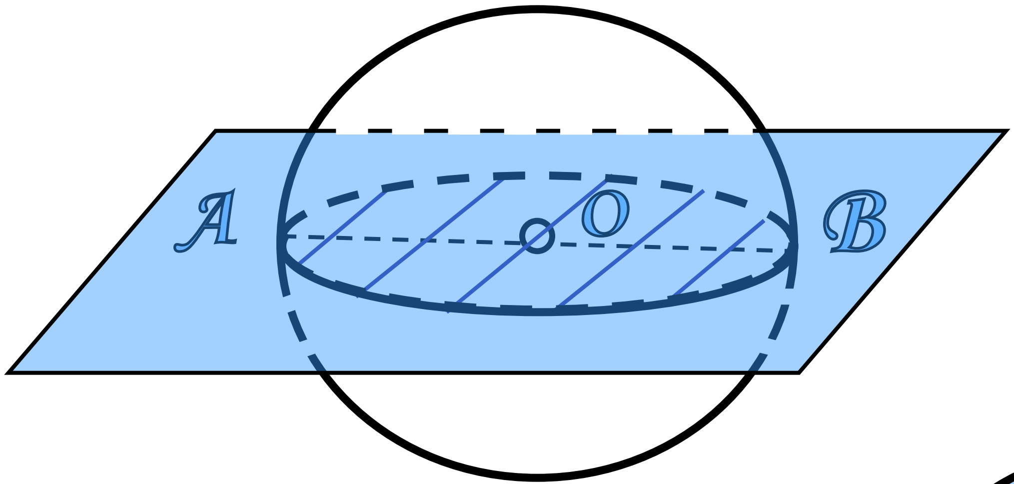
Множество учёных геометров, да и простых людей, интересовались такой фигурой как шар и его «оболочкой», носящей название сфера. Удивительно, но шар является единственным телом, обладающим большей площадью поверхности при объёме, равном объёму других сравниваемых тел, таких как куб, призма или прочие всевозможные многогранники. С шарами мы имеем дело ежедневно. К примеру, почти каждый человек пользуется шариковый ручкой в конец стержня которой вмонтирован

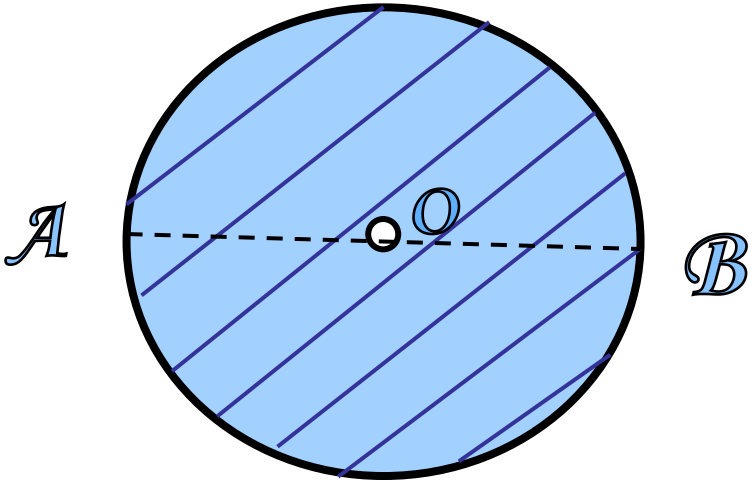


Сфера – тело, полученное вращением окружности вокруг диаметра.

Шар – тело, ограниченное сферой.

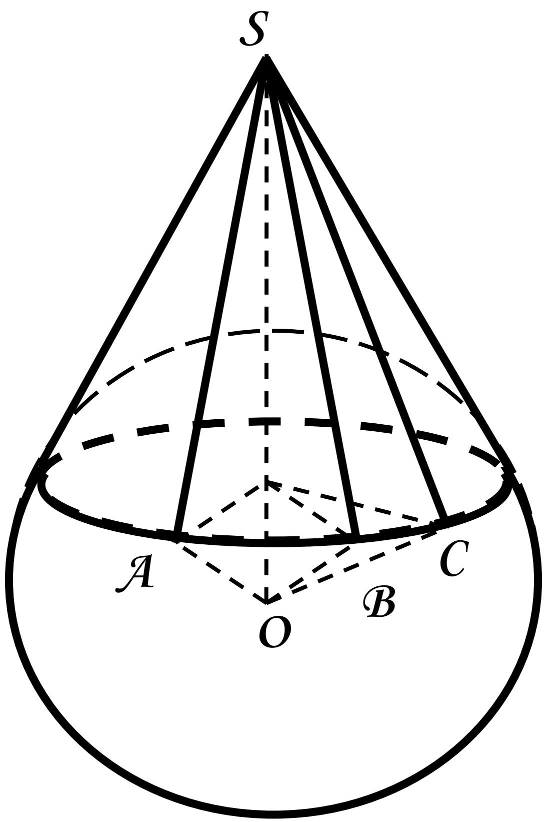
Осевое сечение шара.





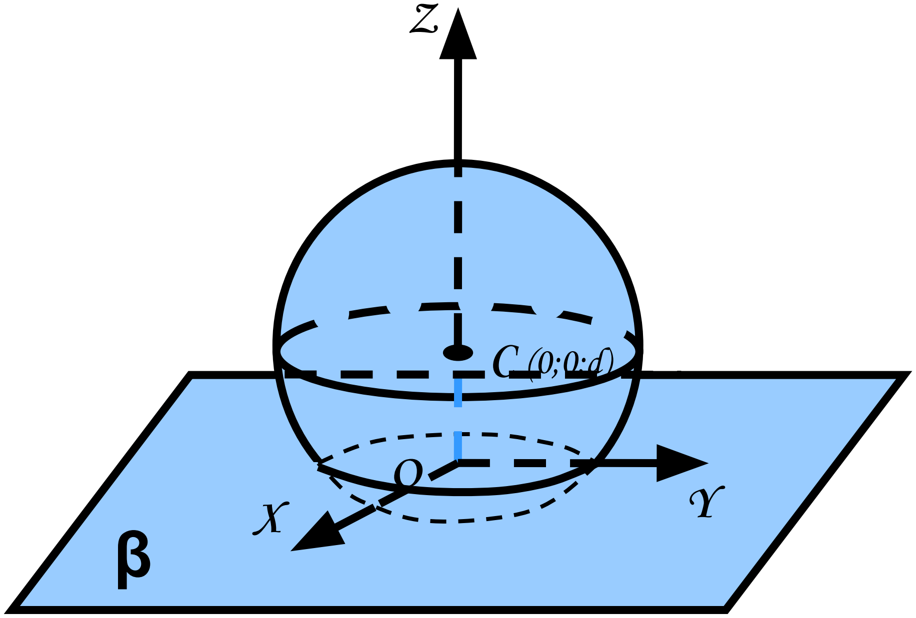
Свойство касательной плоскости к сфере.

Все касательные к сфере, проведенные из одной внешней точки, равны между собой.

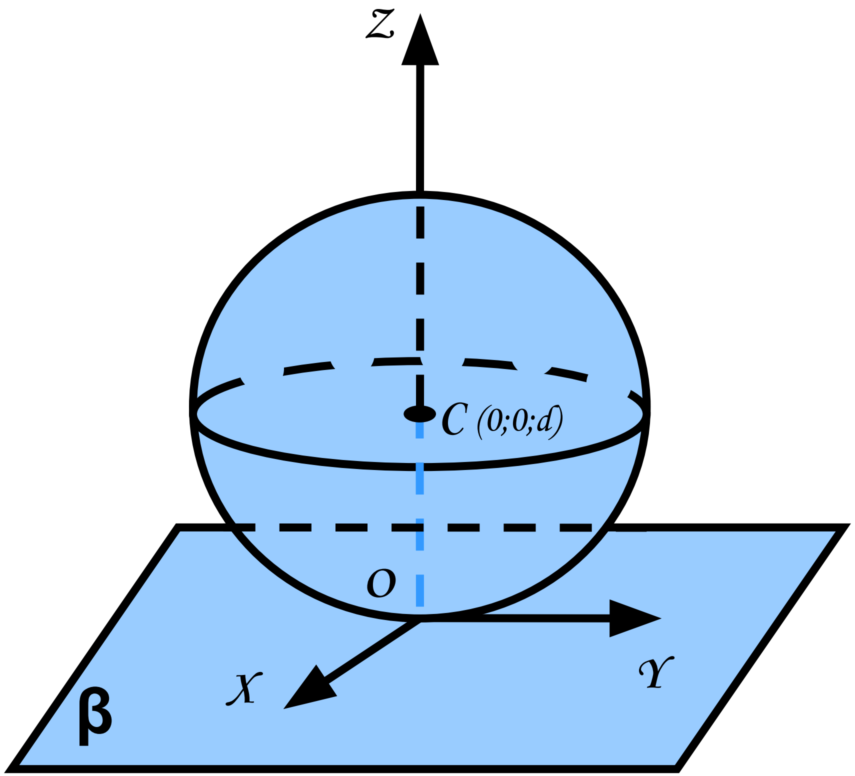


Проведем из внешней точки S касательные к сфере SA, SB, SC. Точки их прикосновения A, B, C соединим с центром сферы O. Прямоугольные треугольники AOS, BOS, COS имеют общую гипотенузу SO и равные катеты $OA = OB = OC$, а потому они равны между

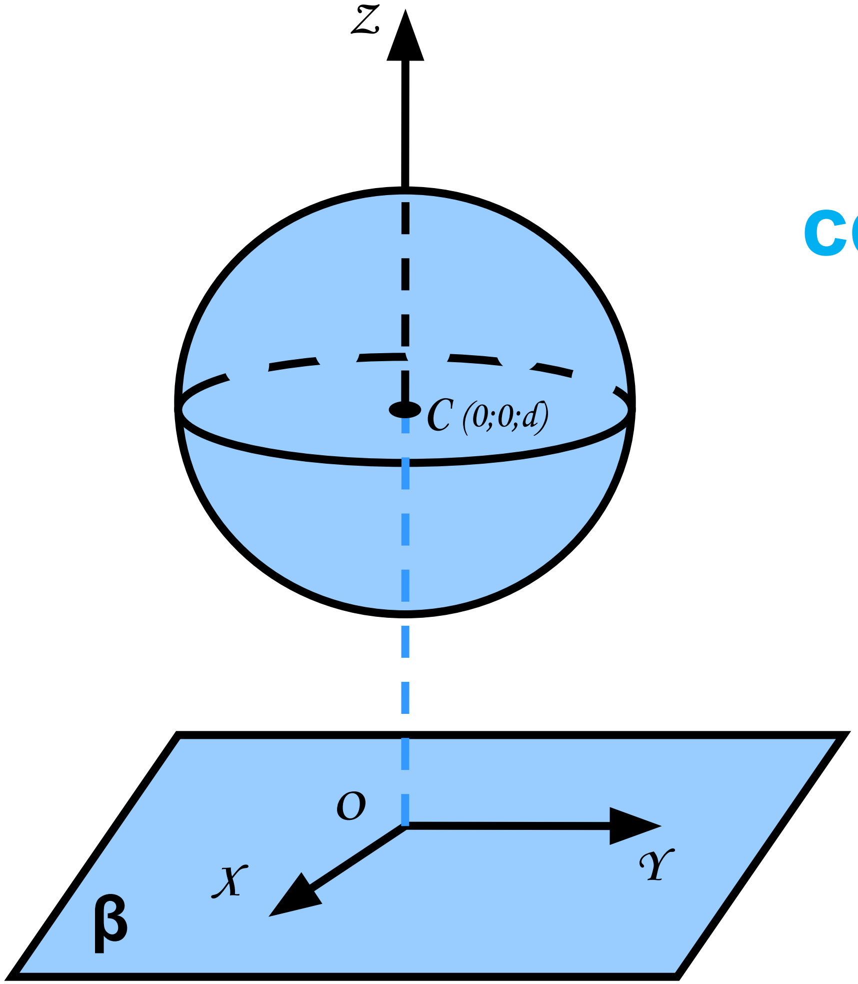
Взаимное расположение сферы и шара.



1) **Если $d<R$, то плоскость β и сфера пересекаются по окружности. Сечение шара плоскостью есть круг. Если секущая плоскость проходит через центр шара, то в сечении получается круг радиуса R. Такой**



2) **Если $d = R$, то сфера и плоскость именуют только одну общую точку. В этом случае а называют касательной плоскостью к сфере,** *а O -* **точкой соприкосновения плоскости и шара.**



3) **Если** $d>R$, **то** **сфера и плоскость не имеют общих точек.**

Науки, связанные со сферами.

- Сферическая тригонометрия - область математики в которой изучаются зависимости между сторонами и углами сферических треугольников (т. е. треугольников на поверхности сферы), образующихся при пересечении трёх больших кругов. Сферическая тригонометрия тесно связана со сферической астрономией.
- Сферические функции (шаровые) – специальные функции, применяемые

- **Сферическая астрономия** – раздел астрономии, разрабатывающий математические методы решения задач, связанных с изучением видимого расположения и движения космических тел (звезд, Солнца, планет, искусственных спутников Земли и др.) на небесной сфере, в частности разработка теоретических основ счета времени.

- **Сферическая геометрия** – область математики, в которой изучаются геометрические фигуры на сфере

Архимед доказал, что любые две плоскости, параллельные основаниям описанного около сферы цилиндра (рис.1), высекают на сфере и на цилиндре «пояски» одинаковой площади.

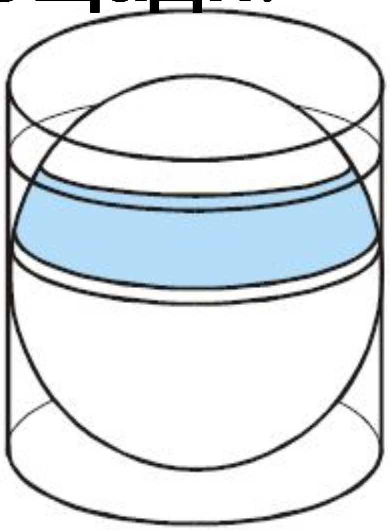


Рис. 1

(В частности, площадь всей сферы равна площади боковой поверхности цилиндра)

Трехгранный угол с вершиной в центре сферы высекает на ней сферический треугольник (рис.2). Стороны сферического треугольника – дуги больших кругов.

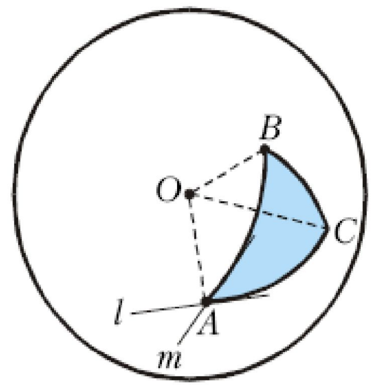
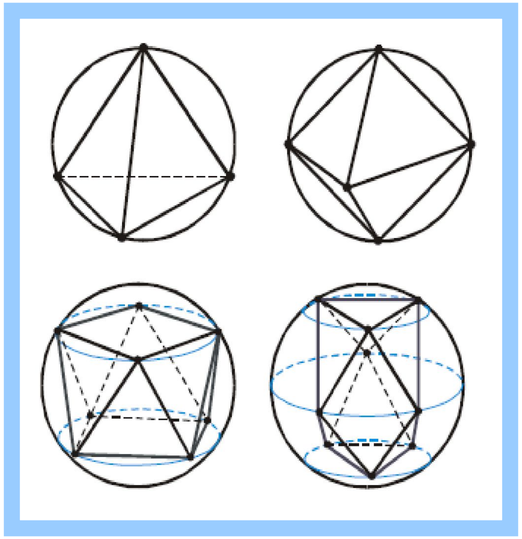


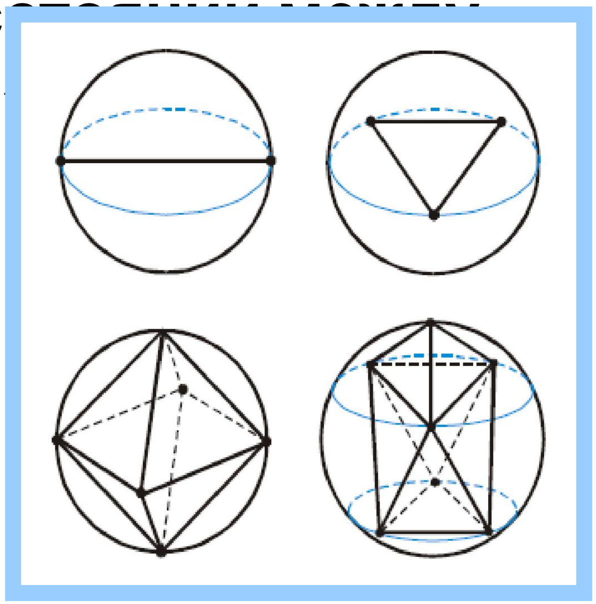
Рис. 2

Поскольку касательные *m* и *l* к сфере перпендикулярны радиусу *OA*, то величины *A*, *B* и *C* углов сферического треугольника равны величинам



Как расположить на сфере n точек, чтобы наименьшее из всех расстояний между ними было как можно больше? Эта задача не решена до сих пор. Оптимальные расположения при $n=2, 3, \ldots, 9$ показаны на рисунках, где линиями соединены те точки, расстояния между которыми равны наименьшему из рас… рассматриваемыми …

При $n > 9$ решение известно для $n=12$ (вершины икосаэдра) и $n=24$ (вершины полуправильного 38-гранника (полуправильный многоугольник- многоугольник, получаемый при проектировании правильного многоугольника на какую-либо плоскость), ограниченного 32 равносторонними треугольниками и 6 квадратами; в



Можно ли расположить 13 одинаковых шаров, чтобы все они касались одного шара того же радиуса? Джеймс Грегори (1638-1675) надеялся, что можно. Исаак Ньютон (1643-1727) утверждал, что нельзя. Точку в их споре поставил в 1953 году К. Шютте и Б. Л. Ван-дер-Варден. Прав оказался Ньютон.