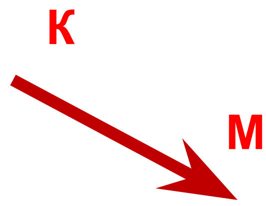
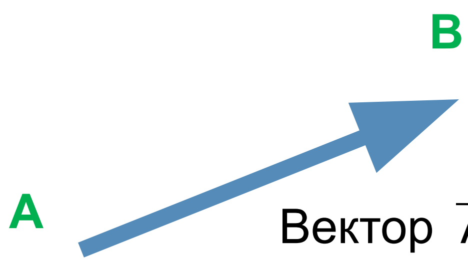
Понятие вектора

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая - концом, называется **направленным отрезком** или **вектором**



Вектор $\overrightarrow{KM}$



Вектор $\overrightarrow{AB}$
А – начало вектора
В – конец вектора

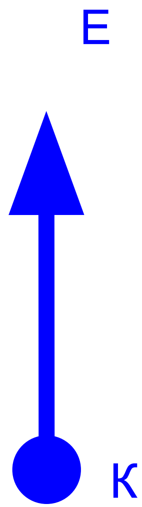
Любая точка плоскости является нулевым вектором

$\overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{MM}$ $\overrightarrow{AA}$

Начало нулевого вектора совпадает с его концом

Длина вектора



Длиной вектора или модулем ненулевого вектора называется длина отрезка

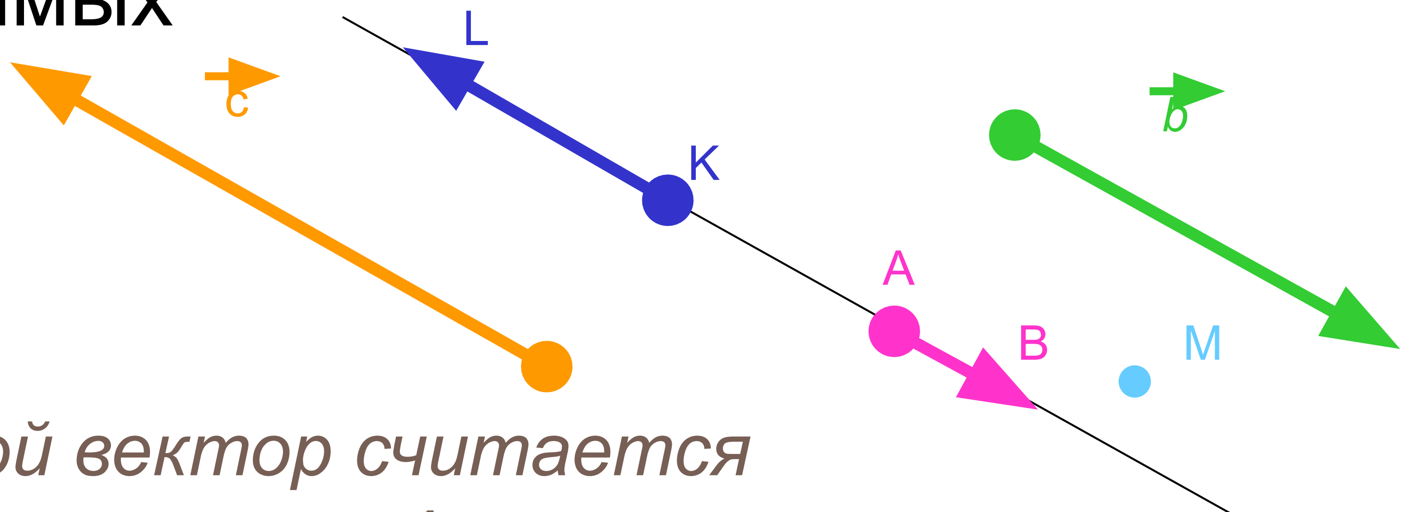
$KE = |\overrightarrow{KE}|$ *длина вектора* $\overrightarrow{KE}$

вектор $\overrightarrow{MM}$ - нулевой вектор

$|\overrightarrow{MM}| = 0$

Коллинеарные векторы

Ненулевые векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых

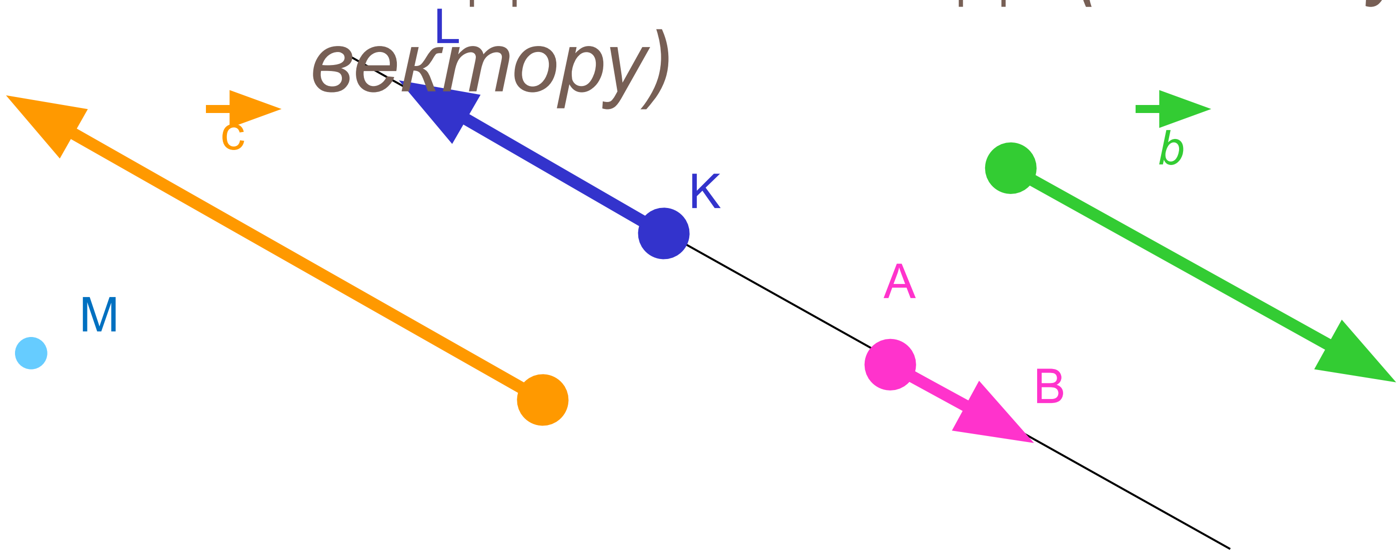


Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору

Сонаправленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие одинаковое направление, называются ***сонаправленными*** векторами

$\vec{c} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $\overrightarrow{MM} \uparrow\uparrow$ *(любому вектору)*

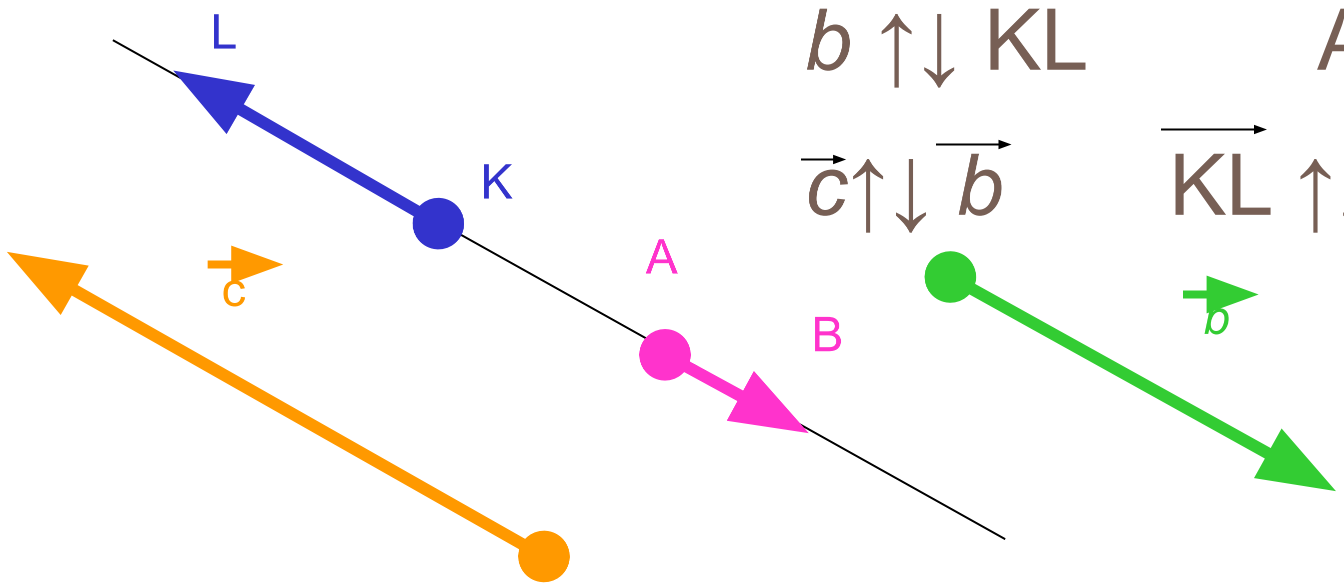


Противоположно направленные векторы

Коллинеарные векторы, имеющие противоположное направление, называются ***противоположно направленными*** векторами

$\vec{b} \uparrow\downarrow \overrightarrow{KL}$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \vec{c}$

$\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{b}$ $\overrightarrow{KL} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$



Равенство векторов

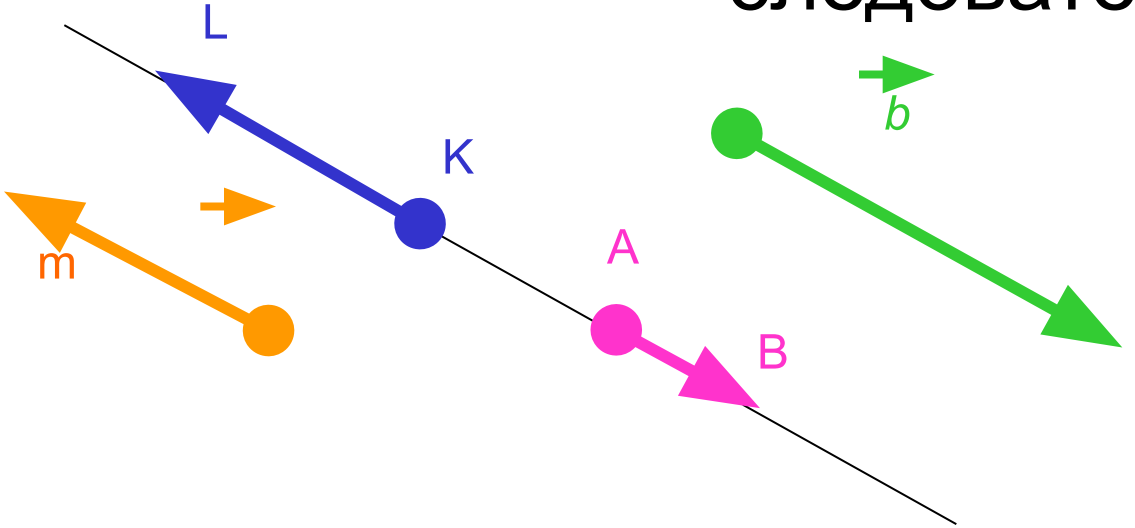
Векторы называются ***равными***, если:

1) они сонаправлены ;

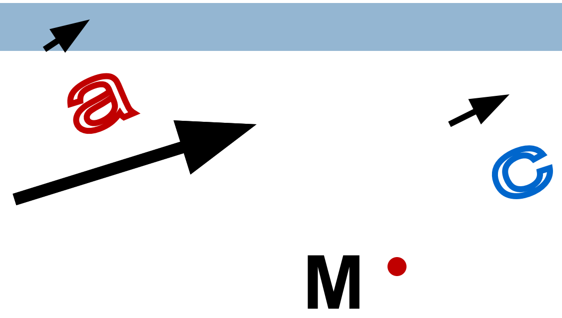
2) их длины равны.

$\vec{m} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}, \quad |\vec{m}| = |\overrightarrow{KL}|$

следовательно $\vec{m} = \overrightarrow{KL}$

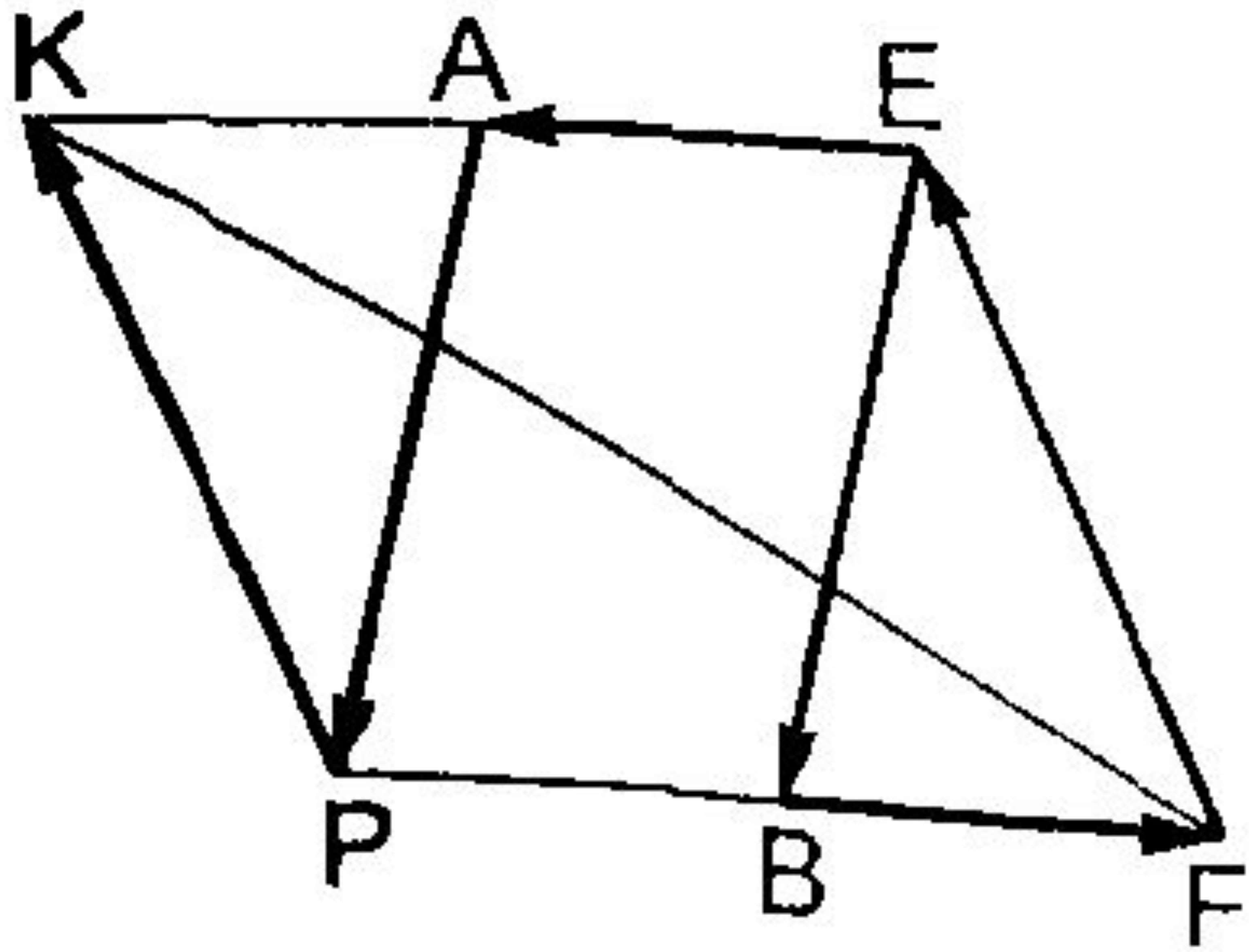


ОТКЛАДЫВАНИЕ ВЕКТОРА ОТ ДАННОЙ ТОЧКИ



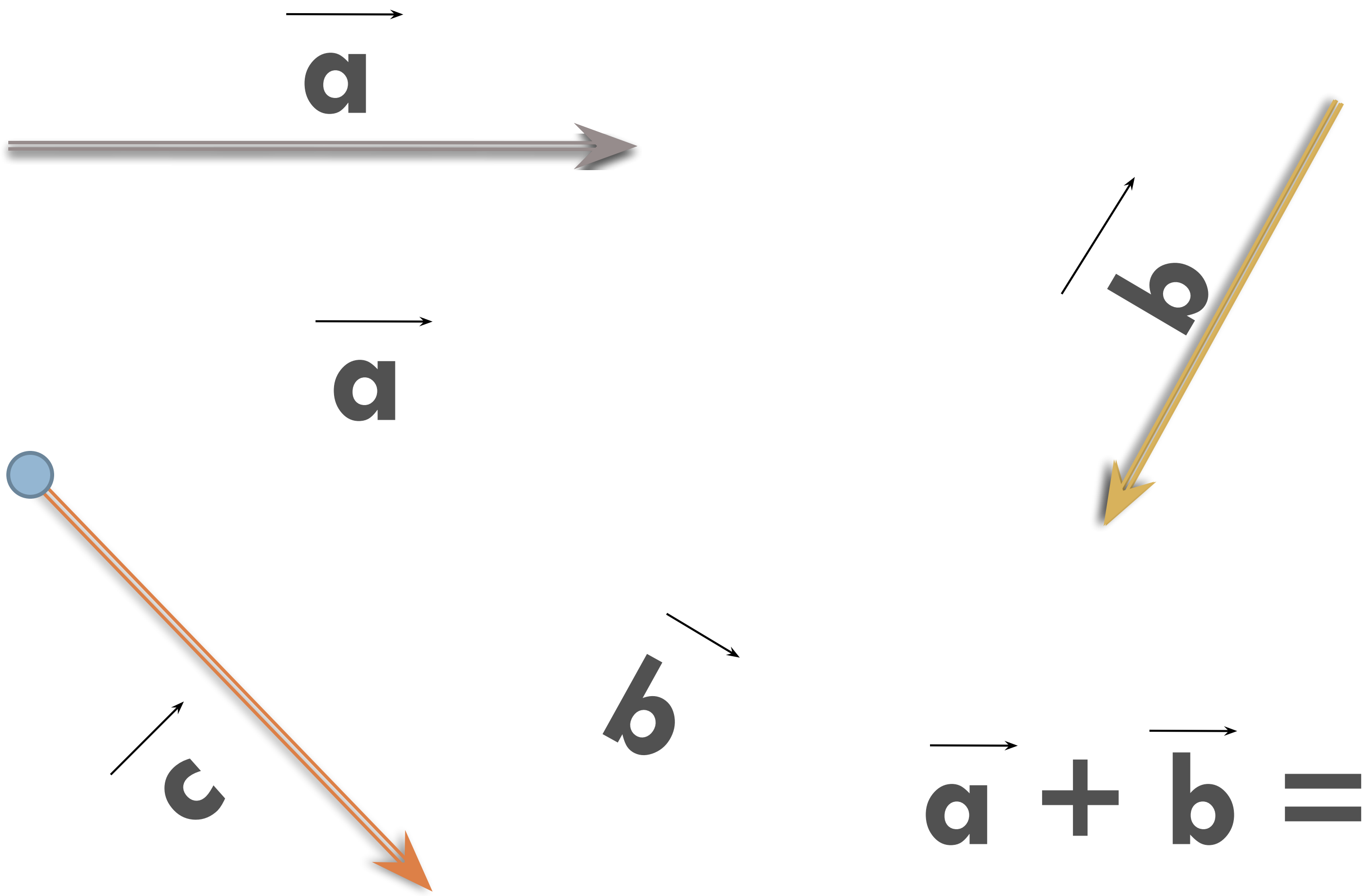
От любой точки М
можно отложить вектор,
равный данному
и притом только один

$\vec{a} = \vec{c}$, так как $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ и $|\vec{a}| = |\vec{c}|$


K
A
E
P
B
F

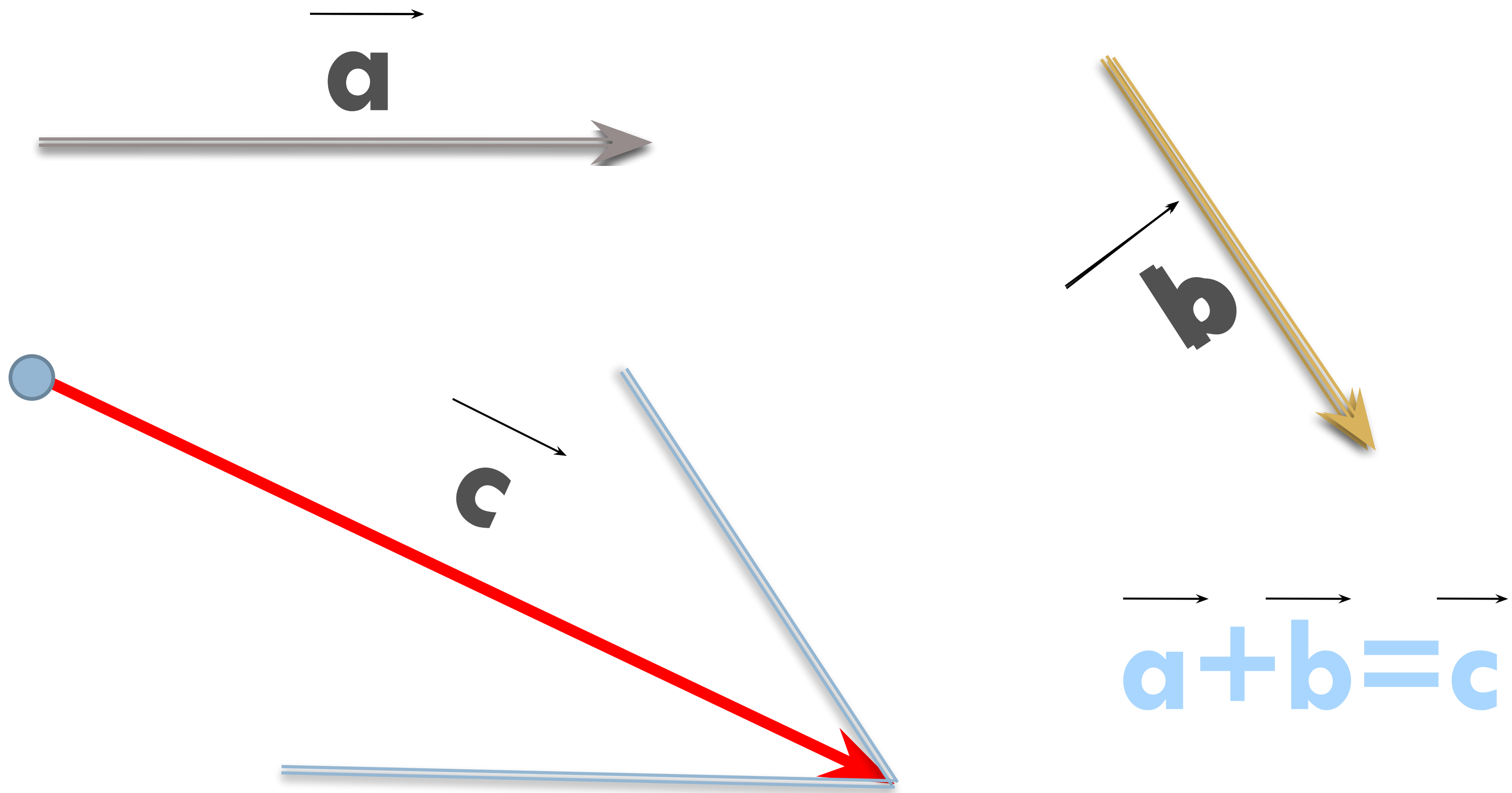
Сложение векторов

Сложение векторов
по правилу **треугольника**



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

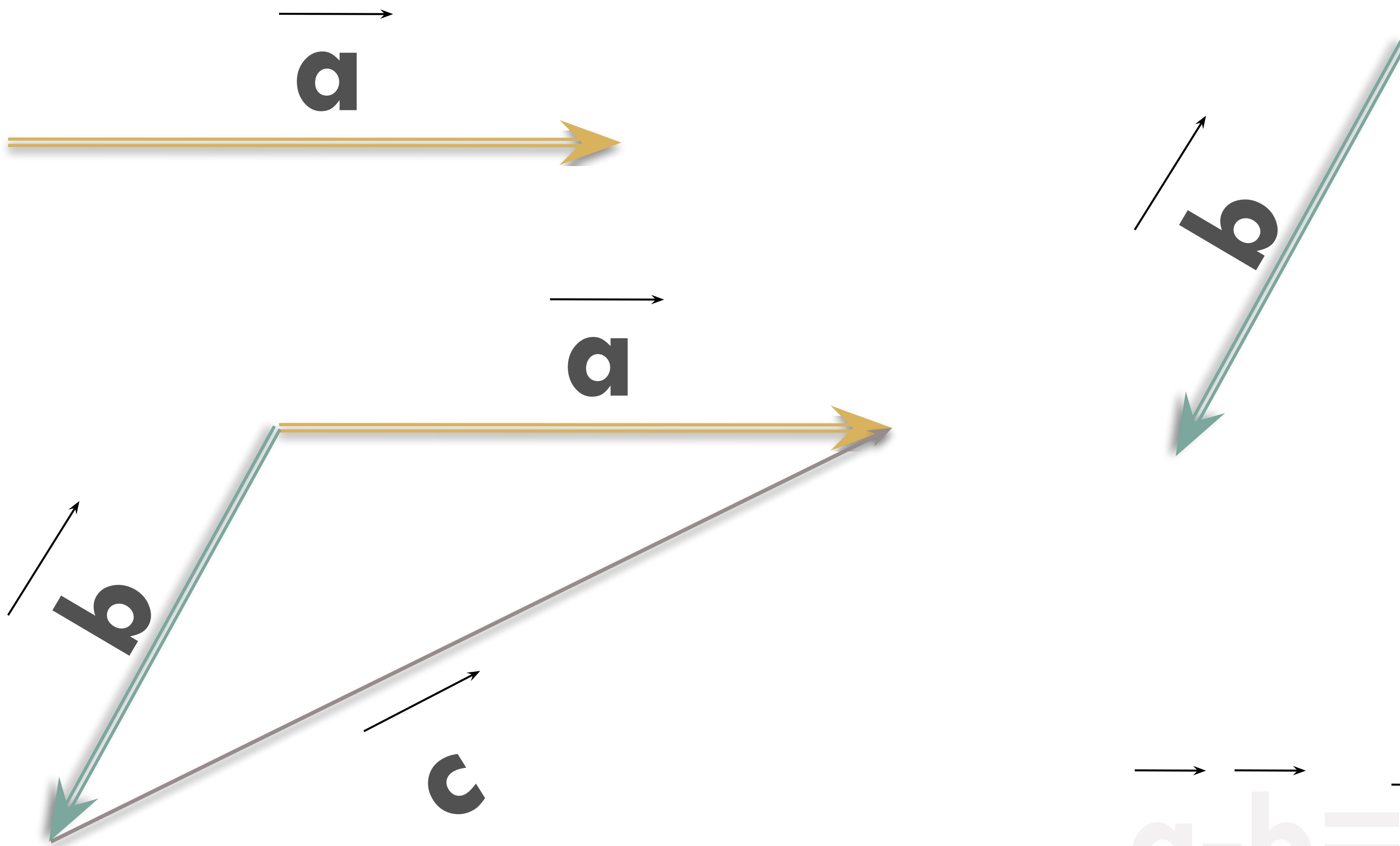
Сложение векторов по правилу **параллелограмма**



Суммой векторов $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ и $\vec{\text{в}}\{x_2;y_2\}$ называется вектор $\vec{c}\{x_1+x_2;y_1+y_2\}$, т. е.

$$\vec{a}\{x_1;y_1\} + \vec{\text{в}}\{x_2;y_2\} = \vec{c}\{x_1+x_2;y_1+y_2\}$$

Вычитание векторов



$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$

Разностью векторов $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ и $\vec{в}\{x_2;y_2\}$ называется вектор $\vec{c}\{x_1-x_2;y_1-y_2\}$, т. е.

$$\vec{a}\{x_1;y_1\} - \vec{в}\{x_2;y_2\} = \vec{c}\{x_1-x_2;y_1-y_2\}$$

Формулы в координатах.

1. **Координаты середины отрезка**

$B(x_2;y_2)$

$O(x;y)$

$A(x_1;y_1)$

$$X=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad У=\frac{y_1+y_2}{2}$$

2.Расстояние между двумя точками

$A(x_1;y_1)$

$B(x_2;y_2)$

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

3.Вычисление длины вектора

$\vec{a}\{x;y\}$

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Умножение вектора на число.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{в}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k<0$.

1. *Произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор;*
2. *Для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.*

Свойства:

Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ справедливы равенства

1. $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$ (сочетательный закон)

2. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ (первый распределительный закон)

3. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ (второй распределительный закон)

Угол между векторами

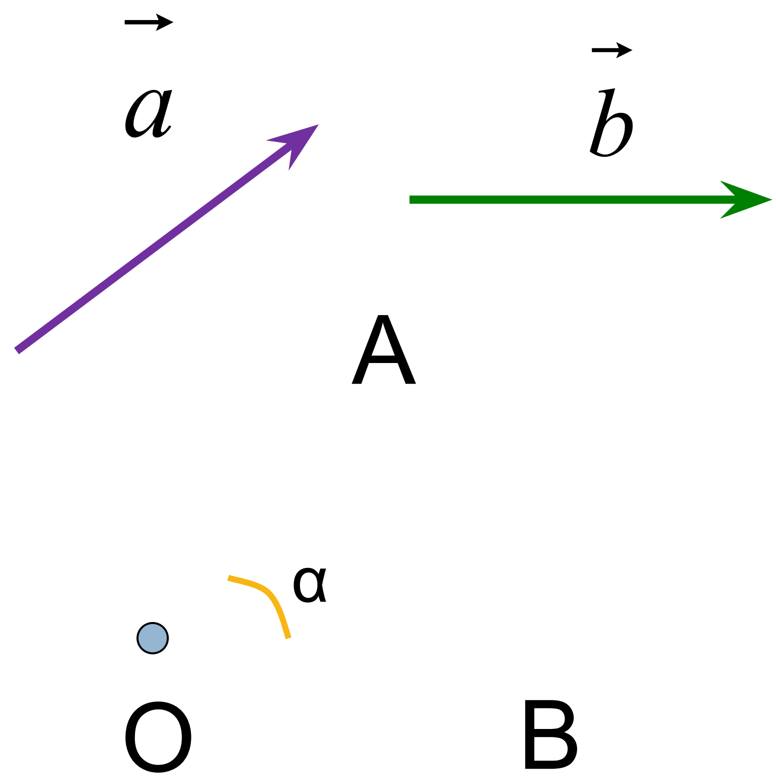
$\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными

O –произвольная точка

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

$$\angle AOB = \boldsymbol{\alpha}$$

$$\widehat{\vec{a} \quad \vec{b}} = \boldsymbol{\alpha}$$



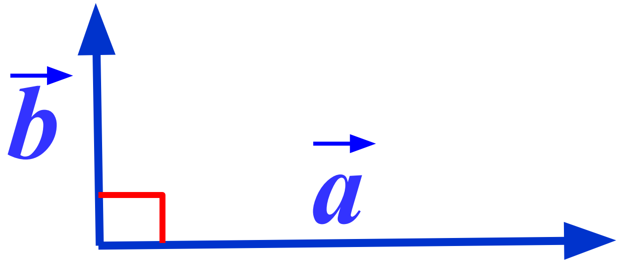
Определение

<u>Скалярным произведением</u> двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число!

Частный случай №1



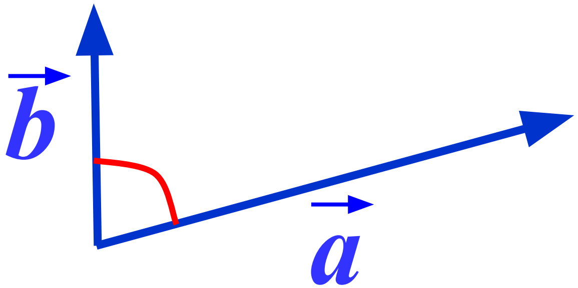
$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^0$

$= 0$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

Частный случай №2



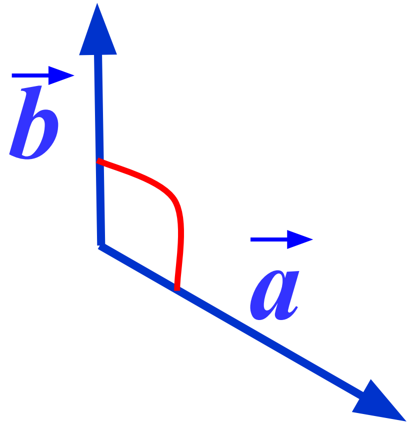
$\widehat{\vec a\,\vec b} < 90^0$

> 0

$\vec a \cdot \vec b = |\vec a| \cdot |\vec b| \cos \alpha > 0$

$\vec a \cdot \vec b > 0 \Leftrightarrow \widehat{\vec a\,\vec b} < 90^0$

Частный случай №3

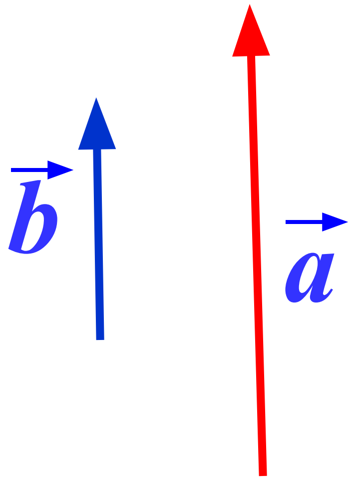


$$\widehat{\vec a\,\vec b} > 90^0$$

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a| \cdot |\vec b| \cos\alpha < 0$$

$$\vec a \cdot \vec b < 0 \Leftrightarrow \widehat{\vec a\,\vec b} > 90^0$$

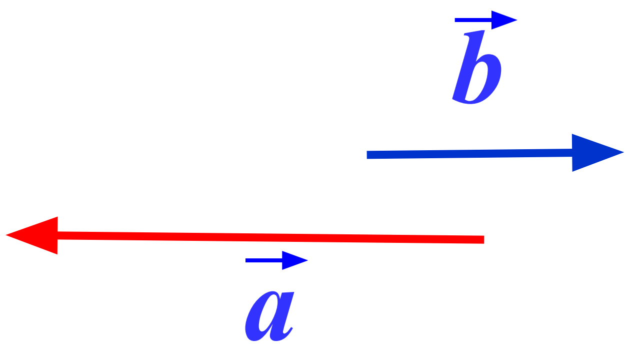
Частный случай №4



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^0$$

1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$



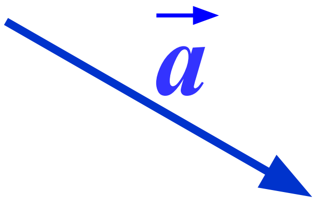
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180^0$$

-1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 180^0 = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

Частный случай №5

$$\widehat{\vec{a}\ \vec{a}} = 0^0$$



$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\overset{1}{\cos 0^0} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(3, 2)$ имеет координаты $(-6, 6)$. Найдите абсциссу точки B.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(9, 2)$ имеет координаты $(6, 2)$. Найдите ординату точки B.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке $B(9, 1)$ имеет координаты $(5, 3)$. Найдите ординату точки A.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке $B(8, 1)$ имеет координаты $(5, 4)$. Найдите абсциссу точки A.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке $B(8, -3)$ имеет координаты $(4, -11)$. Найдите сумму координат точки A.

Найдите длину вектора $\vec{a}(-12, -9)$.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 4 и 3. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 3 и 4. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 5 и 12. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 4 и 21. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

В прямоугольнике $ABCD$ известны стороны $AB = 17$ и $AD = 34$. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

В ромбе $ABCD$ известны диагонали $AC = 33$ и $BD = 58$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

В ромбе $ABCD$ известны диагонали $AC = 33$ и $BD = 58$. Найдите длину вектора $\overline{AB} - \overline{AD}$.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 24 и 10. Найдите длину вектора $\overline{AO} + \overline{BO}$.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 14 и 48. Найдите длину вектора $\overline{AO} - \overline{BO}$.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 4 и 19. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AO}$ и $\overline{BO}$.

Стороны правильного треугольника ABC равны $40\sqrt{3}$. Найдите длину вектора $\overline{AB} + \overline{AC}$.

Стороны правильного треугольника ABC равны 28. Найдите длину вектора $\overline{AB} - \overline{AC}$.

Стороны правильного треугольника ABC равны 40. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.