

Тема урока:

Преобразование фигур. Обратное преобразование.

Определение и свойства гомотетии.



**Учитель математики
NIS ФМН г. Актобе
Елешова Газиза
Едиловна**

На этом уроке вы узнаете, что такое гомотетия, познакомитесь:

- с терминами гомотетии;
- со свойствами гомотетии;
- научитесь применять свойства гомотетии при решении задач.



В ходе урока вам понадобится знание терминологии на трёх языках

•



Задание

**Сейчас откроется таблица с терминами
по теме «Гомотетия».**

Постарайтесь запомнить их за 30 секунд.

Через 30 секунд таблица закроется.



Терминология на русском, казахском и английском языках

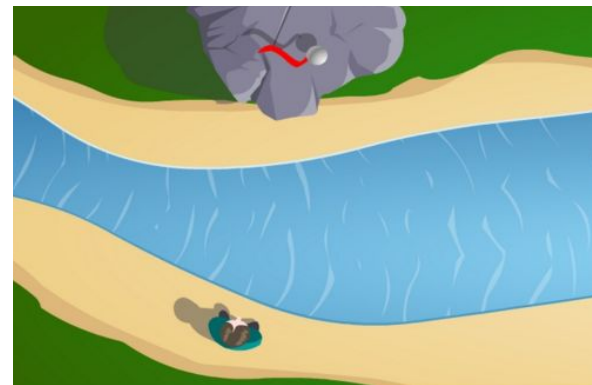
Русский	Қазак	English
Подобие	Ұқсастық	Similar
Гомотетия	Гомотетия	Enlargement
Коэффициент подобия	Ұқсастық коэффициенті	Scale factor
Центр	Центр	Centre
Образ	Бейне	Image
Фигура	Фигура	Shape

«Восстановите невидимое»

Запишите термины, которые вы запомнили

Русский	Қазақ тілінде	English
Подобие		
Гомотетия		
Коэффициент подобия		
Центр		
Образ		
Фигура		

Даурен стоит на набережной реки Сазды. На противоположном берегу идет Олжас. Даурен отчетливо видит его перемещение. Может ли он, стоя на одном месте, определить, хотя бы приблизительно, расстояние от себя до Олжаса? Условие: у Даурена нет никаких инструментов.

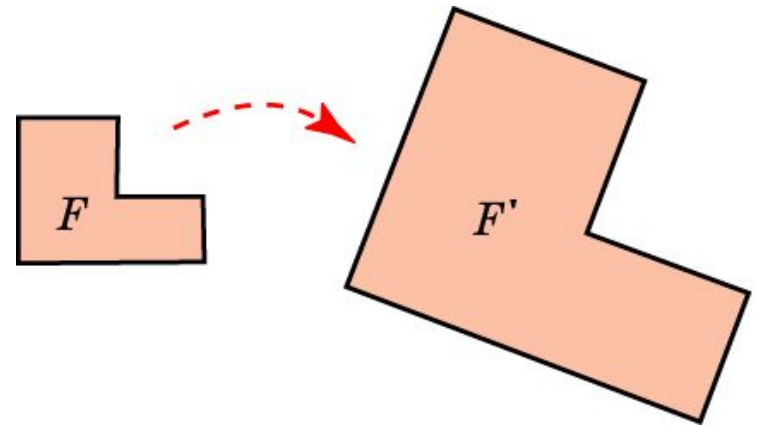


Гомотетия – одно из важнейших преобразований подобия. Это преобразование, в котором получаются подобные фигуры (фигуры, у которых соответствующие углы равны и стороны пропорциональны).

Подобие фигур

Преобразование плоскости, при котором расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, называется **подобием**. Само это число называется **коэффициентом подобия**.

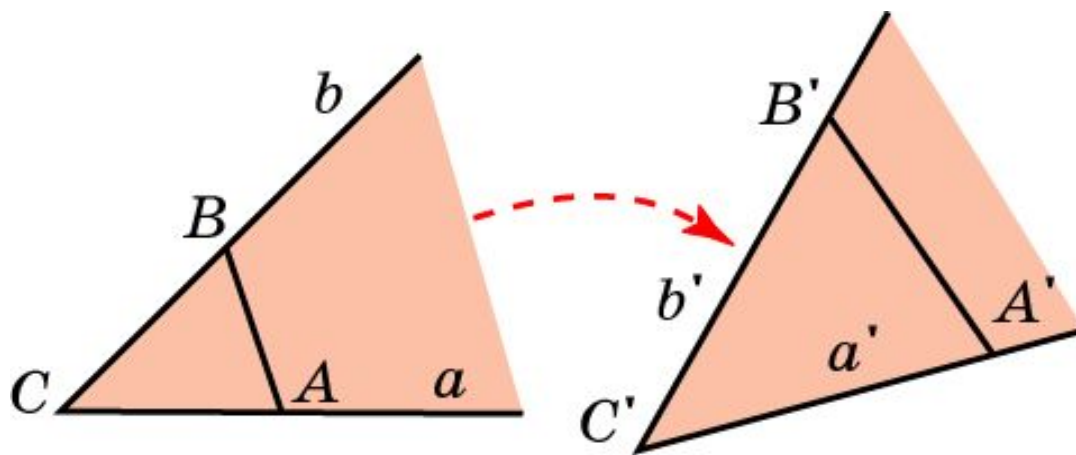
Две фигуры F и F' называются **подобными**, если одна из них переводится в другую подобием.



Свойства подобия

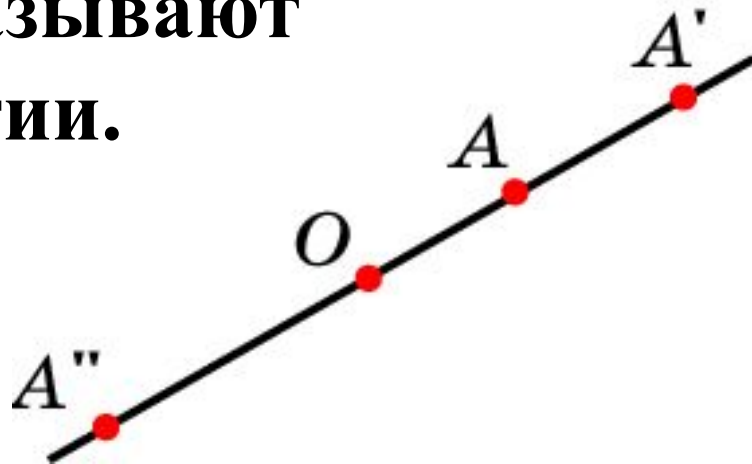
Свойство 1. Подобие переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Свойство 2. Подобие сохраняет величины углов.



Гомотетия

Преобразование плоскости или пространства, при котором фиксированная точка O остается неподвижной и каждая точка A переходит в такую точку A' , что $OA' = k \cdot OA$, где k - заданное число, $k \neq 0$, называется **гомотетией**. Точку O называют центром гомотетии, k называют коэффициентом гомотетии.



**В отличие от гомотетии,
геометрические преобразования
— центральная симметрия, осевая
симметрия, поворот, параллельный
перенос являются движениями, т.к. в
них фигура отображается в фигуру,
равную данной.**

Если фигура F преобразуется в результате гомотетии в фигуру F_1 , то фигуры F и F_1 называются **ГОМОТЕТИЧНЫМИ.**

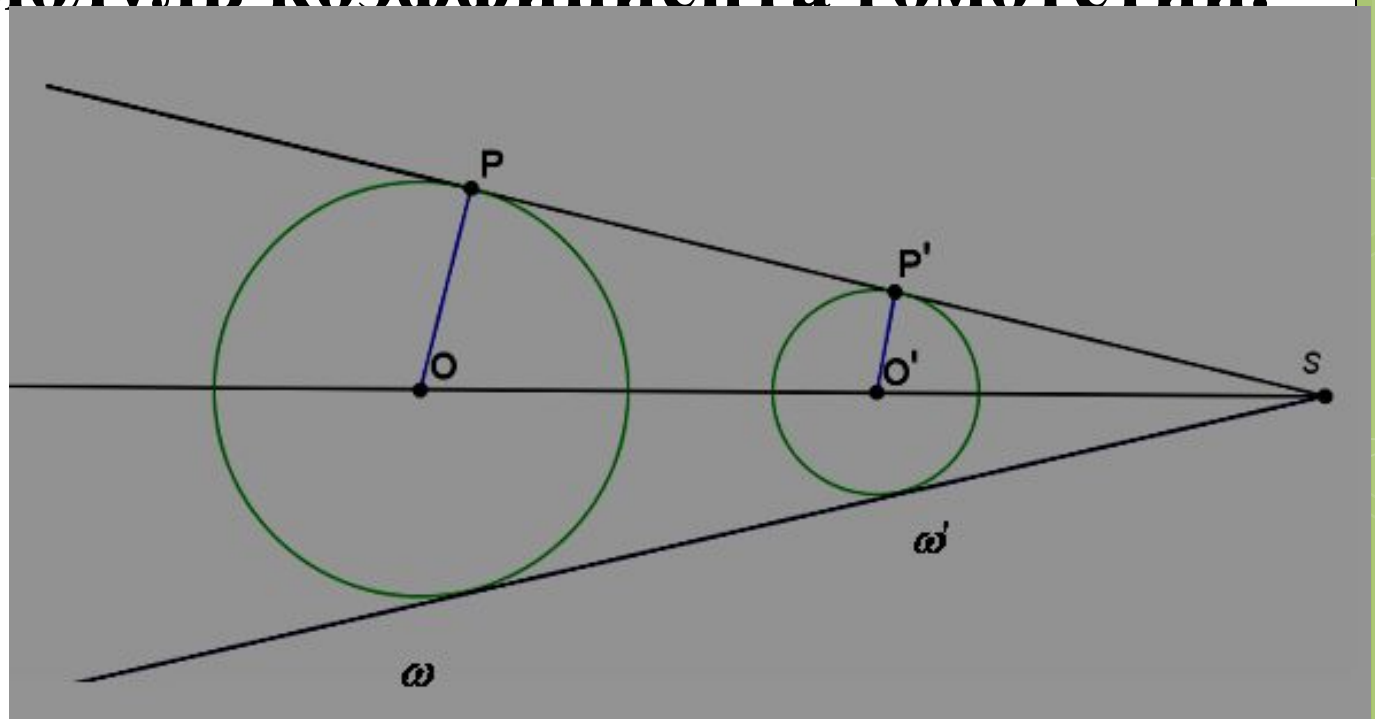
Свойства гомотетии с коэффициентом k .

- **Прямая** переходит в **параллельную** прямую.
- **Угол** переходит в **равный** ему угол.
- **Отрезок** переходит в **отрезок**.

Длины всех отрезков изменяются в k раз.

Гомотетичные окружности

Всякая гомотетия отображает окружность на окружность, так как при гомотетии все расстояния умножаются на одно и то же число – модуль коэффициента гомотетии.

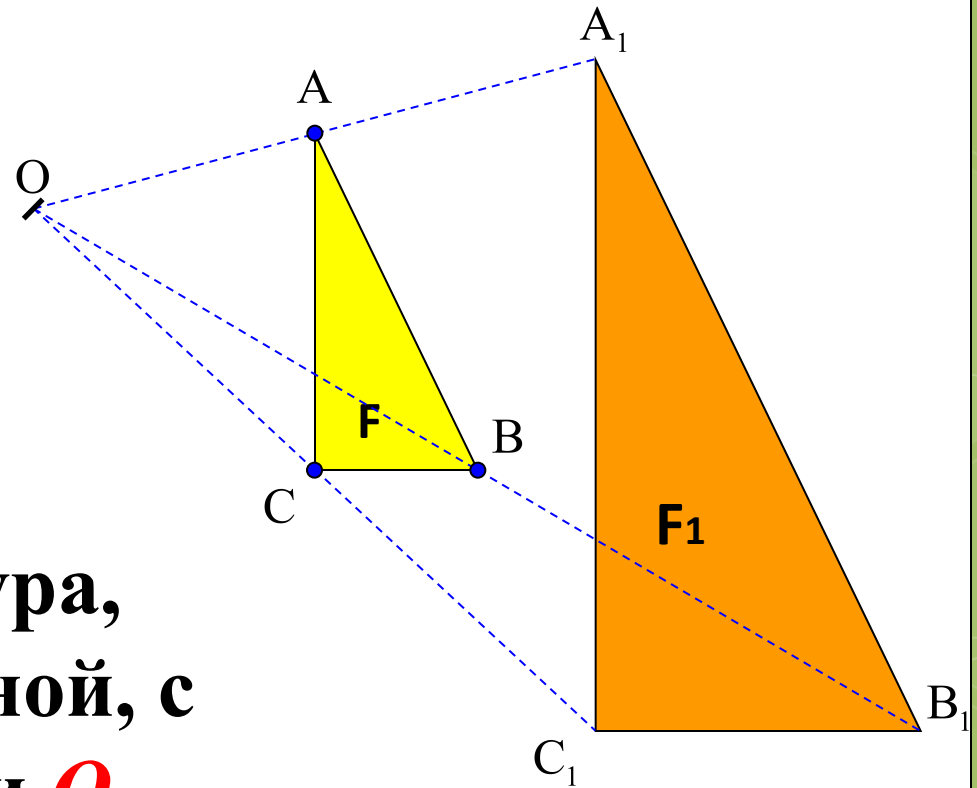


**Чтобы гомотетия была определена,
должен быть задан центр гомотетии и
коэффициент.**

Это можно записать так:

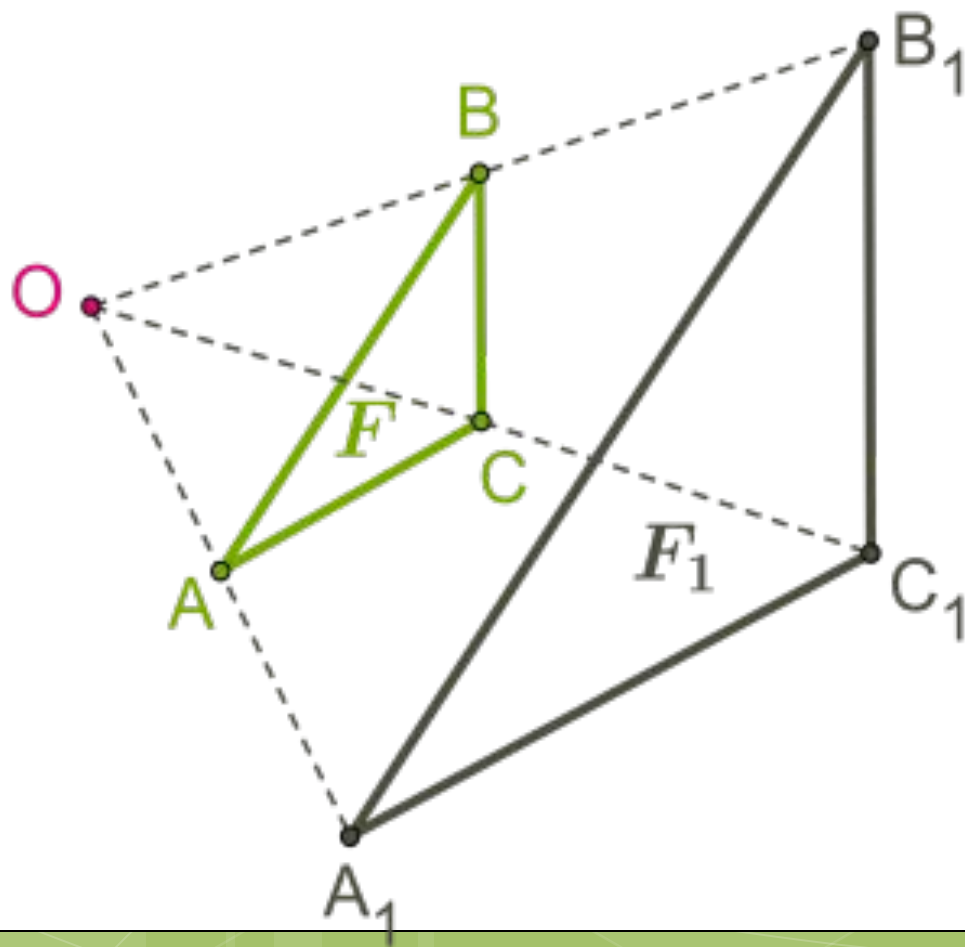
гомотетия $(O;k)$.

Пусть F – данная фигура, O – центр гомотетии. Проведем через точку A фигуры F луч OA и отложим на нем отрезок OA_1 , равный kOA .

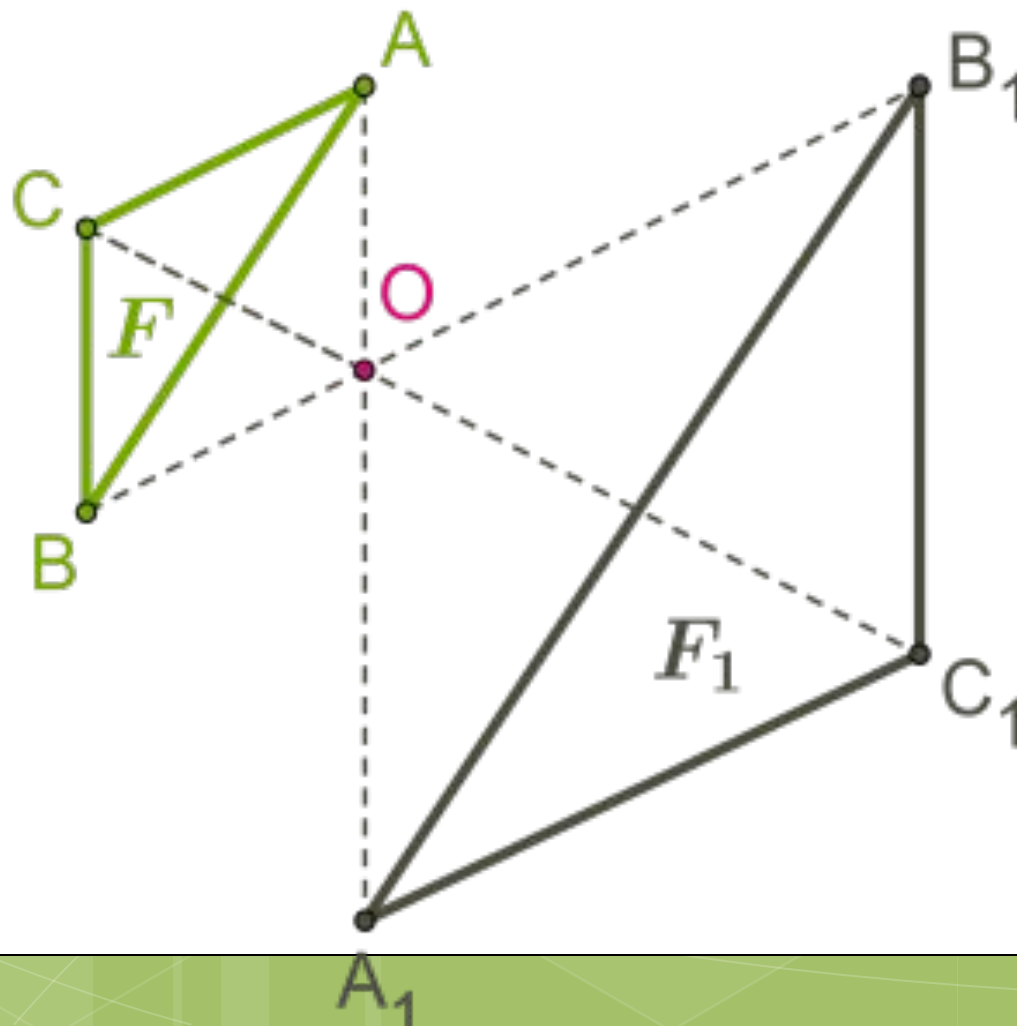


Так строится фигура, гомотетичная данной, с центром гомотетии O .

На рисунке из фигуры F можно получить F_1 гомотетией (O;2)

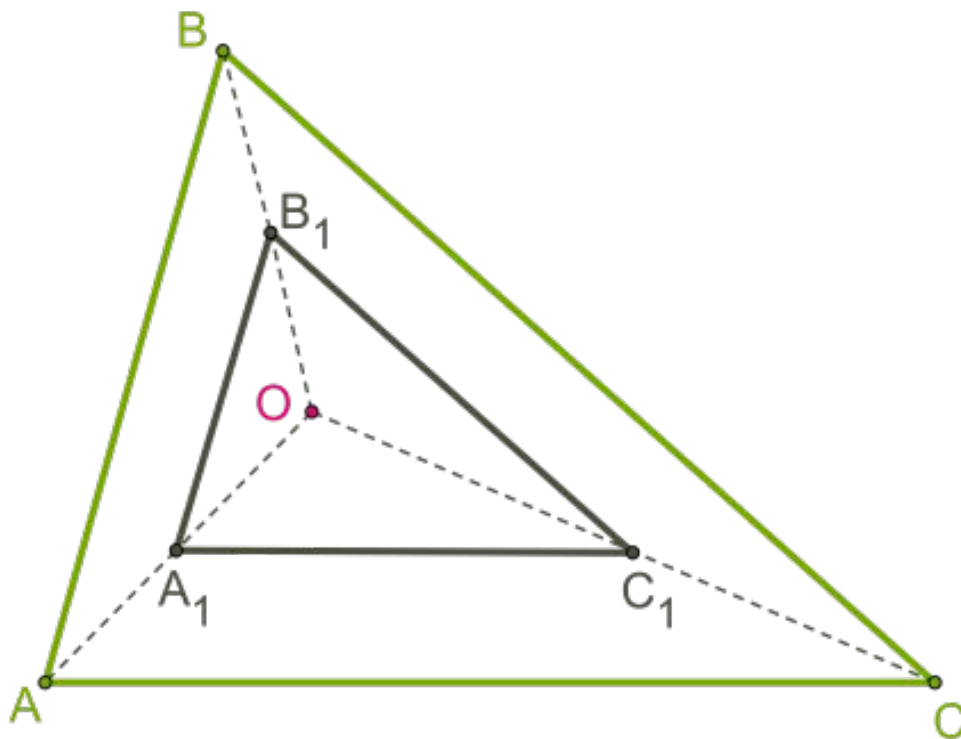


Из фигуры F можно получить F_1
гомотетией $(O; -2)$

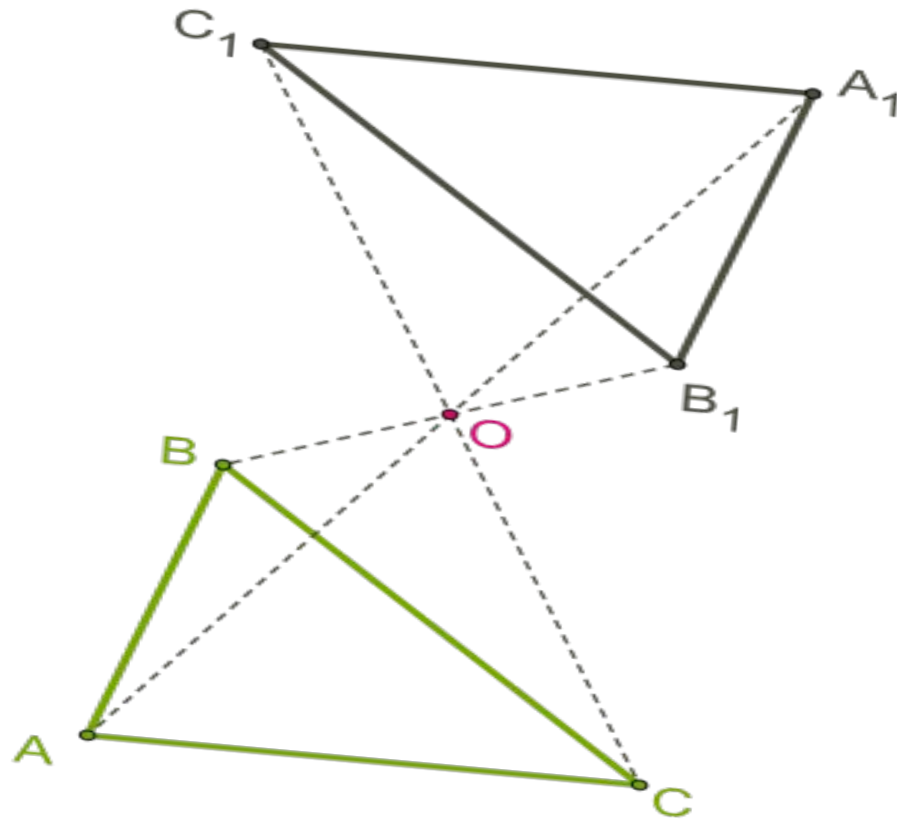


Центр гомотетии может находиться и
внутри фигуры. Треугольник $A_1B_1C_1$ из
треугольника ABC получен гомотетией

$$\left(O; \frac{1}{2}\right)$$



Гомотетия $(O; -1)$ — это центральная симметрия или поворот на 180 градусов, в данном случае фигуры одинаковые.



- ✓ Из определения гомотетии следует, что при $k = 1$ гомотетия является тождественным преобразованием.
- ✓ При $k = -1$ гомотетия становится центральной симметрией.
- ✓ Две гомотетии с центром в O и коэффициентами k и $1/k$ являются взаимно обратными. Это означает, что если одна из них переводит точку A в точку A_1 , то другая переводит A_1 в A .

**Гомотетичные фигуры подобны, но
подобные фигуры не всегда гомотетичны
(в гомотетии важно расположение фигур).**



Практическое применение гомотетии

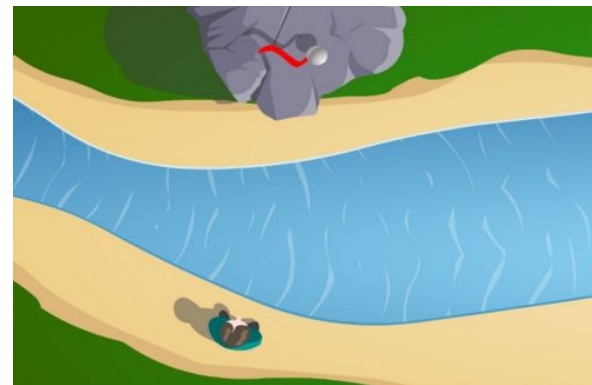
- ❖ **Гомотетия чаще всего используется в задачах на нахождение ГМТ**
- ❖ **С помощью гомотетии можно строить подобные фигуры**
- ❖ **С помощью гомотетии можно находить отношение отрезков, площадей, объемов.**

Для гомотетичных фигур F и F_1 в силе формулы

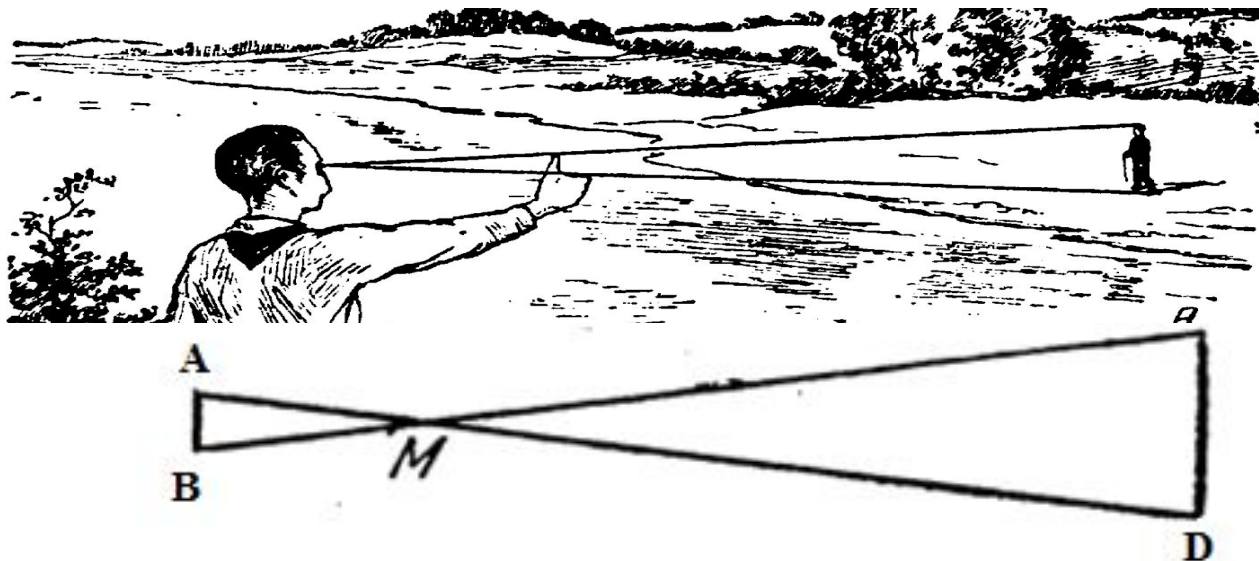
отношения периметров $\frac{P_{F_1}}{P_F} = k$

и площадей подобных фигур $\frac{S_{F_1}}{S_F} = k^2$

Даурен стоит на набережной реки Сазды. На противоположном берегу идет Олжас. Даурен отчетливо видит его перемещение. Может ли он, стоя на одном месте, определить, хотя бы приблизительно, расстояние от себя до Олжаса? Условие: у Даурена нет никаких инструментов.



Решение задачи



Пусть на рисунке A и B – глаза Даурена, точка M – конец пальца его вытянутой руки, точка C – первое положение Олжаса, D – второе.

$$\triangle ABM \sim \triangle CMD$$

Значит,

$$CM : BM = CD : AB$$

***BM*-длина вытянутой руки Даурена, *AB*-расстояние между зрачками его глаз, *CD* измерено шагами Олжаса (шаг можно принять в среднем равным 3/4 м).**

Следовательно, неизвестное расстояние от Даурена до Олжаса на противоположном берегу реки

$$CM = BM \cdot \frac{CD}{AB}$$

**Если, например, расстояние между
зрачками глаз у Даурена 6 см, длина от
конца вытянутой руки до глаз 60 см, а
Олжас сделал от А до В, скажем 14
шагов, то расстояние между ними**

$$CM = 14 \cdot \frac{60}{6} = 140 \text{ шагов}$$

$$140 \text{ шагов} \cdot \frac{3}{4} = 105 \text{ м.}$$

Задание для самостоятельного решения

Периметр фигуры F равен 10 см, а площадь равна 2 см^2 . При помощи гомотетии $(O;3)$ получили фигуру F_1 гомотетичную фигуре F . Чему равен периметр и площадь фигуры F_1 ?





Решение

$$k = 3 \Rightarrow \frac{P_{F_1}}{P_F} = 3 \Rightarrow \frac{P_{F_1}}{10} = 3 \Rightarrow P_{F_1} = 30$$

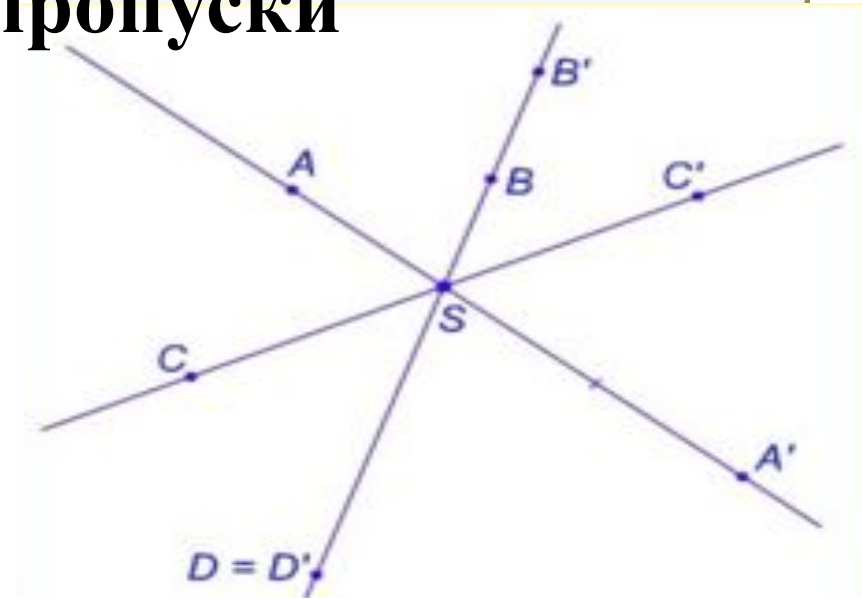
$$\frac{S_{F_1}}{S_F} = 3^2 \Rightarrow S_{F_1} = 3^2 \cdot 2 \Rightarrow S_{F_1} = 18$$

Ответ: P=30 см, S=18 см².

Выполните задания на сайте
www.bilimland.kz



Задание: Заполните пропуски



Точка A' является проекцией точки A ,
полученная с помощью гомотетии с центром S
и коэффициентом $k =$

Точка B' является проекцией точки B
полученная с помощью гомотетии с центром S
и коэффициентом $k =$



Точка C' является проекцией точки C полученная с помощью гомотетии с центром S и коэффициентом $k =$

Точка D' является проекцией точки D полученная с помощью гомотетии с центром S и коэффициентом $k =$

Проверка ответов

Точка A' является проекцией точки A , полученная с помощью гомотетии с центром S и коэффициентом $k = \boxed{-2}$

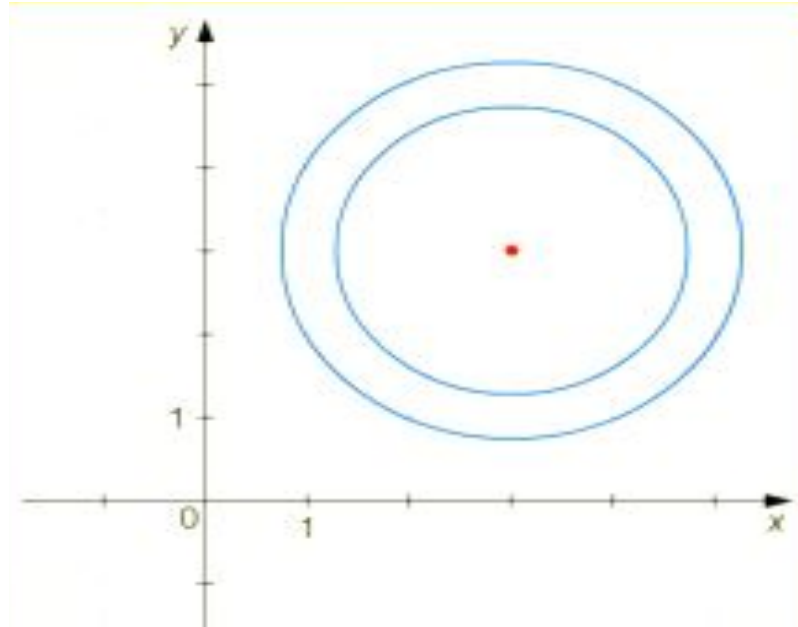
Точка B' является проекцией точки B полученная с помощью гомотетии с центром S и коэффициентом $k = \boxed{2}$

Точка C' является проекцией точки C полученная с помощью гомотетии с центром S и коэффициентом $k = \underline{-1}$

Точка D' является проекцией точки D полученная с помощью гомотетии с центром S и коэффициентом $k = \boxed{1}$

Задание: Заполните пропуски.

Это две concentric окружности.



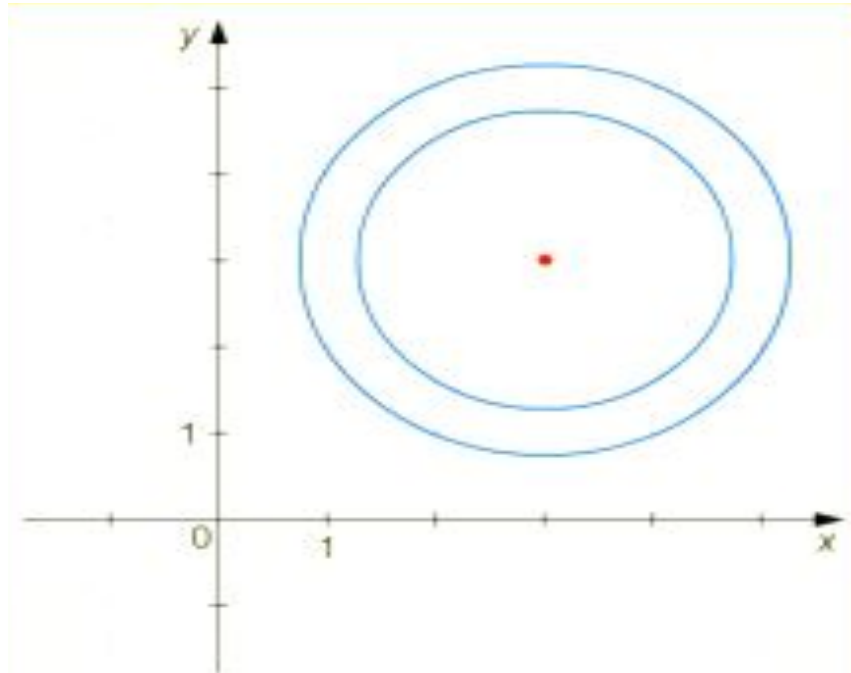
Одна окружность является проекцией другой, полученная с помощью гомотетии с центром в одних и тех же



**Большая окружность является проекцией
окружности, полученной с помощью
гомотетии с коэффициентом равным
отношению радиуса
окружности к радиусу
окружности**



Проверка ответов



Одна окружность является проекцией другой, полученной с помощью гомотетии с центром в одних и тех же

центрах окружностей

**Большая окружность является проекцией
окружности, полученной с помощью
гомотетии с коэффициентом равным
отношению радиуса**

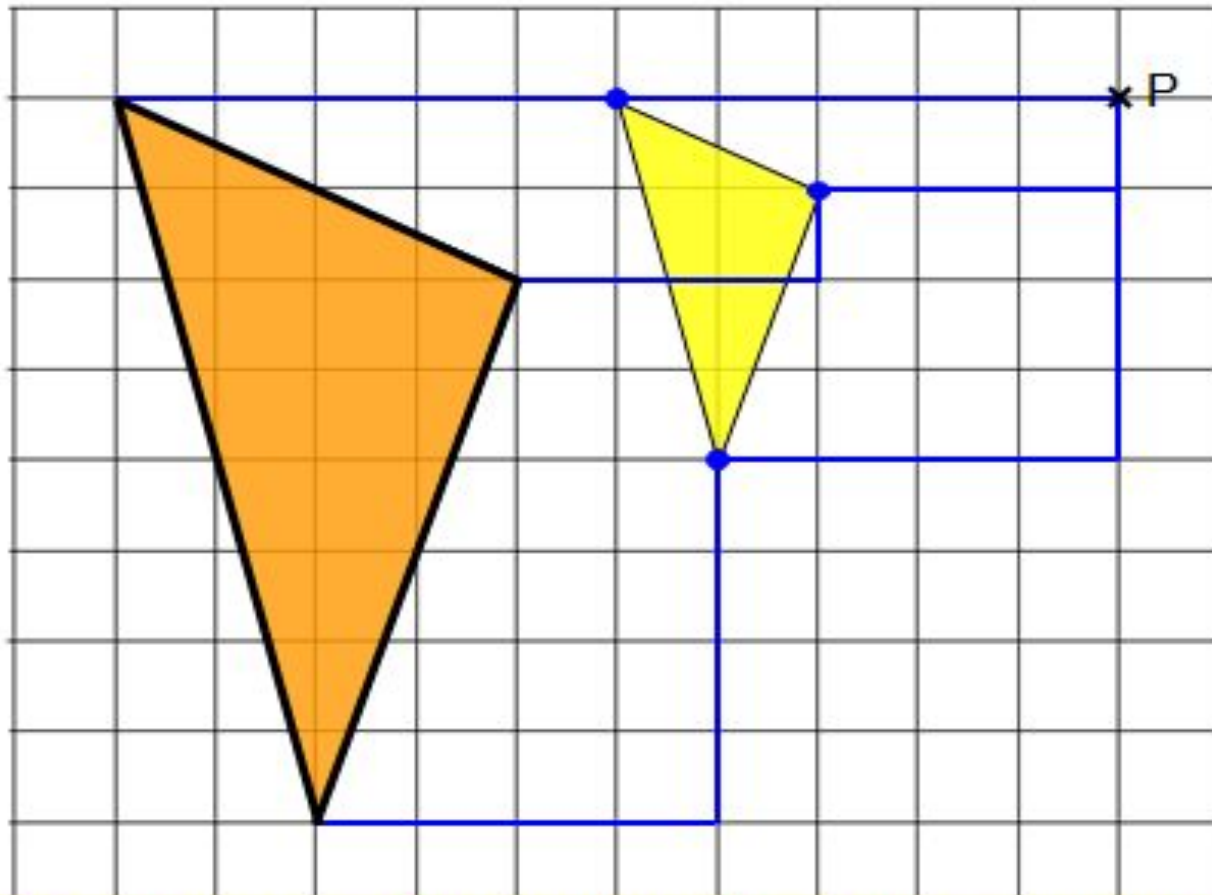
большей

**окружности к радиусу
окружности**

меньшей

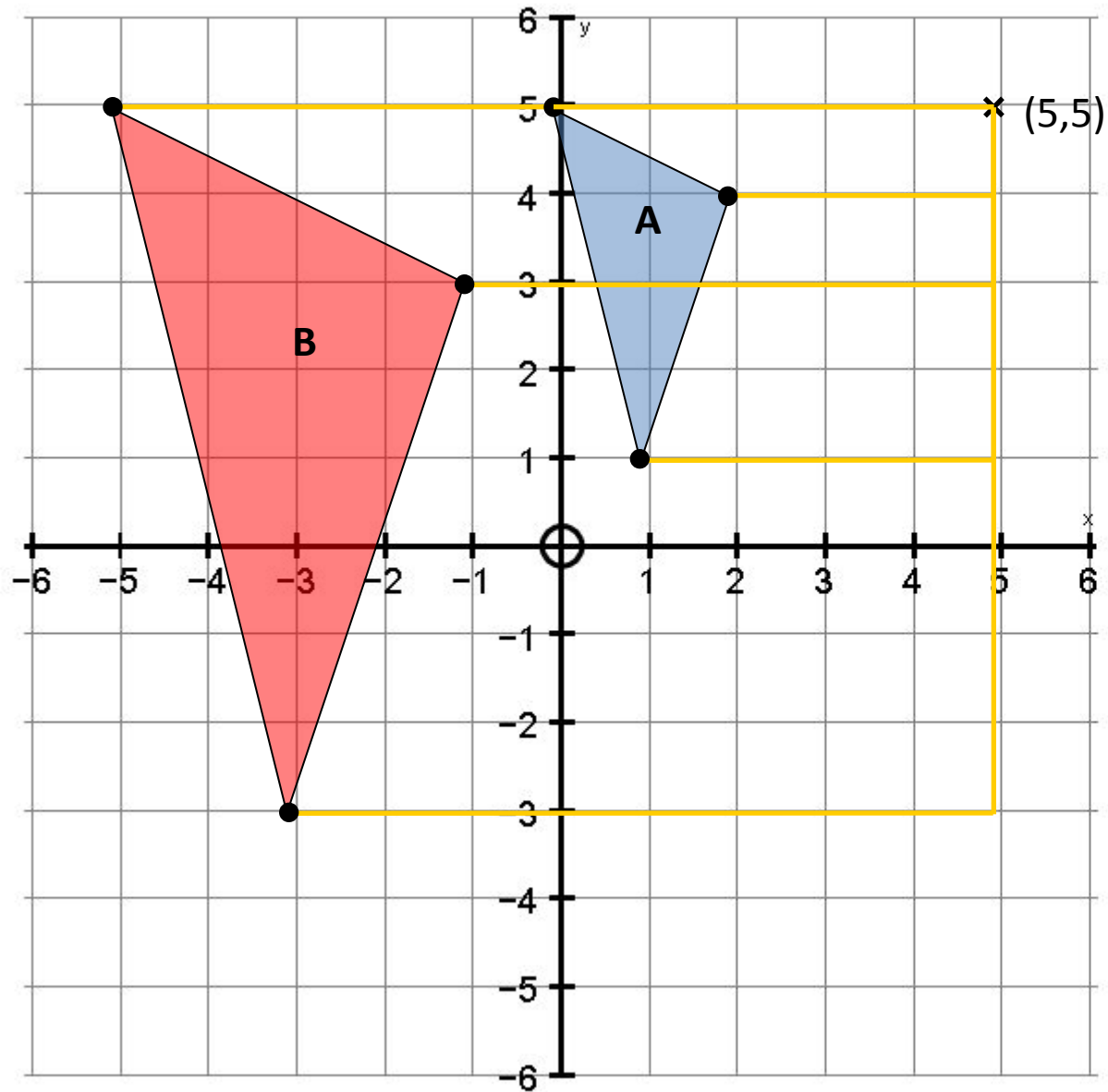
**Как можно построить фигуру,
гомотетичную данной на
клетчатом листе?**

Enlargements about a point



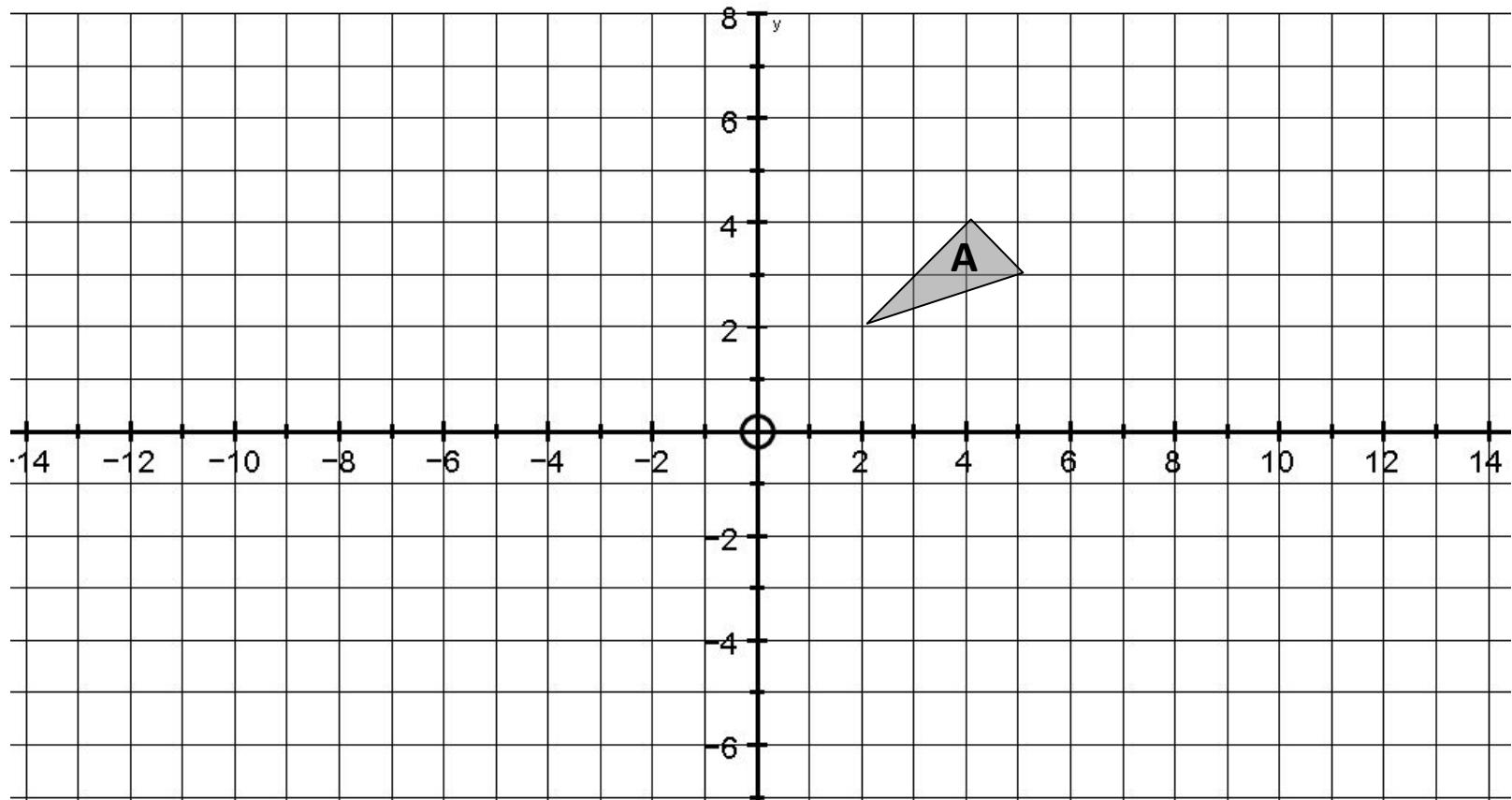
Eg enlarge the given shape with scale factor 2 about P

Multiply the number of horizontal and vertical squares from P to each corner by the scale factor

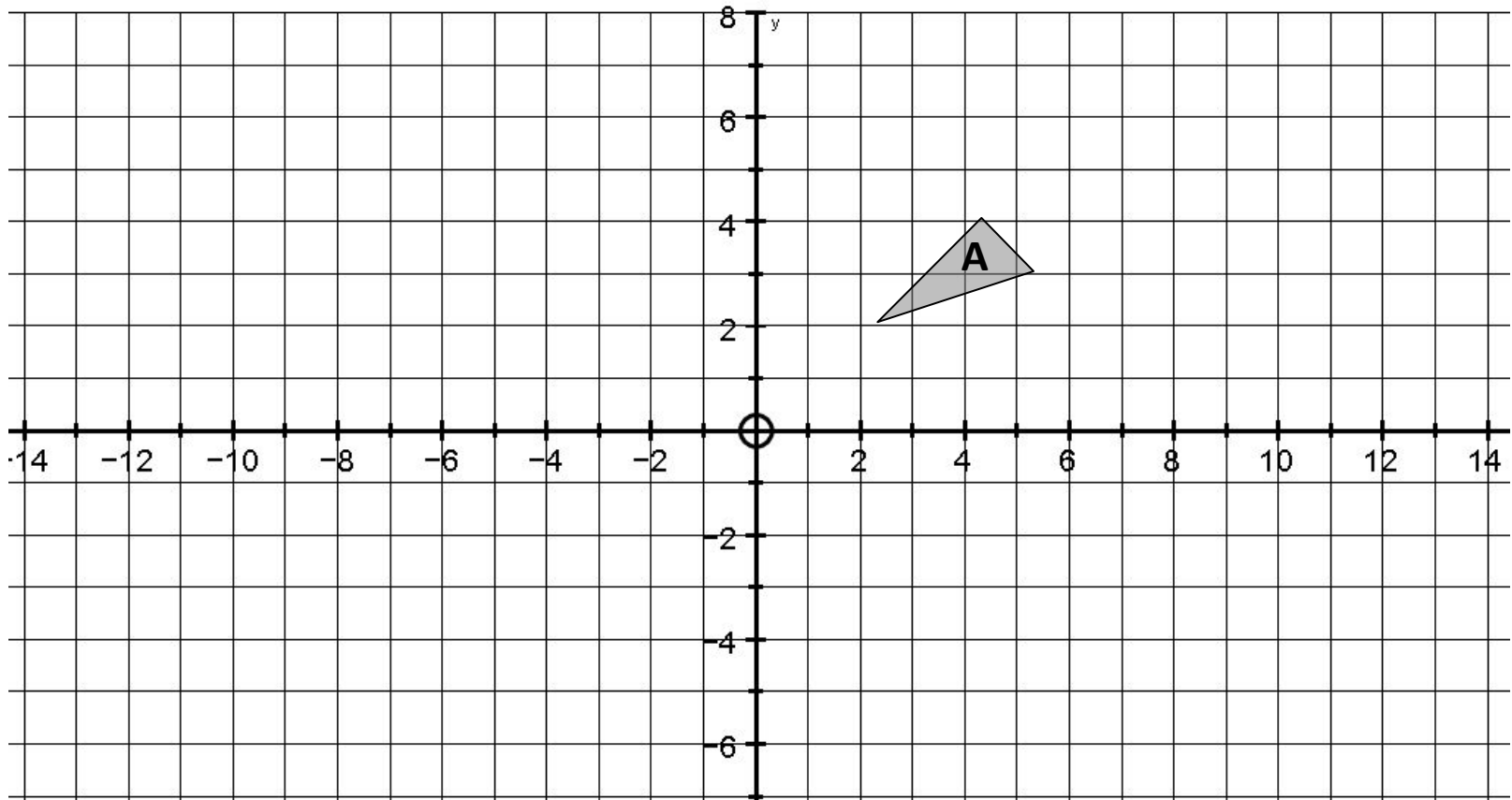


Enlarge A using the given scale factor and centre of enlargement:

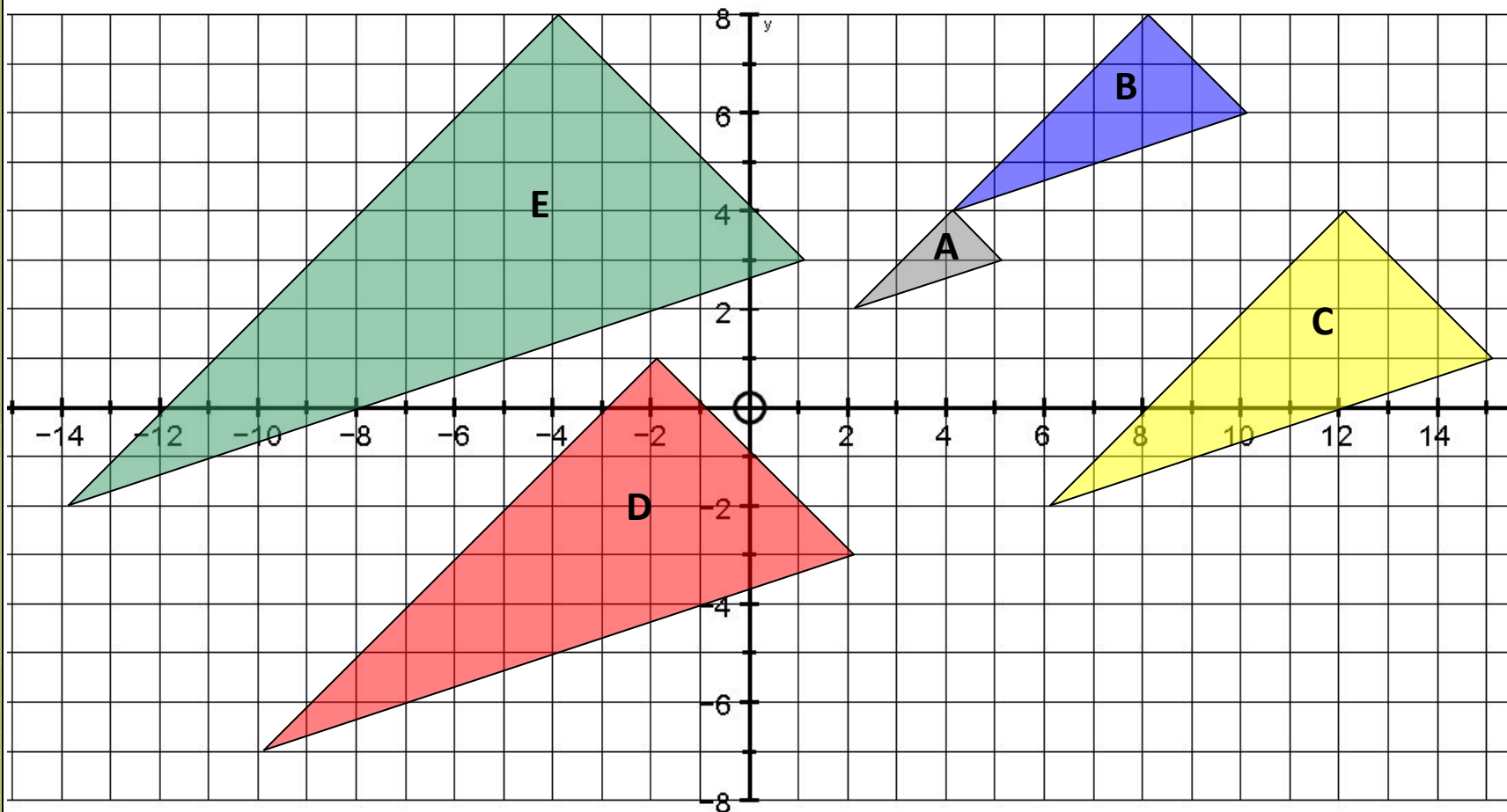
- (i) $k=2$, centre $(0,0)$ to obtain B**
- (ii) $k=3$, centre $(0,4)$ to obtain C**



- (iii) Scale factor 4, centre (6,5) to obtain D**
(iv) Scale factor 5, centre (6,3) to obtain E



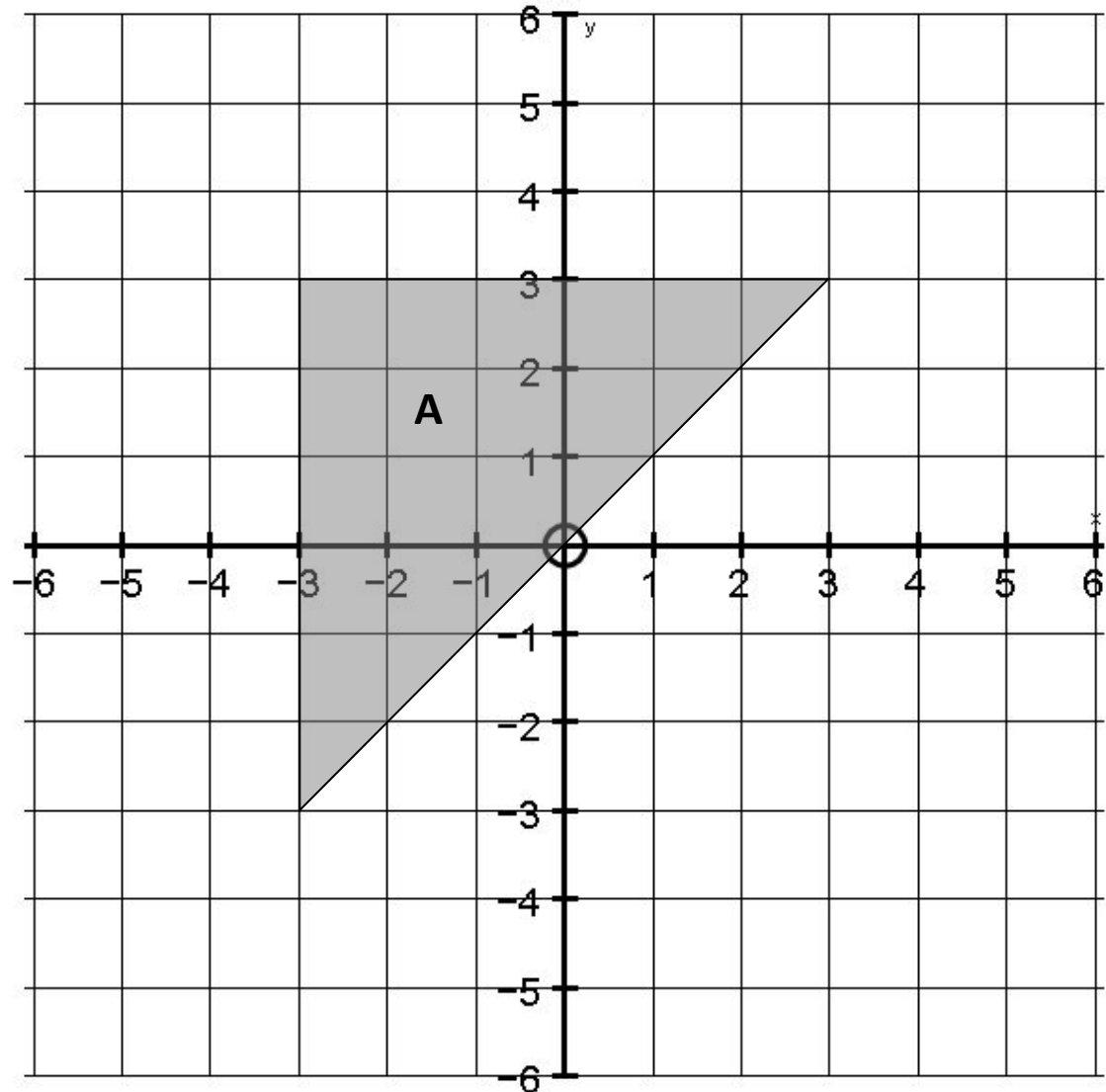
Проверь себя



(i) $k = \frac{1}{2}$
centre (1,-5)
to obtain B

(ii) $k = \frac{1}{3}$,
centre (3,6)
to obtain C

(iii) $k = \frac{1}{6}$,
centre (3,-3)
to obtain D

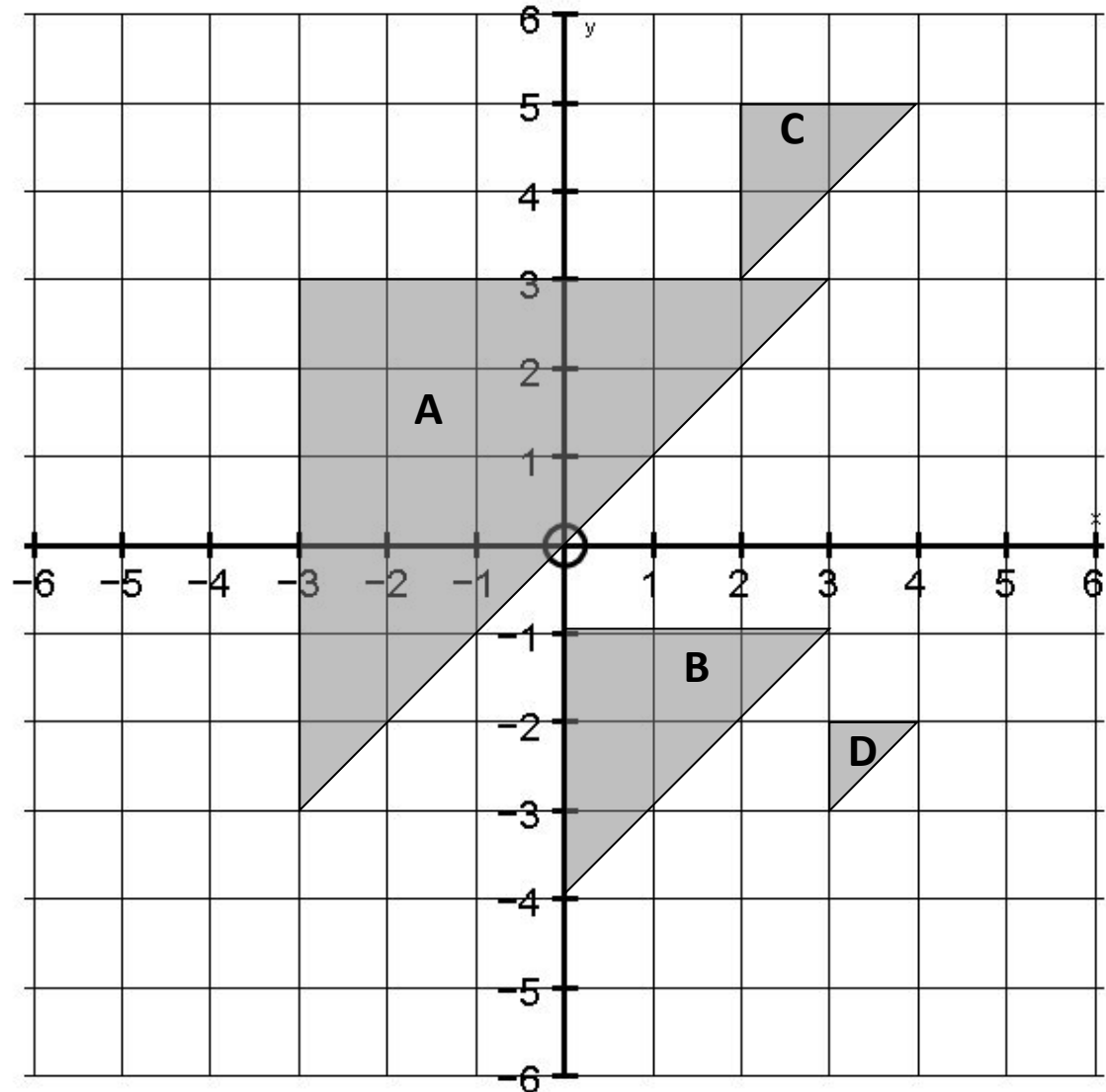


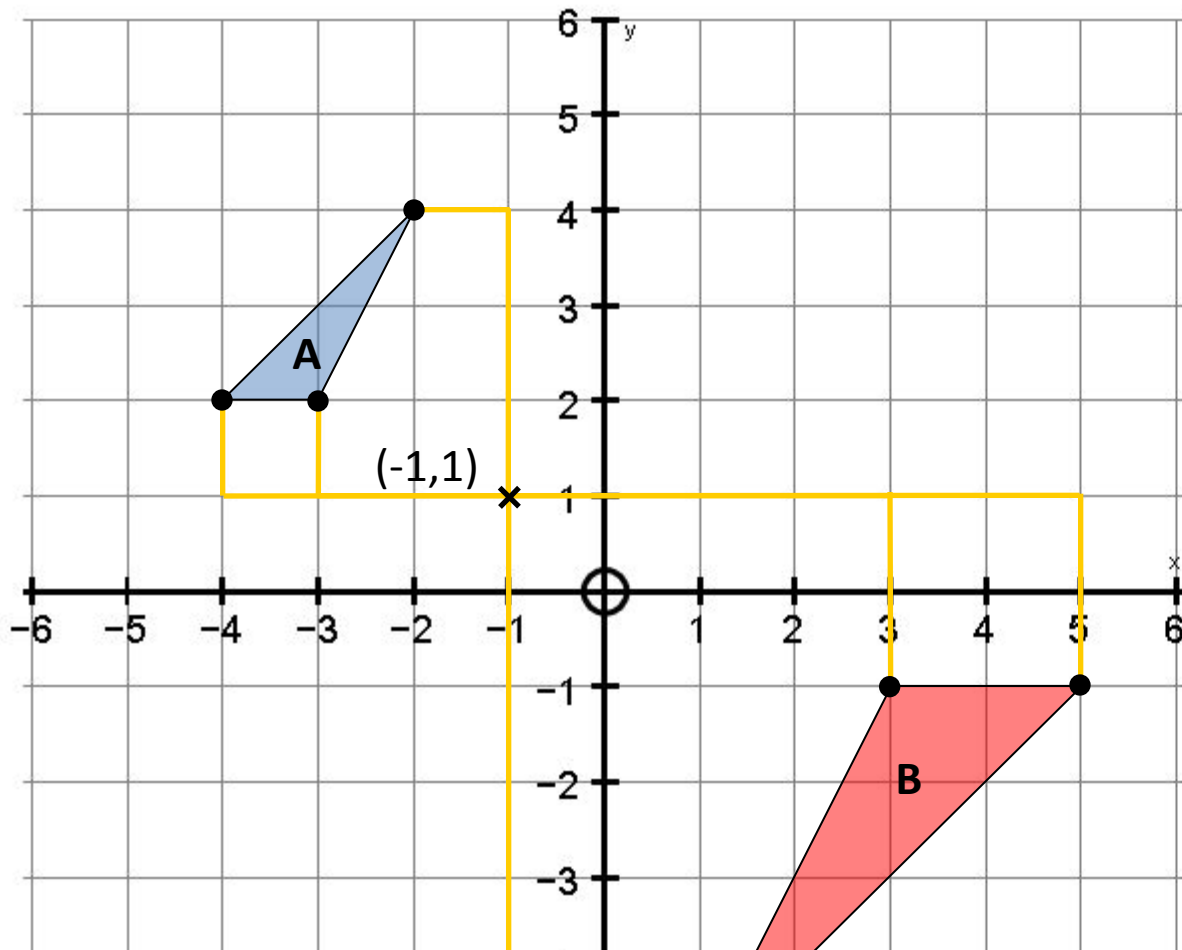
Проверь себя

(i) $k = \frac{1}{2}$
centre (1,-5)
to obtain B

(ii) $k = \frac{1}{3}$,
centre (3,6)
to obtain C

(iii) $k = \frac{1}{6}$,
centre (3,-3)
to obtain D



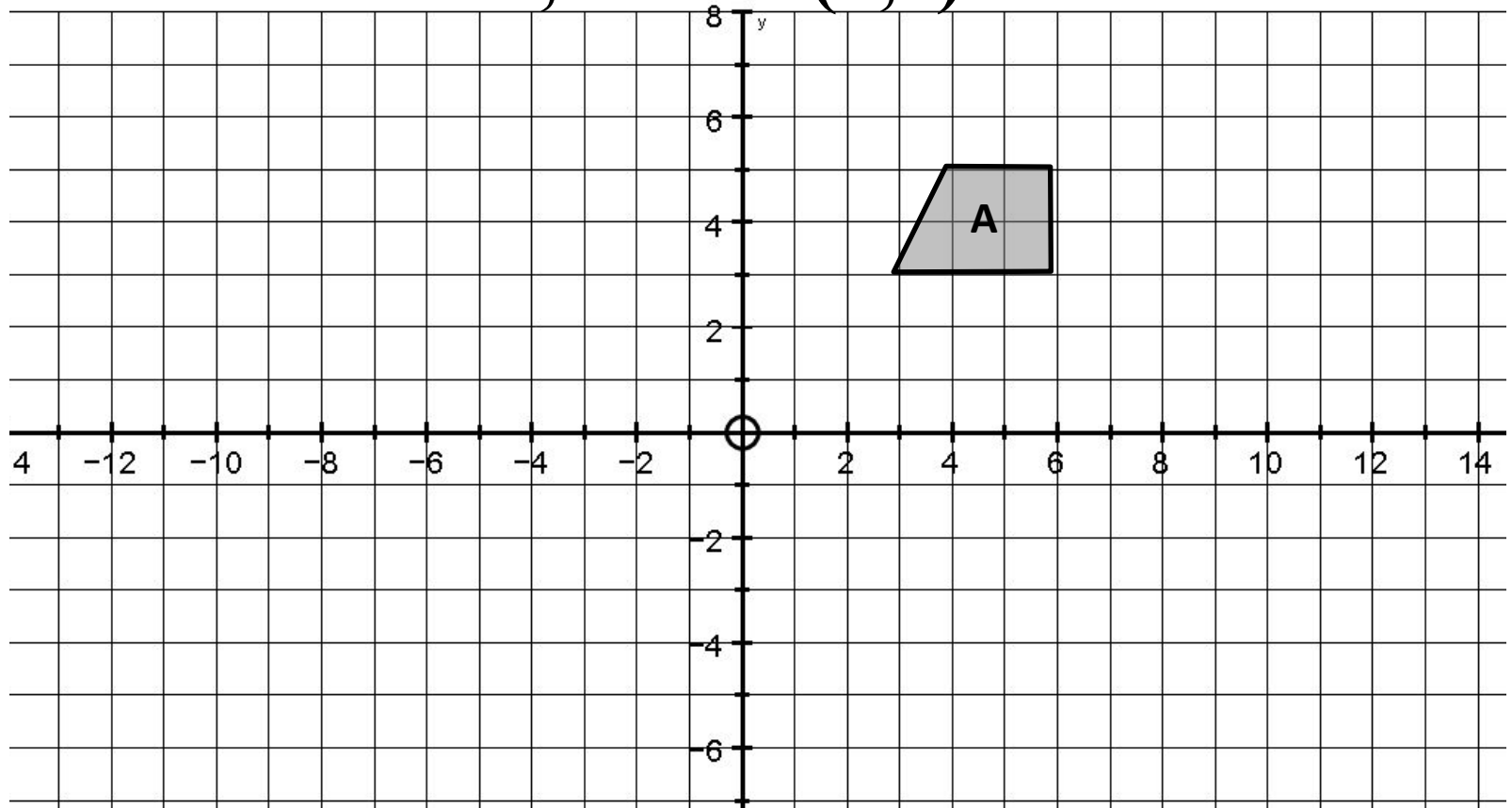


Eg enlarge A with scale factor 2 about (5,5) to obtain B

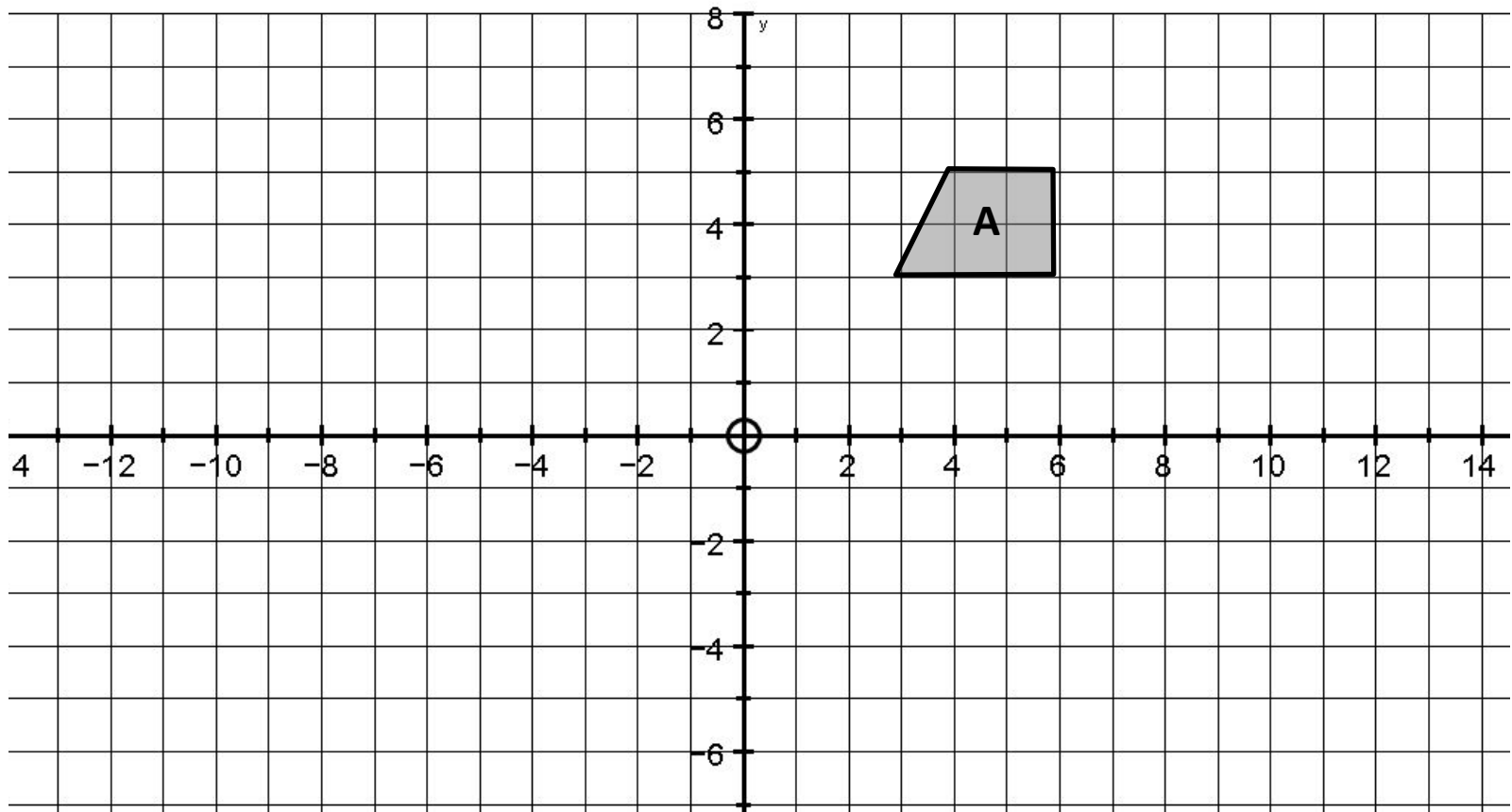
Multiply the number of horizontal and vertical squares from (5,5) to each corner by the scale factor

Enlarge A using the given scale factor and centre of enlargement:

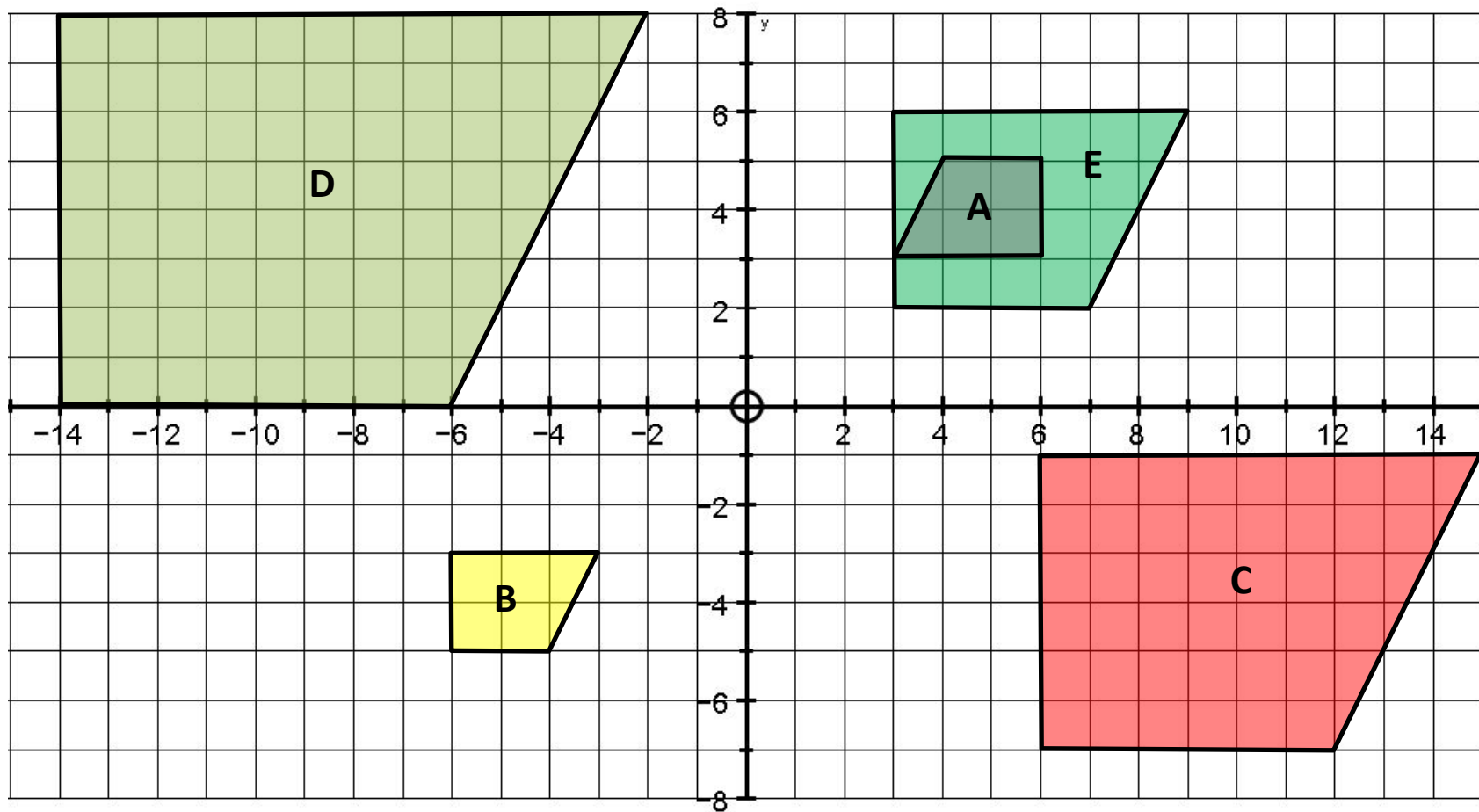
- (i) Scale factor -1, centre (0,0) to obtain B**
- (ii) Scale factor -3, centre (6,2) to obtain C**



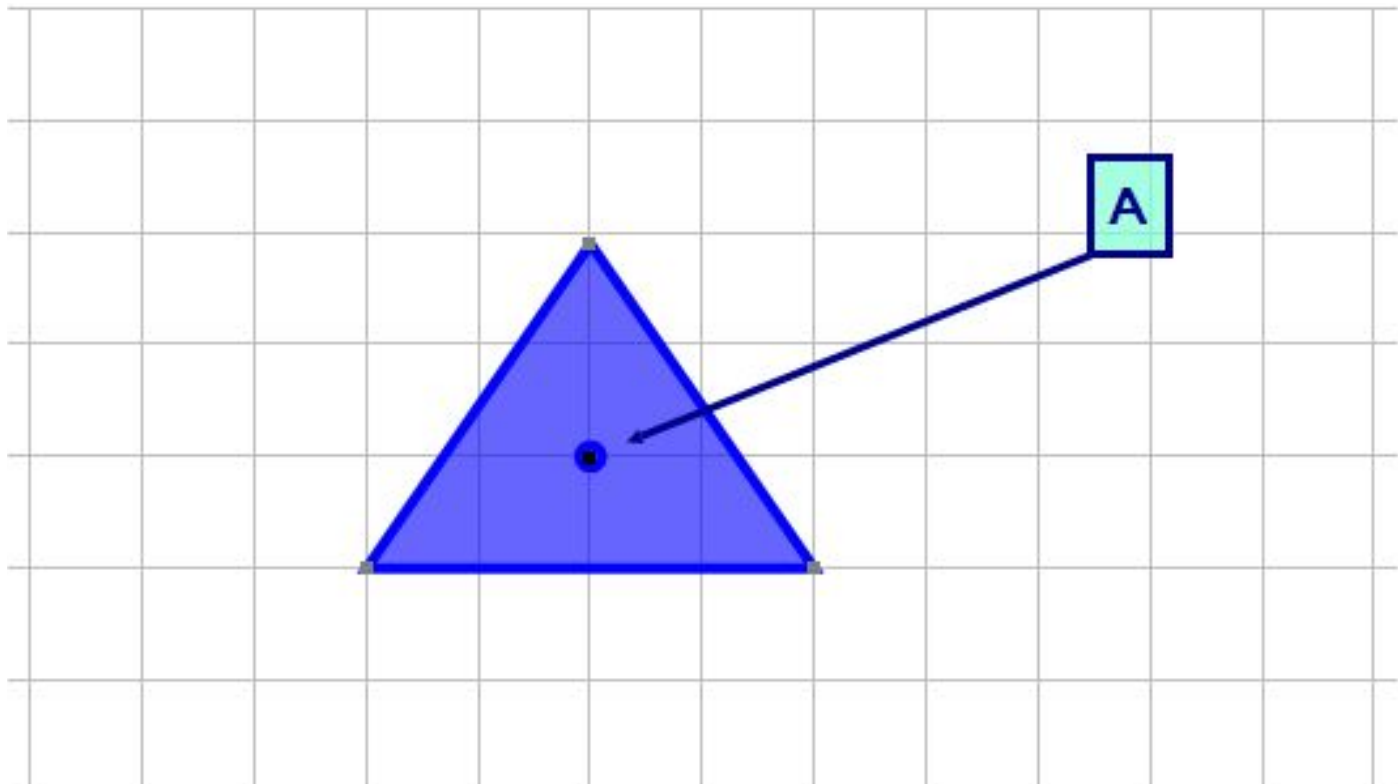
- (iii) Scale factor -4, centre (2,4) to obtain D**
(iv) Scale factor -2, centre (5,4) to obtain E



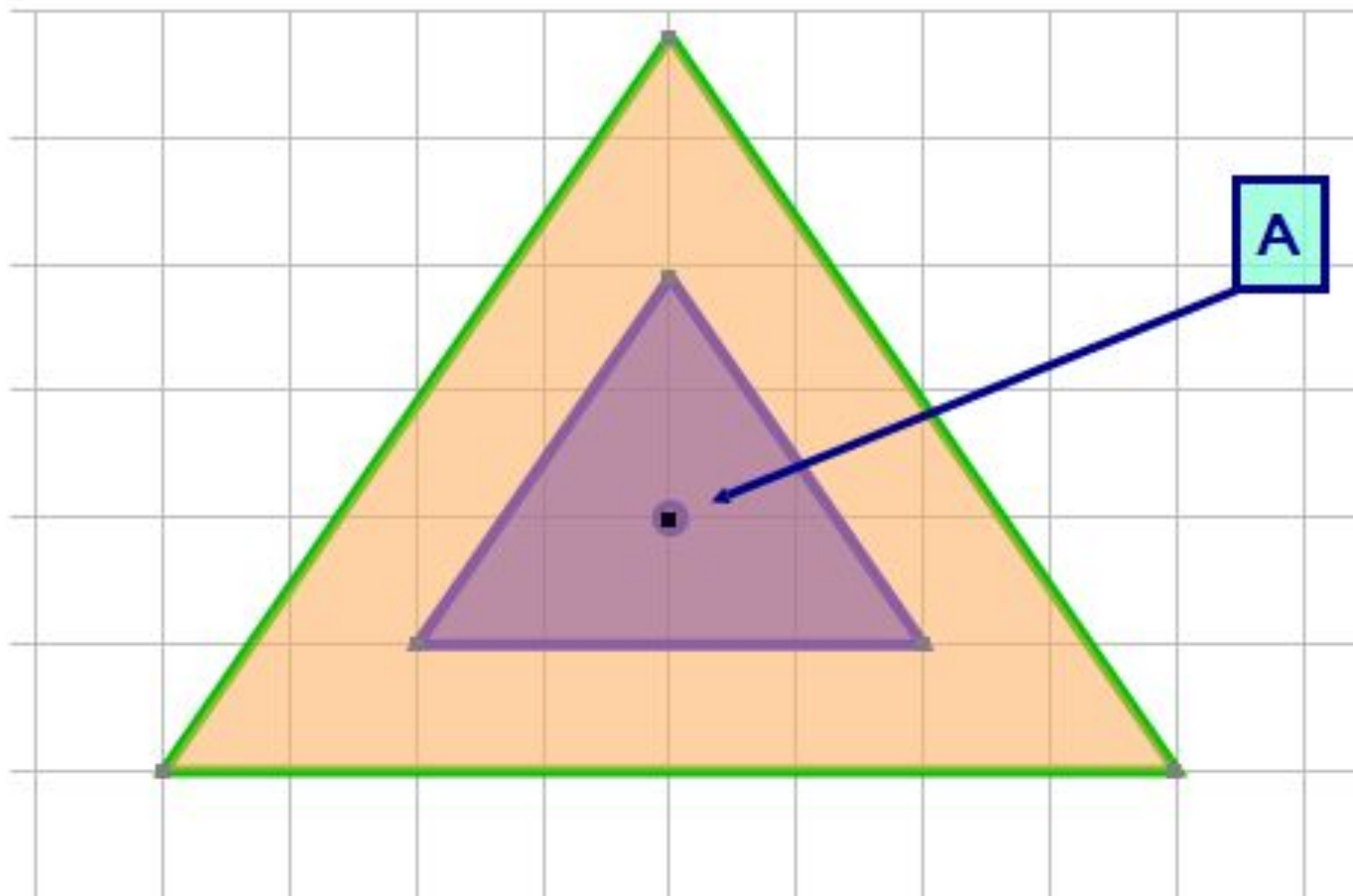
Проверь себя



**Построить треугольник, гомотетичный
данному, взяв за центр гомотетии точку A
и $k = 2$.**

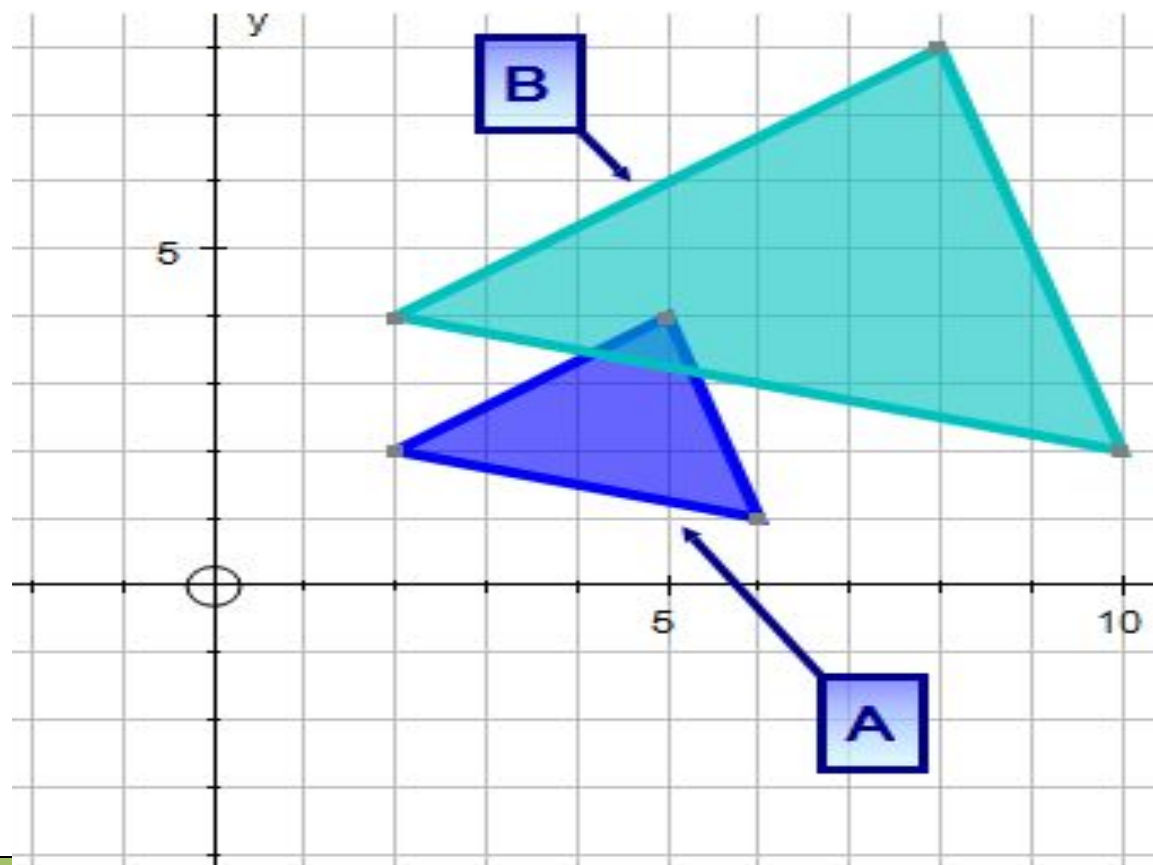


Проверь себя

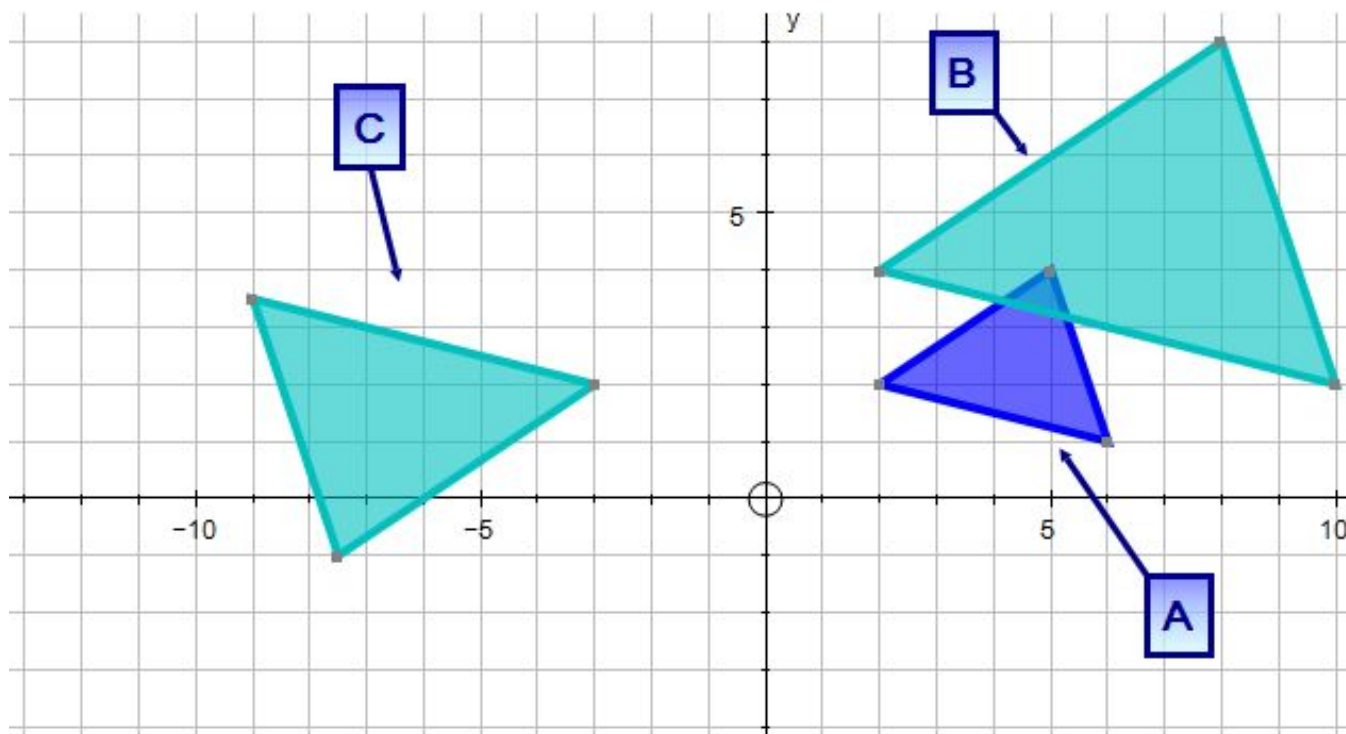


(А) Фигуры В и А гомотетичные. Найдите координаты центра гомотетии и коэффициент гомотетии.

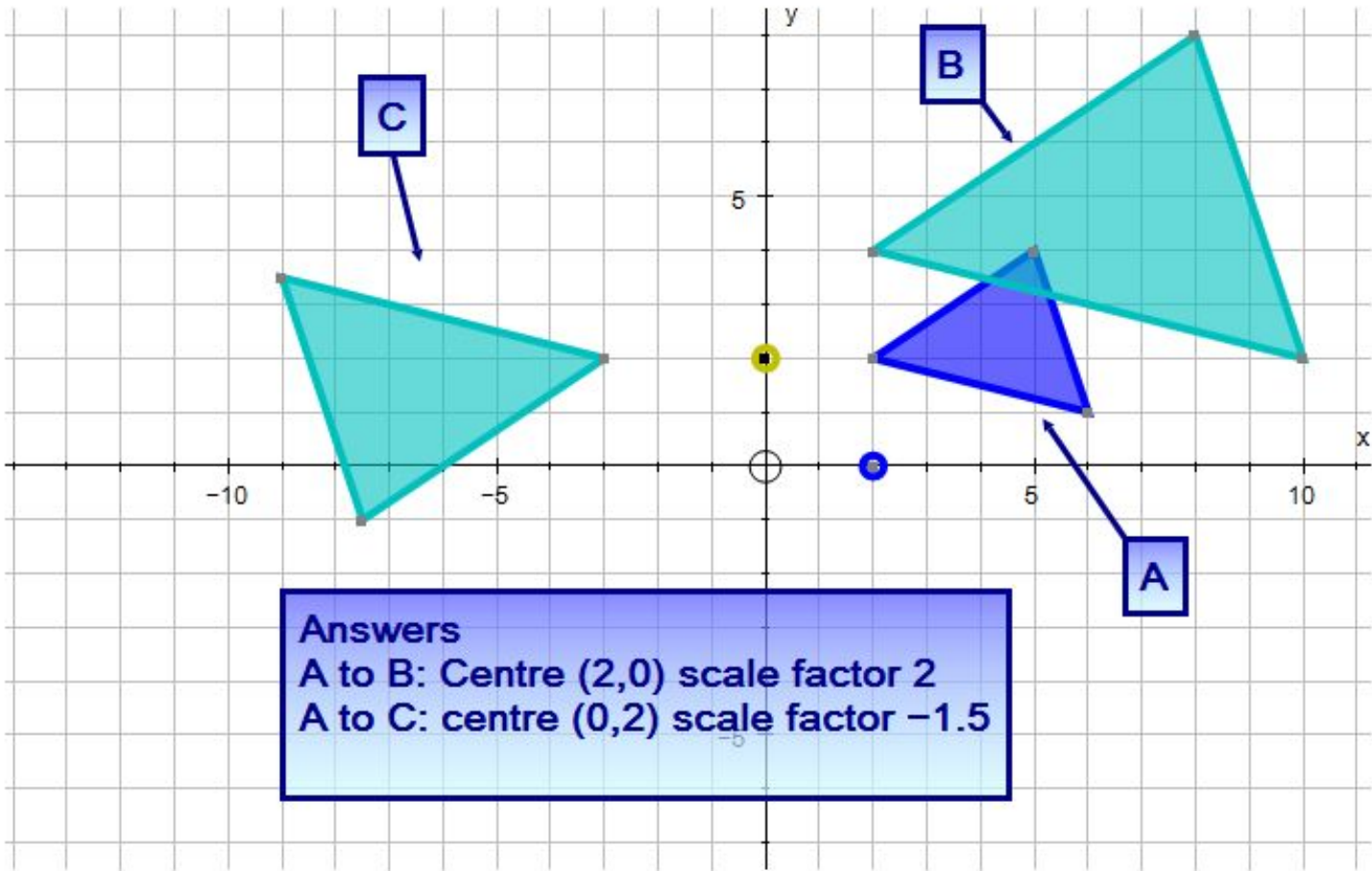
(Б) Чему равно отношение площади фигуры А и В?



(С) Фигуры С и А гомотетичные. Найдите координаты центра гомотетии и коэффициент гомотетии.



Проверь себя





ВОПРОСЫ НА ЗАСЫШКУ

**Существуют ли прямые,
которые переводятся гомотетией
сами в себя?**



Ответ:

**Да, прямые, проходящие через
центр гомотетии.**

Даны точки A , B и гомотетичные им точки A' , B' соответственно. Можно ли найти центр данной гомотетии?



Ответ:

**Да. Это точка пересечения прямых
AA' и *BB'*.**

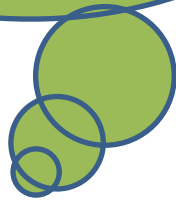
Как расположены две окружности друг относительно друга, если их центром гомотетии является центр одной из окружностей?



Ответ:

Имеют общий центр

Как расположены две окружности друг относительно друга, если их центром гомотетии является точка, принадлежащая одной из данных окружностей?

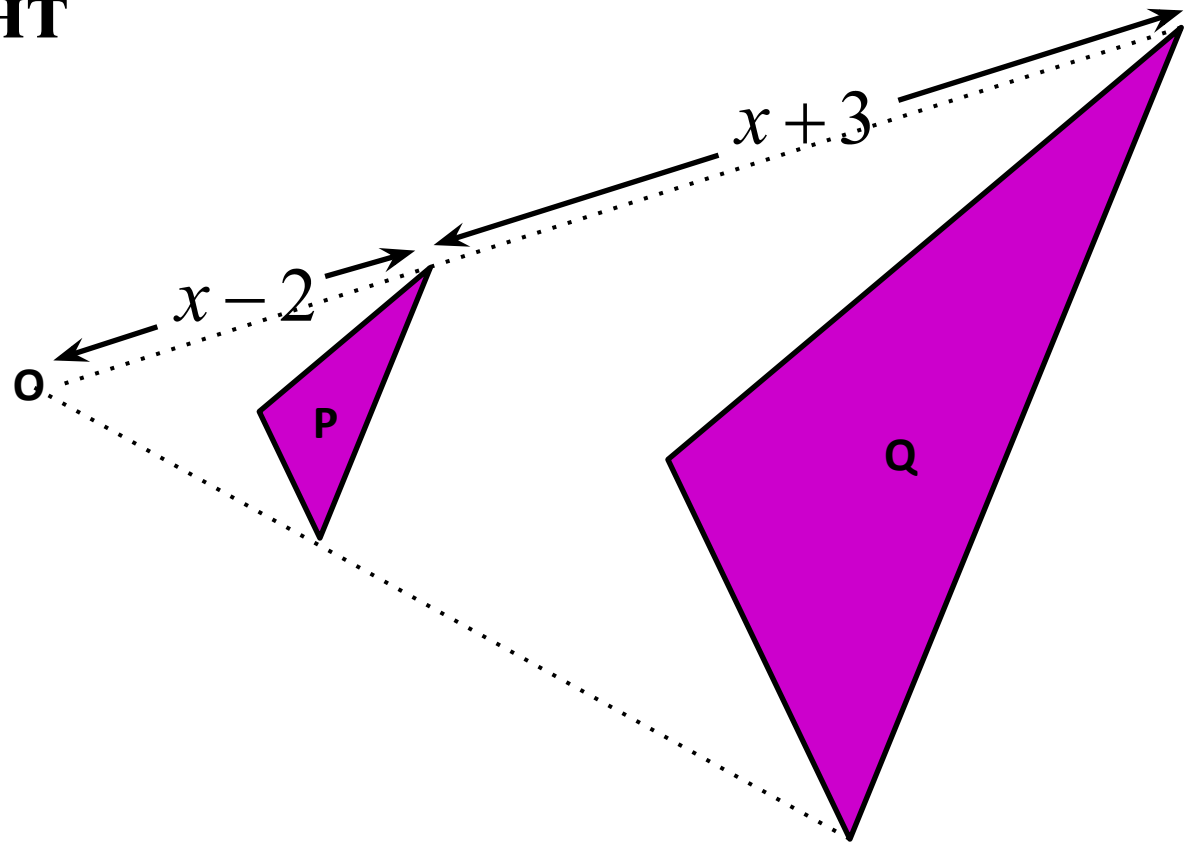


Ответ:

Касаются внутренним образом.

Задача

Коэффициент
подобия
равен 3,
точка O
является
центром
гомотетии.
Найти
значение x .



Решение

$$\frac{(x-2) + (x+3)}{x-2} = 3$$

$$(x-2) + (x+3) = 3(x-2)$$

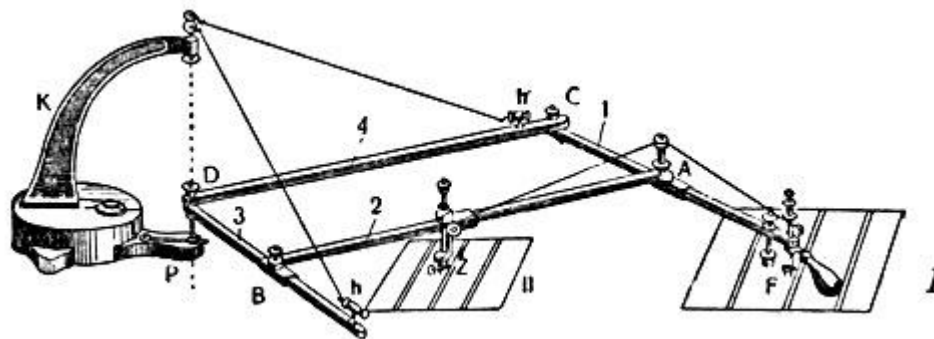
$$\Rightarrow 2x + 1 = 3x - 6$$

$$\Rightarrow x = 7$$

Ответ: $x=7$.

**Существуют ли механизмы,
инструменты, которые помогают
построить фигуру, гомотетичную
данной, помимо тех, которые мы уже
рассмотрели?**

Пантограф - механизм, который даёт возможность вычертить фигуру, перспективно-подобную любой заданной фигуре, притом с любым положительным коэффициентом подобия. Впервые он был создан в начале XVII века.



Задача на построение:

Впишите в данный треугольник квадрат, у которого две вершины лежат на одной стороне, а две другие вершины — на двух других сторонах.

Дано: $\triangle OMP$

Построить: квадрат $ABCD$,
 $A \in OM$, $B \in MP$, $C \in OP$, $D \in OP$

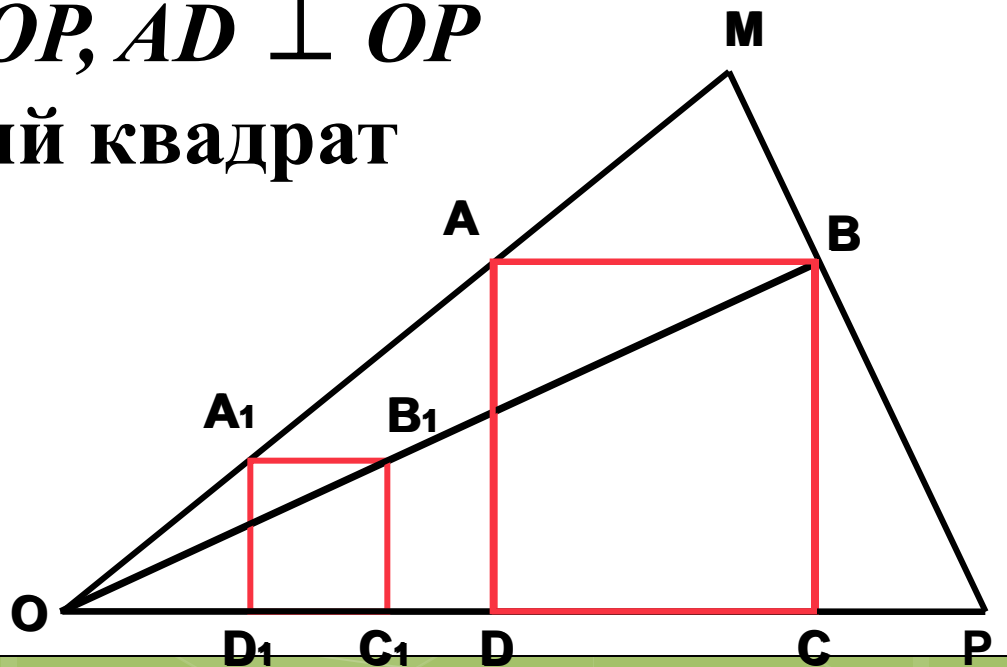
Решение: 1) Строим квадрат $A_1B_1C_1D_1$:

$A_1 \in OM$, $C_1 \in OP$, $D_1 \in OP$

2) $OB_1 \cap MP = B$

3) $BC \perp OP$, $BA \parallel OP$, $AD \perp OP$

4) $ABCD$ – искомый квадрат



Задача на доказательство:

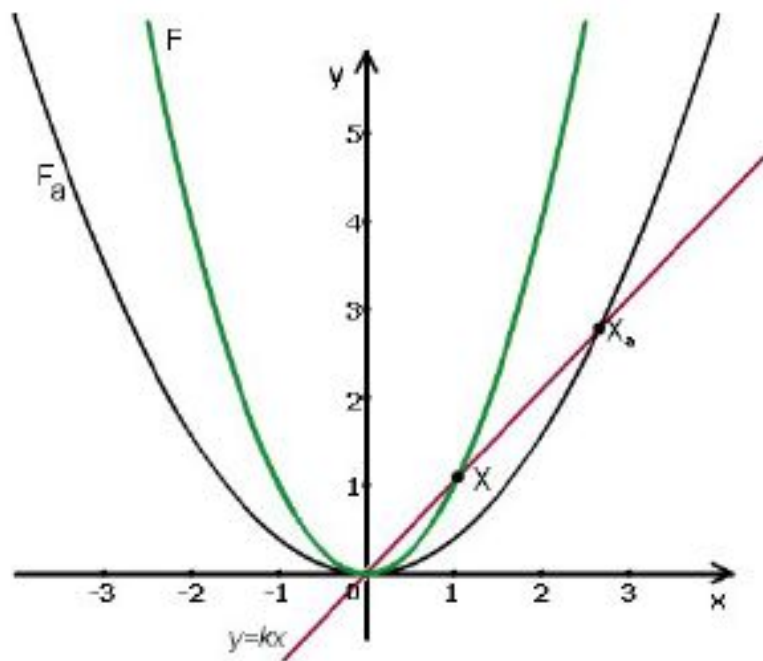
Докажите, что все графики функции

$$y = ax^2$$

при различных значениях a , ($a \neq 0$)

ГОМОТЕТИЧНЫ.

Решение:



$F_a: y=ax^2$ гомотетичен
графику $F: y=x^2$.
Проведем через начало
координат O прямую
 $p: y=kx, k \neq 0$.

$$p \cap F = O(0; 0); p \cap F_a = (0; 0);$$

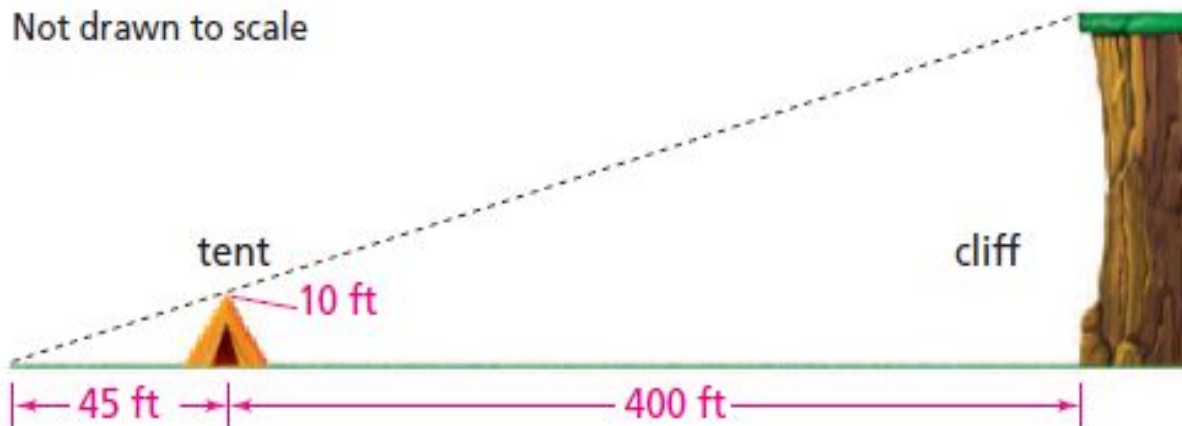
$$p \cap F = X(k; k^2) \text{ и } p \cap F_a = X_a = \left(\frac{k}{a}; \frac{k^2}{a} \right).$$

$$\overrightarrow{OX} = a \overrightarrow{OX_a}$$

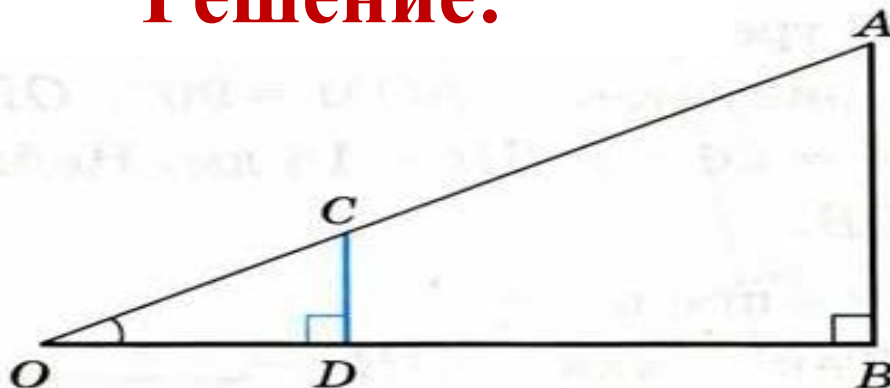
Прикладная задача

Мирас лежит на земле 45 футов от своей палатки. Верхняя часть палатки и вершина высокой скалы находятся в его прямой видимости. Высота его палатки 10 футов. Какой высоты этот обрыв, если расстояние между обрывом и его палаткой 400 футов?

Not drawn to scale



Решение:



Отрезки АВ и CD расположены гомотетично относительно точки О,

следовательно: $\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$

Отсюда получаем: $AB = \frac{OB \cdot CD}{OD}$

Значит, $AB = \frac{445 \cdot 45}{10} = 2002,5$ футов

Ответ: Длина обрыва 2002,5 футов

На данной модели пол у чердака дома-квадрат $ABCD$. Балки, на которые опирается крыша, является сторонами блока, имеющего форму, прямоугольного параллелепипеда $EFGHKL MN$, E - середина ребра AT , F - середина BT , G - середина CT , H – середина DT . Все ребра пирамиды 12 м.

Задание:

- a) Вычислите площадь пола чердака $ABCD$.
- b) Найдите длину отрезка EF – горизантальной стороны бетонного блока.

Решение. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 12 м. Значит, площадь квадрата равна $12^2 = 144$ кв.м.

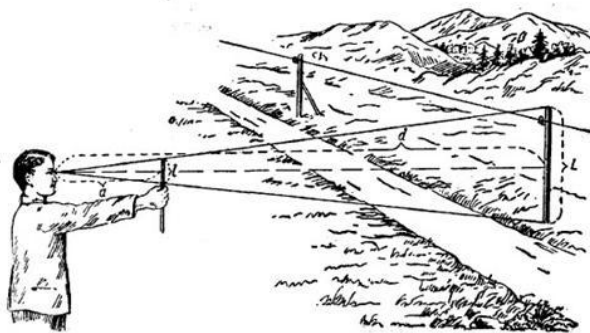
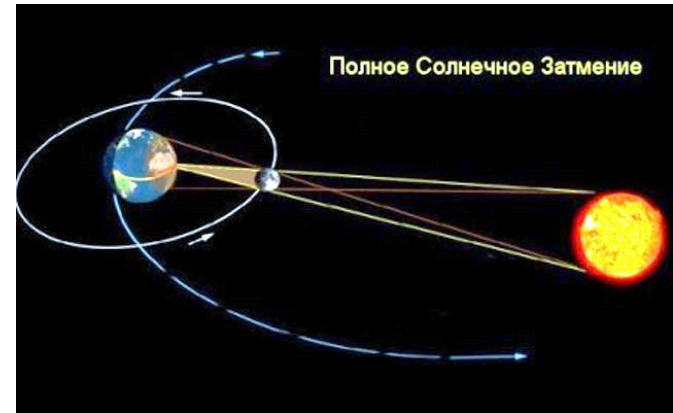
Ответ: 144 кв.м

Поскольку E - середина ребра AT , а F – середина BT , значит EF – средняя линия треугольника ABT . Поэтому EF в 2 раза меньше длины отрезка.

$$AB = 12 : 2 = 6 \text{ м.}$$

Ответ: 6 м

Что объединяет эти рисунки?



Ответ

Эти фигуры объединяет гомотетия.

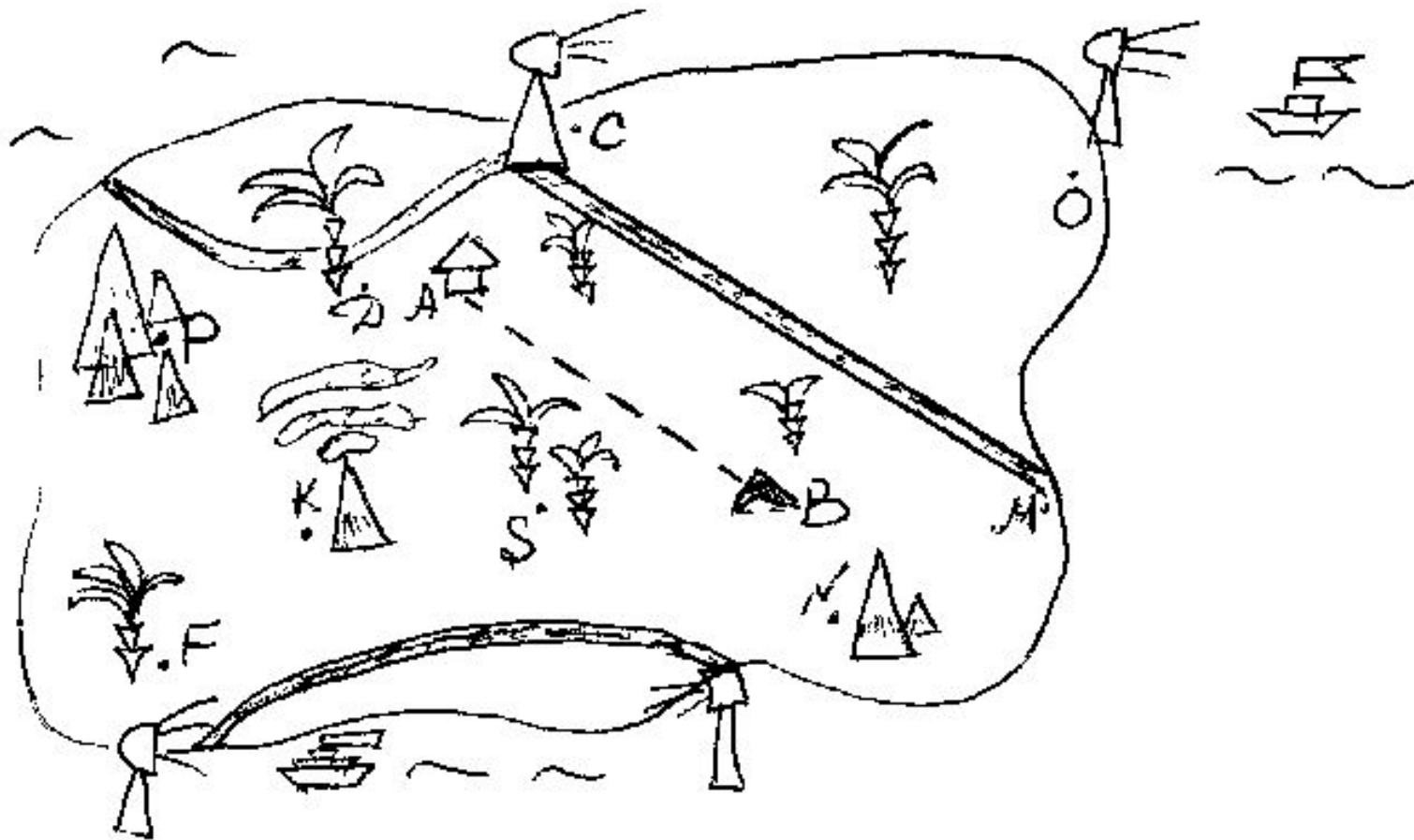
Видео вопрос



Поиграем в kahoot.it



Домашнее задание «Клад сумасшедшего математика»



«Если идти по дороге, гомотетичной тайной тропе относительно вулкана и дойти до маяка, а затем перейти в точку симметричную маяку относительно большой пальмы, то рядом, у подножия большой подобной горы зарыт клад».

Зная, что тайная тропа обозначена отрезком АВ, найти в какой точке зарыт клад.

Рефлексия

Сегодня я узнал...

Было интересно...

Я понял, что...

Теперь я могу...

Я научился...

У меня получилось...

Я попробую....

Меня удивило...

Мне захотелось...

**Сегодня я могу
оценить свою
работу на «___».**