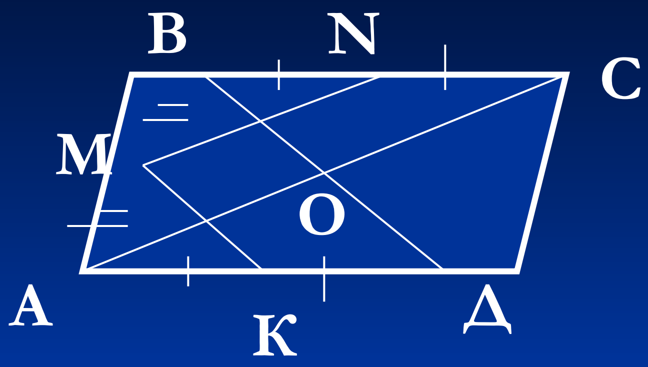
Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.

Устная работа

1.



АВСД – параллелограмм.

Выразить: а) $\overrightarrow{AO}$ через $\overrightarrow{AC}$;

б) $\overrightarrow{MN}$ через $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OC}$;

в) $\overrightarrow{MK}$ через $\overrightarrow{\text{Д}B}$; $\overrightarrow{O\text{Д}}$;

г) $\overrightarrow{MN}$ через $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{A\text{Д}}$.

$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{MK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{Д}B} = \overrightarrow{O\text{Д}}$

Всегда ли можно выразить один вектор через другой?

Лемма

(вспомогательная теорема, с помощью которой доказывается следующая теорема или несколько теорем)

Если $\vec{а}$ и $\vec{в}$ коллинеарны и $\vec{а} \neq \vec{0}$, то существует такое число к, что $\vec{в} = к\,\vec{а}$.

$\vec{а}$ и $\vec{в}$ – два данных вектора. Если вектор $\vec{р} = х\,\vec{а} + у\,\vec{в}$, где х и у – некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{р}$ разложен по векторам $\vec{а}$ и $\vec{в}$.

х и у – коэффициенты разложения

Теорема. Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

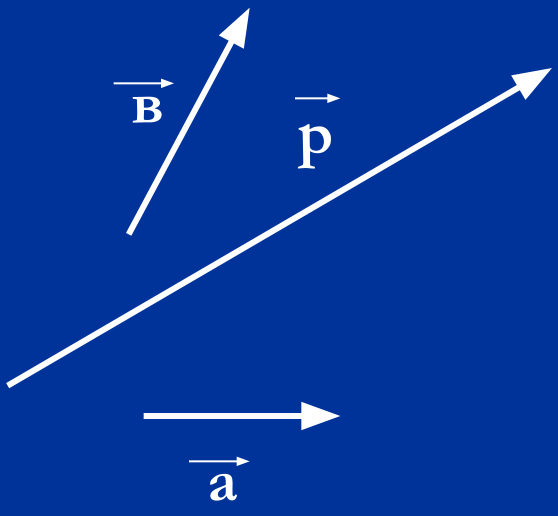
Дано: а и в неколлинеарные векторы, р – произвольный вектор.

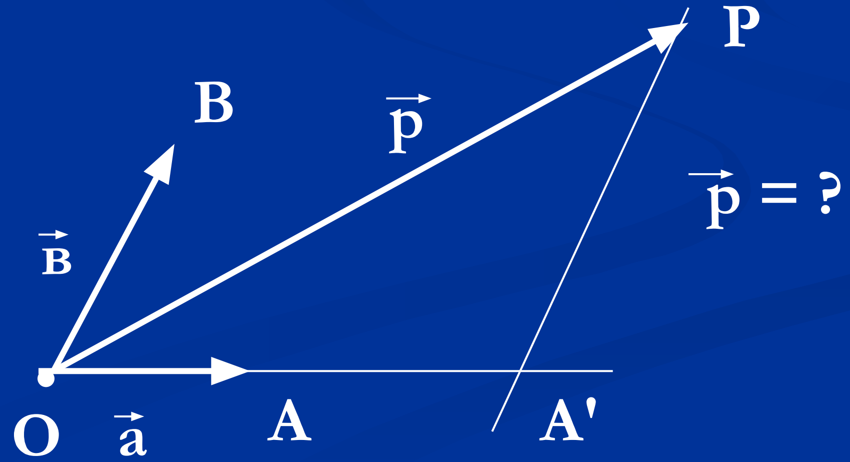
Док- ть: 1) $\vec{p} = x\,\vec{a} + y\,\vec{в}$,

2) х и у – единственные.

В док-ве п. 1. возможны два случая: а) $\vec{p}$ коллинеарен одному из векторов (например $\vec{в}$). Тогда по лемме $\vec{p} = y\,\vec{в}$, где у – некоторое число, и тогда $\vec{p} = 0\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{в}$ (разложили)

б) $\vec{p}$ не коллинеарен ни $\vec{a}$, ни $\vec{в}$.





$\vec{p} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'P}$.

$\overrightarrow{OA'}$ и $\overrightarrow{A'P}$ коллинеарны $\vec{a}$ и $\vec{в}$, значит, существует x, что $\overrightarrow{OA'} =$ $= x\vec{a}$, и y, что $\overrightarrow{A'P} = y\vec{в}$, т.е. $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{в}$ (разложили).

2) покажем, что x и y – единственные.

Допустим, что существует два разложения: $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{в}$ и $\vec{p} = x'\vec{a} + y'\vec{в}$.

Вычтем из первого равенства второе:

$\vec{0} = (x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{в}$

Это равенство выполняется, если $x - x' = 0$ и $y - y' = 0$, т.к. если предположить, что $x - x' \neq 0$, то $\vec{a} = -(y - y') / (x - x')$, т.е. $\vec{a}$ и $\vec{в}$ коллинеарны(противоречие). Значит, $x - x' = 0$, $y - y' = 0$, откуда $x = x'$ и $y = y'$.

Д/з. п. 86, вопросы 1 – 3.

№ 911, 914(б, в), 915.

Решить в классе: № 912, 914.

Дополнительная задача.

В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке O. Через O проведена прямая, параллельная AB и пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите, если возможно, число к, такое, что:

А) $\overrightarrow{MN} = к \cdot \overrightarrow{BA}$, б) $\overrightarrow{AB} = к \cdot \overrightarrow{NM}$, в) $\overrightarrow{CO} = к \cdot \overrightarrow{CC'}$, где CC' - медиана, г) $\overrightarrow{OC'} = к \cdot \overrightarrow{OC}$