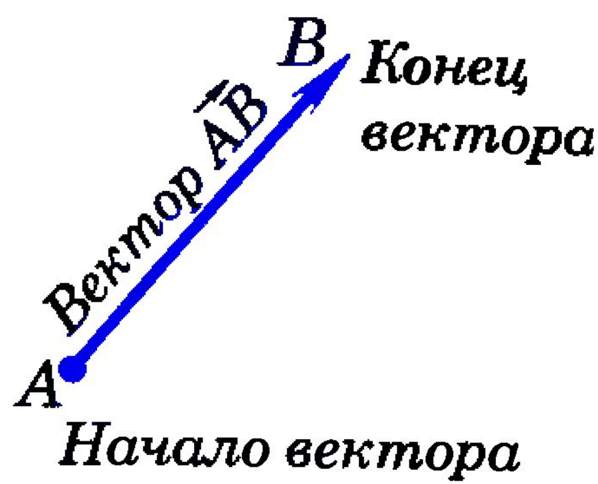
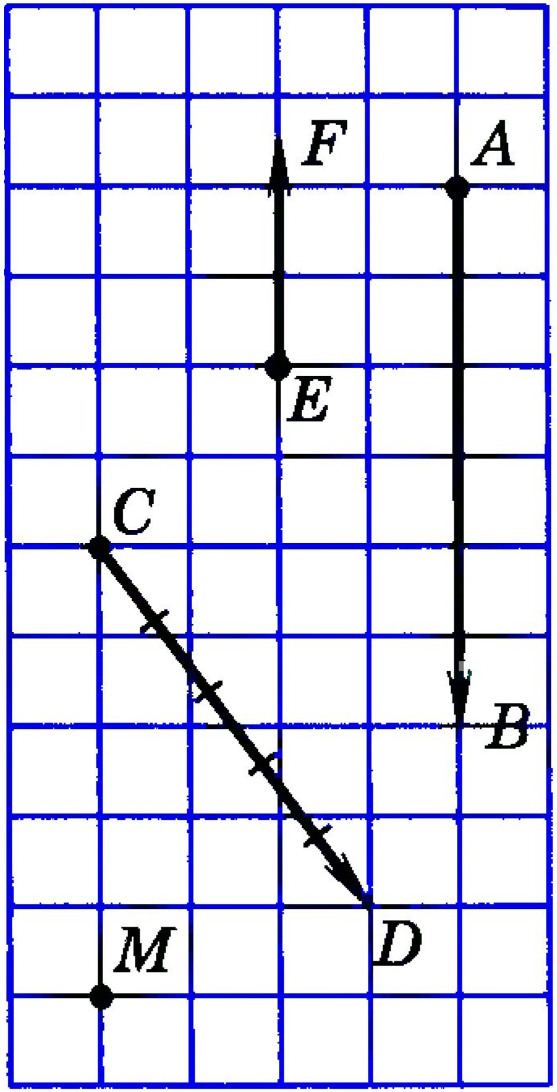
Понятие вектора

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом, называется **направленным отрезком** или **вектором**.

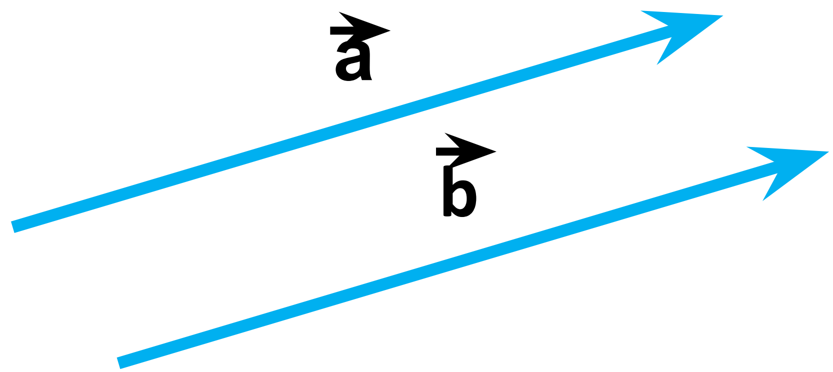


Длиной или модулем ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 6,$$

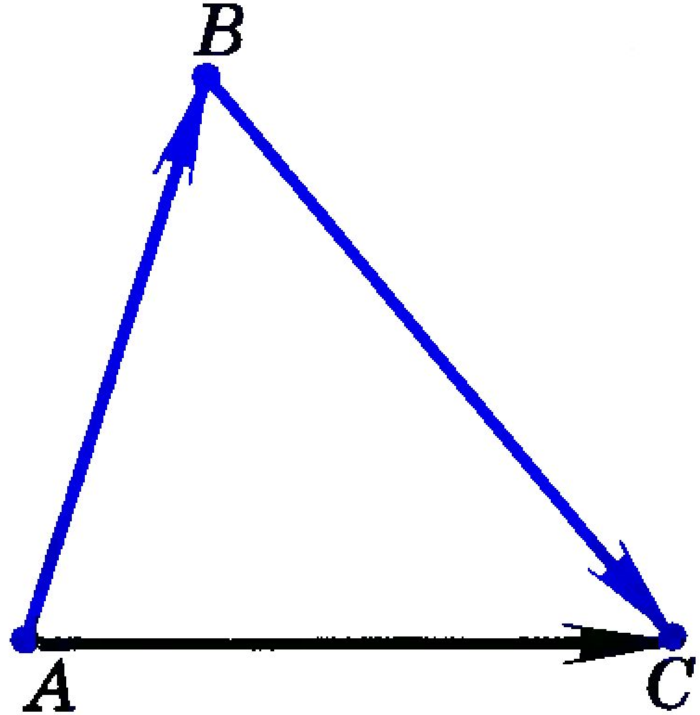


Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.



$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \text{ и } |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

Сумма двух векторов

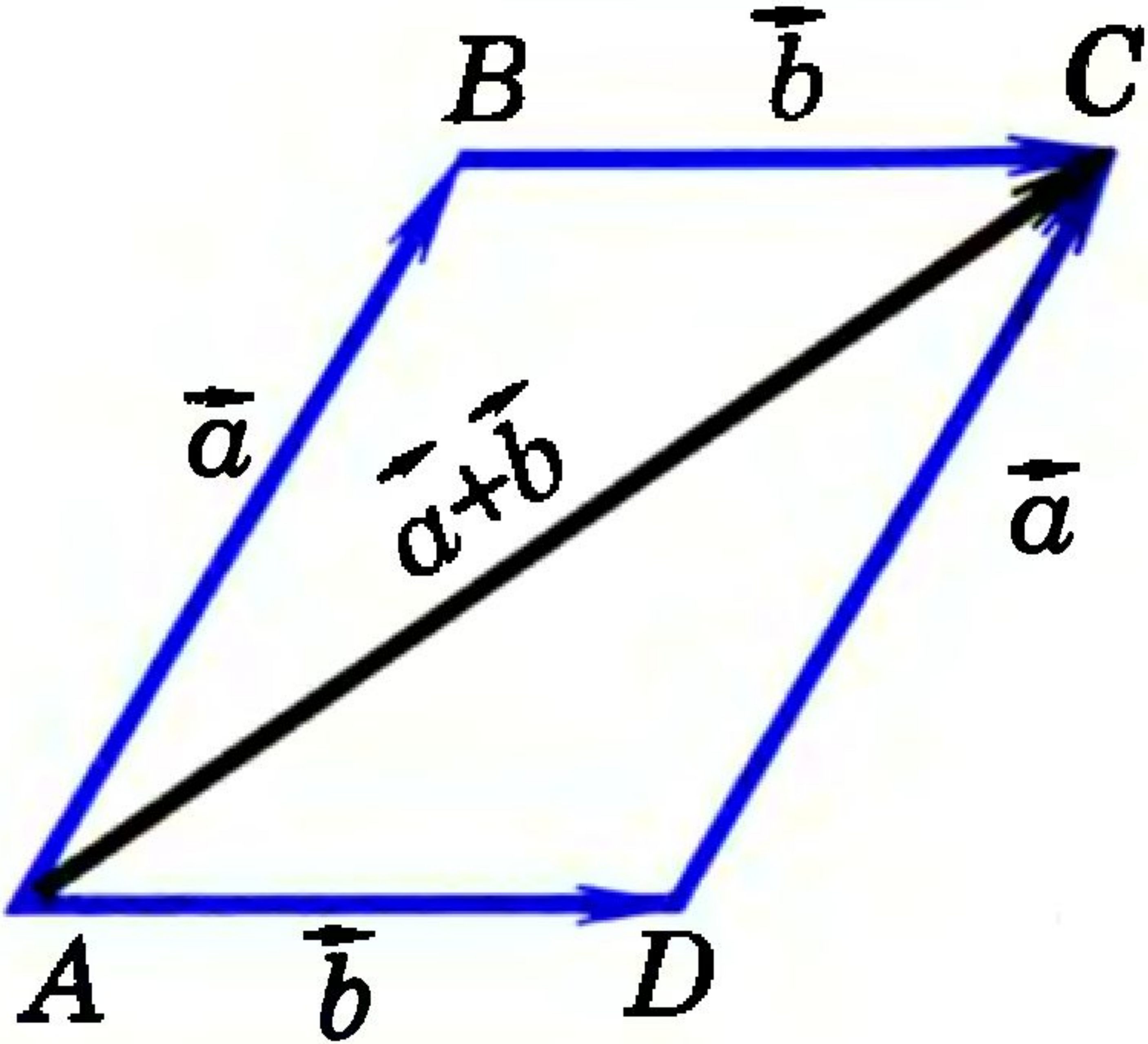


Законы сложения векторов. Правило параллелограмма

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

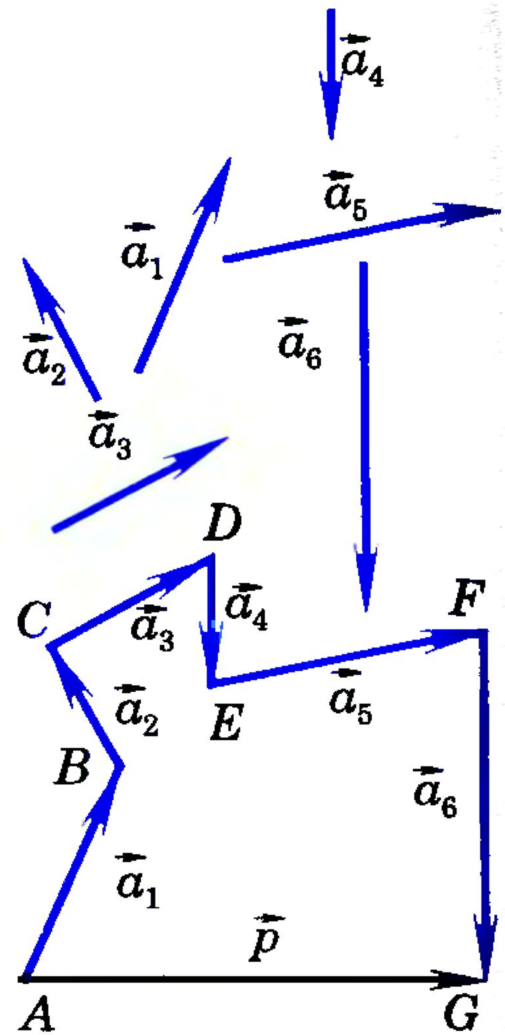
1⁰. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ **(переместительный закон).**

2⁰. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ **(сочетательный закон).**



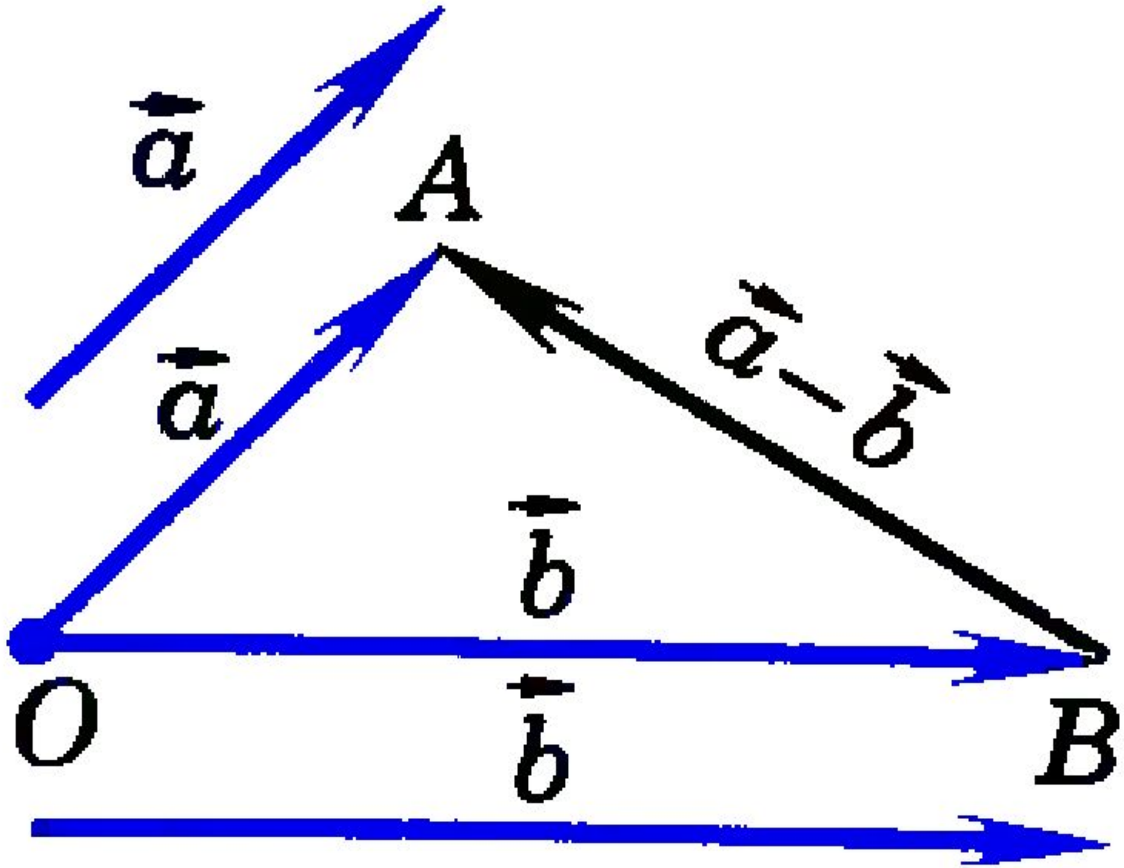
B
C
A
D
$\vec{b}$
$\vec{a}$
$\vec{a}+\vec{b}$
$\vec{a}$
$\vec{b}$

Сумма нескольких векторов

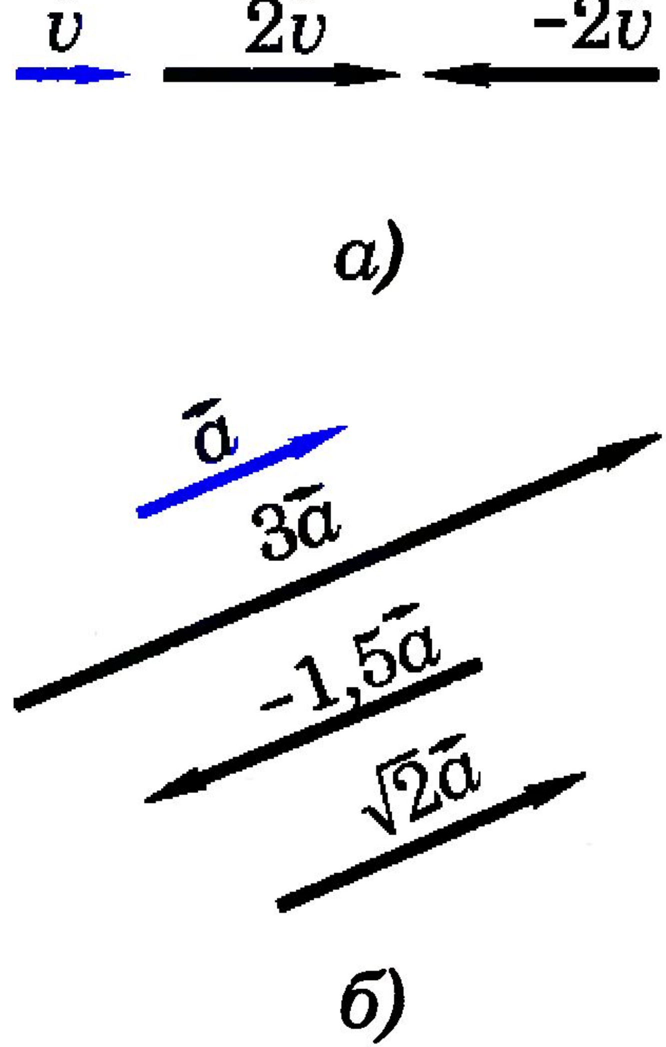


$\vec{p} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 + \vec{a}_6$

Вычитание векторов

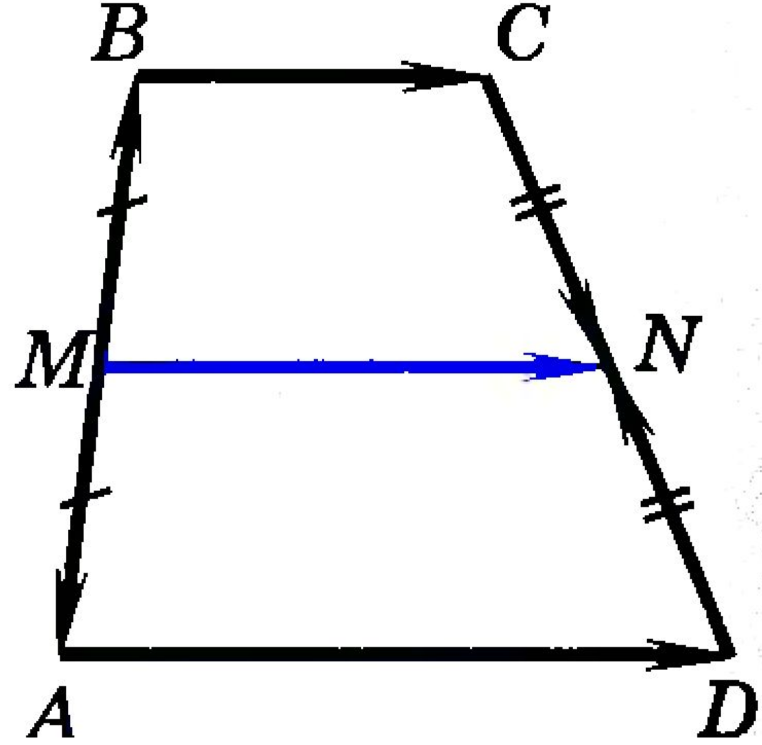


Произведение вектора на число



Средняя линия трапеции

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

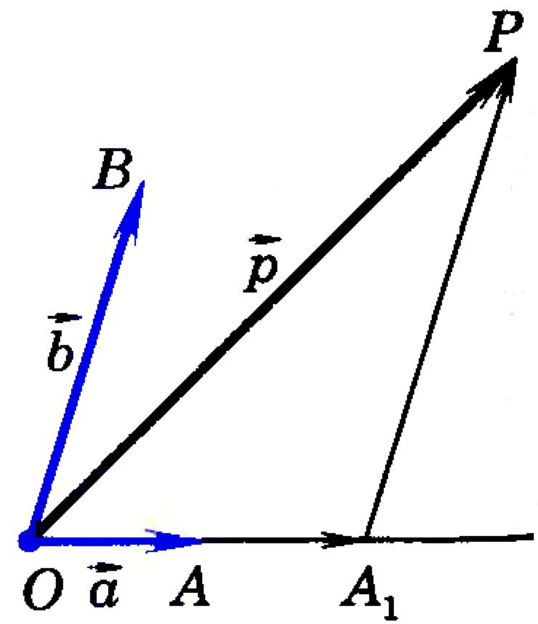


Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

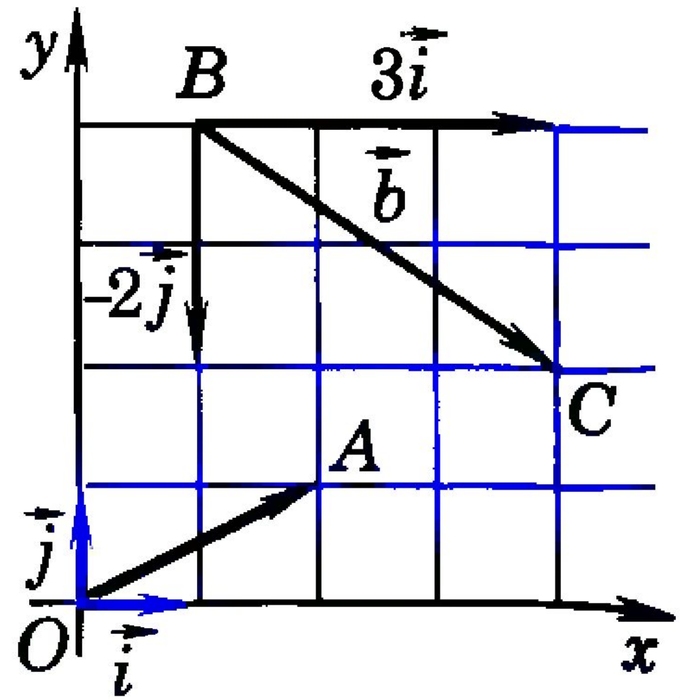
Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

На плоскости любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$



Координаты вектора



$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

1^0. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

$\vec{a}+\vec{b}$ равны $\{x_1+x_2;\ y_1+y_2\}$.

2^0. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

$\vec{a}-\vec{b}$ имеет координаты $\{x_1-x_2;\ y_1-y_2\}$.

3^0. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

$k\vec{a}$ равны $\{kx;\ ky\}$.

каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

$\overrightarrow{AB}$ имеет

координаты $\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}$.

Координаты середины отрезка.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

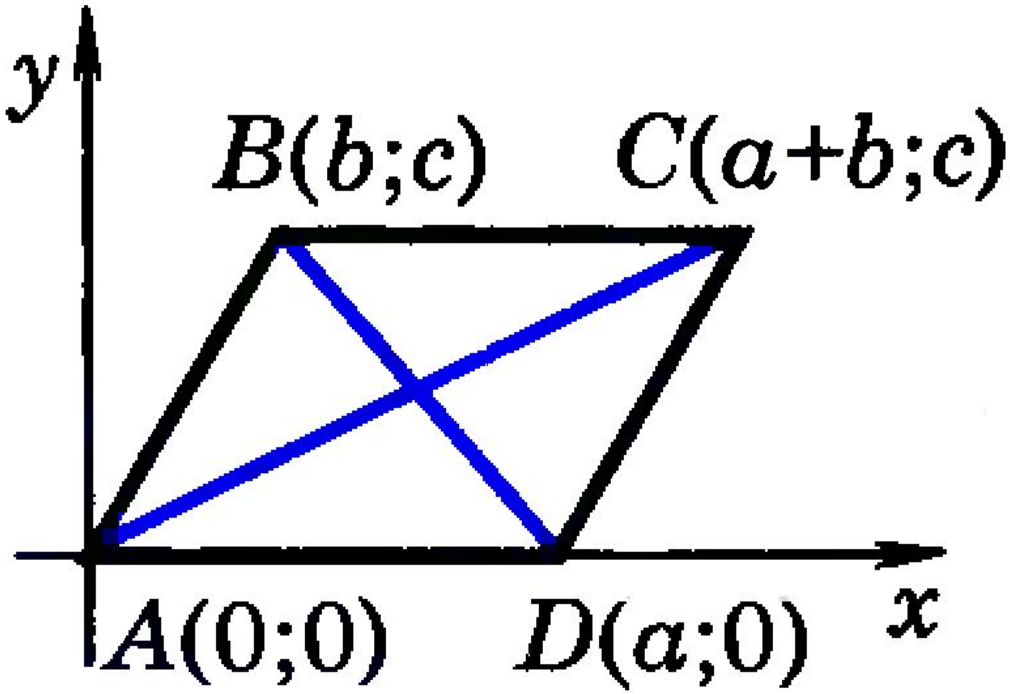
Длина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Расстояние между двумя точками

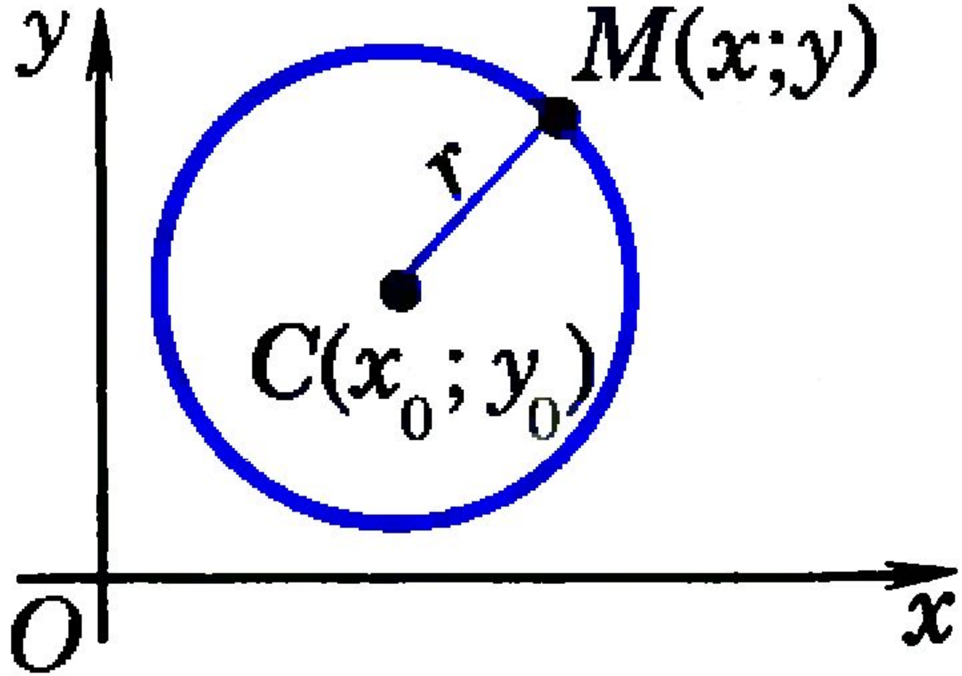
$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.



Уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



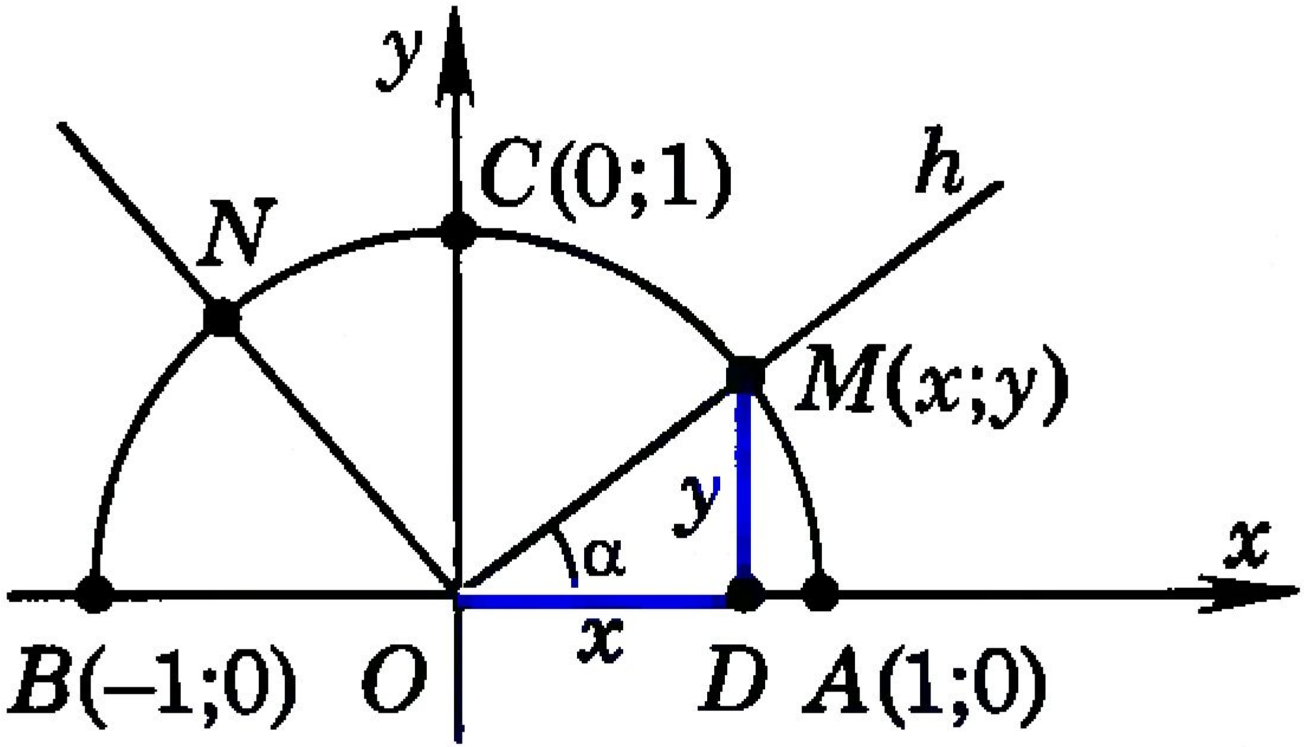
В частности, уравнение окружности радиуса r с центром в начале координат имеет вид:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Уравнение прямой

$$ax+by+c=0,$$

Синус, косинус, тангенс



$$\sin \alpha = y, \ \cos \alpha = x.$$

Тангенсом угла α ($\alpha \neq 90°$) называется отношение $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

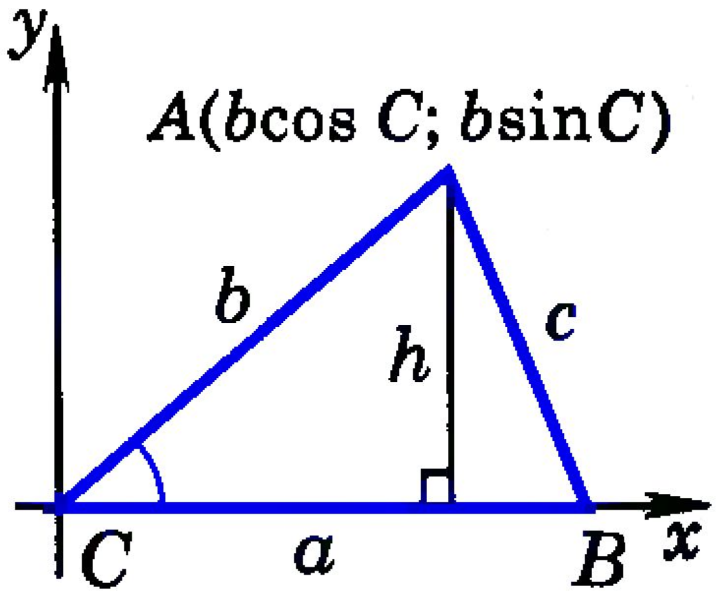
Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

Теорема о площади треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C \,.$$



Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

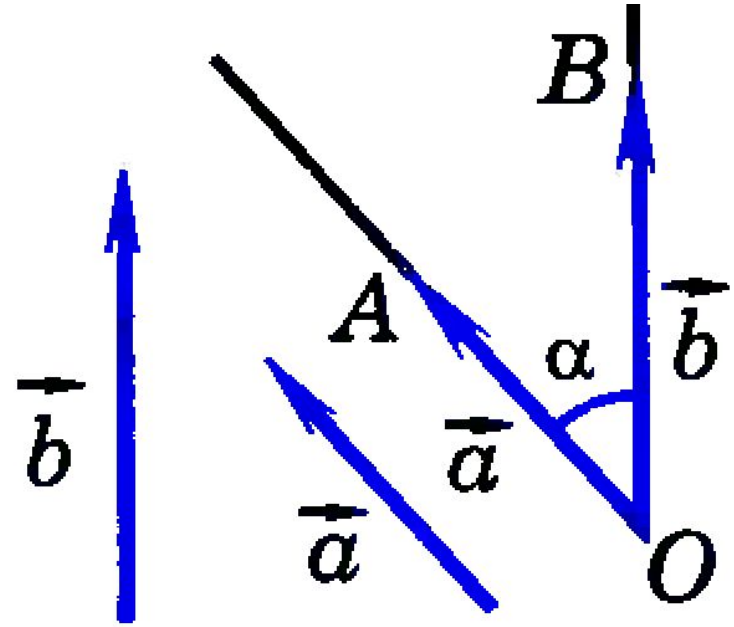
где R — радиус описанной окружности.

Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Угол между векторами



Два вектора называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°. На рисунке 301 $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{d}$, $\vec{b} \perp \vec{f}$.

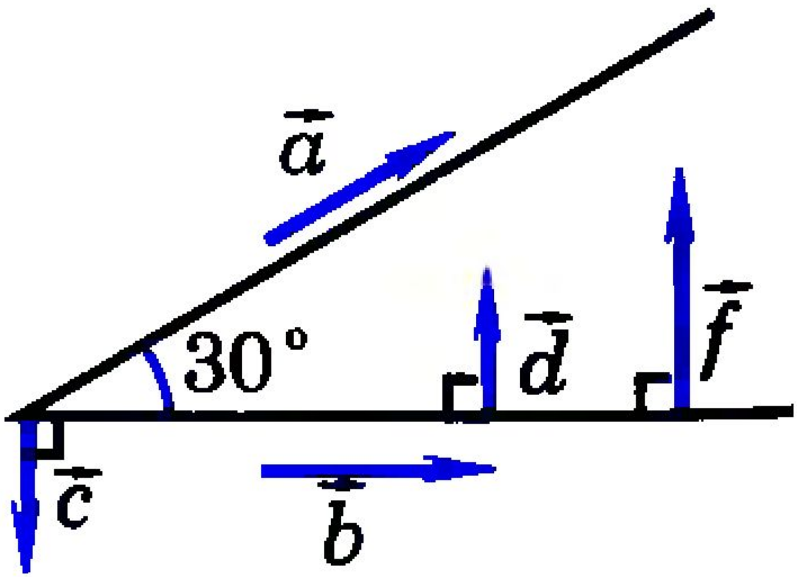


Рис. 301

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}).$$

Таким образом, **скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.**

. . . . .

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$. Таким образом, **скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.**

Скалярное произведение в координатах

В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2. \qquad (2)$$

Следствие 1

Ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Следствие 2

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$ выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \qquad (5)$$

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

1^0. $\vec{a}^{\,2} \geqslant 0$, причем $\vec{a}^{\,2} > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$.

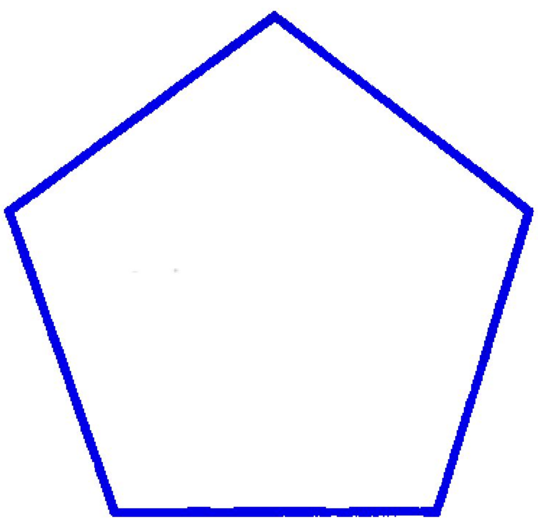
2^0. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон).

3^0. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон).

4^0. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон).

Правильный многоугольник

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.



Выведем формулу для вычисления угла α_n правильного n-угольника. Сумма всех углов такого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$, причем все его углы равны, поэтому

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°.$$

Окружность, описанная около правильного многоугольника

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Окружность, вписанная в правильный многоугольник

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Следствие 1

Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

Следствие 2

Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Эта точка называется **центром правильного многоугольника.**

Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности

Пусть S — площадь правильного n-угольника, a_n — его сторона, P — периметр, а r и R — радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей. Докажем сначала, что

$$S = \frac{1}{2} Pr. \tag{1}$$

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n},$$

$$r = R\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

$$a_3 = 2R\sin\frac{180^\circ}{3} = 2R\sin 60^\circ = 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}, \quad (4)$$

$$a_4 = 2R\sin\frac{180^\circ}{4} = 2R\sin 45^\circ = 2R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}, \quad (5)$$

$$a_6 = 2R\sin\frac{180^\circ}{6} = 2R\sin 30^\circ = 2R\cdot\frac{1}{2} = R. \quad (6)$$

Длина окружности

$$C = 2\pi R.$$

Длина дуги окружности

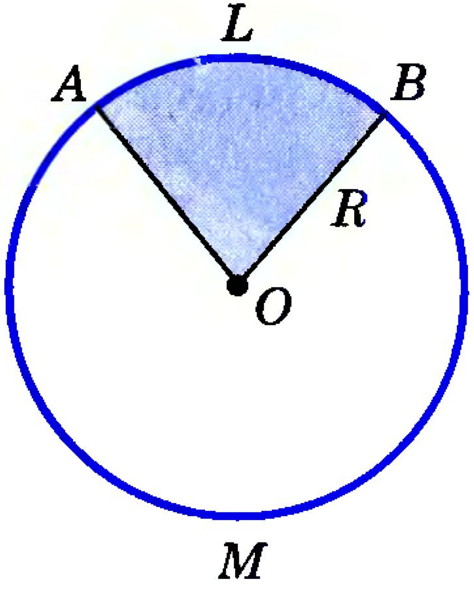
$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha.$$

Площадь круга

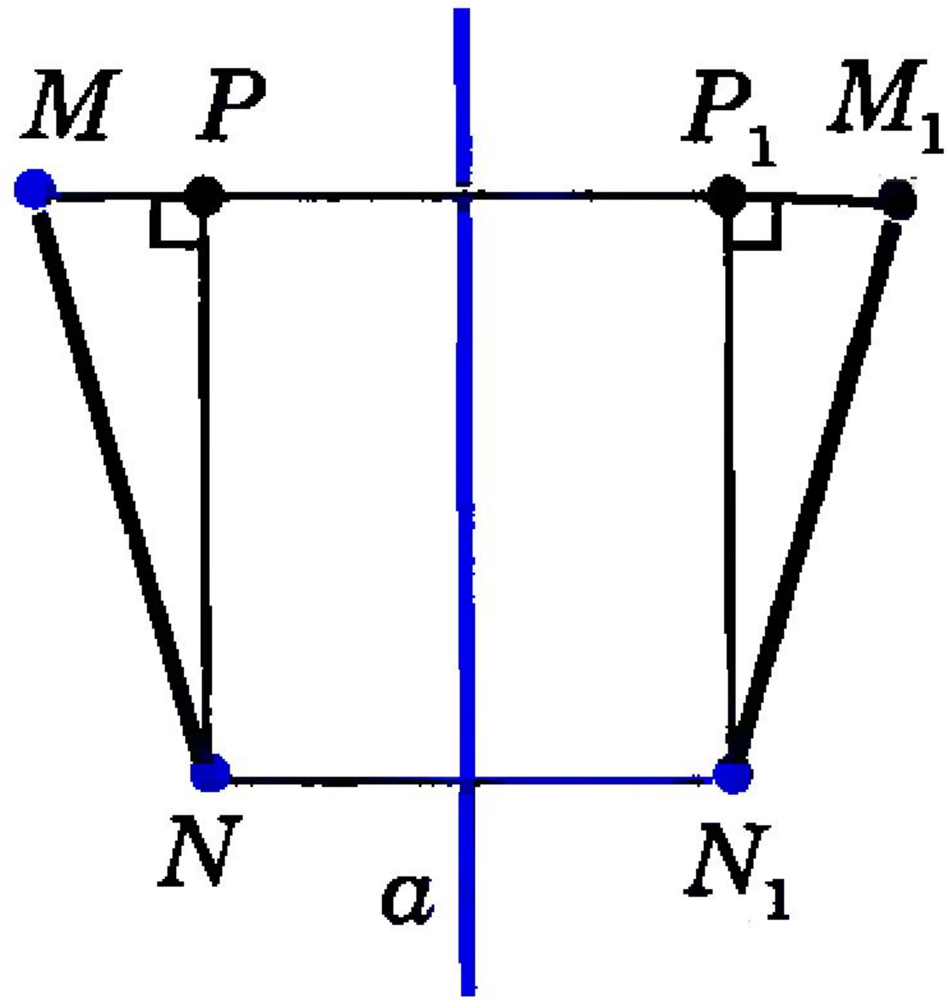
$$S = \pi R^2.$$

Площадь кругового сектора

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha.$$



Понятие движения



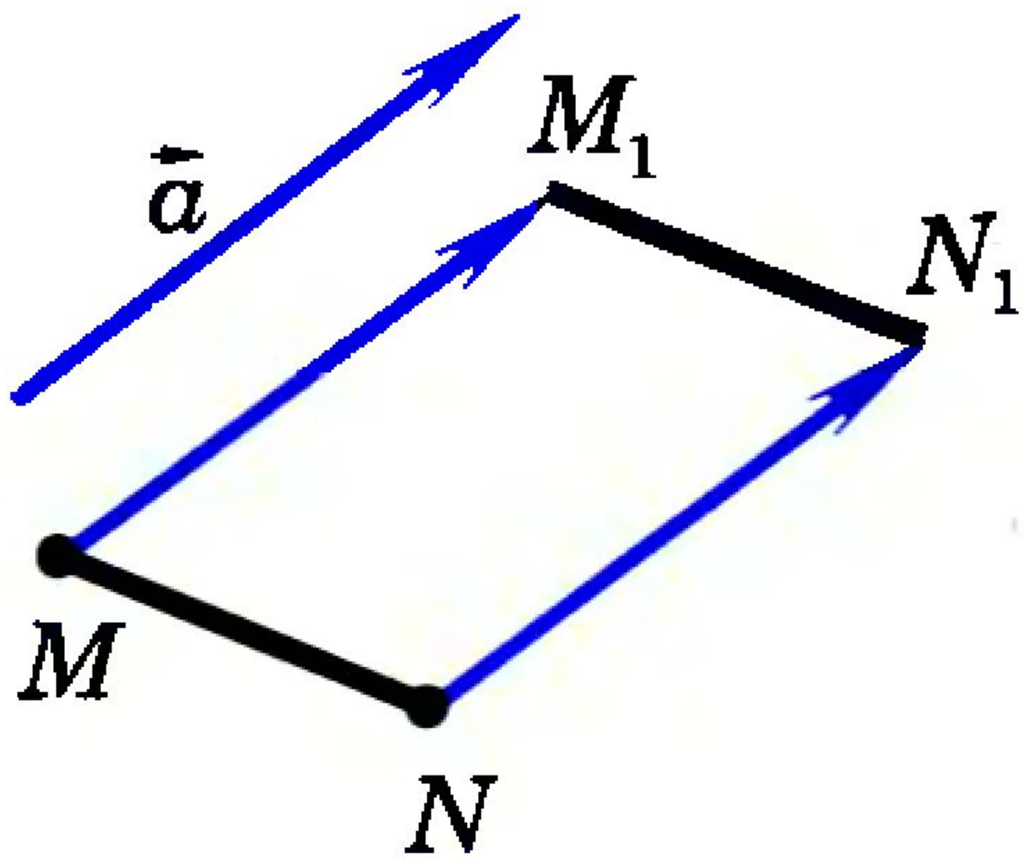
При движении отрезок отображается на отрезок.

Следствие

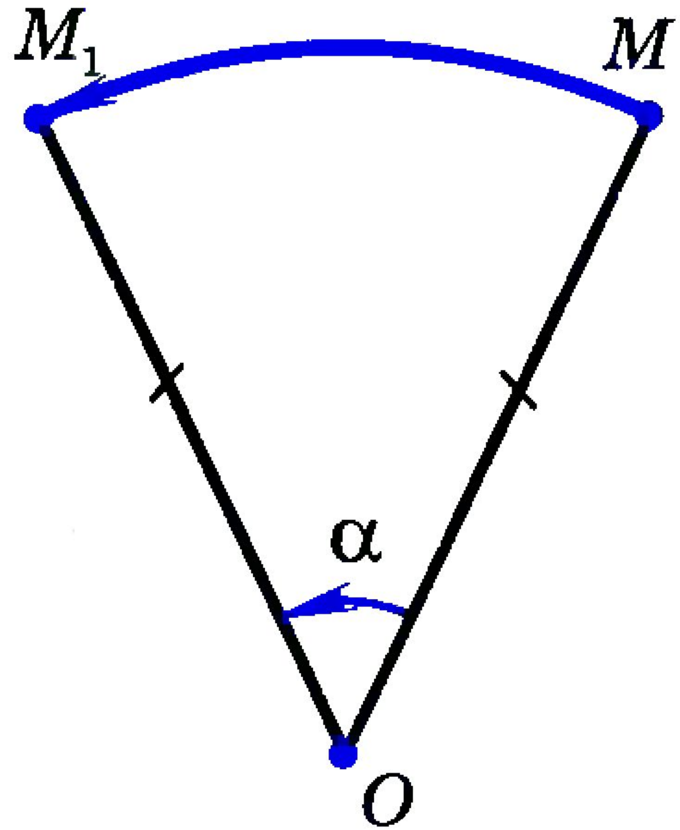
При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

При движении любая фигура отображается на равную ей фигуру.

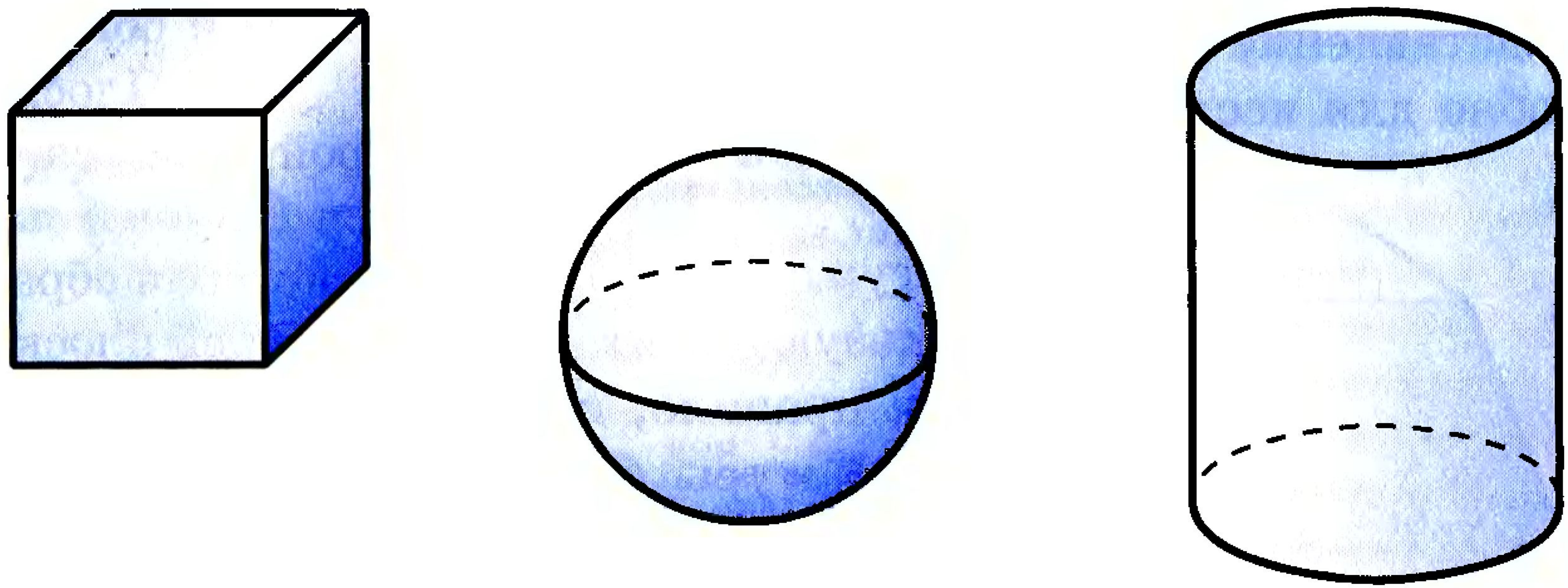
Параллельный перенос

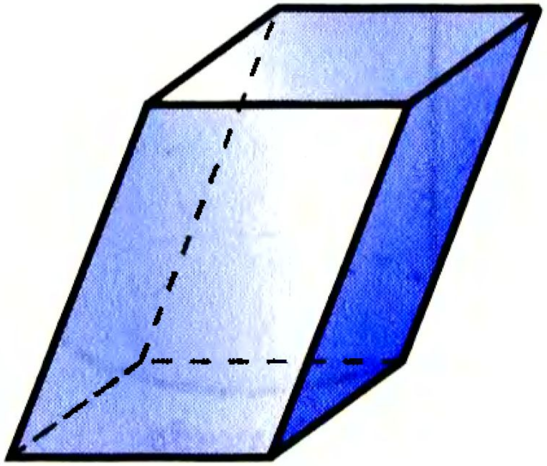


Поворот



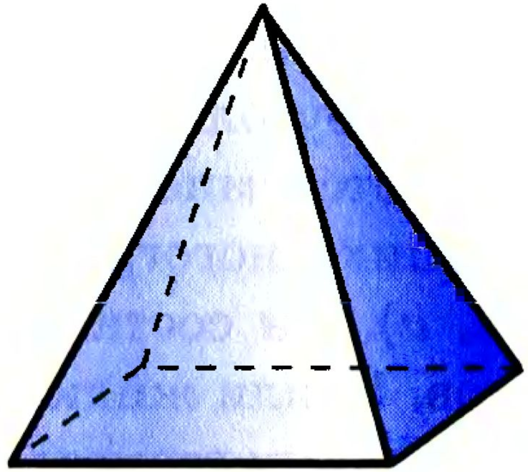
Многогранники





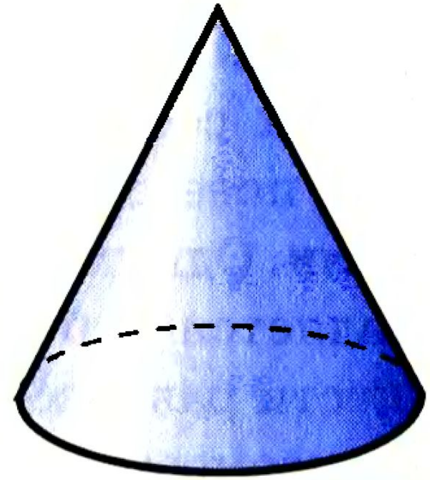
Параллелепипед

а)



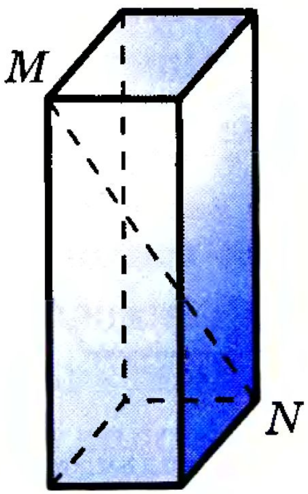
Пирамида

б)



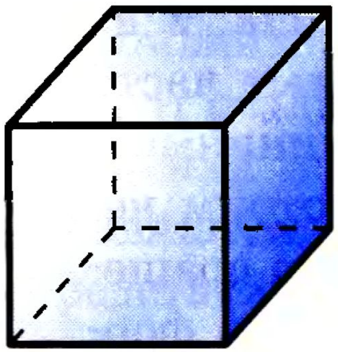
Конус

в)



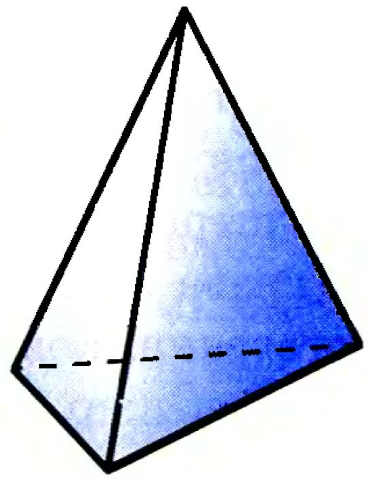
Прямоугольный параллелепипед

а)



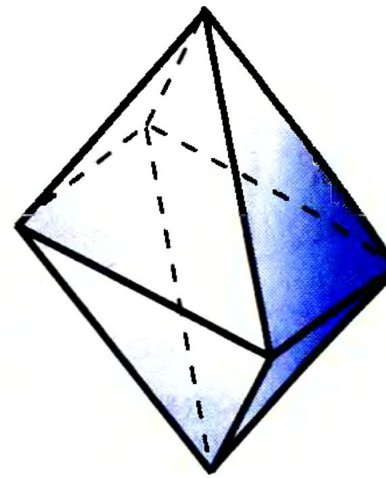
Куб

б)



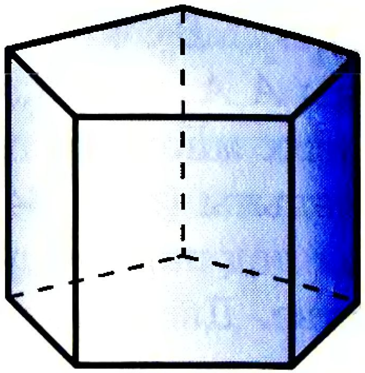
Тетраэдр

в)

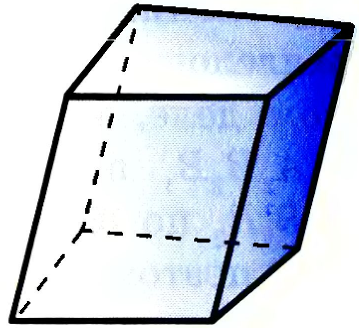


Октаэ

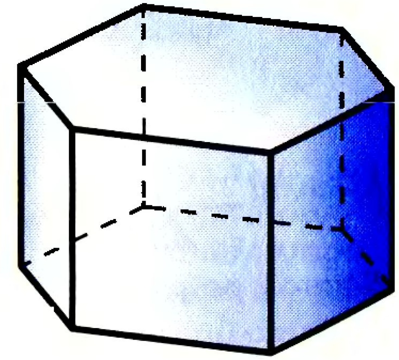
г)



Прямая пятиугольная

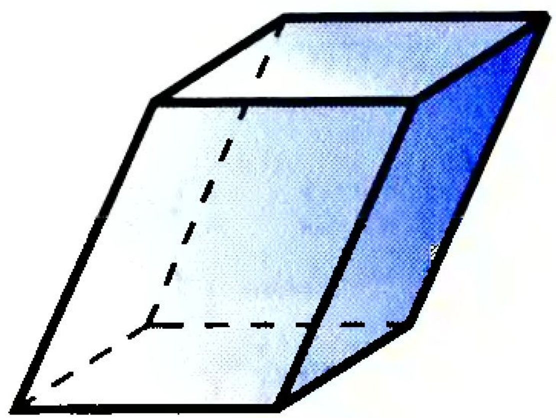


Наклонная четырехугольная призма



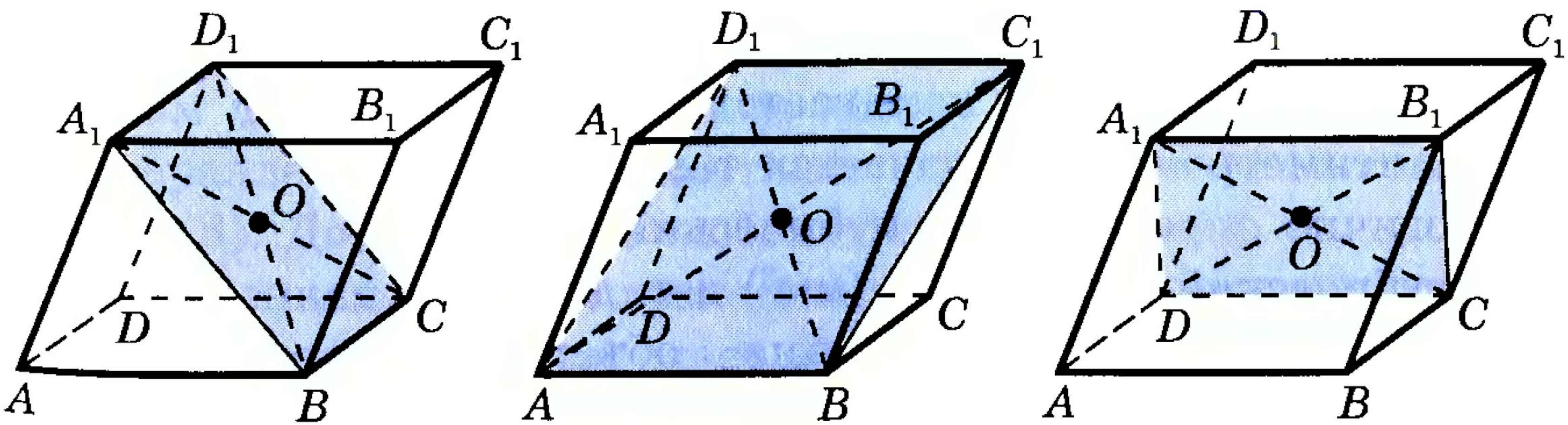
Правильная

Параллелепипед



Параллелепипед

Четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.



Объем тела

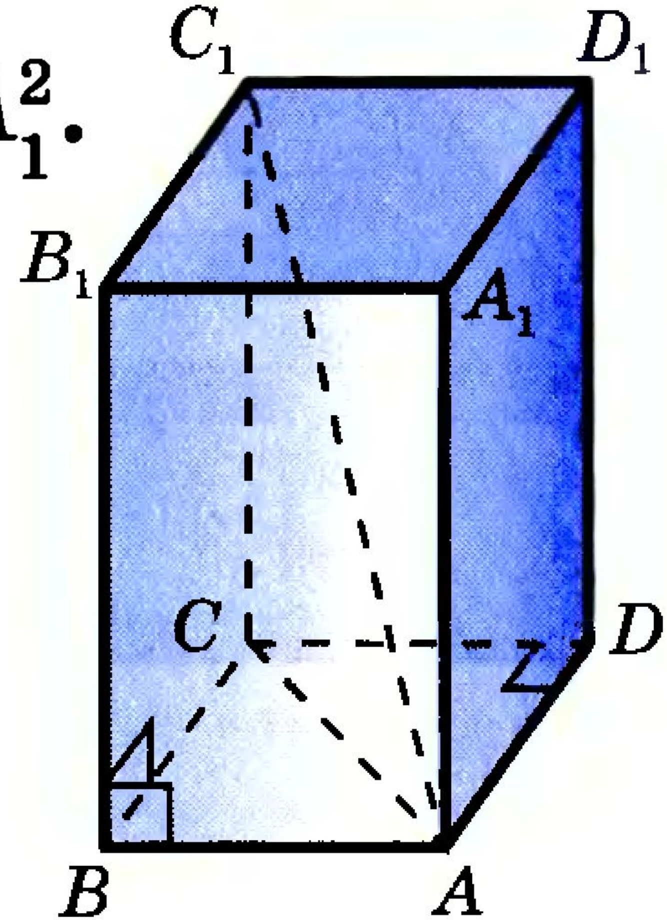
1^0. Равные тела имеют равные объемы.

2^0. Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.

Свойства прямоугольного параллелепипеда

Оказывается, что аналогичным свойством обладает и прямоугольный параллелепипед: **квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.**

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

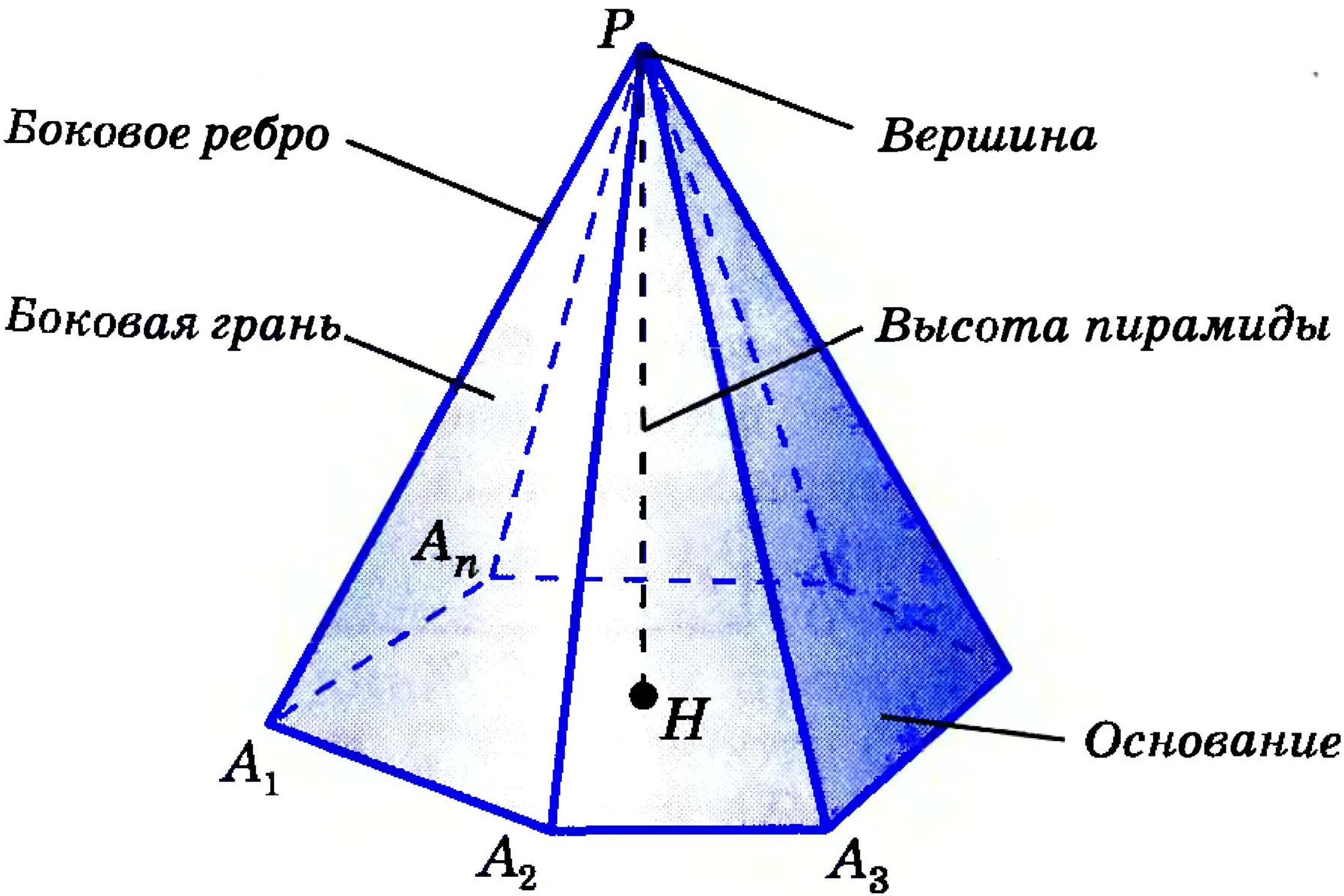


Прямоугольный параллелепипед

$V=abc$ можно записать в виде $V=Sh$, т. е. **объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.**

объем призмы равен произведению площади основания на высоту.

Пирамида



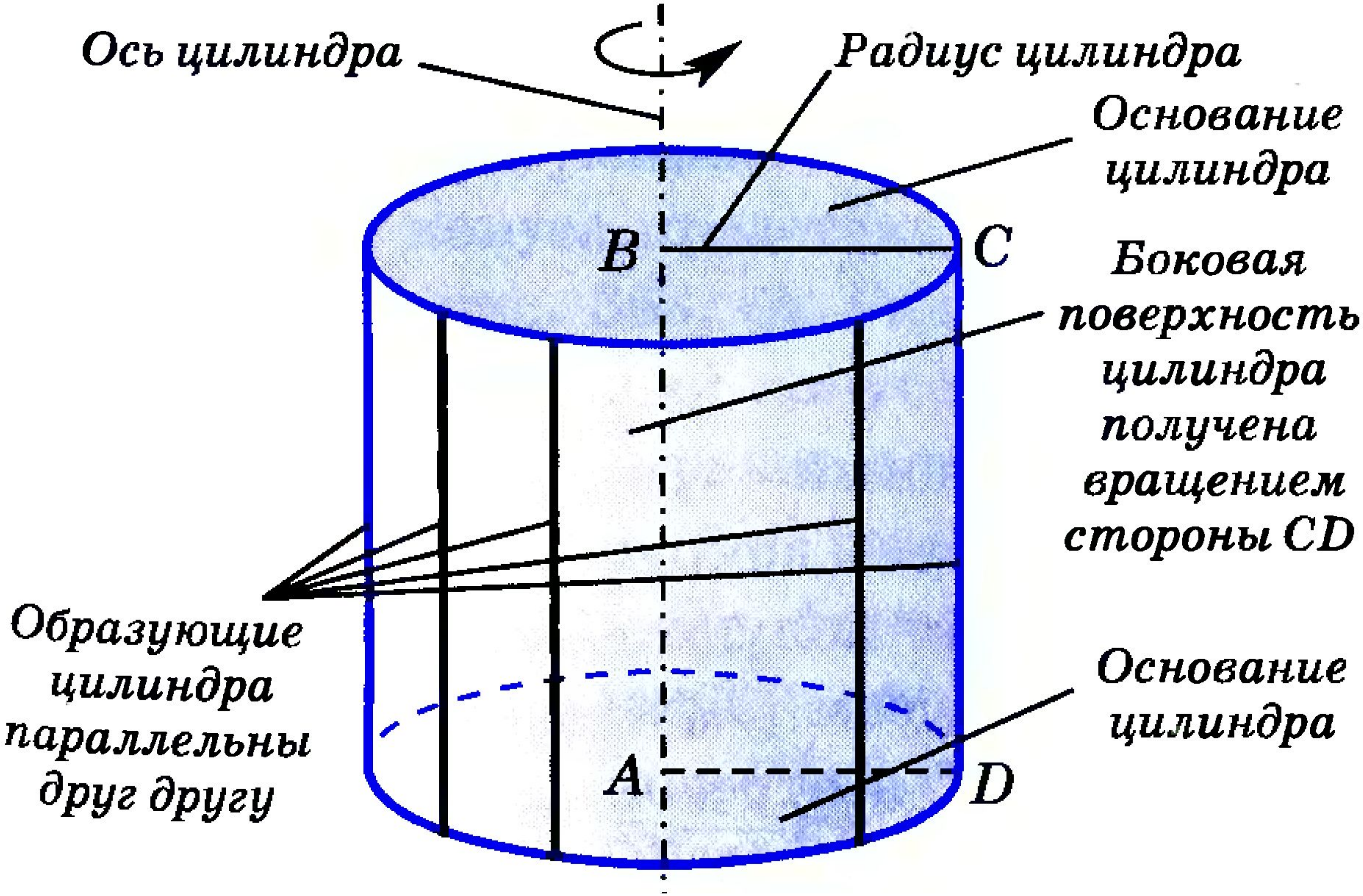
P
Боковое ребро
Вершина
Боковая грань
Высота пирамиды
A_n
H
Основание
A_1
A_2
A_3

объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

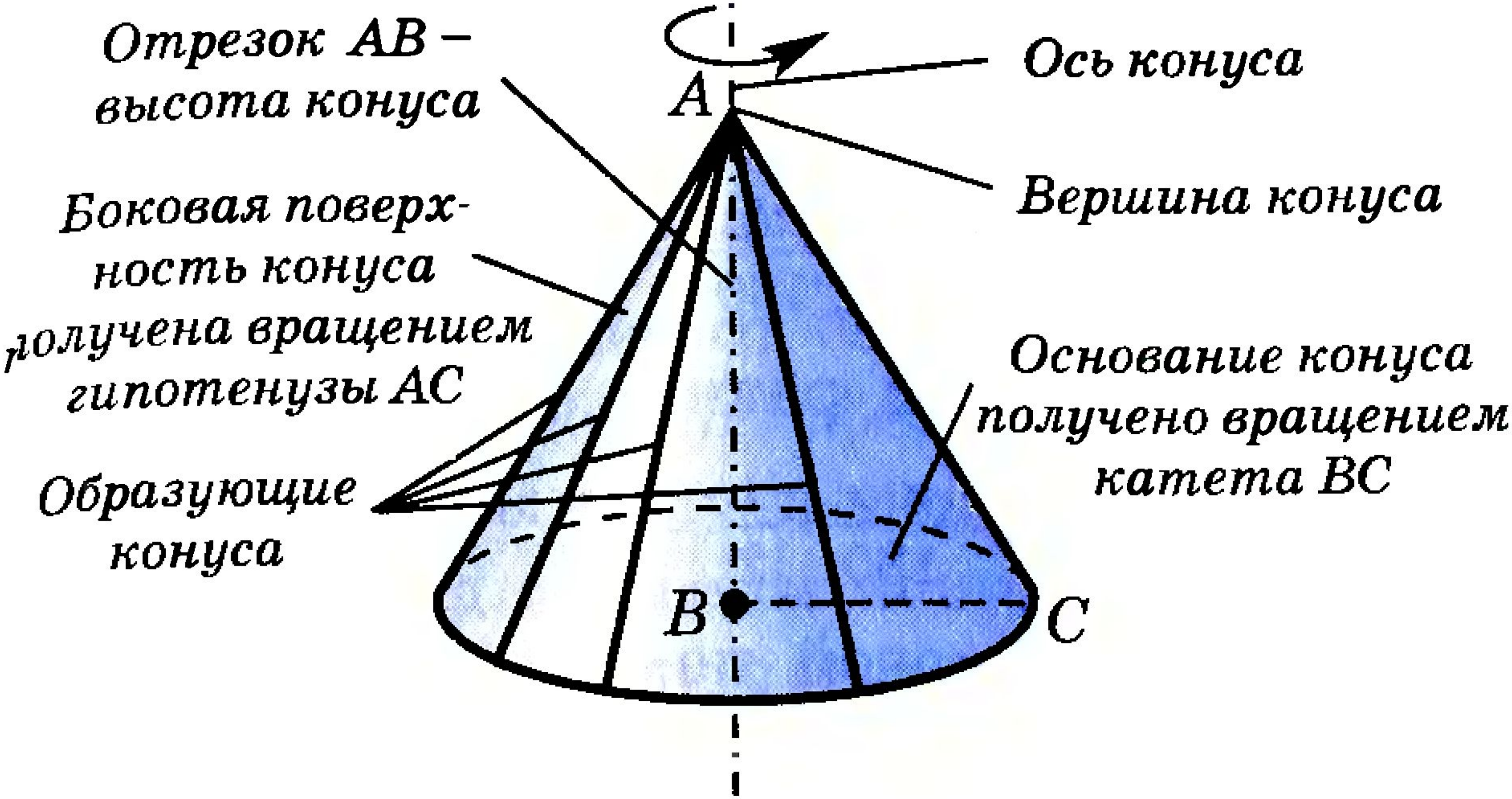
Тела и поверхности вращения

объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

Площадь $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра равна площади ее развертки, т. е. $S_{бок}=2\pi rh$.


Ось цилиндра
Радиус цилиндра
Основание цилиндра
B
C
Боковая поверхность цилиндра получена вращением стороны CD
Образующие цилиндра параллельны друг другу
Основание цилиндра
A
D

Цилиндр



Отрезок AB –
высота конуса
A
Ось конуса
Вершина конуса
Боковая поверх-
ность конуса
получена вращением
гипотенузы AC
Основание конуса
получено вращением
катета BC
Образующие
конуса
B
C

Конус

Объе

конуса равен одной трети произведения пло-

м

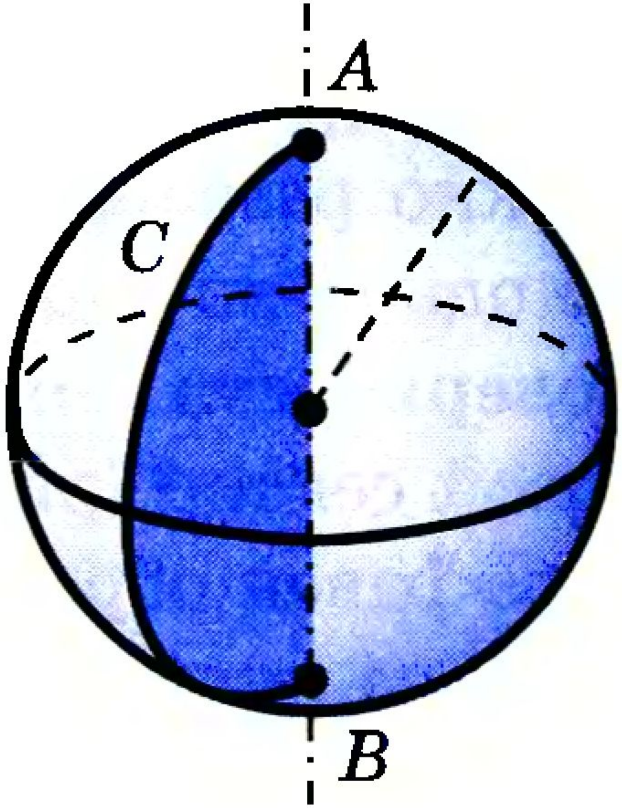
щади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

Площадь $S_{бок}$ боковой поверхно-
сти конуса равна площади ее развертки, т. е.

$$S_{бок} = \frac{\pi l^2}{360}\alpha \qquad S_{бок} = \pi r l.$$

Сфера и шар



*Шар получен враще-
нием полукруга ACB
вокруг диаметра AB*

Объем шара $\frac{4}{3}\pi R^3.$

=

$$S = 4\pi R^2.$$