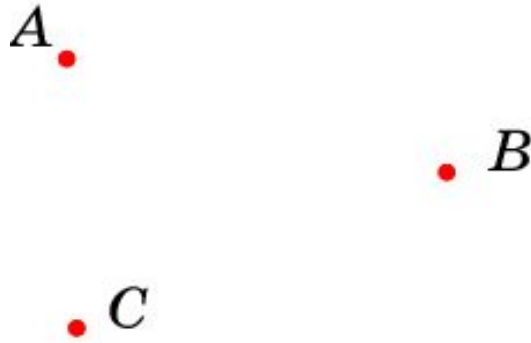


Точки



Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т. е. таких, размерами которых можно пренебречь.

Древнегреческий ученый Евклид, впервые давший научное изложение геометрии, в своей книге "Начала" определял точку как то, что не имеет частей.

Точки изображаются остро отточенным карандашом или ручкой на листе бумаги, мелом на доске и т.п.

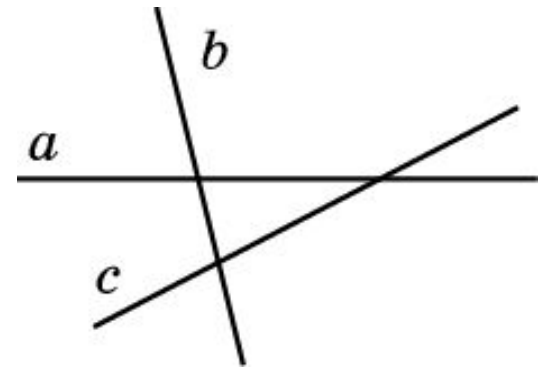
Точки обозначаются прописными латинскими буквами A , B , C , ..., A_1 , B_2 , C_3 , ..., A' , B'' , C''' , ...

Прямые и плоскость

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

Прямые проводятся на листе бумаги или доске с помощью линейки. Хотя изображения прямых ограничены, их следует представлять себе неограниченно продолженными в обе стороны.

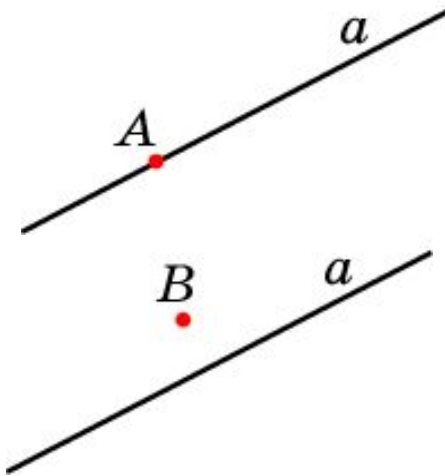
Прямые обозначаются строчными латинскими буквами $a, b, c, \dots, a_1, b_2, c_3, \dots, a', b'', c''', \dots$, или двумя прописными латинскими буквами $AB, CD, \dots, A_1B_1, C_2D_2, \dots, A'B', C''D'', \dots$



Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т.п.

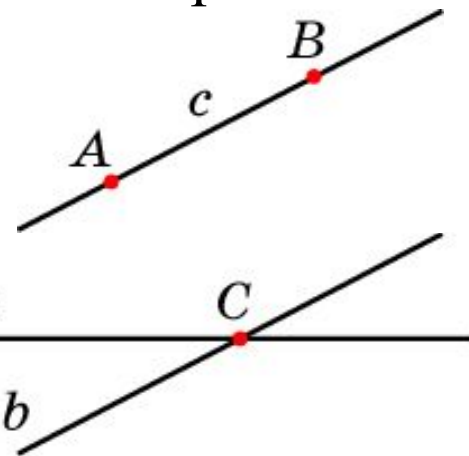
Точки и прямые

Точка может принадлежать данной прямой, в этом случае говорят также, что прямая проходит через точку, а может и не принадлежать ей, в этом случае говорят, что прямая не проходит через точку.

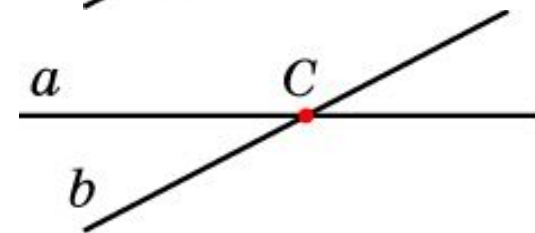


В качестве аксиомы принимается следующее свойство прямых:

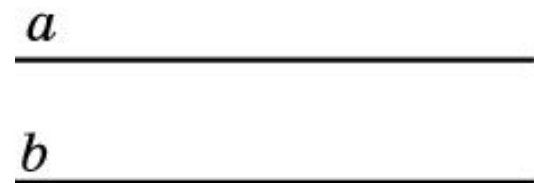
Через любые две точки проходит единственная прямая



Две прямые называются **пересекающимися**, если они имеют одну общую точку.



Две прямые называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.



Обозначения

Запись	Чтение
A, B, C, \dots	Точка A , точка B , точка C , ...
a, b, c, \dots AB, CD, \dots	Прямая a , прямая b , ... Прямая AB , прямая CD , ...
$A \in a$	Точка A принадлежит прямой a .
$B \notin a$	Точка B не принадлежит прямой a .

Вопрос 1

Какие геометрические фигуры являются основными?

Ответ: Точка, прямая, плоскость.

Вопрос 2

Какие объекты идеализирует точка?

Ответ: Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т.е. таких, размерами которых можно пренебречь.

Вопрос 3

Какие объекты идеализирует прямая?

Ответ: Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы, по прямой распространяется свет.

Вопрос 4

Какие объекты идеализирует плоскость?

Ответ: Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т.п.

Вопрос 5

Как Евклид определял точку?

Ответ: Евклид определял точку как то, что не имеет частей.

Вопрос 6

Как изображаются точки?

Ответ: Точки изображаются остро отточенным карандашом или ручкой на листе бумаги, мелом на доске и т.п.

Вопрос 7

Как обозначаются точки?

Ответ: Точки обозначаются прописными латинскими буквами A, B, C, \dots

Вопрос 8

Как проводятся прямые?

Ответ: Прямые проводятся на листе бумаги или доске с помощью линейки.

Вопрос 9

Как обозначаются прямые?

Ответ: Прямые обозначаются строчными латинскими буквами a , b , c , ..., или двумя прописными латинскими буквами AB , CD ,

Вопрос 10

Какие свойства основных геометрических фигур называются аксиомами?

Ответ: Аксиомами называются свойства геометрических фигур, принимаемые без доказательства.

Вопрос 11

Как переводится слово «аксиома» с греческого языка?

Ответ: Достойное признания, не вызывающее сомнения.

Вопрос 12

Как могут располагаться друг относительно друга точка и прямая?

Ответ: Точка может принадлежать данной прямой, а может и не принадлежать ей.

Вопрос 13

Какое свойство принимается в качестве аксиомы взаимного расположения точек и прямой?

Ответ: Через любые две точки проходит единственная прямая.

Вопрос 14

Какие две прямые называются
пересекающимися?

Ответ: Две прямые называются
пересекающимися, если они имеют одну
общую точку.

Вопрос 15

Какие две прямые называются параллельными?

Ответ: Две прямые называются параллельными, если они не имеют ни одной общей точки.

Упражнение 1

Сколько прямых можно провести через: а) одну точку; б) две точки?

Ответ: а) Бесконечно много; б) одну.

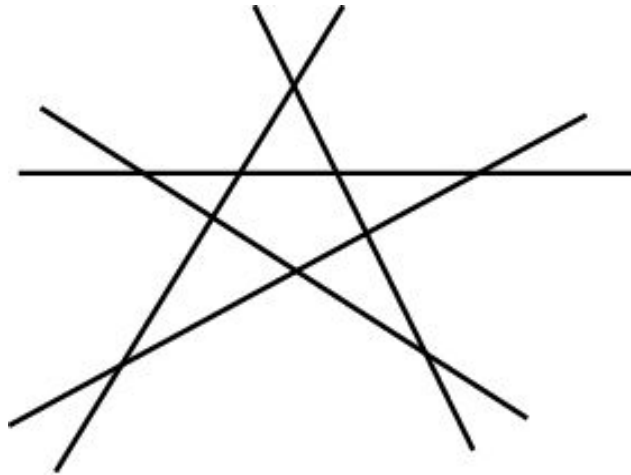
Упражнение 2

Сколько прямых можно провести через три точки?

Ответ: Либо одну, либо ни одной.

Упражнение 3

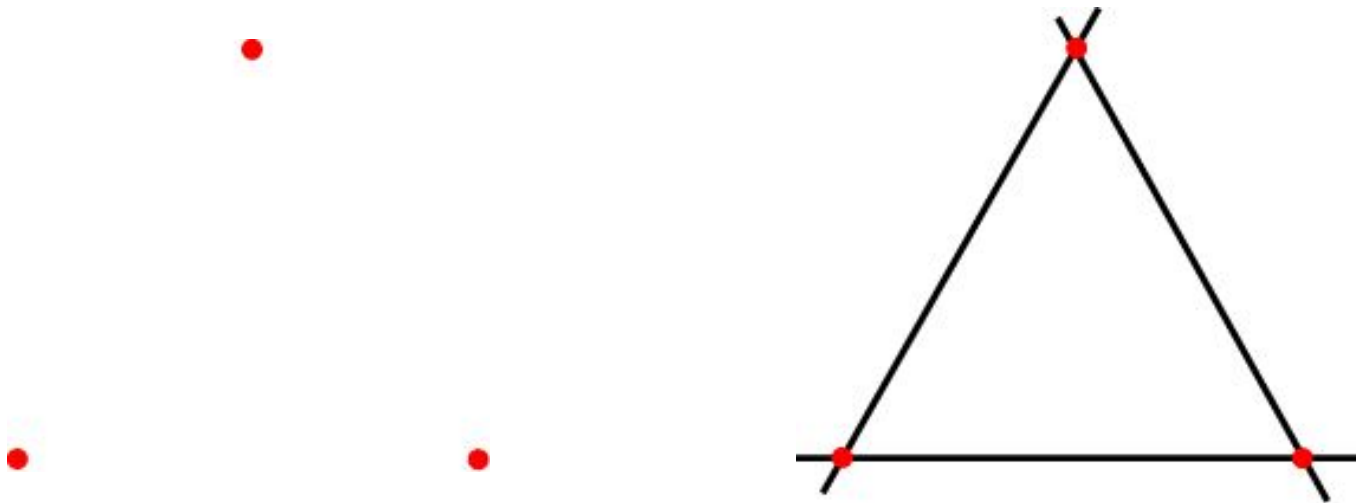
Сколько прямых изображено на рисунке? Сколько у них точек попарных пересечений?



Ответ: 5 прямых, 10 точек.

Упражнение 4

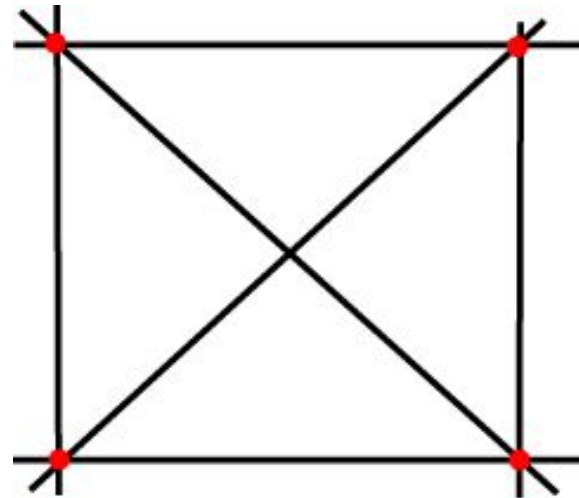
Сколько прямых можно провести через различные пары из трех точек, не лежащих на одной прямой?



Ответ: Три.

Упражнение 5

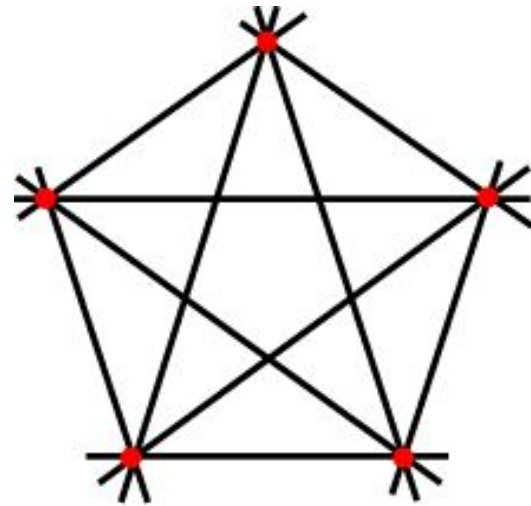
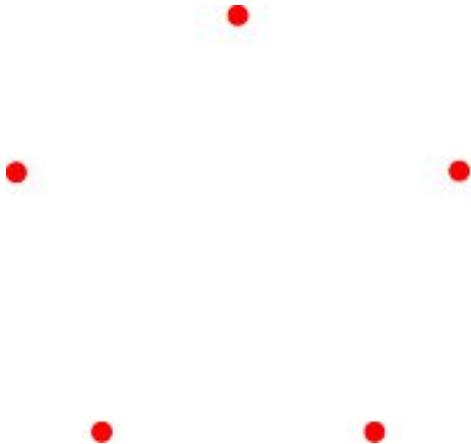
Сколько прямых можно провести через различные пары из четырех точек, ни какие три из которых не лежат на одной прямой?



Ответ: 6.

Упражнение 6

Сколько прямых можно провести через различные пары из пяти точек, ни какие три из которых не лежат на одной прямой?

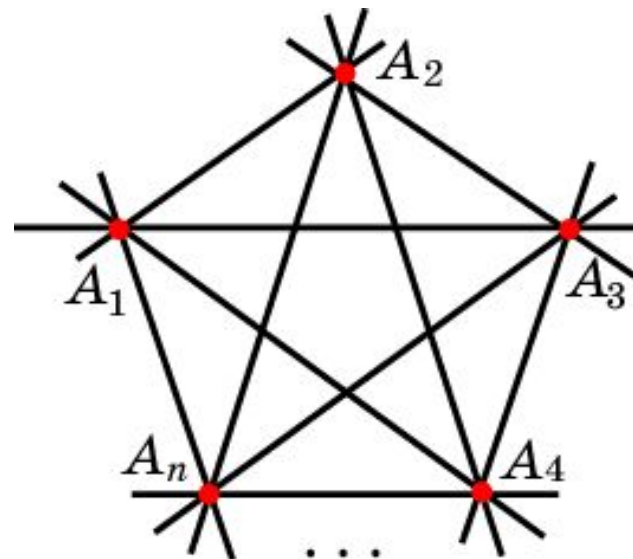


Ответ: 10.

Упражнение 7*

Сколько прямых можно провести через различные пары из n точек, ни какие три из которых не лежат на одной прямой?

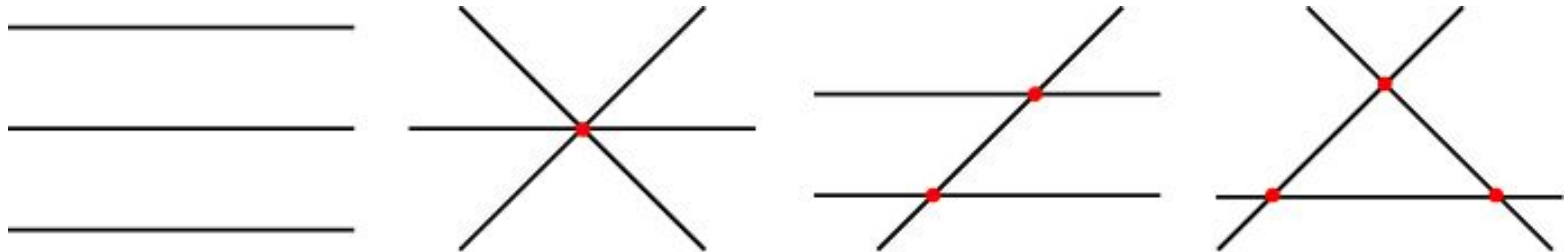
Решение: Пусть A_1, \dots, A_n — n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Зафиксируем точку A_1 . Так как число оставшихся точек равно $n - 1$ и через каждую из них и точку A_1 проходит одна прямая, то через точку A_1 будет проходить $n - 1$ прямая. Заметим, что рассуждения, проведенные для точки A_1 , справедливы для любой другой точки. Поскольку всего n точек и через каждую из них проходит $n - 1$ прямая, то число прямых, посчитанных для всех точек, будет равно $n(n - 1)$. При этом, поскольку одна прямая проходит через две точки, то каждую прямую посчитаем дважды, один раз как прямую, проходящую через одну точку, а другой — как прямую, проходящую через вторую точку. Поэтому число прямых, проходящих через различные пары из n данных точек, будет равно $\frac{n(n - 1)}{2}$.



Упражнение 8

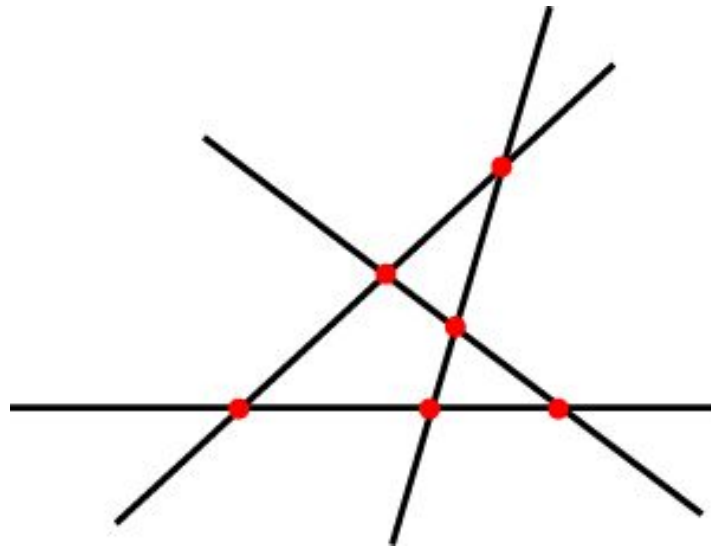
Сколько различных точек попарных пересечений могут иметь три прямые?

Ответ: Ни одной, одну, две, три.



Упражнение 9

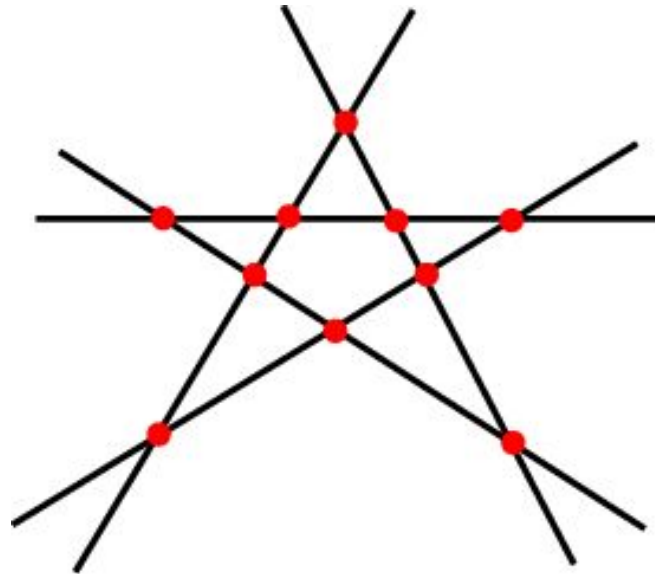
Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь четыре прямые?



Ответ: 6.

Упражнение 10

Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь пять прямых?



Ответ: 10.

Упражнение 11*

Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых?

Решение: Заметим, что наибольшее число точек попарных пересечений получается, если каждая прямая пересекается с каждой, и при этом никакие три прямые не пересекаются в одной точке. В этом случае каждая прямая имеет $n - 1$ точку пересечения с остальными прямыми, и мы находимся в ситуации, аналогичной ситуации задачи 7. Имеется n прямых и на каждой прямой $n - 1$ точка. При этом, каждая точка принадлежит ровно двум прямым. Следовательно, число точек попарных пересечений будет равно

$$\frac{n(n-1)}{2}$$