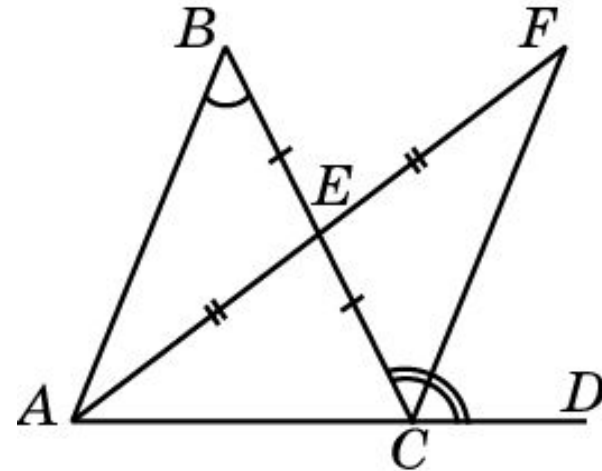
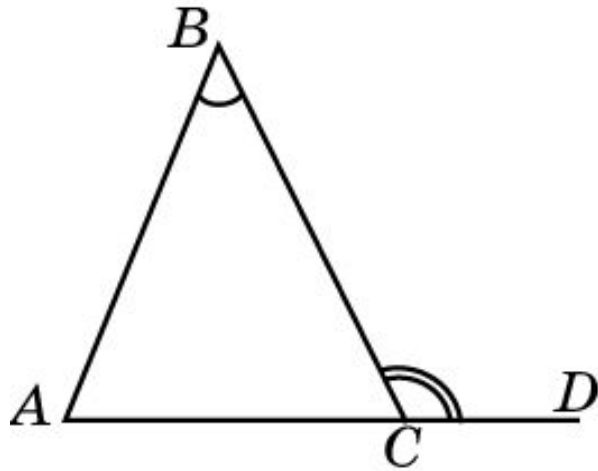


Теорема 1

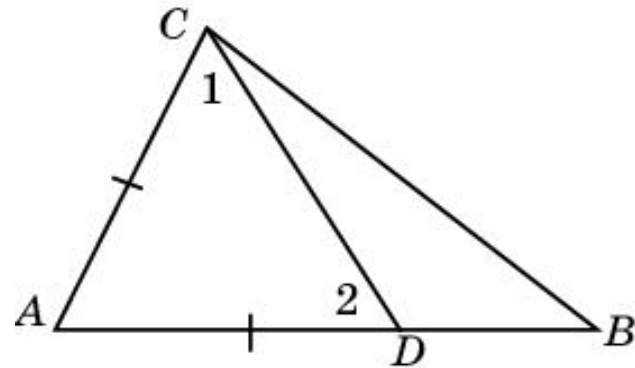
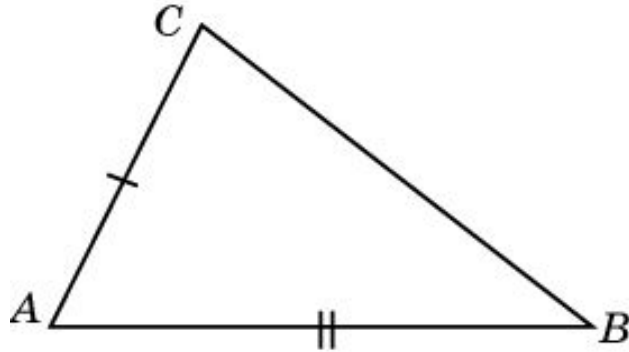
Внешний угол произвольного треугольника больше каждого внутреннего, не смежного с ним.



Доказательство. Пусть ABC – произвольный треугольник. Рассмотрим, например, внешний угол $B CD$ и докажем, что он больше внутреннего угла ABC . Для этого через вершину A и середину E стороны BC проведем прямую и отложим на ней отрезок EF , равный AE . Треугольники ABE и FCE равны по первому признаку равенства треугольников ($BE = CE$, $AE = FE$, $\angle AEB = \angle FEC$). Следовательно, $\angle ABC \cong \angle BCF$. Но вершина F лежит внутри угла $B CD$. Поэтому угол $B CF$ составляет только часть угла $B CD$. Значит, $B CD \angle > \angle ABC$.

Теорема 2

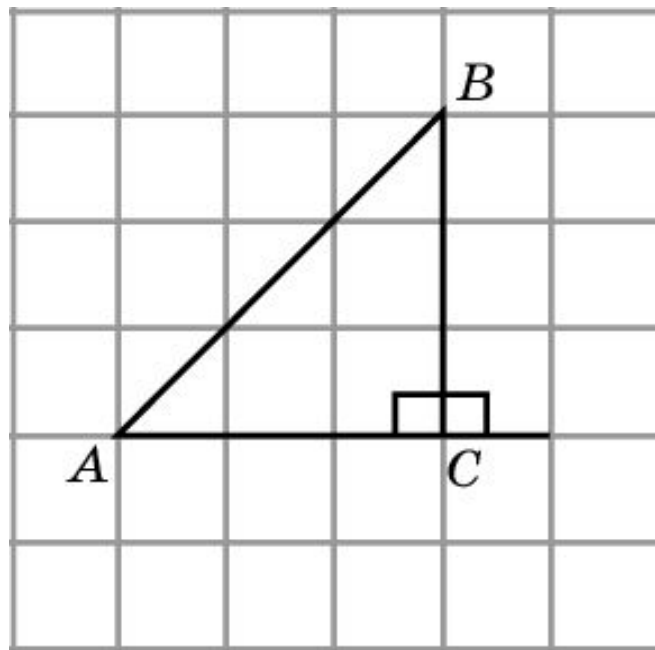
В произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол.



Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC . Докажем, что угол C больше угла B . Для этого отложим на луче AB отрезок AD , равный стороне AC . Треугольник ACD - равнобедренный. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Угол 1 составляет часть угла C . Поэтому $\angle 1 < \angle C$. С другой стороны, угол 2 является внешним углом треугольника BDC . Поэтому $\angle 2 > \angle B$. Следовательно, имеем $\angle C > \angle 1 \neq \angle 2 \not\geq \angle B \not\leq \angle C$

Упражнение 1

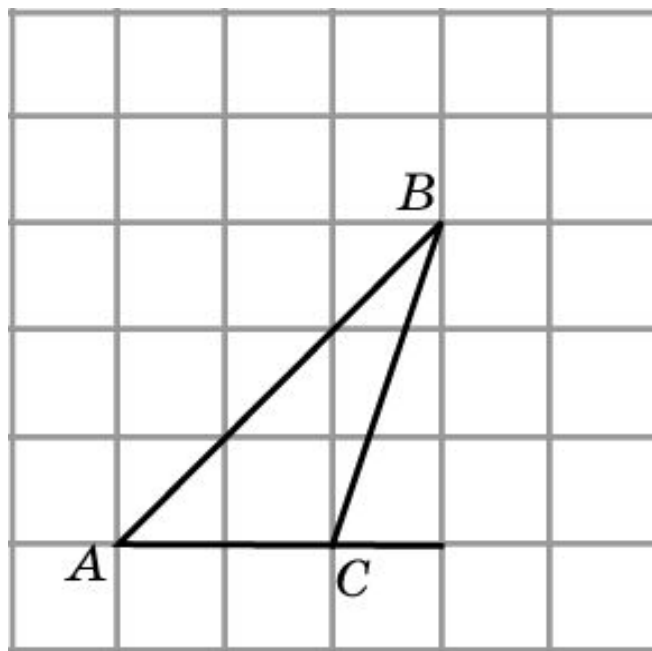
Может ли внешний угол треугольника равняться одному из его внутренних углов?



Ответ: Да, в прямоугольном треугольнике.

Упражнение 2

Может ли внешний угол треугольника быть меньше одного из его внутренних углов?



Ответ: Да, в тупоугольном треугольнике.

Упражнение 3

Сколько в треугольнике может быть:

а) прямых углов;

б) тупых углов?

Ответ: а), б) Один.

Упражнение 4

Известно, что в треугольнике ABC $BC > AC > AB$. Какой из углов больше: а) B или A ; б) C или A ; в) B или C ?

Ответ: а), б) A ; в) B .

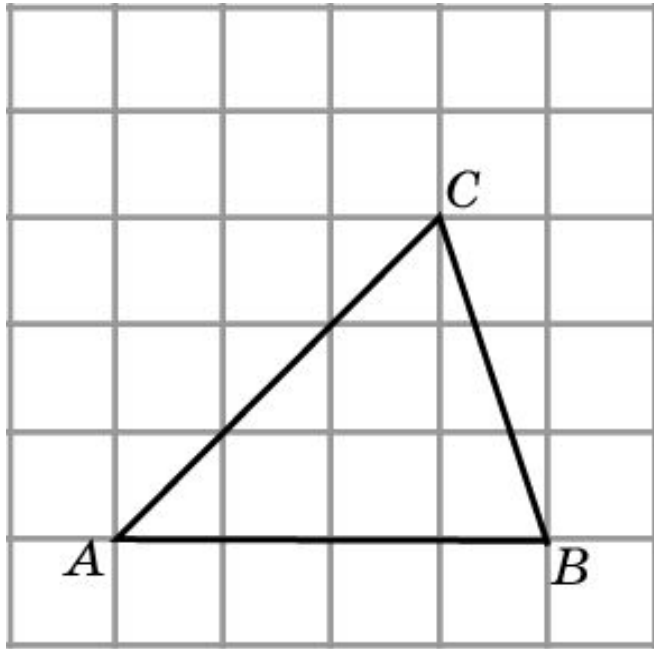
Упражнение 5

В треугольнике ABC сторона AB наибольшая. Какие углы этого треугольника острые? Каким может быть угол C ?

Ответ: Углы A и B острые. Угол C может быть острым, прямым или тупым.

Упражнение 6

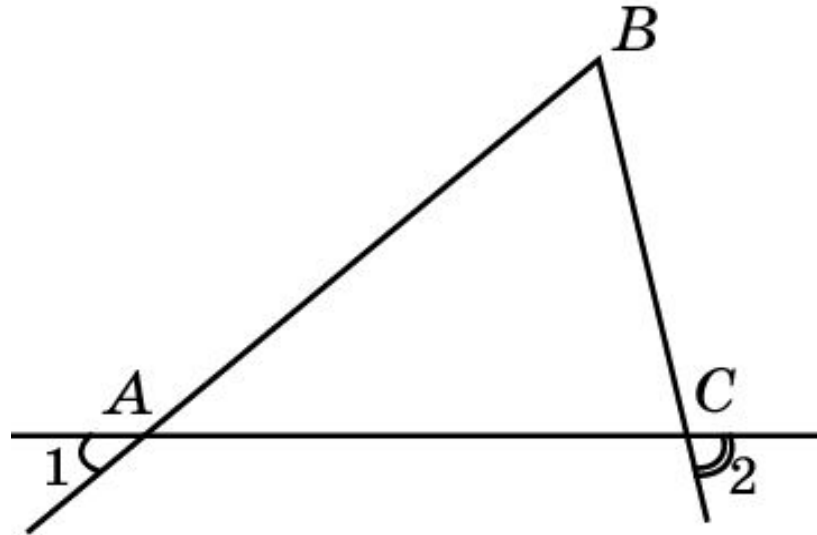
Докажите, что в произвольном треугольнике против большего угла лежит большая сторона?



Доказательство. Пусть в треугольнике ABC угол B больше угла A . Сторона AC не может равняться стороне BC , так как в этом случае угол A равнялся бы углу B . Сторона AC не может быть меньше стороны BC , так как в этом случае угол A был бы больше угла B . Следовательно, сторона AC больше стороны BC .

Упражнение 7

На рисунке угол 1 меньше угла 2. Каким соотношением связаны стороны AB и BC треугольника ABC ?



Ответ: $AB > BC$.

Упражнение 8

Сравните стороны треугольника ABC , если:

а) угол A больше угла B , угол B больше угла C ;

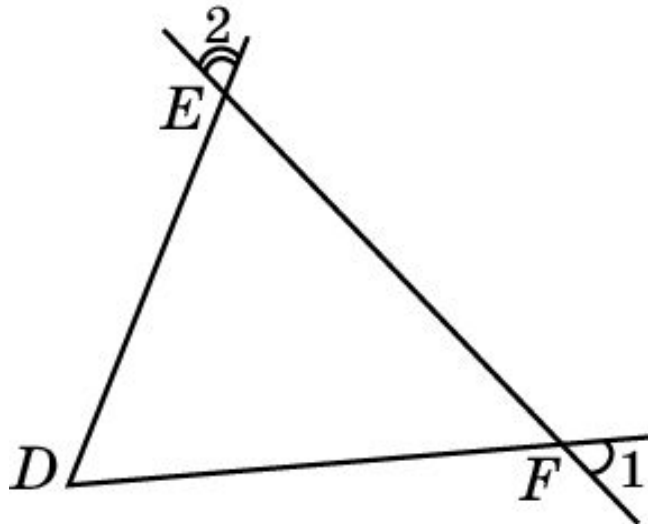
б) угол A больше угла B , угол B равен углу C .

Ответ: а) $BC > AC > AB$;

б) $BC > AB, AC = AB$.

Упражнение 9

На рисунке $DE < DF$. Каким соотношением связаны углы 1 и 2?



Ответ: угол 1 меньше угла 2.

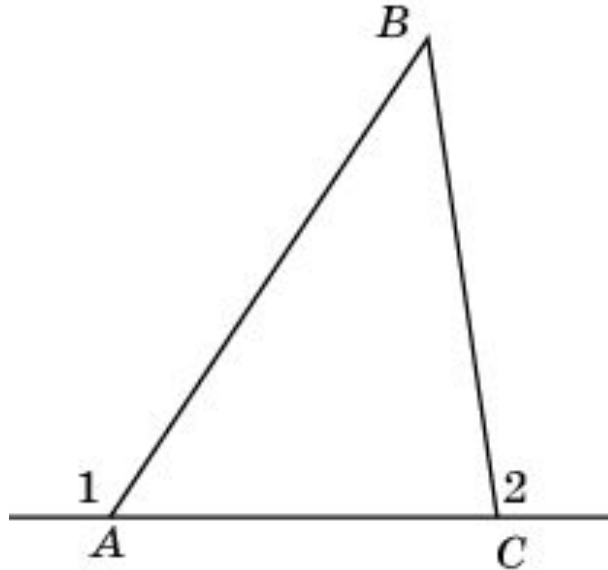
Упражнение 10

Какой вид имеет треугольник, если: а) два его угла равны; б) три его угла равны?

Ответ: а) Равнобедренный; б) правильный.

Упражнение 11

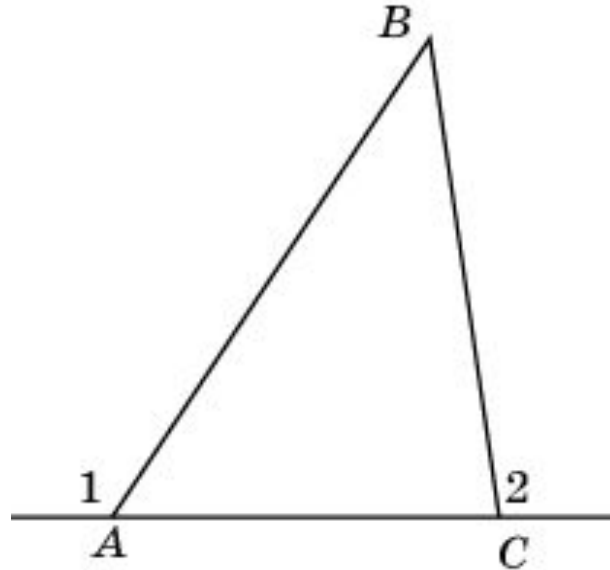
На рисунке $AB > BC$. Докажите, что угол 1 больше угла 2.



Ответ: Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то из неравенства $AB > BC$ следует, что угол BAC меньше угла BCA . Значит, для смежных углов выполняется неравенство $\angle 1 > \angle 2$.

Упражнение 12

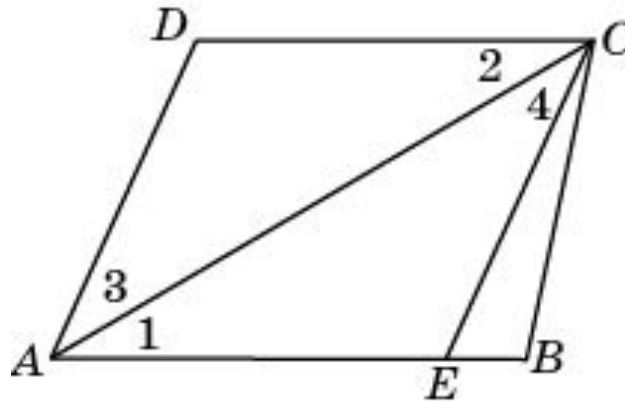
На рисунке угол 1 больше угла 2. Докажите, что $AB > BC$.



Ответ: Из неравенства $\angle 1 > \angle 2$ следует, что угол BAC меньше угла BCA . Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то $AB > BC$.

Упражнение 13

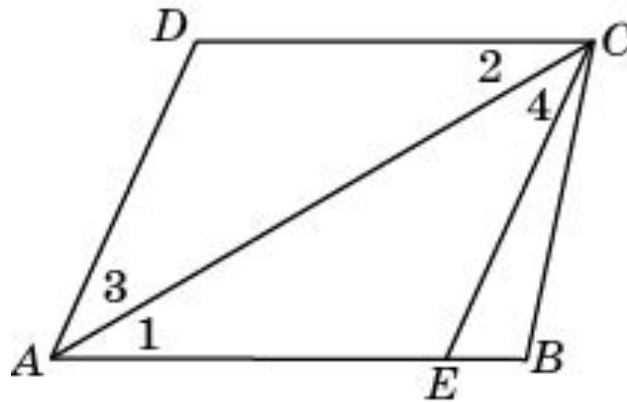
На рисунке угол 1 равен углу 2, $CD < AB$. Докажите, что угол 3 меньше угла 4.



Ответ: На отрезке AB возьмем точку E так, что $AE = CD$. Треугольники ACD и CAE равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, угол 3 равен углу ACE , который меньше угла 4.

Упражнение 14

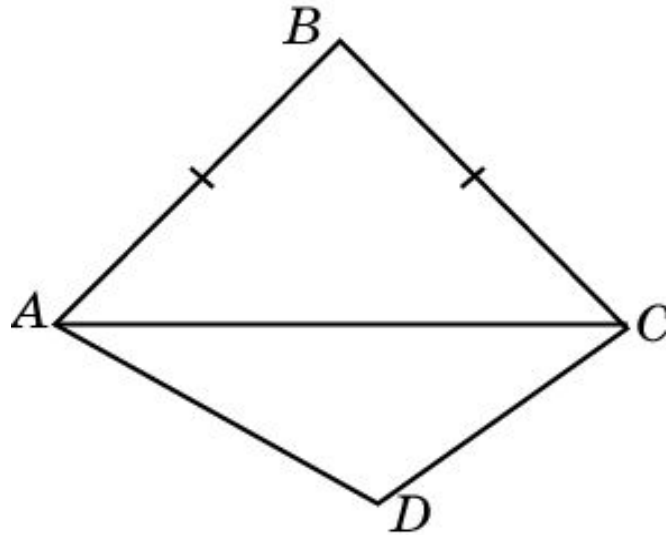
На рисунке угол 1 равен углу 2, угол 3 меньше угла 4.
Докажите, что $CD < AB$.



Ответ: От луча CA в полуплоскости, содержащей точку B , отложим угол, равный углу 3. Точку пересечения его стороны с отрезком AB обозначим E . Треугольники ACD и CAE равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $CD = AE < AB$.

Упражнение 15

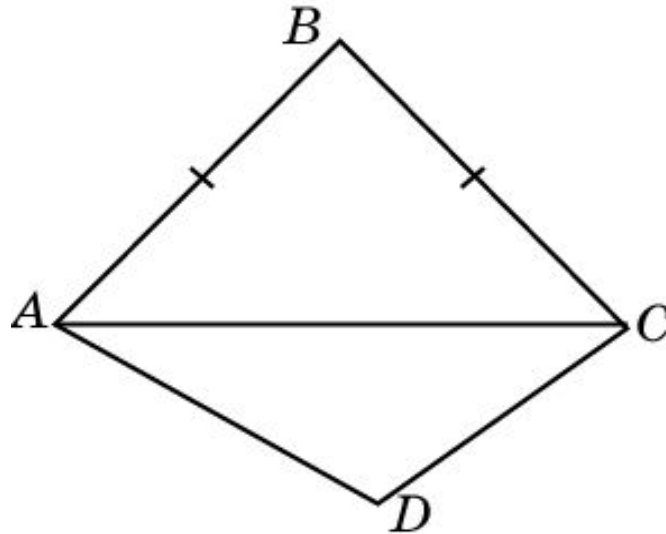
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$, $AD > CD$. Докажите, что угол C больше угла A .



Ответ: Проведем диагональ AC . Треугольник ABC – равнобедренный, следовательно, угол BAC равен углу BCA . В треугольнике ACD $AD > CD$, следовательно, угол DCA больше угла DAC . Значит, угол C больше угла A .

Упражнение 16

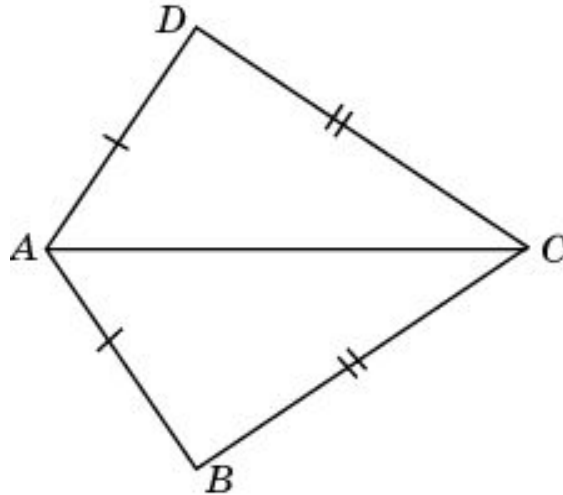
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$, угол C больше угла A . Докажите, что $AD > CD$.



Ответ: Проведем диагональ AC . Треугольник ABC – равнобедренный, следовательно, угол BAC равен углу BCA . Следовательно, угол DCA больше угла DAC . Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то в треугольнике ACD выполняется неравенство $AD > CD$.

Упражнение 17

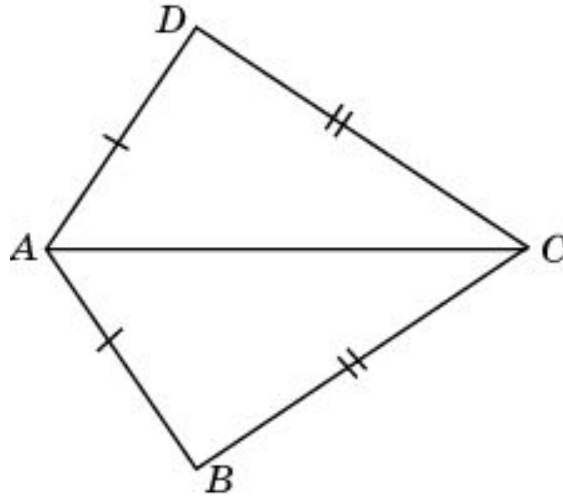
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = AD$, $BC = CD$, $AB < BC$. Докажите, что угол A больше угла C .



Ответ: Проведем диагональ AC . Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то угол DAC больше угла DCA , угол BAC больше угла BCA . Значит, в четырехугольнике $ABCD$ угол A больше угла C .

Упражнение 18

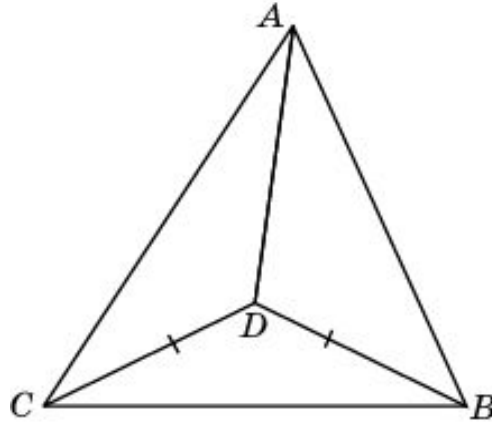
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = AD$, $BC = CD$, угол A больше угла C . Докажите, что $AB < BC$.



Ответ: Проведем диагональ AC . Треугольники ABC и ADC равны по трем сторонам. Следовательно, угол BAC равен углу DAC , угол BCA равен углу DCA . Так как угол A четырехугольника $ABCD$ больше угла C , то угол BAC больше угла BCA . Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то в треугольнике ABC выполняется неравенство $AB < BC$.

Упражнение 19

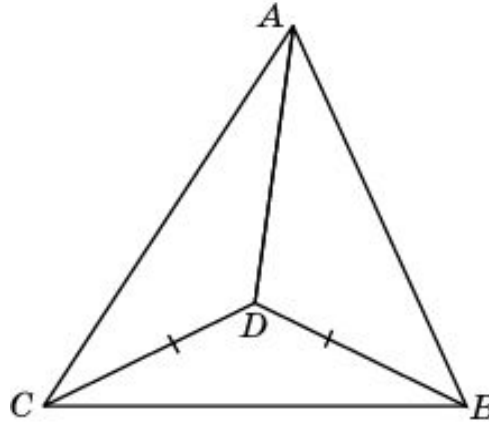
Вершины треугольника ABC соединены отрезками с точкой D , лежащей внутри этого треугольника, $AC > AB$, $CD = BD$. Докажите, что угол ACD меньше угла ABD .



Ответ: Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то угол ACB меньше угла ABC . Треугольник BDC – равнобедренный, следовательно, угол DCB равен углу DBC . Значит, угол ACD меньше угла ABD .

Упражнение 20

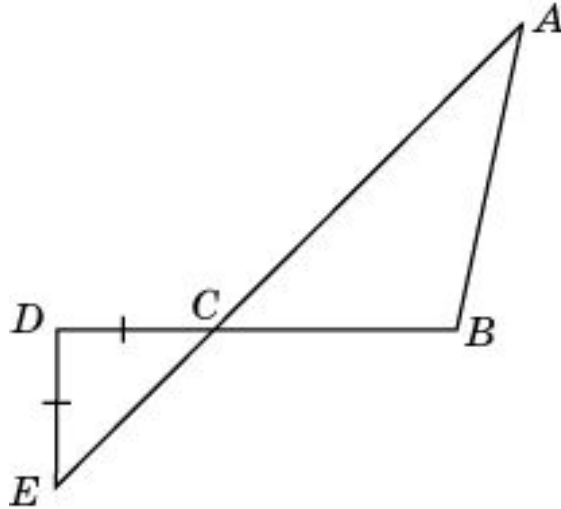
Вершины треугольника ABC соединены отрезками с точкой D , лежащей внутри этого треугольника, $CD = BD$, угол ACD меньше угла ABD . Докажите, что $AC > AB$.



Ответ: Треугольник BSD – равнобедренный, следовательно, угол DCB равен углу DBC . Значит, угол ACB меньше угла ABC . Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то в треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > AB$.

Упражнение 21

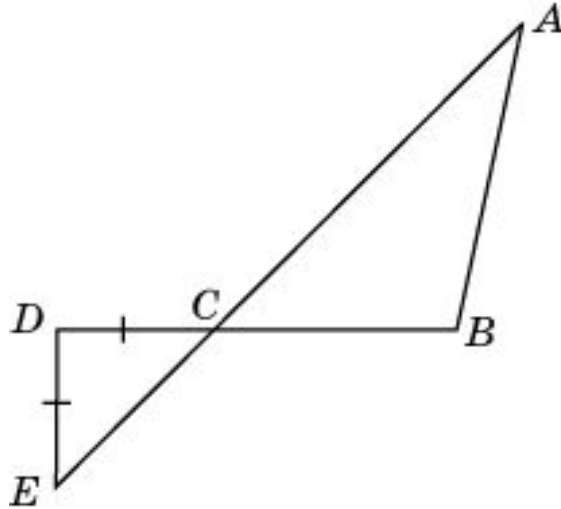
Отрезки AE и BD пересекаются в точке C , $AB > BC$, $CD = DE$. Докажите, что угол BAC меньше угла DEC .



Ответ: Так как $AB > BC$, то угол BAC меньше угла BCA . Так как $CD = DE$, то угол DEC равен углу DCE . Углы BCA и DCE равны как вертикальные. Значит, угол BAC меньше угла DEC .

Упражнение 22

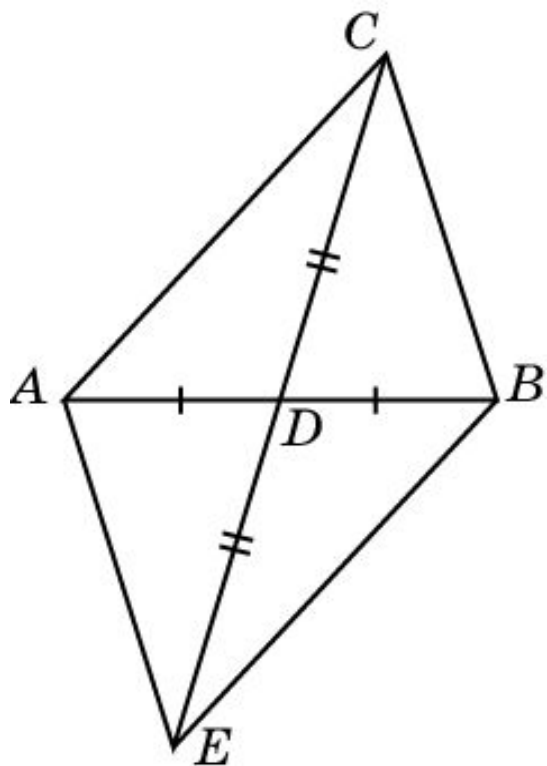
Отрезки AE и BD пересекаются в точке C , $CD = DE$, угол BAC меньше угла DEC . Докажите, что $AB > BC$.



Ответ: Так как $CD = DE$, то угол DEC равен углу DCE . Углы BCA и DCE равны как вертикальные. Так как угол BAC меньше угла DEC , то угол BAC меньше угла BCA . Значит, угол $AB > BC$.

Упражнение 21*

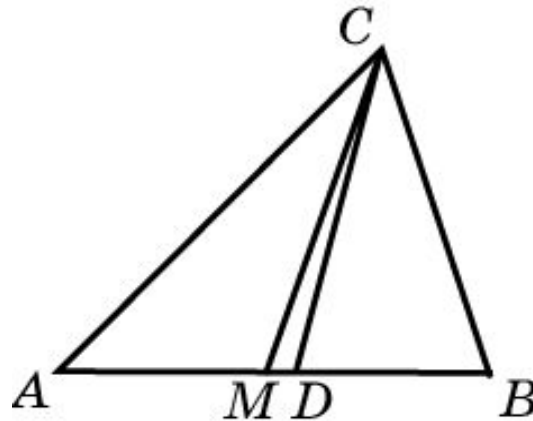
В треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > BC$, CD – медиана. Докажите, что угол $B CD$ больше угла $A CD$.



Решение. Отложим на продолжении медианы CD отрезок DE , равный отрезку CD . Треугольники $B CD$ и $A E D$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $BC = AE$ и угол $B CD$ равен углу $A E D$. В треугольнике $A C E$ сторона AC больше стороны AE , следовательно, угол E больше угла C . Значит, угол $B CD$ больше угла $A CD$.

Упражнение 22*

В треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > BC$, CD – биссектриса. Докажите, что AD больше BD .



Решение. В силу предыдущей задачи, для медианы CM угол ACM меньше угла BCM . Следовательно, медиана CM лежит внутри угла ACD . Значит, $AD > BD$.