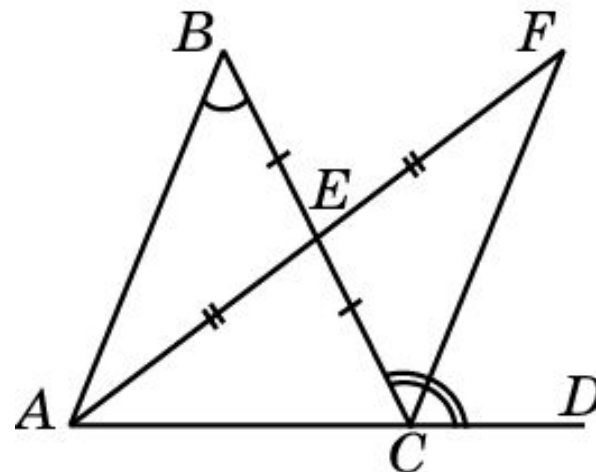
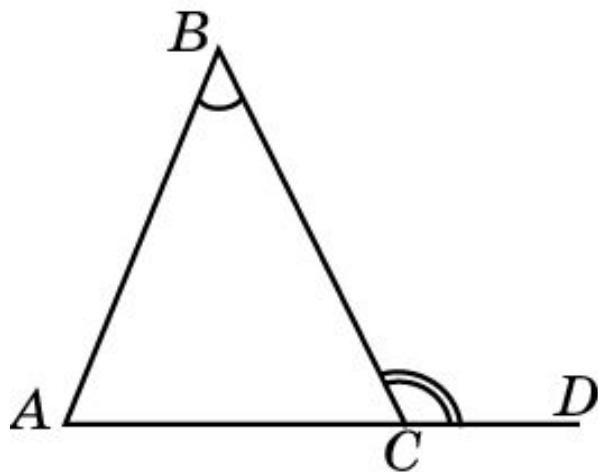


# Теорема 1

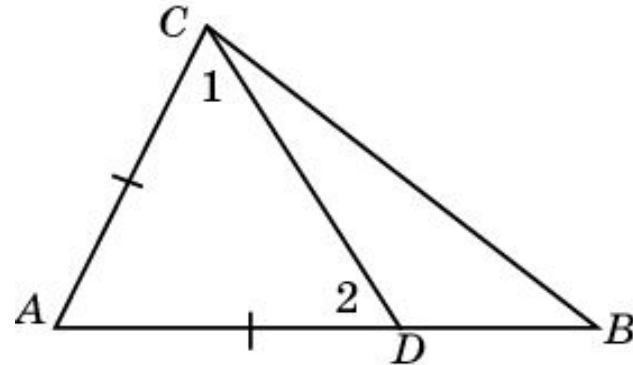
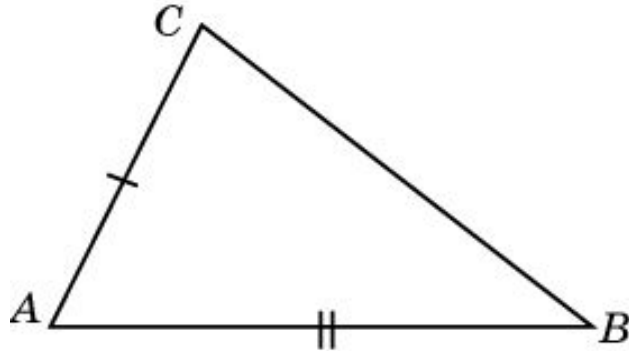
Внешний угол произвольного треугольника больше каждого внутреннего, не смежного с ним.



**Доказательство.** Пусть  $ABC$  – произвольный треугольник. Рассмотрим, например, внешний угол  $B CD$  и докажем, что он больше внутреннего угла  $ABC$ . Для этого через вершину  $A$  и середину  $E$  стороны  $BC$  проведем прямую и отложим на ней отрезок  $EF$ , равный  $AE$ . Треугольники  $ABE$  и  $FCE$  равны по первому признаку равенства треугольников ( $BE = CE$ ,  $AE = FE$ ,  $\angle AEB = \angle FEC$ ). Следовательно,  $\angle ABC \cong \angle BCF$ . Но вершина  $F$  лежит внутри угла  $B CD$ . Поэтому угол  $B CF$  составляет только часть угла  $B CD$ . Значит,  $\angle B CD > \angle ABC$ .

## Теорема 2

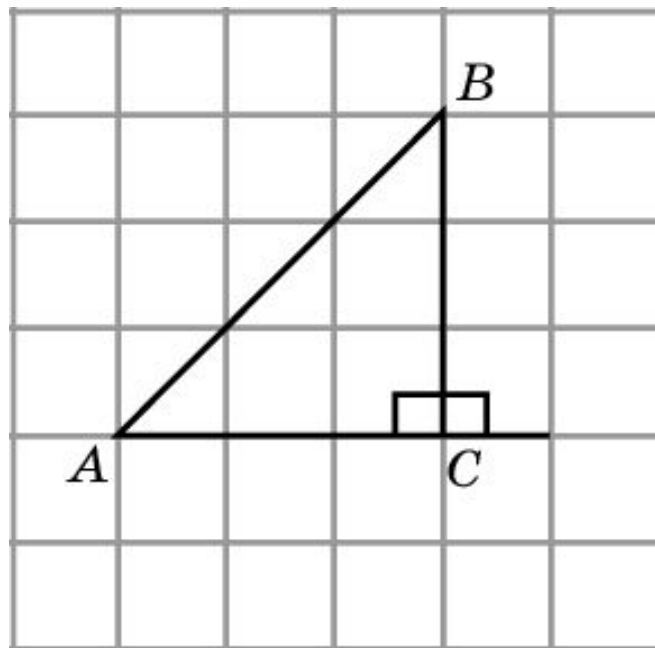
В произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол.



**Доказательство.** Пусть в треугольнике  $ABC$  сторона  $AB$  больше стороны  $AC$ . Докажем, что угол  $C$  больше угла  $B$ . Для этого отложим на луче  $AB$  отрезок  $AD$ , равный стороне  $AC$ . Треугольник  $ACD$  - равнобедренный. Следовательно,  $\angle 1 = \angle 2$ . Угол  $1$  составляет часть угла  $C$ . Поэтому  $\angle 1 < \angle C$ . С другой стороны, угол  $2$  является внешним углом треугольника  $BVD$ . Поэтому  $\angle 2 > \angle B$ . Следовательно, имеем  $\angle C > \angle 1 \neq \angle 2 \neq \angle B$ .

# Упражнение 1

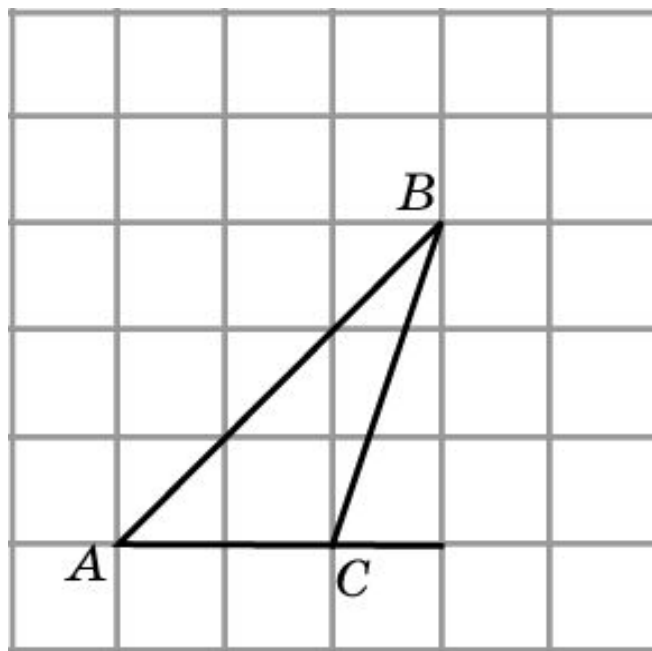
Может ли внешний угол треугольника равняться одному из его внутренних углов?



**Ответ:** Да, в прямоугольном треугольнике.

## Упражнение 2

Может ли внешний угол треугольника быть меньше одного из его внутренних углов?



**Ответ:** Да, в тупоугольном треугольнике.

## Упражнение 3

Сколько в треугольнике может быть:

а) прямых углов;

б) тупых углов?

**Ответ:** а), б) Один.

## Упражнение 4

Известно, что в треугольнике  $ABC$   $BC > AC > AB$ . Какой из углов больше: а)  $B$  или  $A$ ; б)  $C$  или  $A$ ; в)  $B$  или  $C$ ?

**Ответ:** а), б)  $A$ ; в)  $B$ .

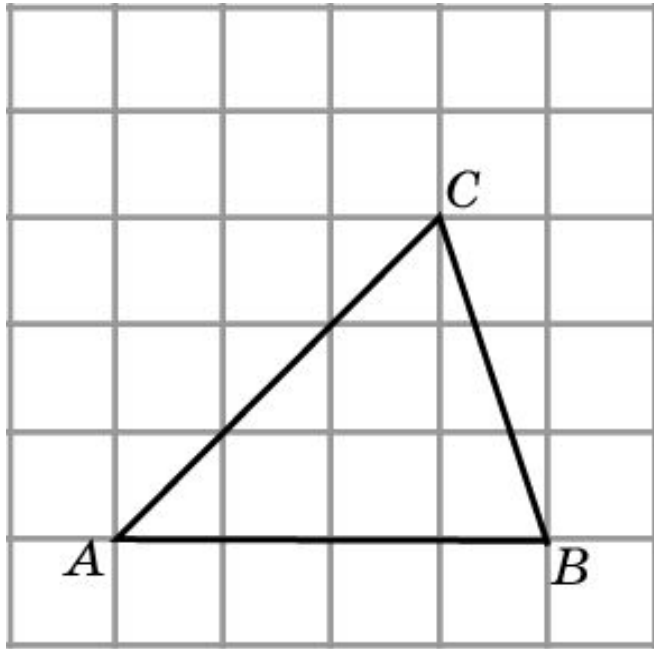
## Упражнение 5

В треугольнике  $ABC$  сторона  $AB$  наибольшая. Какие углы этого треугольника острые? Каким может быть угол  $C$ ?

**Ответ:** Углы  $A$  и  $B$  острые. Угол  $C$  может быть острым, прямым или тупым.

## Упражнение 6

Докажите, что в произвольном треугольнике против большего угла лежит большая сторона?

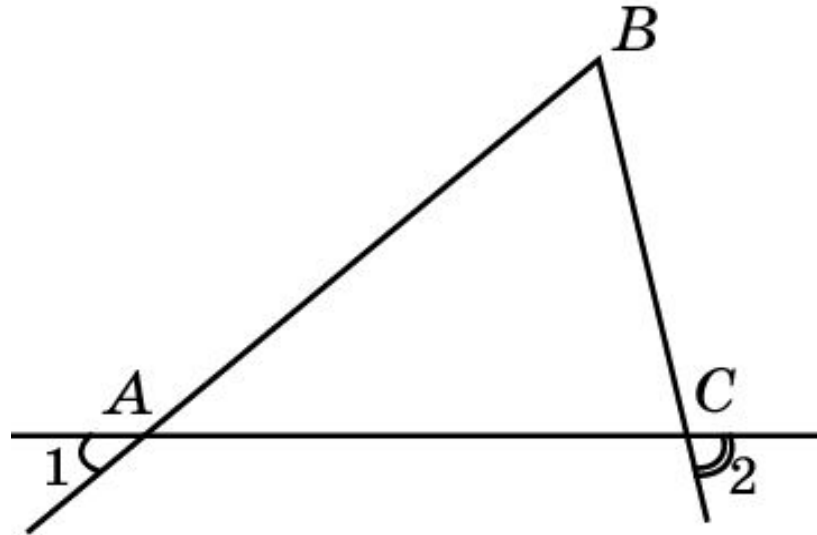


**Доказательство.** Пусть в треугольнике  $ABC$  угол  $B$  больше угла  $A$ . Сторона  $AC$  не может равняться стороне  $BC$ , так как в этом случае угол  $A$  равнялся бы углу  $B$ . Сторона  $AC$  не может быть меньше стороны  $BC$ , так как в этом случае угол  $A$  был бы больше угла  $B$ . Следовательно, сторона  $AC$  больше стороны  $BC$ .



## Упражнение 7

На рисунке угол 1 меньше угла 2. Каким соотношением связаны стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ ?



Ответ:  $AB > BC$ .

## Упражнение 8

Сравните стороны треугольника  $ABC$ , если:

а) угол  $A$  больше угла  $B$ , угол  $B$  больше угла  $C$ ;

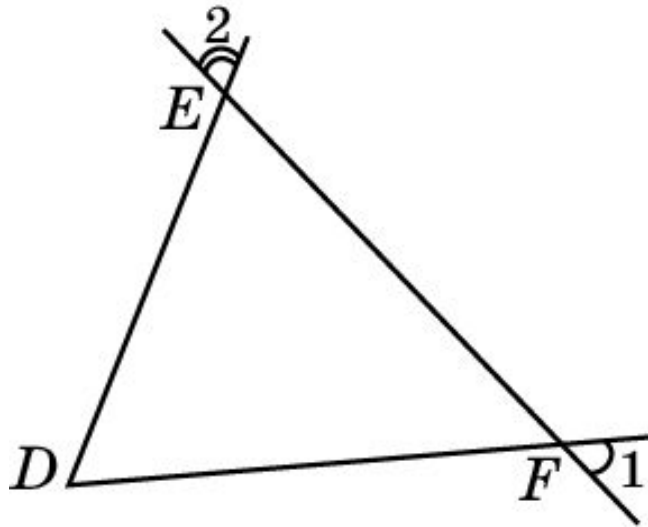
б) угол  $A$  больше угла  $B$ , угол  $B$  равен углу  $C$ .

**Ответ:** а)  $BC > AC > AB$ ;

б)  $BC > AB, AC = AB$ .

## Упражнение 9

На рисунке  $DE < DF$ . Каким соотношением связаны углы 1 и 2?



**Ответ:** угол 1 меньше угла 2.

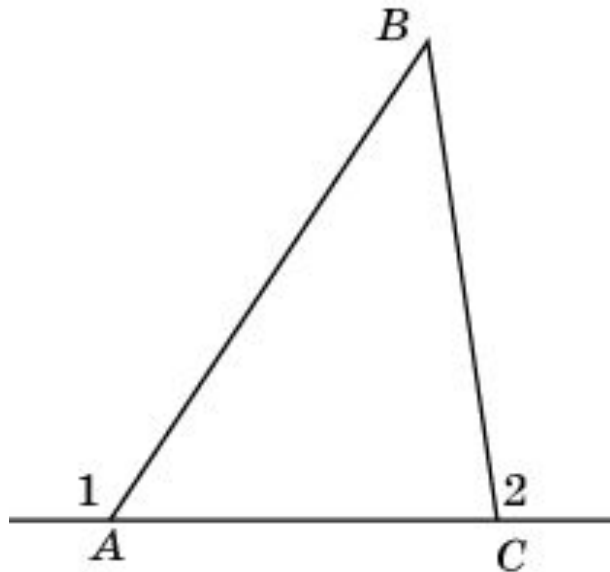
## Упражнение 10

Какой вид имеет треугольник, если: а) два его угла равны; б) три его угла равны?

**Ответ:** а) Равнобедренный; б) правильный.

## Упражнение 11

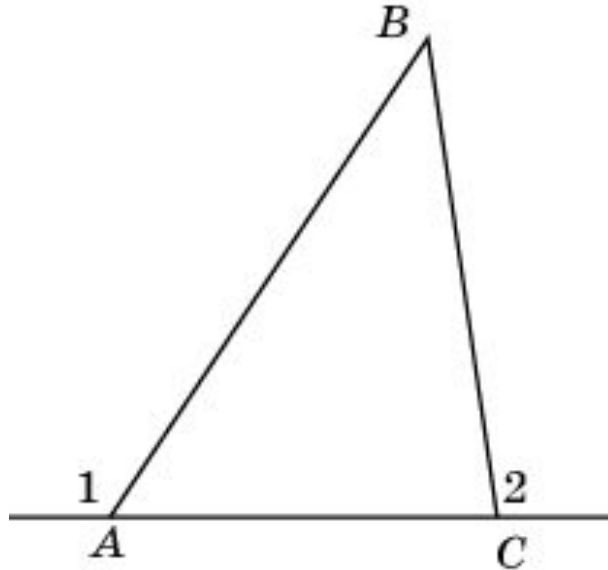
На рисунке  $AB > BC$ . Докажите, что угол 1 больше угла 2.



**Ответ:** Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то из неравенства  $AB > BC$  следует, что угол  $BAC$  меньше угла  $BCA$ . Значит, для смежных углов выполняется неравенство  $\angle 1 > \angle 2$ .

## Упражнение 12

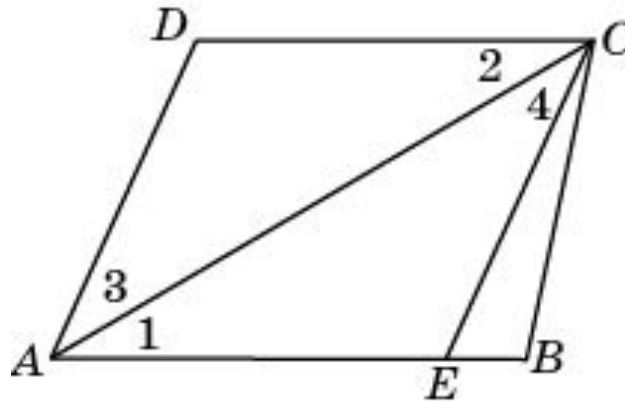
На рисунке угол 1 больше угла 2. Докажите, что  $AB > BC$ .



**Ответ:** Из неравенства  $\angle 1 > \angle 2$  следует, что угол  $BAC$  меньше угла  $BCA$ . Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то  $AB > BC$ .

## Упражнение 13

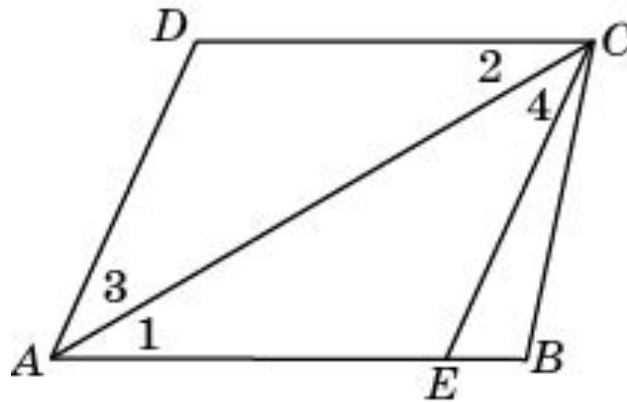
На рисунке угол 1 равен углу 2,  $CD < AB$ . Докажите, что угол 3 меньше угла 4.



**Ответ:** На отрезке  $AB$  возьмем точку  $E$  так, что  $AE = CD$ . Треугольники  $ACD$  и  $CAE$  равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, угол 3 равен углу  $ACE$ , который меньше угла 4.

## Упражнение 14

На рисунке угол 1 равен углу 2, угол 3 меньше угла 4.  
Докажите, что  $CD < AB$ .

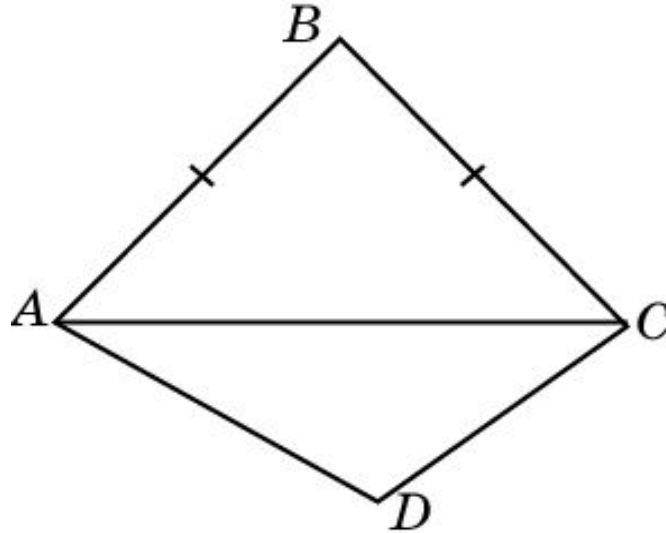


**Ответ:** От луча  $CA$  в полуплоскости, содержащей точку  $B$ , отложим угол, равный углу 3. Точку пересечения его стороны с отрезком  $AB$  обозначим  $E$ . Треугольники  $ACD$  и  $CAE$  равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно,  $CD = AE < AB$ .



## Упражнение 15

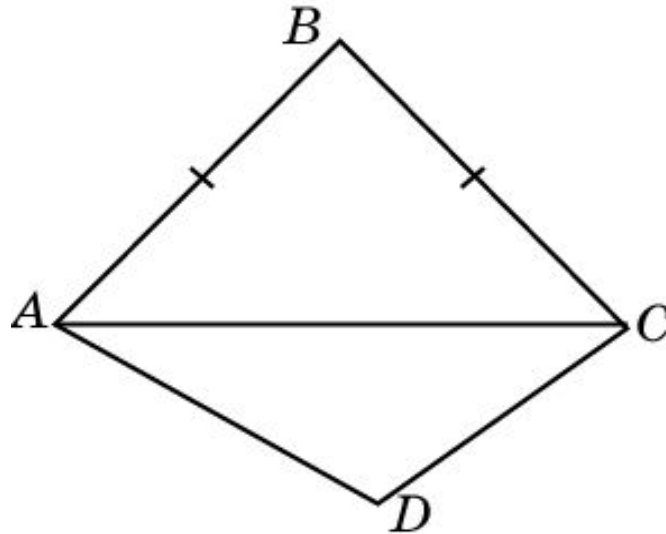
В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$   $AB = BC$ ,  $AD > CD$ . Докажите, что угол  $C$  больше угла  $A$ .



**Ответ:** Проведем диагональ  $AC$ . Треугольник  $ABC$  – равнобедренный, следовательно, угол  $BAC$  равен углу  $BCA$ . В треугольнике  $ACD$   $AD > CD$ , следовательно, угол  $DCA$  больше угла  $DAC$ . Значит, угол  $C$  больше угла  $A$ .

## Упражнение 16

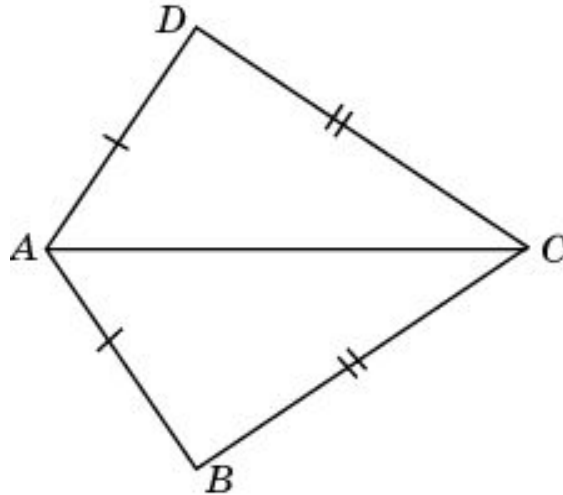
В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$   $AB = BC$ , угол  $C$  больше угла  $A$ . Докажите, что  $AD > CD$ .



**Ответ:** Проведем диагональ  $AC$ . Треугольник  $ABC$  – равнобедренный, следовательно, угол  $BAC$  равен углу  $BCA$ . Следовательно, угол  $DCA$  больше угла  $DAC$ . Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то в треугольнике  $ACD$  выполняется неравенство  $AD > CD$ .

## Упражнение 17

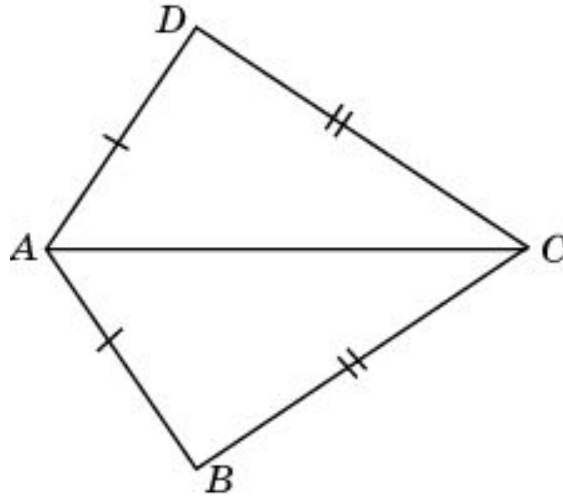
В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$   $AB = AD$ ,  $BC = CD$ ,  $AB < BC$ . Докажите, что угол  $A$  больше угла  $C$ .



**Ответ:** Проведем диагональ  $AC$ . Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то угол  $DAC$  больше угла  $DCA$ , угол  $BAC$  больше угла  $BCA$ . Значит, в четырехугольнике  $ABCD$  угол  $A$  больше угла  $C$ .

## Упражнение 18

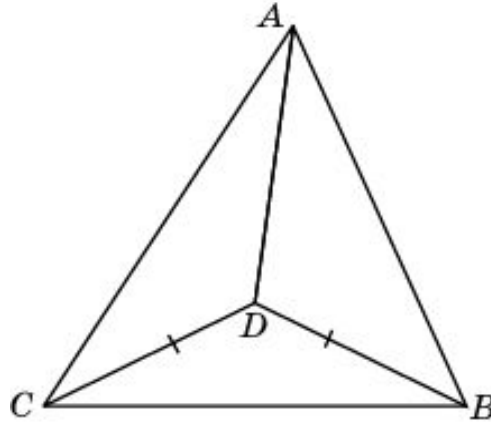
В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$   $AB = AD$ ,  $BC = CD$ , угол  $A$  больше угла  $C$ . Докажите, что  $AB < BC$ .



**Ответ:** Проведем диагональ  $AC$ . Треугольники  $ABC$  и  $ADC$  равны по трем сторонам. Следовательно, угол  $BAC$  равен углу  $DAC$ , угол  $BCA$  равен углу  $DCA$ . Так как угол  $A$  четырехугольника  $ABCD$  больше угла  $C$ , то угол  $BAC$  больше угла  $BCA$ . Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то в треугольнике  $ABC$  выполняется неравенство  $AB < BC$ .

## Упражнение 19

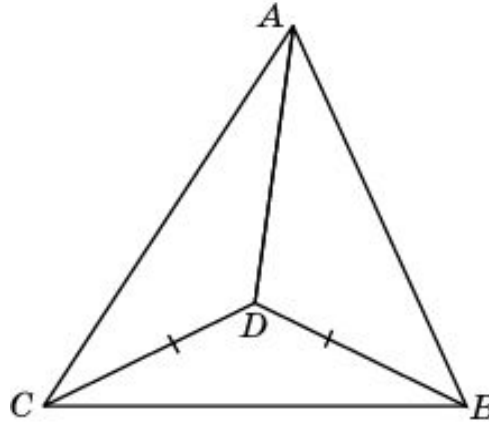
Вершины треугольника  $ABC$  соединены отрезками с точкой  $D$ , лежащей внутри этого треугольника,  $AC > AB$ ,  $CD = BD$ . Докажите, что угол  $ACD$  меньше угла  $ABD$ .



**Ответ:** Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то угол  $ACB$  меньше угла  $ABC$ . Треугольник  $BDC$  – равнобедренный, следовательно, угол  $DCB$  равен углу  $DBC$ . Значит, угол  $ACD$  меньше угла  $ABD$ .

## Упражнение 20

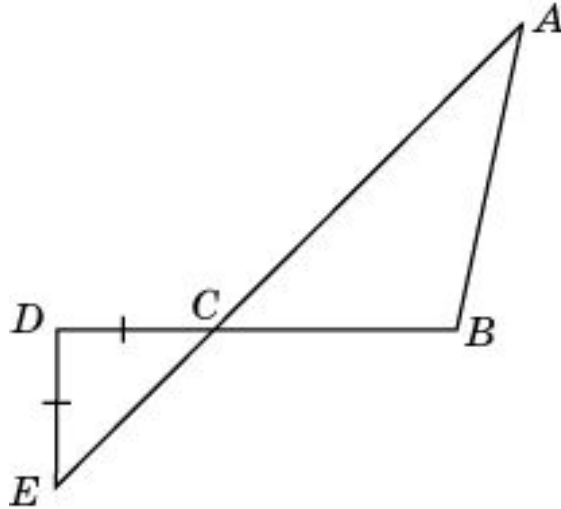
Вершины треугольника  $ABC$  соединены отрезками с точкой  $D$ , лежащей внутри этого треугольника,  $CD = BD$ , угол  $ACD$  меньше угла  $ABD$ . Докажите, что  $AC > AB$ .



**Ответ:** Треугольник  $BSCD$  – равнобедренный, следовательно, угол  $DCB$  равен углу  $DBC$ . Значит, угол  $ACB$  меньше угла  $ABC$ . Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то в треугольнике  $ABC$  выполняется неравенство  $AC > AB$ .

## Упражнение 21

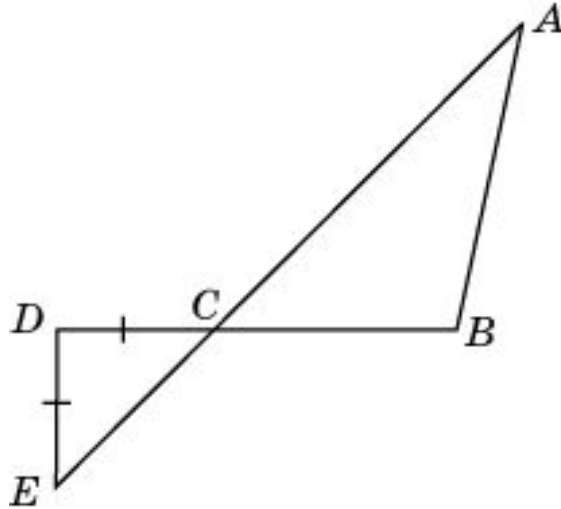
Отрезки  $AE$  и  $BD$  пересекаются в точке  $C$ ,  $AB > BC$ ,  $CD = DE$ . Докажите, что угол  $BAC$  меньше угла  $DEC$ .



**Ответ:** Так как  $AB > BC$ , то угол  $BAC$  меньше угла  $BCA$ . Так как  $CD = DE$ , то угол  $DEC$  равен углу  $DCE$ . Углы  $BCA$  и  $DCE$  равны как вертикальные. Значит, угол  $BAC$  меньше угла  $DEC$ .

## Упражнение 22

Отрезки  $AE$  и  $BD$  пересекаются в точке  $C$ ,  $CD = DE$ , угол  $BAC$  меньше угла  $DEC$ . Докажите, что  $AB > BC$ .

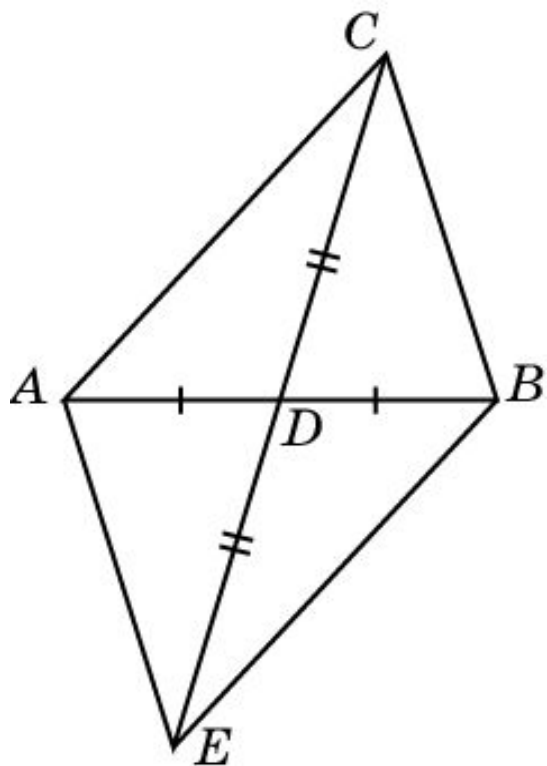


**Ответ:** Так как  $CD = DE$ , то угол  $DEC$  равен углу  $DCE$ . Углы  $BCA$  и  $DCE$  равны как вертикальные. Так как угол  $BAC$  меньше угла  $DEC$ , то угол  $BAC$  меньше угла  $BCA$ . Значит, угол  $AB > BC$ .



## Упражнение 21\*

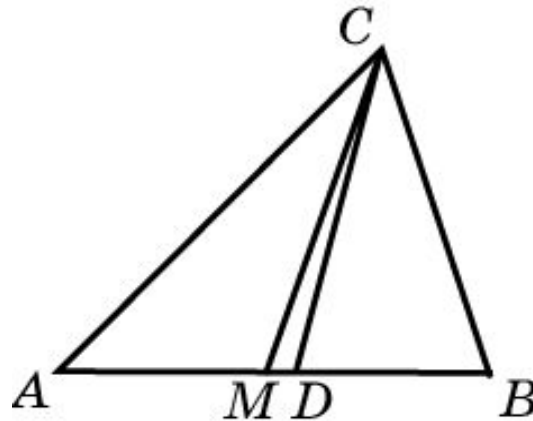
В треугольнике  $ABC$  выполняется неравенство  $AC > BC$ ,  $CD$  – медиана. Докажите, что угол  $B CD$  больше угла  $A CD$ .



**Решение.** Отложим на продолжении медианы  $CD$  отрезок  $DE$ , равный отрезку  $CD$ . Треугольники  $B CD$  и  $A ED$  равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно,  $BC = AE$  и угол  $B CD$  равен углу  $A ED$ . В треугольнике  $A CE$  сторона  $AC$  больше стороны  $AE$ , следовательно, угол  $E$  больше угла  $C$ . Значит, угол  $B CD$  больше угла  $A CD$ .

## Упражнение 22\*

В треугольнике  $ABC$  выполняется неравенство  $AC > BC$ ,  $CD$  – биссектриса. Докажите, что  $AD$  больше  $BD$ .



**Решение.** В силу предыдущей задачи, для медианы  $CM$  угол  $ACM$  меньше угла  $BCM$ . Следовательно, медиана  $CM$  лежит внутри угла  $ACD$ . Значит,  $AD > BD$ .