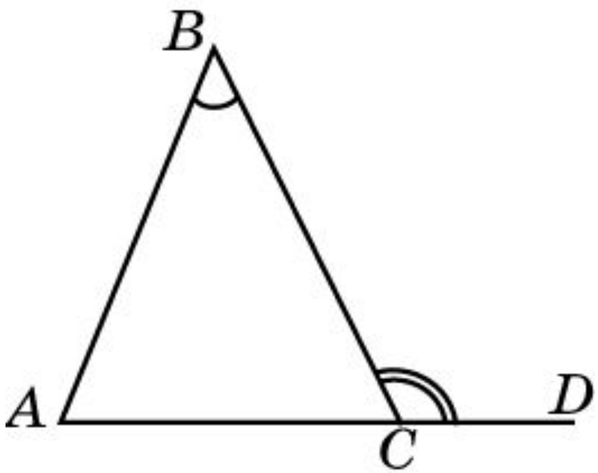
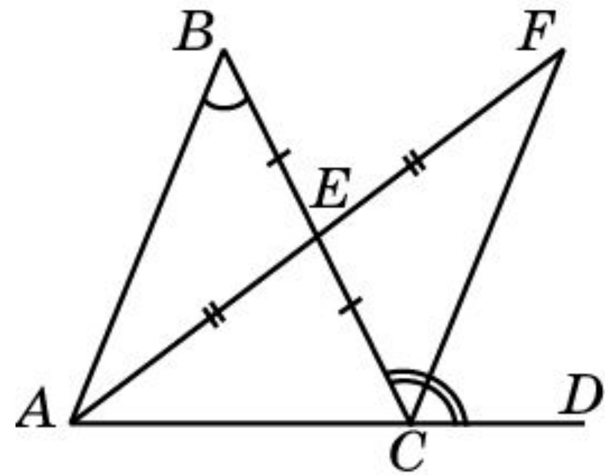
Теорема 1

Внешний угол произвольного треугольника больше каждого внутреннего, не смежного с ним.

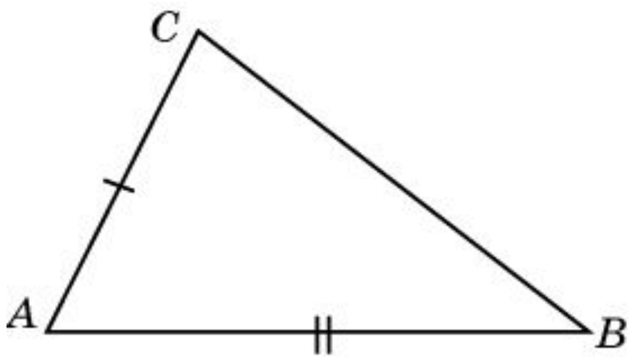


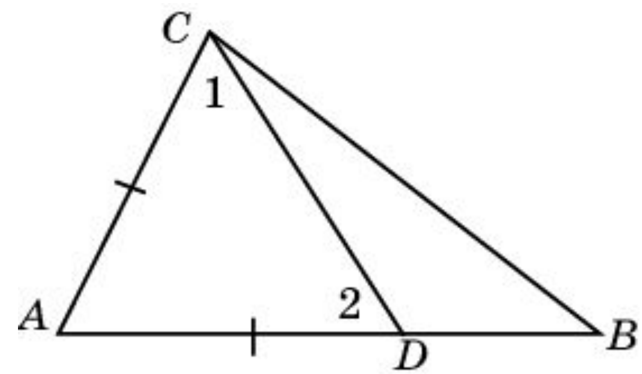


Доказательство. Пусть ABC – произвольный треугольник. Рассмотрим, например, внешний угол BCD и докажем, что он больше внутреннего угла ABC. Для этого через вершину A и середину E стороны BC проведем прямую и отложим на ней отрезок EF, равный AE. Треугольники ABE и FCE равны по первому признаку равенства треугольников ($BE = CE$, $AE = FE$, $\angle AEB = \angle FEC$). Следовательно, $\angle ABC = \angle BCF$. Но вершина F лежит внутри угла BCD. Поэтому угол BCF составляет только часть угла BCD. Значит, $\angle BCD > \angle ABC$.

Теорема 2

В произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

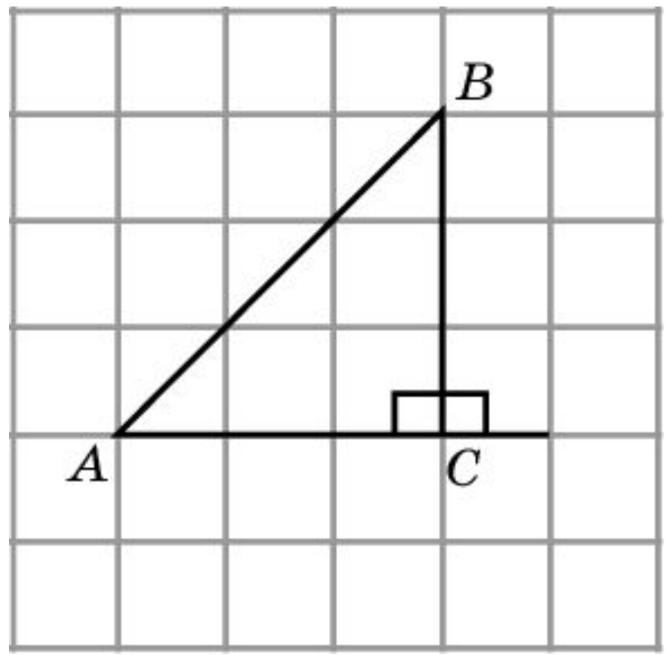




Доказательство. Пусть в треугольнике *ABC* сторона *AB* больше стороны *AC*. Докажем, что угол *C* больше угла *B*. Для этого отложим на луче *AB* отрезок *AD*, равный стороне *AC*. Треугольник *ACD* - равнобедренный. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Угол 1 составляет часть угла *C*. Поэтому $\angle 1 < \angle C$. С другой стороны, угол 2 является внешним углом треугольника *BCD*. Поэтому $\angle 2 > \angle B$. Следовательно, имеем $\angle C > \angle 1 = \angle 2 > \angle B$.

Упражнение 1

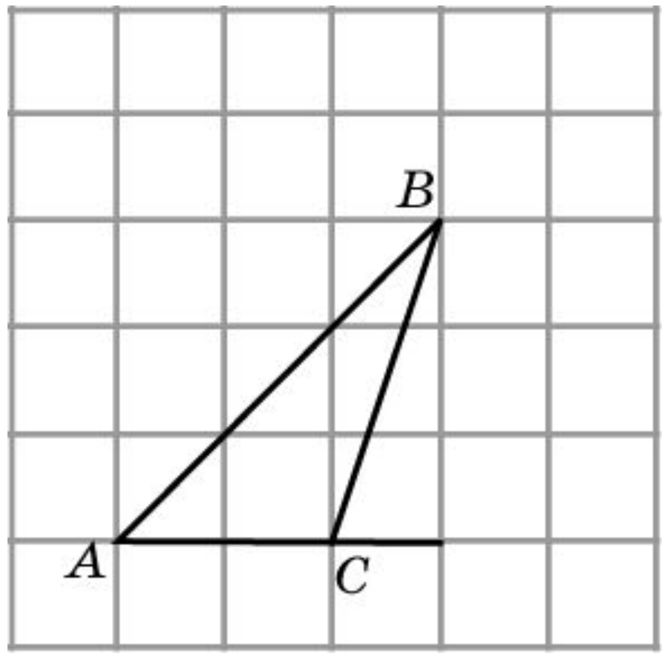
Может ли внешний угол треугольника равняться одному из его внутренних углов?



Ответ: Да, в прямоугольном треугольнике.

Упражнение 2

Может ли внешний угол треугольника быть меньше одного из его внутреннего углов?



Ответ: Да, в тупоугольном треугольнике.

Упражнение 3

Сколько в треугольнике может быть:

а) прямых углов;

б) тупых углов?

Ответ: а), б) Один.

Упражнение 4

Известно, что в треугольнике ABC $BC > AC > AB$. Какой из углов больше: а) B или A; б) C или A; в) B или С?

Ответ: а), б) A; в) B.

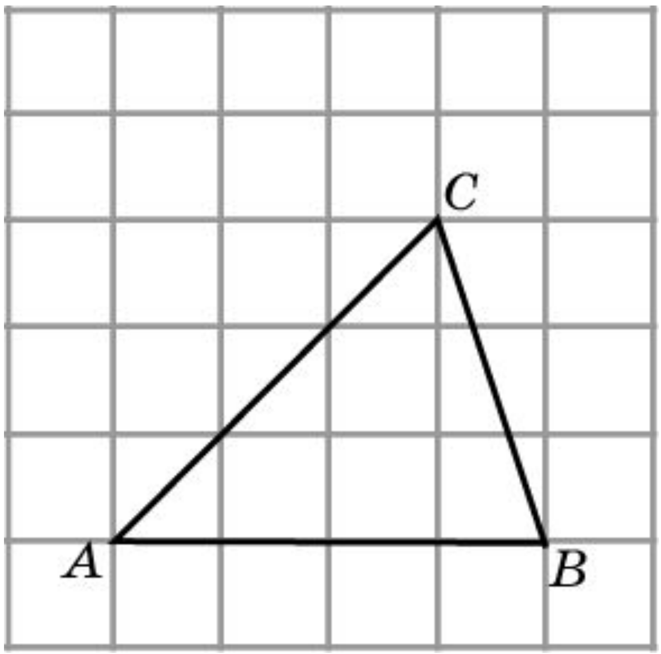
Упражнение 5

В треугольнике ABC сторона AB наибольшая. Какие углы этого треугольника острые? Каким может быть угол C?

Ответ: Углы A и B острые. Угол C может быть острым, прямым или тупым.

Упражнение 6

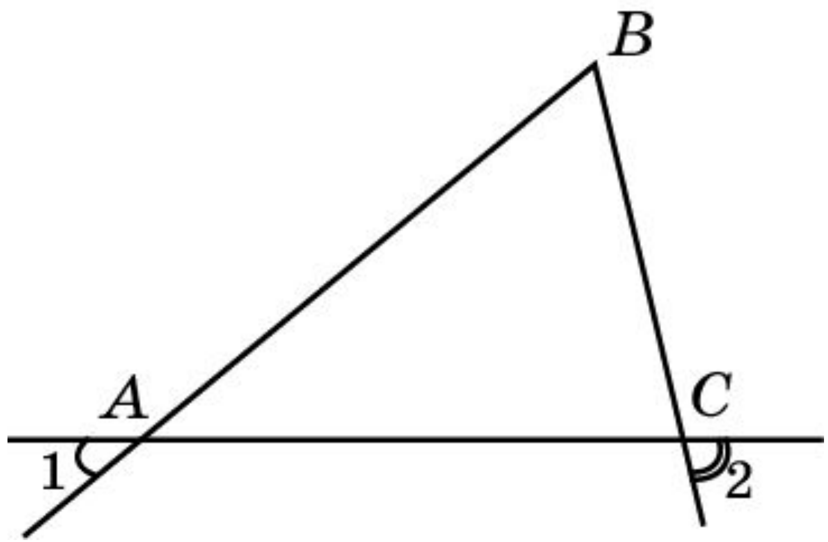
Докажите, что в произвольном треугольнике против большего угла лежит большая сторона?



Доказательство. Пусть в треугольнике ABC угол B больше угла A. Сторона AC не может равняться стороне BC, так как в этом случае угол A равнялся бы углу B. Сторона AC не может быть меньше стороны BC, так как в этом случае угол A был бы больше угла B. Следовательно, сторона AC больше стороны BC.

Упражнение 7

На рисунке угол 1 меньше угла 2. Каким соотношением связаны стороны AB и BC треугольника ABC?



Ответ: $AB > BC$.

Упражнение 8

Сравните стороны треугольника ABC, если:

а) угол A больше угла B, угол B больше угла C;

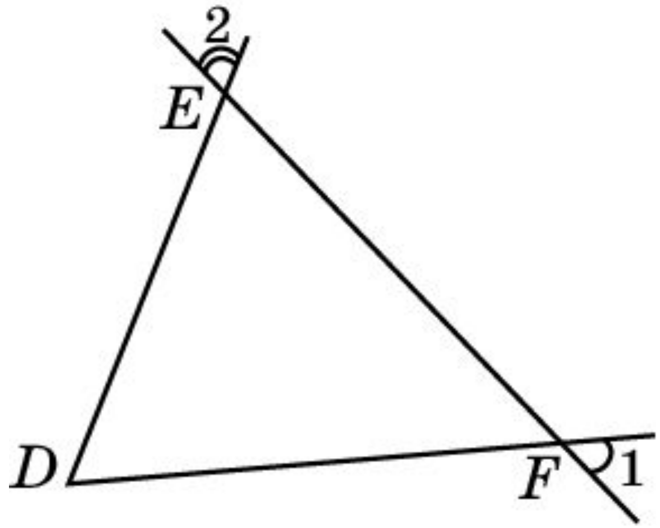
б) угол A больше угла B, угол B равен углу C.

Ответ: а) $BC > AC > AB$;

б) $BC > AB$, $AC = AB$.

Упражнение 9

На рисунке $DE<DF$. Каким соотношением связаны углы 1 и 2?



Ответ: угол 1 меньше угла 2.

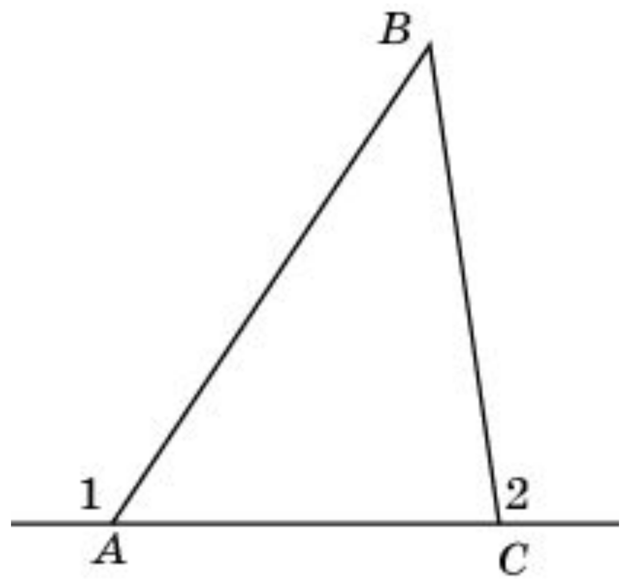
Упражнение 10

Какой вид имеет треугольник, если: а) два его угла равны; б) три его угла равны?

Ответ: а) Равнобедренный; б) правильный.

Упражнение 11

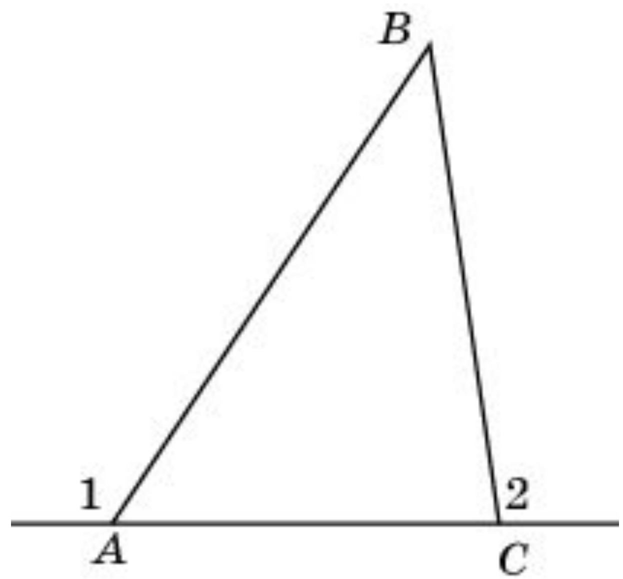
На рисунке $AB > BC$. Докажите, что угол 1 больше угла 2.



Ответ: Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то из неравенства $AB > BC$ следует, что угол BAC меньше угла BCA. Значит, для смежных углов выполняется неравенство $\angle 1 > \angle 2$.

Упражнение 12

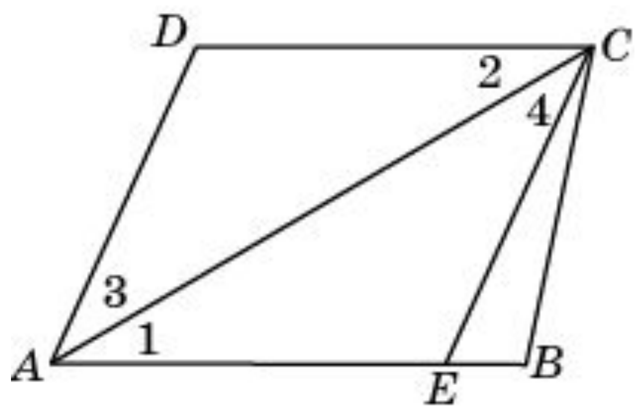
На рисунке угол 1 больше угла 2. Докажите, что $AB >$ BC.



Ответ: Из неравенства $\angle 1 > \angle 2$ следует, что угол BAC меньше угла BCA. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то $AB > BC$.

Упражнение 13

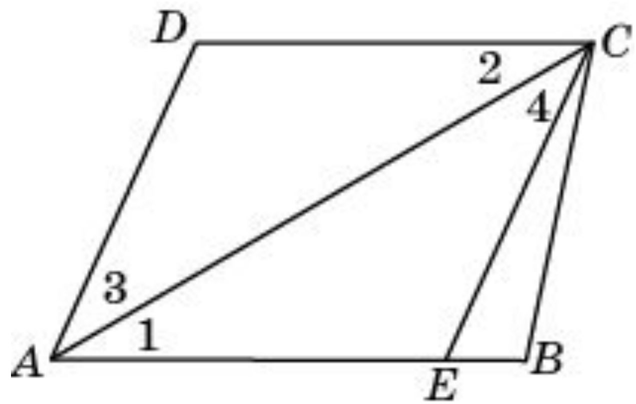
На рисунке угол 1 равен углу 2, $CD < AB$. Докажите, что угол 3 меньше угла 4.



Ответ: На отрезке AB возьмем точку E так, что $AE = CD$. Треугольники ACD и CAE равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, угол 3 равен углу ACE, который меньше угла 4.

Упражнение 14

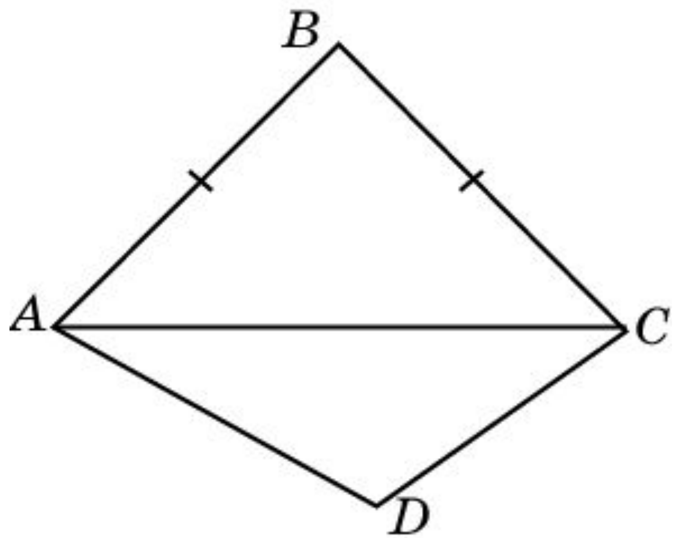
На рисунке угол 1 равен углу 2, угол 3 меньше угла 4. Докажите, что $CD < AB$.



Ответ: От луча CA в полуплоскости, содержащей точку B, отложим угол, равный углу 3. Точку пересечение его стороны с отрезком AB обозначим E. Треугольники ACD и CAE равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $CD = AE < AB$.

Упражнение 15

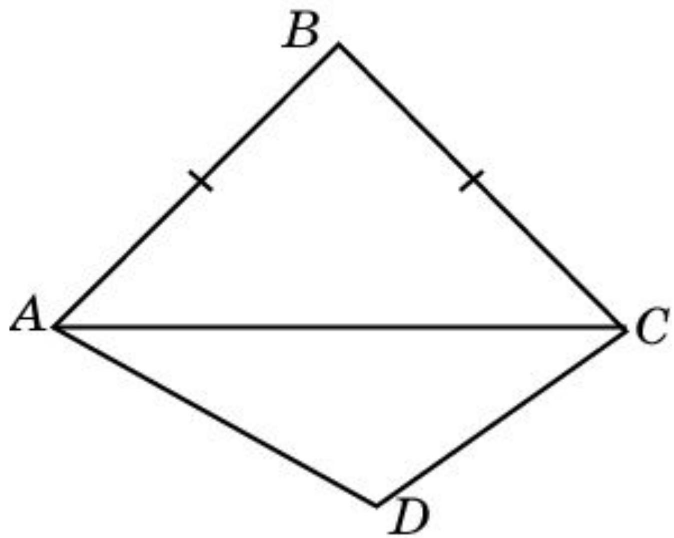
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$, $AD > CD$. Докажите, что угол C больше угла A.



Ответ: Проведем диагональ AC. Треугольник ABC – равнобедренный, следовательно, угол BAC равен углу BCA. В треугольнике ACD $AD > CD$, следовательно, угол DCA больше угла DAC. Значит, угол C больше угла A.

Упражнение 16

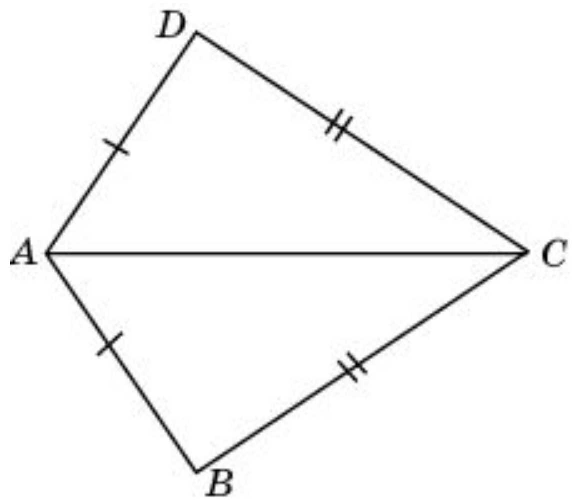
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$, угол C больше угла A. Докажите, что $AD > CD$.



Ответ: Проведем диагональ AC. Треугольник ABC – равнобедренный, следовательно, угол BAC равен углу BCA. Следовательно, угол DCA больше угла DAC. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то в треугольнике ACD выполняется неравенство $AD > CD$.

Упражнение 17

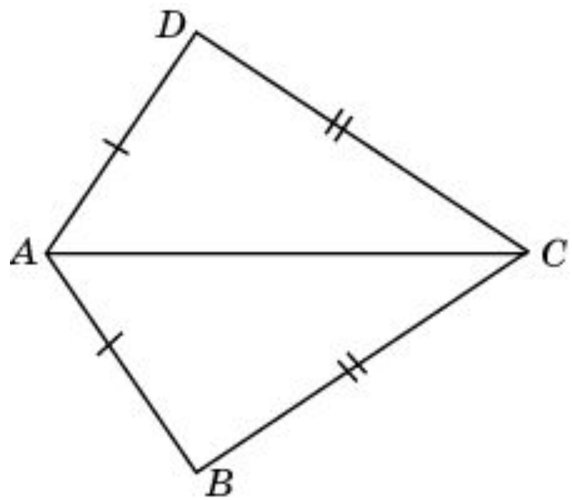
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = AD$, $BC = CD$, $AB < BC$. Докажите, что угол A больше угла C.



Ответ: Проведем диагональ AC. Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то угол DAC больше угла DCA, угол BAC больше угла BCA. Значит, в четырехугольнике $ABCD$ угол A больше угла C.

Упражнение 18

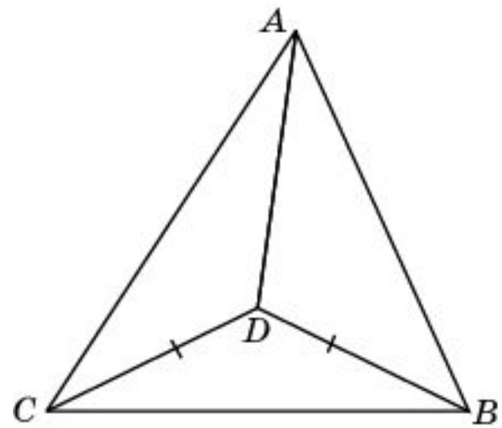
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = AD$, $BC = CD$, угол A больше угла C. Докажите, что $AB < BC$.



Ответ: Проведем диагональ AC. Треугольники ABC и ADC равны по трем сторонам. Следовательно, угол BAC равен углу DAC, угол BCA равен углу DCA. Так как угол A четырехугольника $ABCD$ больше угла C, то угол BAC больше угла BCA. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то в треугольнике ABC выполняется неравенство $AB < BC$.

Упражнение 19

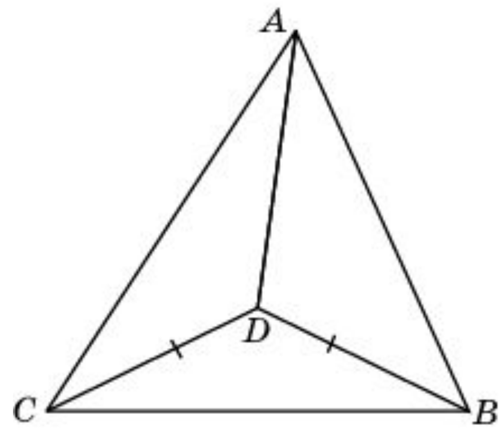
Вершины треугольника ABC соединены отрезками с точкой D, лежащей внутри этого треугольника, $AC > AB$, $CD = BD$. Докажите, что угол ACD меньше угла ABD.



Ответ: Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то угол ACB меньше угла ABC. Треугольник BCD – равнобедренный, следовательно, угол DCB равен углу DBC. Значит, угол ACD меньше угла ABD.

Упражнение 20

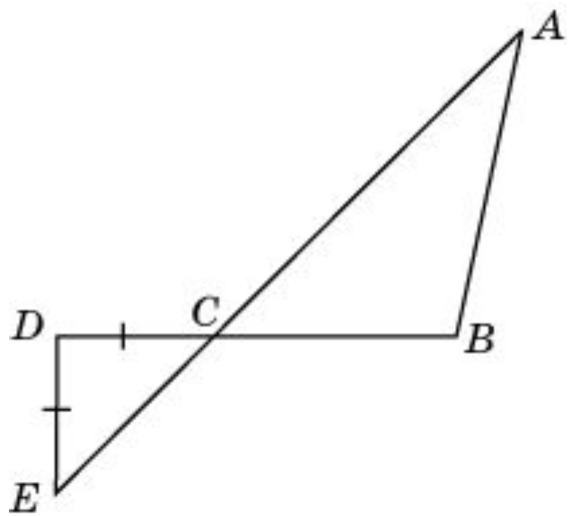
Вершины треугольника ABC соединены отрезками с точкой D, лежащей внутри этого треугольника, $CD = BD$, угол ACD меньше угла ABD. Докажите, что $AC > AB$.



Ответ: Треугольник BCD – равнобедренный, следовательно, угол DCB равен углу DBC. Значит, угол ACB меньше угла ABC. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то в треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > AB$.

Упражнение 21

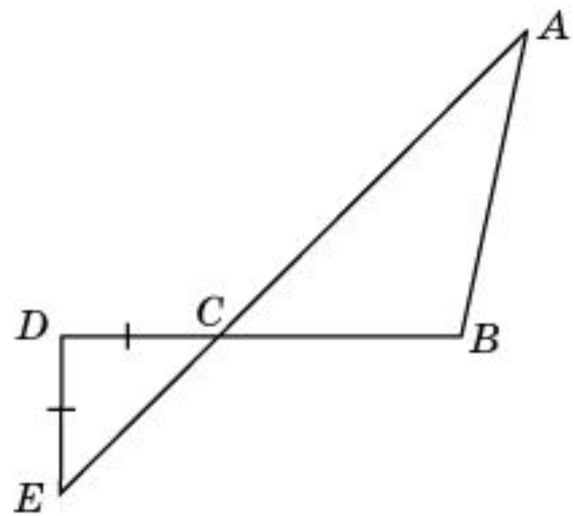
Отрезки AE и BD пересекаются в точке C, $AB > BC$, $CD = DE$. Докажите, что угол BAC меньше угла DEC.



Ответ: Так как $AB > BC$, то угол BAC меньше угла BCA. Так как $CD = DE$, то угол DEC равен углу DCE. Углы BCA и DCE равны как вертикальные. Значит, угол BAC меньше угла DEC.

Упражнение 22

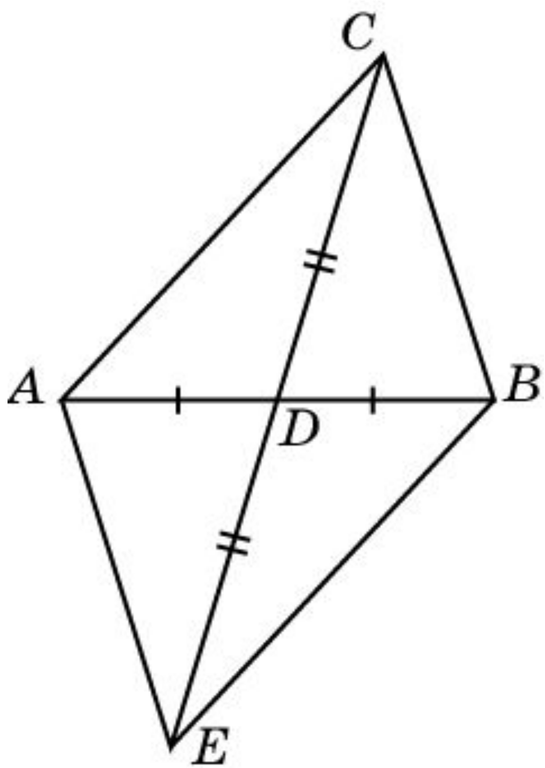
Отрезки AE и BD пересекаются в точке C, $CD = DE$, угол BAC меньше угла DEC. Докажите, что $AB > BC$.



Ответ: Так как $CD = DE$, то угол DEC равен углу DCE. Углы BCA и DCE равны как вертикальные. Так как угол BAC меньше угла DEC, то угол BAC меньше угла BCA. Значит, угол $AB > BC$.

Упражнение 21*

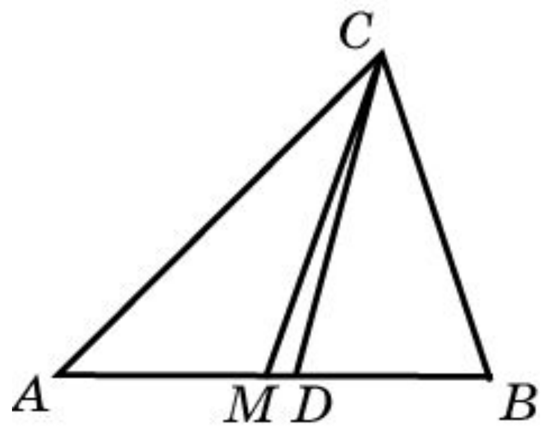
В треугольнике *ABC* выполняется неравенство *AC* > *BC*, *CD* – медиана. Докажите, что угол *BCD* больше угла *ACD*.



Решение. Отложим на продолжении медианы *CD* отрезок *DE*, равный отрезку *CD*. Треугольники *BCD* и *AED* равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, *BC* = *AE* и угол *BCD* равен углу *AED*. В треугольнике *ACE* сторона *AC* больше стороны *AE*, следовательно, угол *E* больше угла *C*. Значит, угол *BCD* больше угла *ACD*.

Упражнение 22*

В треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > BC$, CD – биссектриса. Докажите, что AD больше BD.



Решение. В силу предыдущей задачи, для медианы CM угол ACM меньше угла BCM. Следовательно, медиана CM лежит внутри угла ACD. Значит, $AD > BD$.