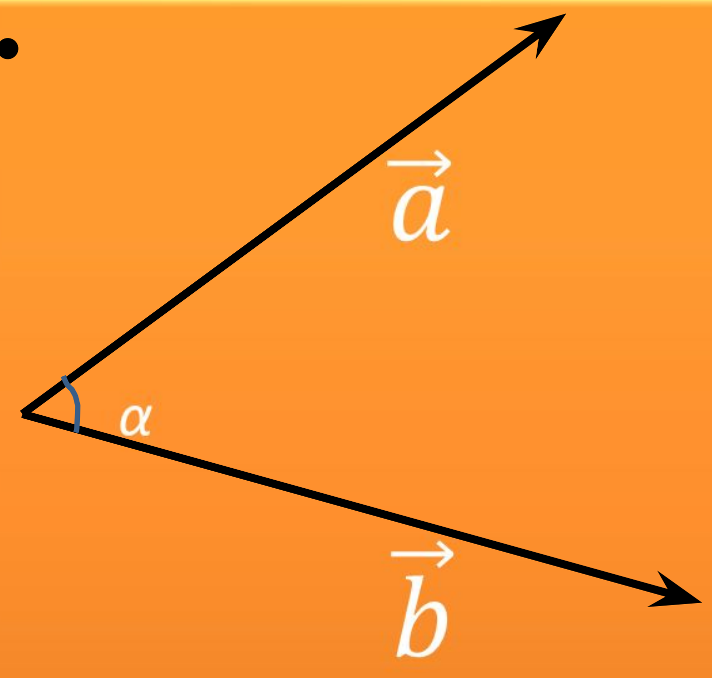
Скалярное произведение векторов
геометрия 9 класс

Подготовила
Акчурина О.О.

Угол между векторами

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными.



$<(\vec{a}\,\vec{b}) = \alpha$

- Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленные, или один или оба вектора нулевые, то угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 0°.

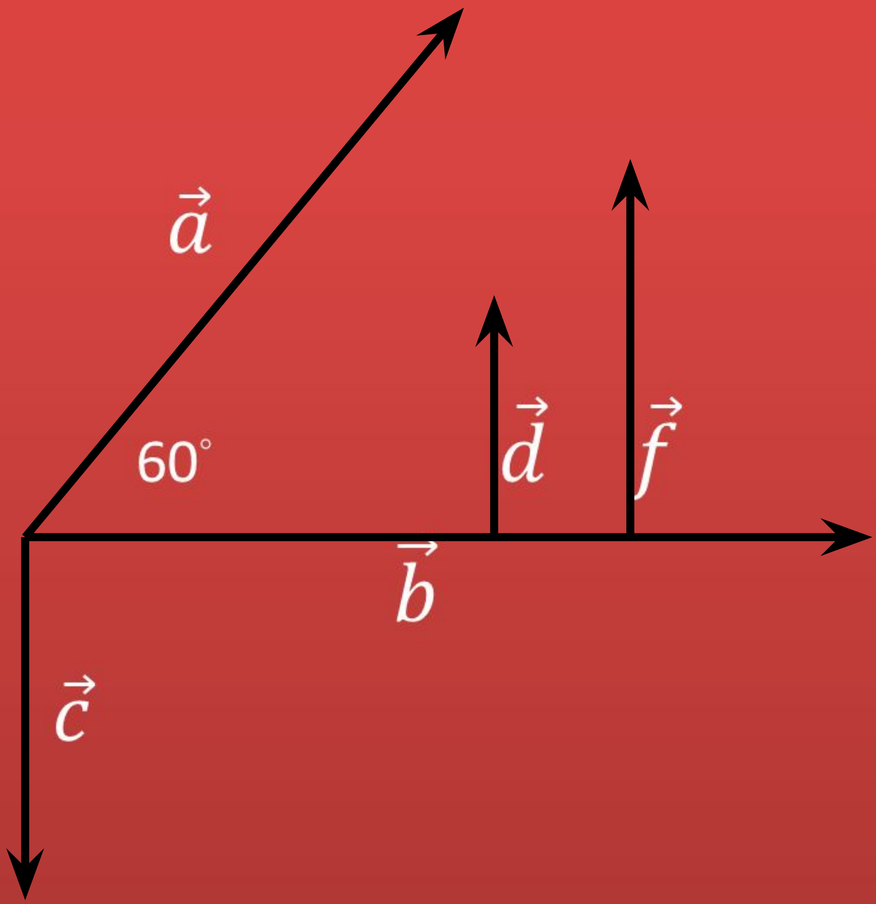
$$<(\vec{a}\ \vec{b}) = 0^\circ$$

- Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направленные, то угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 180°.

$$<(\vec{a}\ \vec{b}) = 180^\circ$$

Два вектора называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Приме
р



$<(\vec{a}\ \vec{b}) = 60^\circ$;

$<(\vec{a}\ \vec{c}) = 150^\circ$;

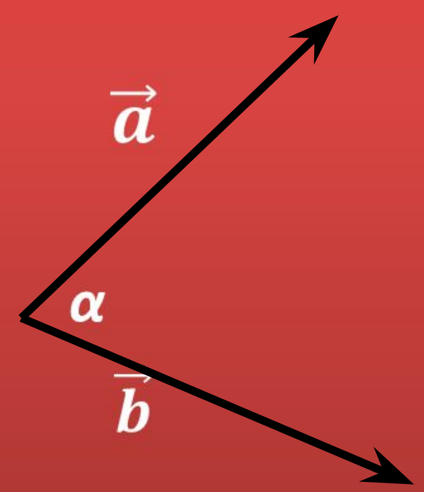
$<(\vec{c}\ \vec{b}) = 90^\circ$;

$<(\vec{d}\ \vec{f}) = 0^\circ$;

$<(\vec{c}\ \vec{d}) = 180^\circ$;

$<(\vec{d}\ \vec{b}) = 90^\circ$.

Скалярным произведением двух векторов называют произведение их длин на косинус угла между ними.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы **перпендикулярны**.

Действительно.

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}\ \vec{b}) = 90^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$ и тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Обратно.

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - ненулевые, тогда $\cos\alpha = 0$ и $\angle(\vec{a}\ \vec{b}) = 90^\circ$, т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называют скалярным квадратом и обозначают $\vec{a}^2$.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Примеры

- Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}\ \vec{b}) = 60^\circ$;
2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $\angle(\vec{a}\ \vec{b}) = 150^\circ$;
3) $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{b}| = 8$, $\angle(\vec{a}\ \vec{b}) = 90^\circ$;

Решение

- Для решения задачи воспользуемся формулой:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\alpha$$

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5.$

2) $\overrightarrow{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 7 \cdot \cos 150^\circ = 28 \cdot \cos(180^\circ - 30^\circ) =$

$= 28 \cdot \cos 30^\circ = 28 \cdot \frac{1}{2} = 14.$

3) $\overrightarrow{a} \cdot \vec{b} = 9 \cdot 8 \cdot \cos 90^\circ = 72 \cdot 0 = 0.$

Пусть в прямоугольной системе координат даны векторы $\vec{a}\{x_1, y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2, y_2\}$

- Теорема

  В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Следствия:

1) Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$

2) Косинус угла α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}}$$

Примеры

1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

a) $\vec{a}\{3;4\}$; $\vec{b}\{5;2\}$;

b) $\vec{a}\{-8;4\}$; $\vec{b}\{3;6\}$

2. Найти косинус угла α между векторами $\vec{a}\{-2;3\}$ и $\vec{b}\{3;4\}$.

Решение

1. Для решения задачи воспользуемся формулой $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 15 + 8 = 23$

$b)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = -24 + 24 = 0$.

2. $\cos\alpha = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2} . \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2}} = \dfrac{-2 \cdot 3 + 3 \cdot (-4)}{\sqrt{4+9} . \sqrt{9+16}}$

$= \dfrac{-6 + (-12)}{5\sqrt{13}} = \dfrac{-18}{5\sqrt{13}}$.

Свойства скалярного произведения

- Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любого числа k верны соотношения:

1. $\vec{a}^2 \geq 0$, причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq 0$;
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;
4. $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Пример

- Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30º,

  $|\vec{a}|=|\vec{b}|= 1$.

  Вычислить скалярное произведение

  $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$.

Решение

- $(\vec{a} - 2\,\vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - 2\vec{b}\vec{a} + \vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 =$

$= \vec{a}^2 - \vec{b}\vec{a} - 2\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 30^0 - 2|\vec{b}|^2 =$

$= 1 - 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)$

Вопросы для повторения изученного материала

1. Что означают слова «угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α»?
2. В каком случае угол между векторами равен 0^o?
3. Какие два вектора называются перпендикулярными?
4. Что такое скалярное произведение двух векторов?
5. В каком случае скалярное произведение ненулевых векторов: а) равно 0; б) больше 0; в) меньше 0?
6. Записать формулу скалярного произведения векторов в координатной форме.
7. Записать формулу косинуса угла между ненулевыми векторами через их координаты.
8. Сформулировать свойства скалярного произведения векторов.