ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДОБИЯ И ГОМОТЕТИИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ОЛИМПИАДНОГО УРОВНЯ

Студент IV курса факультета математики и компьютерных наук по направлению подготовки 01.03.01 «Математика» профиль: преподавание математики и информатики <u>Филь Е.А.</u>

научный руководитель ст. преподаватель

кафедры алгебры и геометрии

<u>Куприенко Н.Н.</u>

Майкоп 2016

ДВИЖЕНИЕ:

1.1. Преобразование фигур

1.2. Свойства движения

1.3. Параллельный перенос

1.4. Центральная симметрия

1.5. Осевая симметрия

1.6. Поворот

ГЛАВА 2. ГОМОТЕТИЯ

2.1. Гомотетия

2.2. Свойства гомотетии

2.3. Гомотетичность окружностей

2.4. Композиция гомотетий

2.5. Поворотная гомотетия

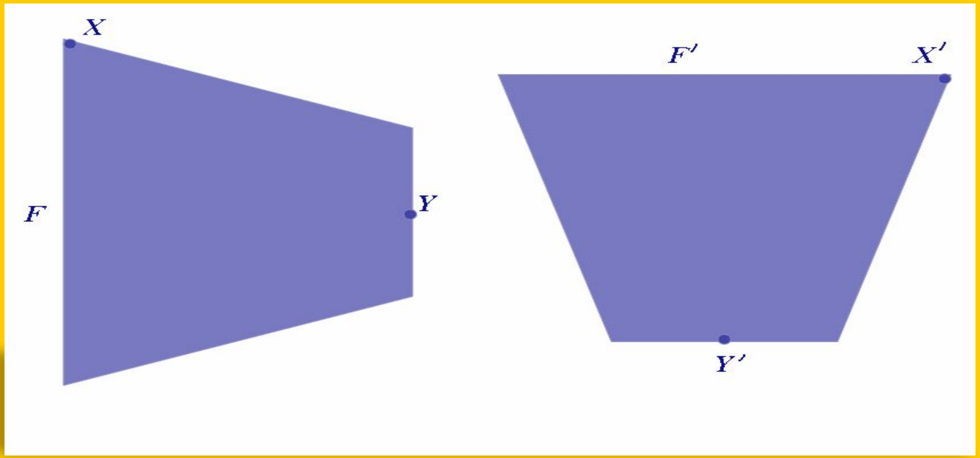
ГЛАВА 3. Разные задачи из Всероссийских олимпиад школьников

Понятие движения в геометрии

Что такое движение?

Определение 1.1.[6] Преобразование одной фигуры в другую называется *движение*м, если оно сохраняет расстояние между точками, то есть переводит любые две точки X и Y одной фигуры F в точки X', Y' другой фигуры F' так, что $XY = X'Y'$. (Рис. 1.1.)

Рисунок 1.



Говорят, что эта фигура получена преобразованием из данной.

Свойства движения

Теорема 1.3. [6] Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения. (Рис. 2).

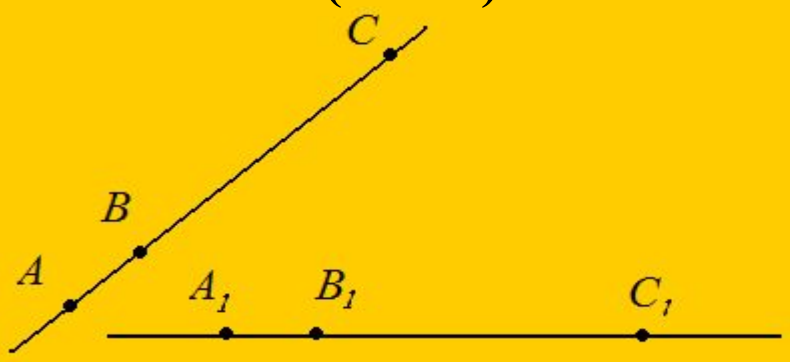


Рисунок 2.

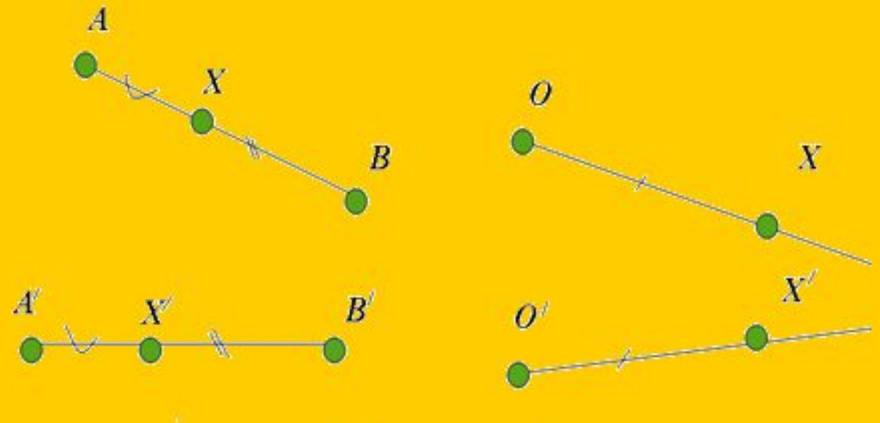


Рисунок 3.

Следствие 1.1.[6] При движении прямые переходят в прямые, полупрямые – в полупрямые, отрезки - в отрезки. (Рис. 3).

Следствие 1.2.[1] При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

(Рис. 4).

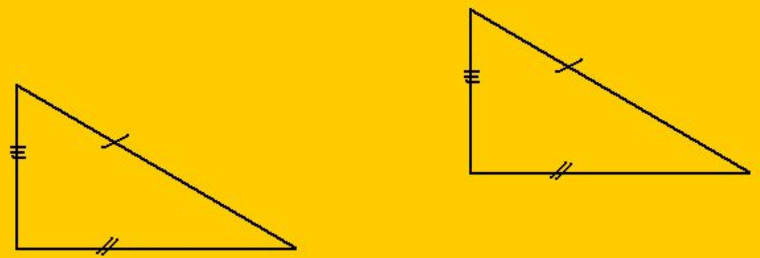


Рисунок 4.

Параллельный перенос

Определение 1.4.[1] Паралелльный перенос или трансляция – частный случай движения, при котором все точки пространства перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

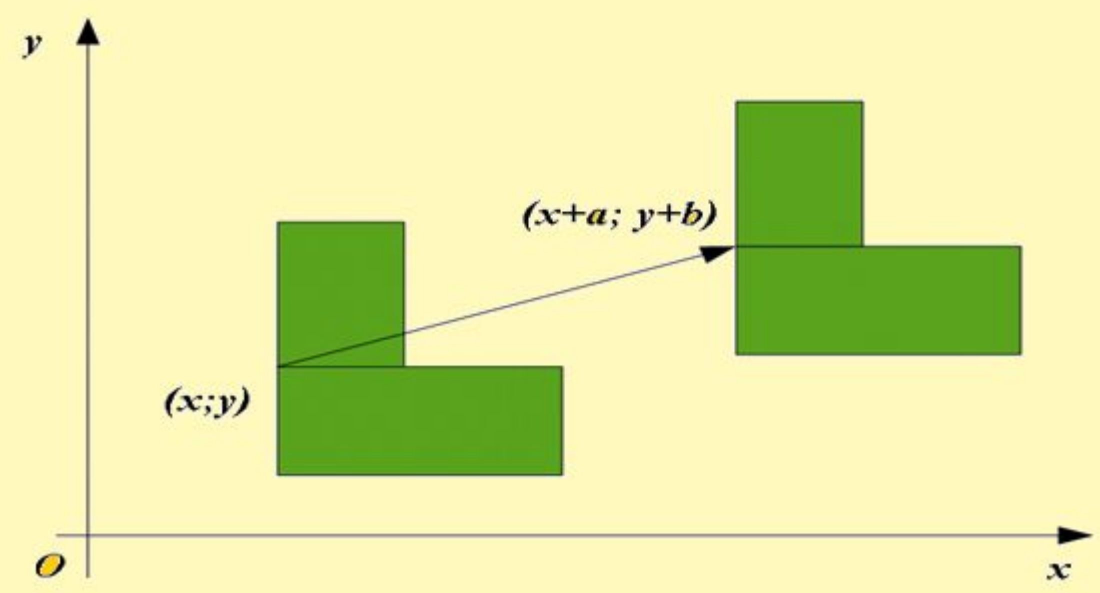


Рисунок 5.

Вводная задача 1.1. [5]

Докажите, что при параллельном переносе окружность переходит в окружность.

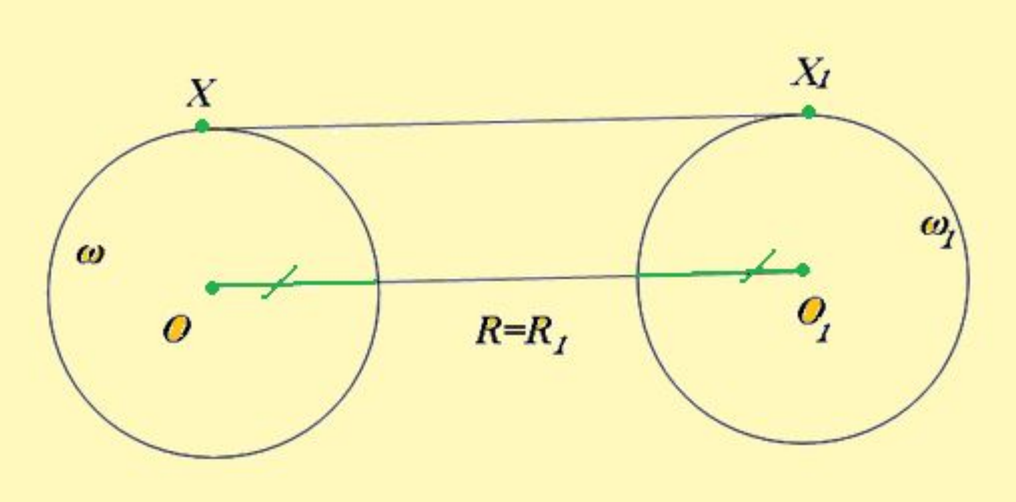


Рисунок 6.

Заметим, параллельный перенос все точки пространства перемещает в одном и том же направлении на одно и то же расстояние, то действительно, окружность переходит в окружность при параллельном переносе.

Гомотетия *(от др.гр. ὁμός(homós) − «равный, одинаковый, взаимный, общий» и θετος(thetós) − «расположенный».*

Рисунок 7.

- *Гомотетия сохраняет формы , но не размеры.*

Определение 1.[1] Гомотетией называют преобразование плоскости, которое каждую точку X отображает на такую точку X' , обладающую тем свойством , что $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$, где точку O называют центром гомотетии, а число k - коэффициентом гомотетии .

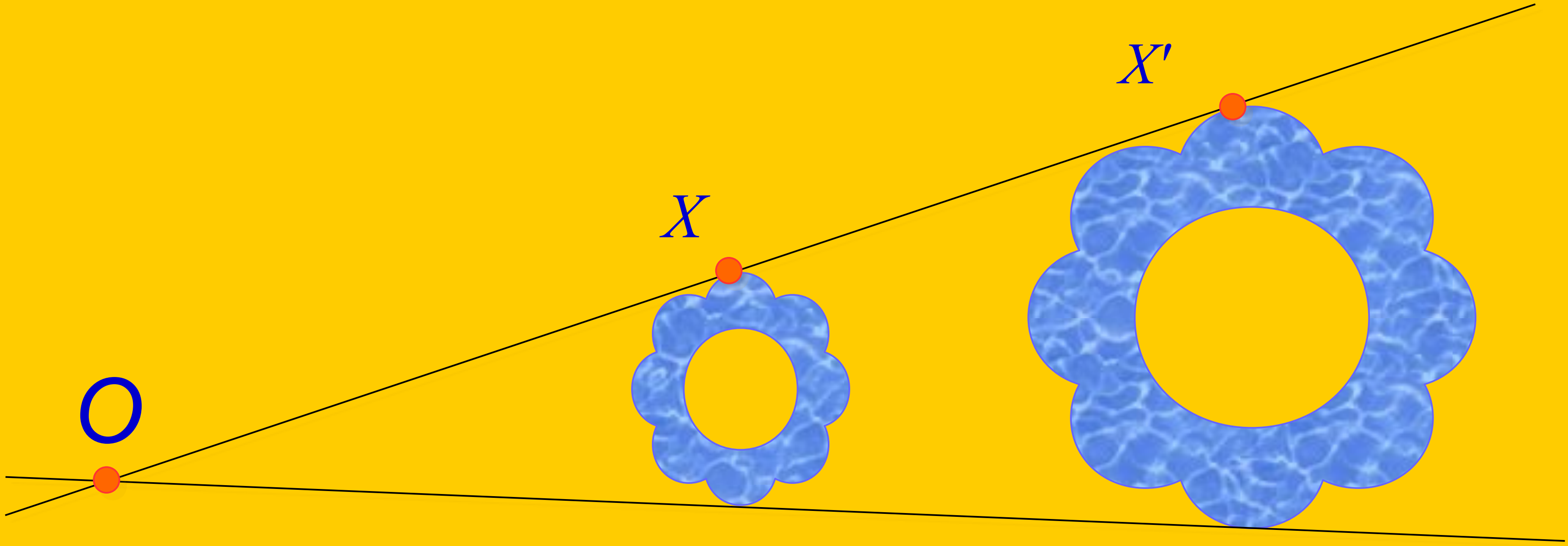


Рисунок 8.

Определение 2. [1] Две фигуры называются *гомотетичными*, если одна из них переходит в другую при некоторой *гомотетии*. (Рис. 9).

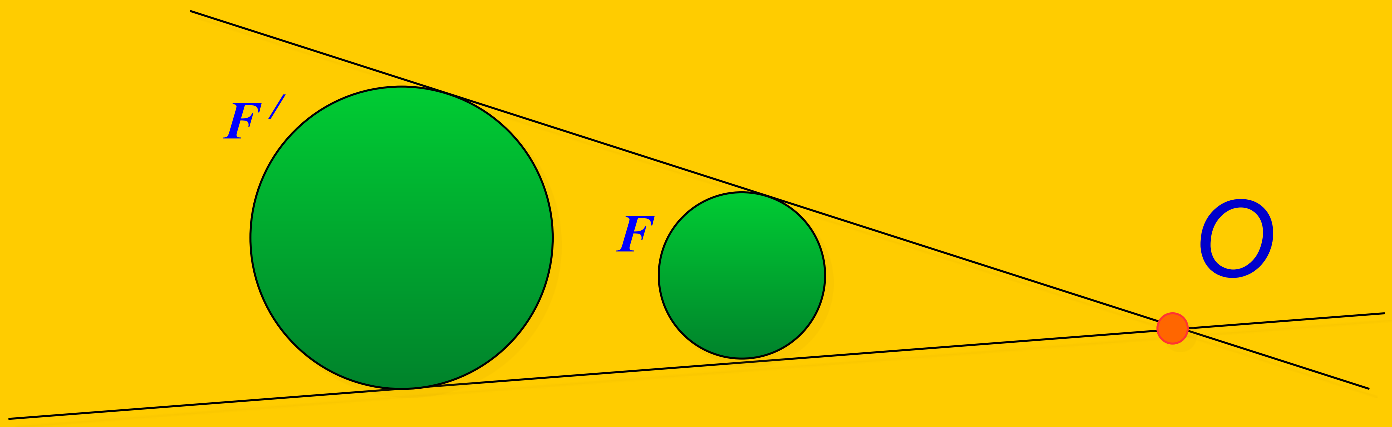


Рисунок 9.

- ***Теорема 1***. *Две неравные окружности гомотетичны дважды.*[2]

Определение 3. *Окружность Аполлония* – ГМТ плоскости, отношение расстояний от которых до двух заданных точек – величина постоянная, не равная единице рис.10,б). [5]

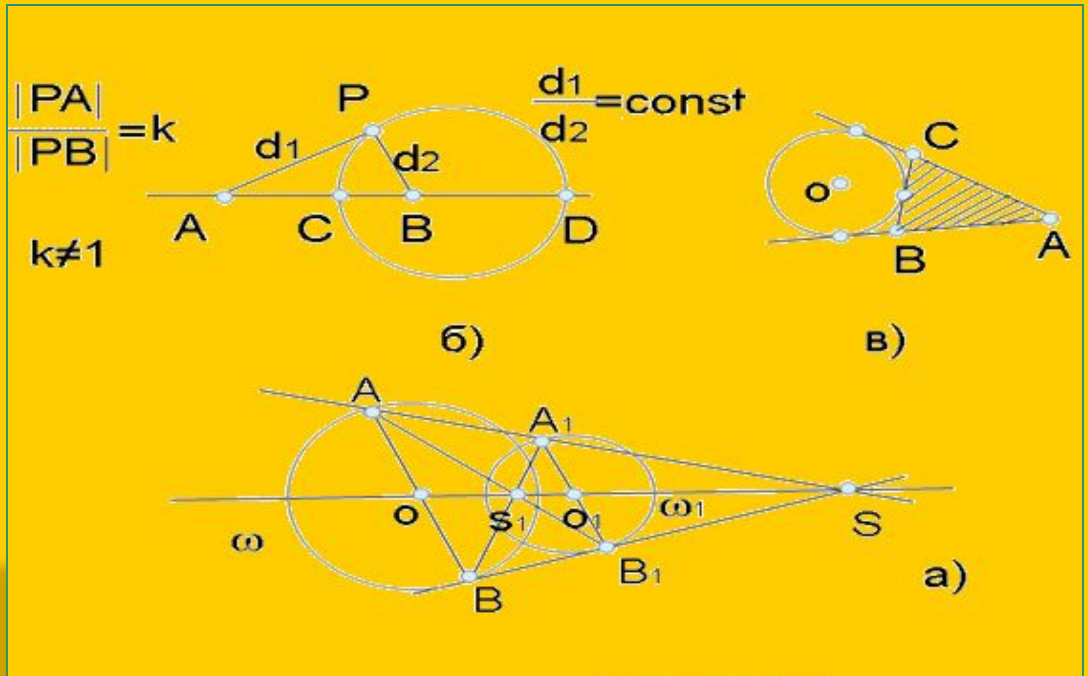


Рисунок 10.

Определение 4. *Вневписанная окружность треугольника* это окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон (рис.10, в)). [4]

Теорема 2. Если центры трёх попарно неравных окружностей неколлинеарны, то шесть центров гомотетий этих окружностей, взятых попарно, лежат по три на четырёх прямых.

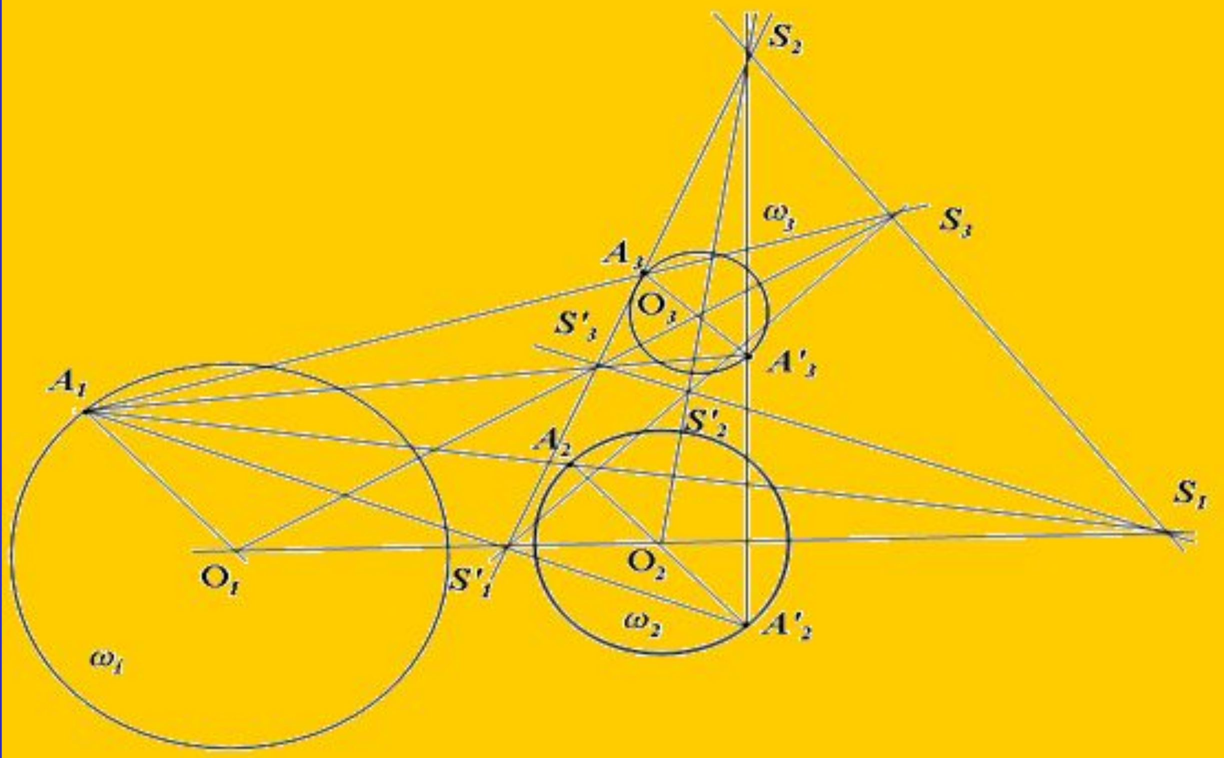


Рисунок 11.

- *Теорема о трёх центрах гомотетий*

задача №871 из сборника «Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2009: заключительные этапы»[1]

Дан выпуклый четырёхугольник ABCD. Пусть P и Q – точки пересечения лучей BA и CD, BC и AD соответственно, а H – проекция D на PQ. Докажите, что четырёхугольник ABCD является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ADP и CDQ видны из точки H под равными углами.

(Автор В. Шмаров.)

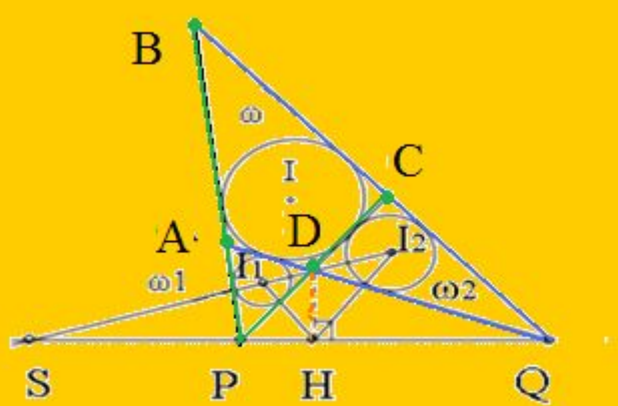


Рисунок 12.

Определение 4*.Углом, под которым окружность видна из данной точки, называется угол между касательными, проведёнными из этой точки к окружности.*

Лемма 1*.Утверждение: «окружности ω_1 и ω_2 видны под равными углами из точки H»,- равносильно тому, что* $\frac{r_1}{r_2} = \frac{HI_1}{HI_2}$ (рис.13, б).

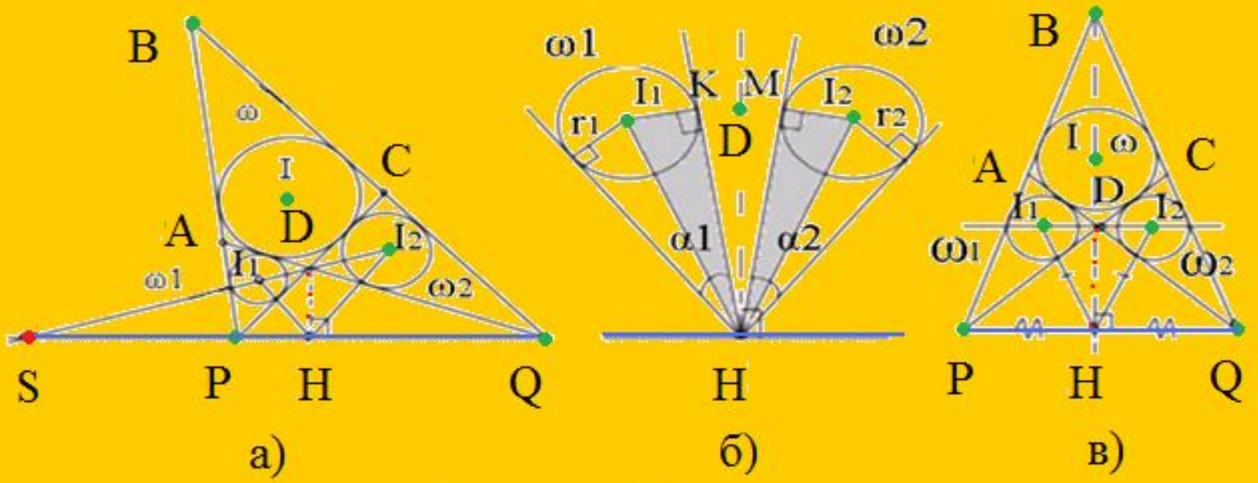


Рисунок 13.

Решение задачи. Пусть окружности ω1 и ω2, с центрами I1 и I2, радиусами r1 и r2, – вписанные окружности треугольников ADP и CDQ соответственно и D – точка пересечения касательных, следовательно, по теореме 1, ω1 и ω2 гомотетичны с центром D, т. е. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{DI_1}{DI_2}$ (рис.13).

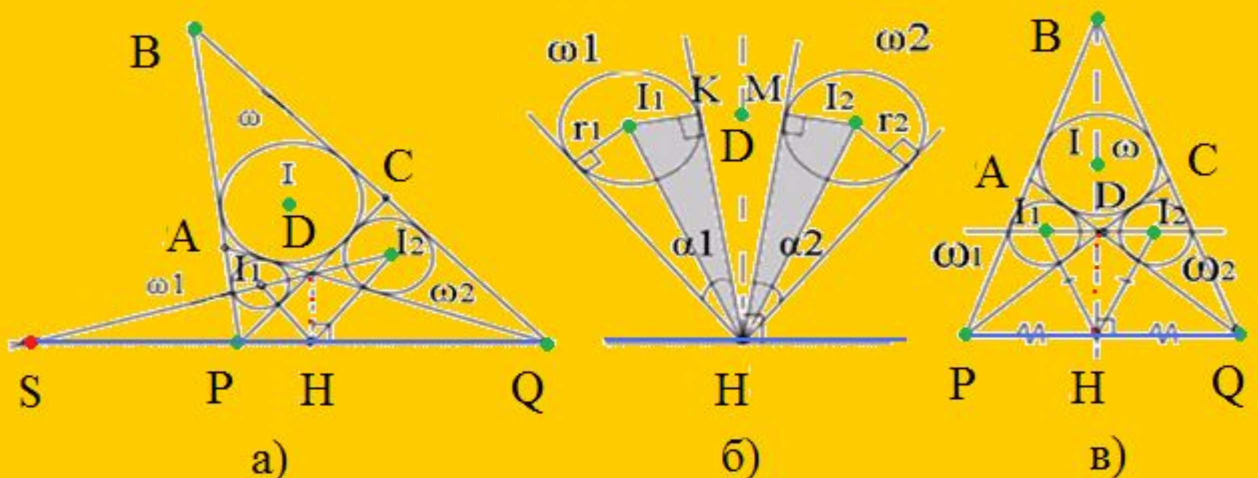


Рисунок 13.

Далее рассматриваются два случая: 1) радиусы различны; 2) радиусы одинаковы.

1) Пусть $\mathbf{r_1 \neq r_2}$ и S – центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей ω_1 в ω_2, то есть S – точка пересечения общих внешних касательных к обеим окружностям.

Если окружности ω_1 и ω_2 видны из точки H под равными углами =>Л.1.=> $\frac{r_1}{r_2} = \frac{HI_1}{HI_2}$ (1);

Т.1.=> $\frac{r_1}{r_2} = \frac{DI_1}{DI_2}$ (2)

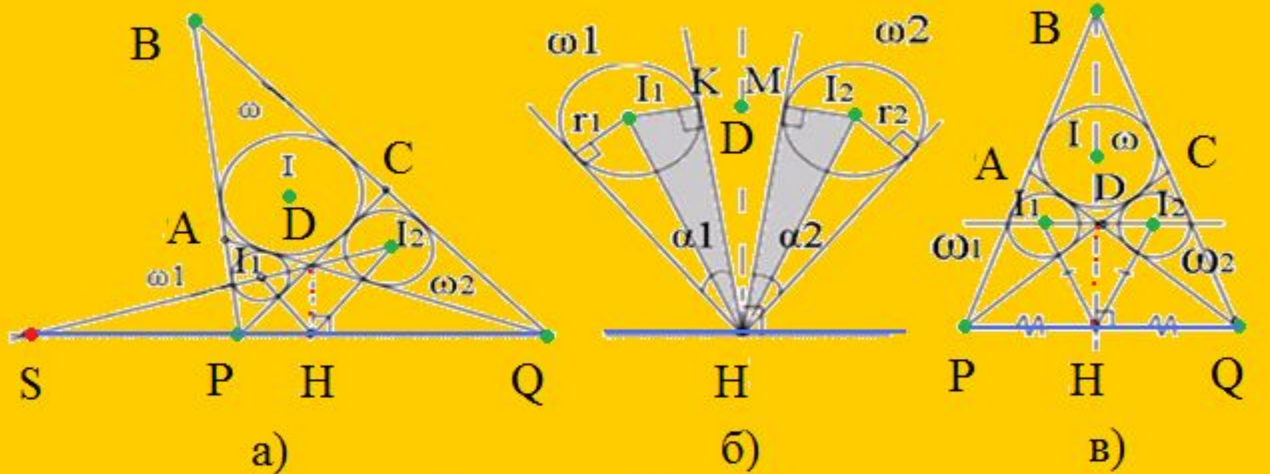


Рисунок 13.

(1),(2)=> $\frac{DI_1}{DI_2} = \frac{HI_1}{HI_2}$

Так как S – ещё один центр гомотетии ω1 и ω2, то $\frac{r_1}{r_2} = \frac{SI_1}{SI_2}$ $\frac{SI_1}{SI_2} = \frac{HI_1}{HI_2} = \frac{DI_1}{DI_2}$

1) Пусть $\mathbf{r_1 \neq r_2}$ и S – центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей ω_1 в ω_2, то есть S – точка пересечения общих внешних касательных к обеим окружностям.

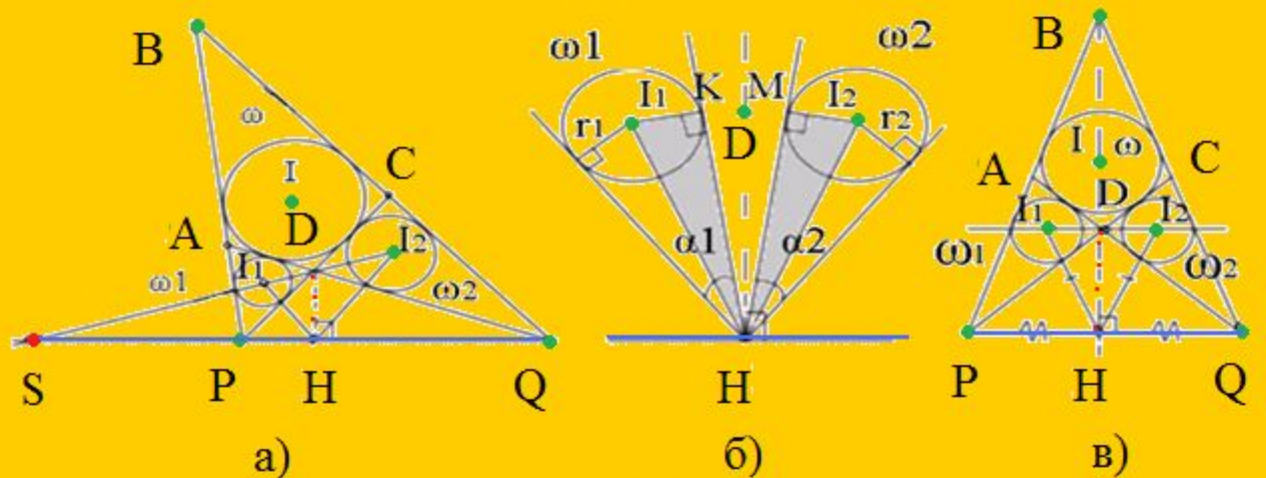


Рисунок 13.