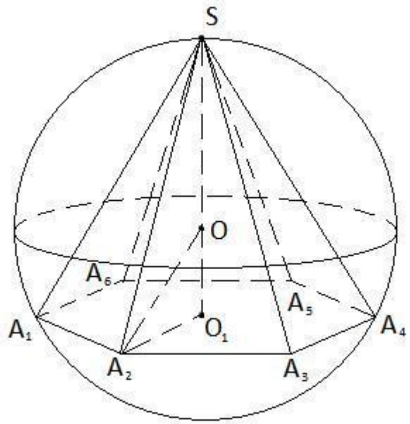
«Вписанные и описанные многогранники в задачах ЕГЭ»

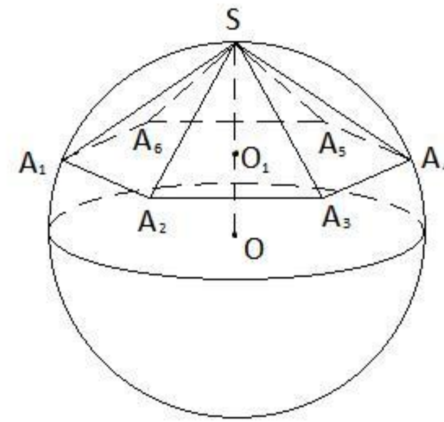
Презентацию подготовила: Седых Светлана Вениаминовна
Учительница математики МКОУ Бобровская средняя общеобразовательная школа № 1

“Природа говорит языком математики : буквы этого языка – круги, треугольники и иные математические фигуры, ” – Г. Галилей

1.Нахождение объема вписанной в сферу пирамиды.

В сферу объемом 36π вписана правильная шестиугольная пирамида. Расстояние от центра сферы до основания пирамиды равно 1. Найдите объем пирамиды.





Решение (I случай):

Рассмотрим случай, когда основание пирамиды лежит ниже центра сферы; тогда $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$,

$h = O_1S = OO_1 + R_{\text{сф}}$; $V_{\text{сф}} = 36\pi = \frac{4}{3}\pi R_{\text{сф}}^3$,

отсюда $R_{\text{сф}} = \sqrt[3]{\frac{36\pi \cdot 3}{4\pi}} = \sqrt[3]{27} = 3$, тогда $h = 1 + 3 = 4$;

$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} nR^2 \sin 2\gamma$ $(n = 6, \gamma = \frac{180°}{6} = 30°$,

$R = \sqrt{A_2O^2 - OO_1^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2})$,

$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sin 60° = 3 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$,

$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}$;

Решение (II случай) :

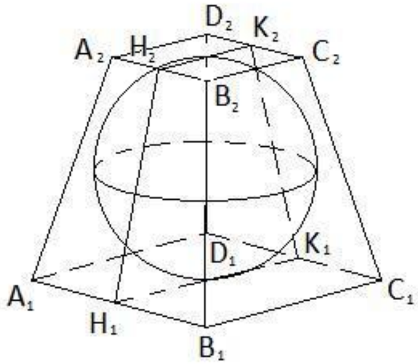
Рассмотрим случай, когда основание пирамиды лежит выше центра сферы; тогда $h = O_1S = OS - OO_1 = 3 - 1 = 2$,

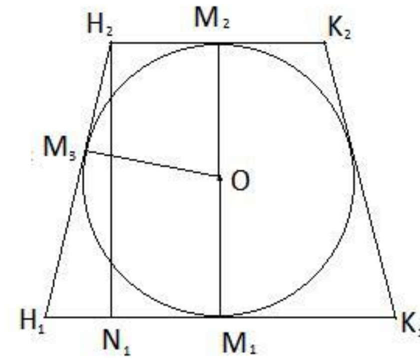
$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 2 = 8\sqrt{3}$.

Ответ : $16\sqrt{3}; 8\sqrt{3}$.

2. Нахождение угла наклона боковой грани пирамиды к основанию.

Около шара описана правильная усеченная четырехугольная пирамида, у которой площадь одного основания в 9 раз больше другого. Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основани





Рассмотрим сечение $H_1H_2K_2K_1$: пусть $H_2K_2 = x$, тогда

$H_1K_1 = 3x, H_2M_2 = \frac{x}{2}, H_1M_1 = \frac{3x}{2}, M_1N_1 = \frac{x}{2},$

$H_1N_1 = \frac{3x}{2} - \frac{x}{2} = \frac{2x}{2} = x.$

Рассмотрим касательные к окружности H_1H_2 и H_2K_2, и радиусы OM_3 и OM_2 : $H_1H_2 \perp OM_3, H_2K_2 \perp OM_2, OM_3 = OM_2$, следовательно, что $H_2M_2 = H_2\ M_3 = \frac{x}{2}$ (по свойству касательных проведенных из одной точки); теперь рассмотрим касательные H_1H_2 и H_1K_1, и радиусы OM_3 и OM_1 : $H_1H_2 \perp OM_3, H_1K_1 \perp OM_1, OM_3 = OM_1$, следовательно, что $H_1M_3 = H_1\ M_1 = \frac{3x}{2}$; значит $H_1H_2 = \frac{3x}{2} + \frac{x}{2} = \frac{4x}{2} = 2x.$

Рассмотрим $\Delta H_1H_2N_1$:

$\cos\angle N_1H_1H_2 = \frac{H_1N_1}{H_1H_2} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}, \angle N_1H_1H_2 = 60°.$

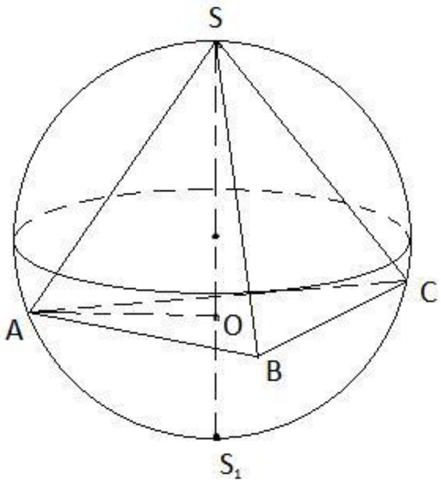
Решение :

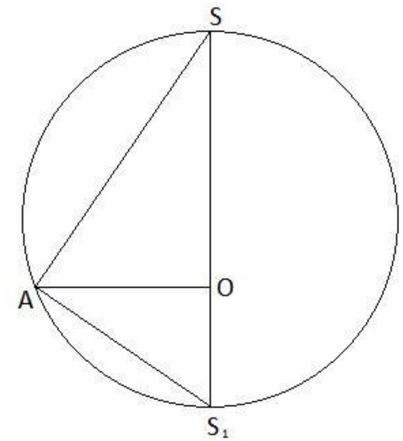
$S_1 = A_1B_1 \cdot A_1D_1, S_2 = A_2B_2 \cdot A_2D_2,\ \frac{A_1B_1 \cdot A_1D_1}{A_2B_2 \cdot A_2D_2} = 9$, т.к. усеченная четырехугольная пирамида правильная и описана около шара, то ее основания – квадраты, тогда $\frac{A_1B_1^2}{A_2B_2^2} = 9, \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = 3, \frac{H_1K_1}{H_2K_2} = 3.$

Ответ : $60°$

3.Отношение отрезков диаметра описанной около пирамиды сферы.

Около правильной треугольной пирамиды описана сфера. Угол наклона ребра пирамиды к плоскости основания равен 60°. В каком отношении, считая от вершины пирамиды, плоскость основания пирамиды делит диаметр сферы, проходящий через вершину пирамиды и точку пересечения медиан основания пирамиды.





Решение :

OS – высота пирамиды. Продлим отрезок OS до SS_1, SS_1 – диаметр сферы, $\angle OAS = 60°$, т.к. AS – наклонная, OS – перпендикуляр, OA – проекция. Рассмотрим диаметральное сечение сферы плоскостью ASO :

$\angle SAS_1 = 90°$ (т.к. опирается на дугу величиной $180°$), значит $\angle OAS_1 = 30°$. Из ΔASO : $OS = AO \cdot tg\ 60° = AO\sqrt{3}$. Из ΔAS_1O : $OS_1 = AO \cdot tg\ 30° = \frac{AO}{\sqrt{3}}$. $OS : OS_1 = AO\sqrt{3} : \frac{AO}{\sqrt{3}} = 3 : 1$.

Ответ :
3:1

Спасибо за внимание!