Овсянникова Людмила Александровна

Учитель математики
МБОУ «Школа №127

г. Н. Новгород

16.02.2012

Геометрия 11 класс

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Программы

общеобразовательных учреждений
Геометрия 10-11 классы
Составитель:
Бурмистрова Т.А.
М., Просвещение, 2009 г.

Геометрия

Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений
Л.С. Атанасян и др.
М., Просвещение, 2009 г.

Содержание

- Пояснительная записка
- Дидактические цели и задачи
- Прогнозируемые результаты освоения темы
- Обоснование проекта
- Учебно-тематическое планирование
- Проект занятия факультатива «Углы в пространстве»
- Литература

Пояснительная записка

- **Тема «Метод координат в пространстве» занимает важное место в изучении геометрии.**
- **Метод координат необходим для приобретения конкретных знаний о пространстве, для развития пространственного воображения и интуиции, математической культуры, эстетического воспитания.**
- **К изучению метода координат в пространстве учащиеся приступают, имея определенный опыт, владея достаточно большим запасом математических понятий и умений, приобретенных на уроках геометрии 7-10 классов.**
- **Значимость раздела многократно увеличивается в связи с включением задач на нахождение углов и расстояний в пространстве в С2 ЕГЭ.**
- **Актуальность темы заключается и в межпредметных связях. Метод координат используется при изучении физики, астрономии.**

Дидактические цели

Познавательные

- **Формировать умения:**
  - **решать простейшие задачи в координатах**
  - **находить скалярное произведение векторов в пространстве**
- **Применять координатно-векторный метод для нахождения углов между прямыми, прямой и плоскостью**
- **Углублять знания путем рассмотрения нестандартных задач**
- **Работать с движениями**

Развивающие

- **умение анализировать, выделять главное, сравнивать, обобщать**
- **графическую и функциональную культуру учащихся**
- **пространственное мышление учащихся**

Воспитательные

- **показать взаимосвязь математики с окружающей действительностью**
- **воспитание ответственного отношения к учебному труду**
- **формирование навыков общения, умения работать в коллективе**

Задачи

Для достижения поставленных целей в процессе обучения решаются следующие задачи:

- **Формировать навыки самостоятельности в поисках способов решения задачи**
- **Выделять и способствовать осмыслению логических приемов мышления, развитию образного и ассоциативного мышления**
- **Развивать пространственное воображение учащихся**
- **Показать связь теории с практикой**
- **Приобщать учащихся к работе с математической литературой**

Прогнозируемые результаты освоения темы

В результате изучения темы «Метод координат в пространстве» ученик должен:

Знать

- **Определения коллинеарных и компланарных векторов**
- **Формулы для нахождения угла между прямыми, прямой и плоскостью**
- **Формулы для вычисления длины вектора, расстояния между двумя точками, координат середины отрезка.**

Уметь

- **Изображать точки и простейшие многогранники в прямоугольной системе координат**
- **Находить координаты вершин многогранников**
- **Решать простейшие геометрические задачи, связанные с методом координат**

Использовать знания и умения в практической деятельности

- **Для выполнения расчетов по формулам**
- **Для моделирования практических ситуаций**
- **При изучении других предметов**

Обоснование проекта

- **Выбор данного раздела обусловлен наличием богатого материала для реализации основных принципов педагогических технологий, применяемых на уроках: компьютерных технологий, проблемного обучения, развивающего обучения, традиционной классно-урочной технологии.**
- **Типы уроков при изучении темы разнообразны – это урок изучения нового, урок формирования знаний, умений и навыков, урок обобщения и систематизации знаний, урок проверки и оценки знаний, урок ключевых задач, комбинированный урок.**
- **На этих уроках предполагается работа с современными средствами обучения, такими как компьютер, проектор.**
- **Для поддержания мотивации учащихся необходимо использовать практико-ориентированные задачи.**

Учебно-тематическое планирование

Метод координат в пространстве – 15 ч.

	Содержание материала	Кол. часов	Тип урока	Ресурсы ИКТ	Формы контроля
§1. Координаты точки и координаты вектора		**7 ч.**			
1-3	Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора	3 ч.	Урок – лекция, урок усвоения новых знаний, практикум	Презентация	С.р.
4	Связь между координатами векторов и координатами точки	1 ч.	Лекция – беседа		
5-6	Простейшие задачи в координатах	2 ч.	Урок – лекция, практикум	Презентация	
7	Контрольная работы	1 ч.	Контроль знаний		К.р.
§2. Скалярное произведение векторов		**4 ч.**			
8-9	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.	2 ч.	Проблемное изучение материала, урок усвоения новых знаний	Презентация	Тест
10-11	Вычисление углов прямыми, прямыми и плоскостями	2 ч.	Урок ключевых задач, урок усвоения новых знаний	Презентация	С.р.
§3. Движения		**4 ч.**			
12-13	Движения: центральная симметрия, зеркальная симметрия, осевая симметрия, параллельный перенос	2 ч.	Групповая работа, урок усвоения новых знаний, практикум	Презентация	С.р.
14	Обобщающий урок: «Метод координат в пространстве»	1 ч.	Урок обобщения и систематизации знаний		
15	Зачет по теме«Метод координат в пространстве»	1 ч.	Контроль знаний		К.р.

Проект занятия факультатива

Метод координат. Углы в пространстве

Цели урока:

- Повторить уравнение плоскости, проходящей через 3 ее точки, не лежащие на одной прямой
- Учить определять координаты вершин многогранников, помещенных в систему координат
- Формировать умения находить углы между прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями, используя формулы
- Углубить знания учащихся по теме
- Развивать:
  - логическое и алгоритмическое мышление учащихся
  - графическую культуру
  - пространственные представления учащихся
  - культуру математической речи
- Воспитывать:
  - коммуникативные и волевые качества
  - способность к преодолению трудностей
  - ответственное отношение к учебному труду
  - способность к контролю и самоконтролю
  - творческую личность

Тип урока:

- комбинированный урок

Методы обучения:

- объяснительный, репродуктивный, проблемный, частично-поисковый

Способ изложения

- побуждает учащихся не только механически запоминать материал, но и размышлять над ним в процессе обучения

Формы обучения:

- коллективная, фронтальная, индивидуальная

Средства обучения:

- компьютер, проектор, экран

Проект занятия факультатива

«Старайся дать уму как можно больше пищи…»
М.В.Ломоносов

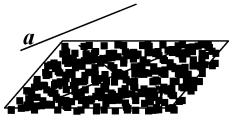
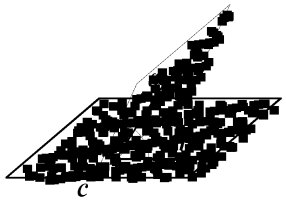
Метод координат. Углы в пространстве.

Структура урока

- **Организационный момент**
- **Актуализация опорных знаний**
- **Мотивация учебной деятельности**
- **Постановка целей и учебных задач урока**
- **Введение проблемной ситуации**
- **Ознакомление с новым материалом**
- **Закрепление**
- **Постановка д/з**
- **Рефлексия, подведение итогов работы**

Организационный момент. Актуализация опорных знаний.

Устная работа с таблицей «Углы в пространстве» (имеется у каждого ученика)

1. Угол между пересекающимися прямыми		**Угол, не превосходящий по величине углов, образованных при пересечении прямых**
2. Угол между скрещивающимися прямыми		**На прямой b выбирается произвольная точка, через нее проводится прямая a_1 || a.** **Угол между a и b равен углу между a_1 и b.**
3. Угол между прямой, пересекающей плоскость и не перпендикулярной ей		**Угол между прямой и ее проекцией на плоскость**
4. Угол между плоскостями		**Угол, не превосходящий по величине углов, образованных при пересечении плоскостей**

Формулы и методы решения

- **Уравнение плоскости**

$ax+by+cz+d=0$, где a, b, c, d – числа; x, y, z - переменные

- **Угол между прямыми**

$\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ лежит на a, $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ лежит на b, $\vec{a}\wedge\vec{b}=\varphi$

$$\cos\varphi=\frac{|x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

- **Угол между прямой и плоскостью**

Прямая l образует угол φ $(\varphi\le 90°)$ с плоскостью α, $\alpha: ax+by+cz+d=0$

$\vec{l}\{x_1;y_1;z_1\}$ – направляющий вектор l, $\vec{n}\{a;b;c\}$ – вектор нормали

$$\sin\varphi=\frac{|x_1\cdot a+y_1\cdot b+z_1\cdot c|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- **Угол между двумя плоскостями**

$\alpha: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $\vec{n_1}\{a_1;b_1;c_1\}$ - вектор нормали α

$\beta: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$, $\vec{n_2}\{a_2;b_2;c_2\}$- вектор нормали β

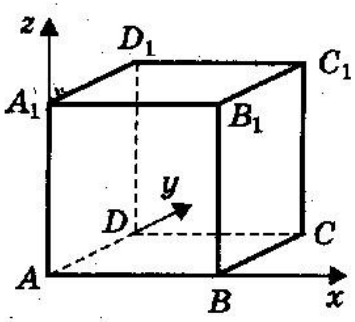
$\varphi=\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}$, $\cos\varphi=\dfrac{|a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2+c_1\cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$ ($\cos\varphi\ge 0$, т.к. угол φ- острый)

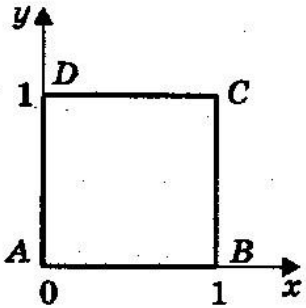
Решение задач по готовым чертежам

Координаты вершин многогранников

Задача: **определить координаты вершин многогранников. В каждом случае вводится прямоугольная система координат.**

1 **Единичный куб A…D_1**

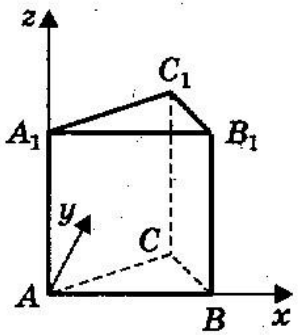


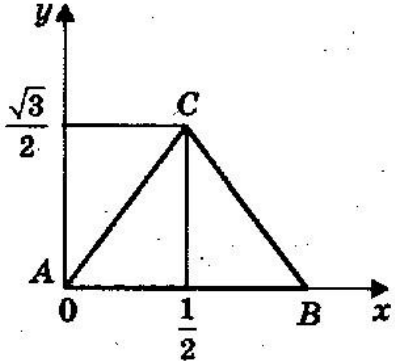


Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. A (0;0;0), B (1;0;0), C (1,1,0), D (0;1;0), A_1 (0;0;1), B_1 (1;0;1), C_1 (1;1;1), D_1 (0;1;1)

2 **Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1**



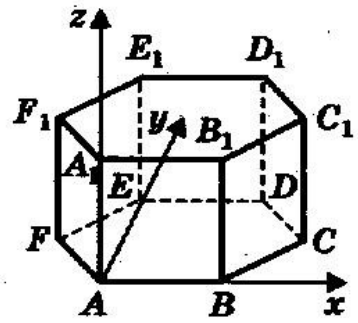


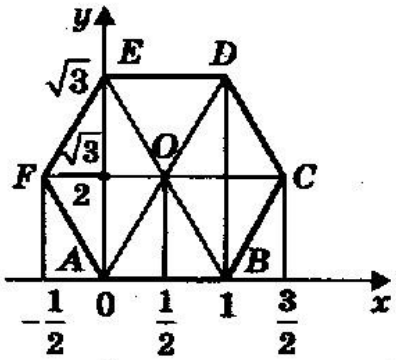
Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. A (0;0;0), B (1;0;0), C (1/2,√3/2,0), A_1 (0;0;1), B_1 (1;0;1), C_1 (1/2; √3/2,1)

Решение задач по готовым чертежам

3 Правильная шестиугольная призма $A...F_1$, все ребра которой равны 1

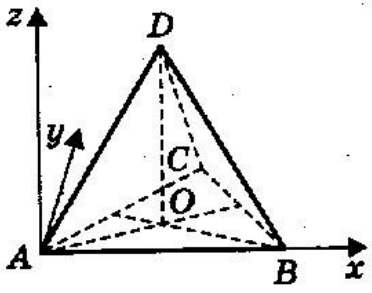


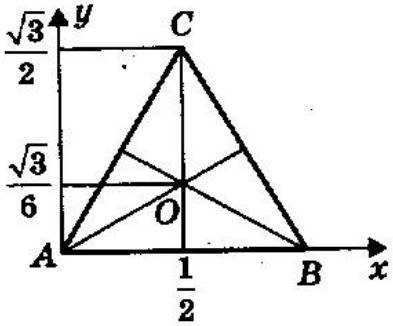


Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. A (0;0;0), B (1;0;0), C (3/2,√3/2,0), D (1;√3;0), E (0;√3;0), F (-1/2,√3/2,0), A_1 (0;0;1), B_1 (1;0;1), C_1 (3/2,√3/2,1), D_1 (1;√3;1), E_1 (0;√3;1), F_1 (-1/2,√3/2,1)

4 Правильная треугольная пирамида ABCD, все ребра которой равны 1





Решение:

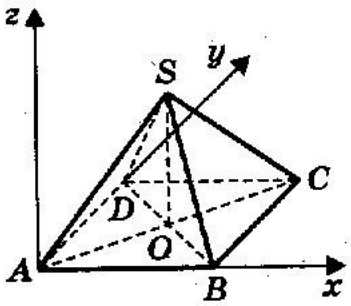
1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. A (0;0;0), B (1;0;0), C (1/2,√3/2,0)
3. т.D проектируется в т.O – точку пересечения медиан ΔABC, поэтому CO:OK=2:1
4. ΔAOD – прямоугольный.

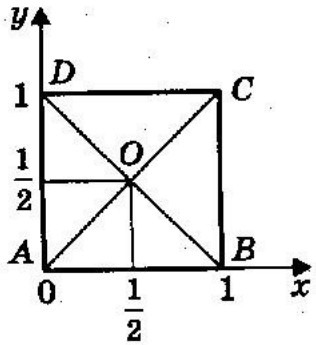
$$OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

5. D (1/2;√3/6;√6/3)

Решение задач по готовым чертежам

5 **Правильная 4ˣугольная пирамида SABCD, все ребра которой равны 1**

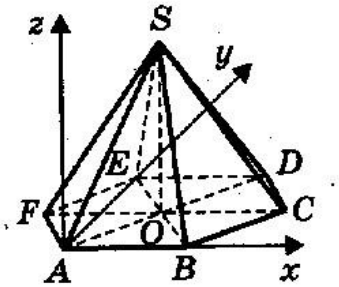


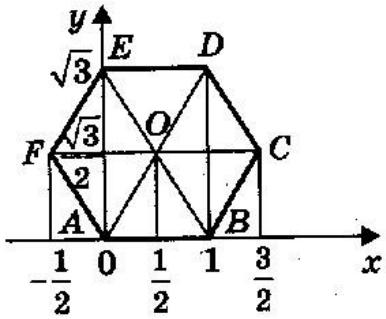


Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. A (0;0;0), B (1;0;0), C (1,1,0), D (0;1;0), S (1/2;1/2;√2/2)

6 **Правильная 6-угольная пирамида SABCDEF, стороны основания которой равны 1, боковые ребра равны 2**





Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. A (0;0;0), B (1;0;0), C (3/2,√3/2,0), D (1;√3;0), E (0;√3;0), F (-1/2;√3/2;0), S (1/2;√3/2;√3)

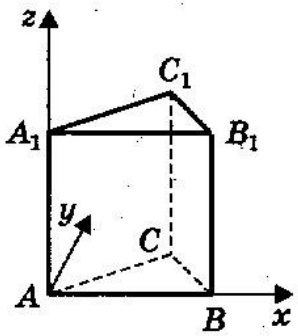
<u>Домашнее задание:</u> Найти координаты вершин прямоугольного параллелепипеда, если три его измерения равны AB=6, BC=4, BB_1=5.

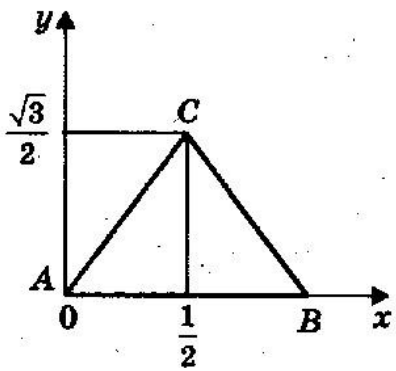
<u>Подведение итогов.</u>

Решение задач по готовым чертежам

Угол между прямыми

Задача: **В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найти косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.**





Решение:

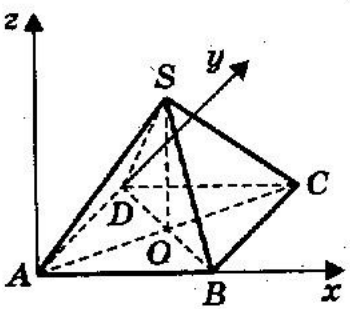
1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. A (0;0;0), B (1;0;0), C (1/2;√3/2;0), A_1 (0;0;1), B_1 (1;0;1), C_1 (1/2;√3/2;1)
3. Координаты направляющих векторов: $\overrightarrow{AB_1}\{1;0;1\}$, $\overrightarrow{BC_1}\{-1/2;\sqrt{3}/2;1\}$
4. $$\cos(AB_1 \wedge BC_1) = \frac{\left|1\cdot(-\frac{1}{2}) + 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\cdot 1\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+1^2}} = \frac{1}{4}$$

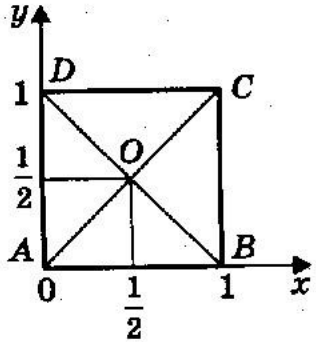
Ответ: 1/4

Решение задач по готовым чертежам

Угол между прямой и плоскостью

Задача: **В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найти косинус угла между прямой AB и (SAD).**





Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. A (0;0;0), B (1;0;0), D (0;1;0), S (1/2;1/2;√2/2)
3. $\overrightarrow{AB}\{1;0;0\}$ - направляющий вектор прямой AB
4. (SAD): ax+by+cz+d=0 (*)

$$\begin{matrix} A: \\ D: \\ S: \end{matrix}\begin{cases} d=0 \\ by=0 \\ 1/2\ a+\sqrt{2}/2\ c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d=0 \\ b=0 \\ a=-\sqrt{2}c \end{cases}$$

*$-\sqrt{2}cx+cz=0$; $-\sqrt{2}x+z=0$; $\vec{n}\{-\sqrt{2};0;1\}$ – вектор нормали (SAD)

5. $$\cos(\overrightarrow{AB}\wedge\vec{n})=\frac{\left|1\cdot(-\sqrt{2})+0+1\cdot 0\right|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{(-\sqrt{2})^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

6. $\cos(\overrightarrow{AB}\wedge\vec{n})=\sin\varphi$; $\cos\varphi=\sqrt{1-(\sqrt{3}/2)^2}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

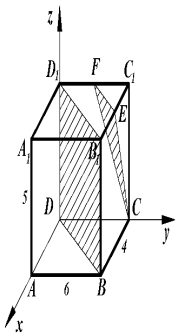
Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Решение задач по готовым чертежам

Угол между плоскостями

Задача: **В правильном параллелепипеде A…D_1, точки E и F – середины ребер B1C1 и C1D1 соответственно. AB=6, AD=4, AA_1=5. Найти угол между плоскостями CEF и BDD_1.**

Решение:



1. Введем систему координат, как показано на рисунке. (CEF)^(BDD_1)
2. D (0;0;0), D_1 (0;0;5), B (4;6;0), C (0;6;0), E (2;6;5), F (0;3;5)
3. (DD_1B): ax+by+cz+d=0 (*)

   D: $\begin{cases} d=0 \\ 5c=0 \\ 4a+6b=0 \end{cases}$ $\begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ a=-3/2\,b \end{cases}$

   D_1:

   S:

   *-3/2bx+by=0; 3x-2y=0;

   n_1 {3;-2;0} – вектор нормали (DD_1B)
4. (FEC): mx+ky+pz+q=0 (**)

   C: $\begin{cases} 5k+q=0 & (1) \\ 2m+6k+5p+q=0 & (2) \\ 3k+5p+q=0 & (3) \end{cases}$ (2)-(3): 2m+3k=0 $\begin{cases} k=-2/3m \\ q=4m \\ p=-2/5m \end{cases}$

   E:

   F:

   ** mx-2/3my-2/5mz+4m=0; x-2/3y-2/5z+4=0; 15x-10y-6z+60=0

   n_2 {15;-10;-6} – вектор нормали (FEC)
5. $$\cos\varphi = \frac{|3\cdot 15+(-2)\cdot(-10)+0\cdot(-6)|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+0^2}\cdot\sqrt{15^2+(-10)^2+(-6)^2}} = \frac{65}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{361}} = \frac{5\sqrt{13}}{19}\ ;\quad \varphi = \arccos\frac{5\sqrt{13}}{19}$$

Ответ: $\varphi = \arccos\frac{5\sqrt{13}}{19}$

Задачи для самостоятельного решения

- **1. В правильной треугольной призме $A...C_1$, все рёбра которой равны 1, найти косинус угла между прямыми AD_1 и CE_1, где D_1 и E_1 – середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно.**
- **2. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все рёбра которой равны 1, найти угол между прямой AF и плоскостью BCC_1.**
- **3. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD, все рёбра которой равны 1, найти синус угла между прямой BE и плоскостью SAD, где E-середина SC.**
- **4. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все рёбра которой равны 1, найти угол между плоскостями AFF_1 и DEE_1.**
- **5. В правильной треугольной призме $A...C_1$, все рёбра которой равны 1, найти косинус угла между плоскостями ACB_1 и BA_1C_1.**

Подведение итогов. Рефлексия.

Итак, мы повторили:

- **угол между прямыми**
- **угол между прямой и плоскостью**
- **угол между плоскостями**
- **определение координат вершин многогранников**
- **уравнение плоскости**

1. **Что нового вы узнали на уроке?**
2. **На уроке вы работали:** *активно / пассивно*
3. **Своей работой вы:** *довольны / недовольны*
4. **Материал урока вам был:** *понятен / непонятен*
   полезен / бесполезен
   интересен / неинтересен
5. **Можете ли вы объяснить решение пройденных задач одноклассснику, пропустившему урок?**
6. **Каков основной урок для вас лично?**

Литература

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия, 10-11. - М.: Просвещение, 2009.
2. Севрюков П.Ф. Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии - Ставрополь, Сервисшкола, 2008.
3. Смирнов В.А. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С2. / под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. - М.: МЦНМО, 2010.
4. Единый государственный экзамен 2011. Математика. Типовые тестовые задания. / под ред. А.Л.Семенова, И.В. Ященко. – М.: Экзамен, 2011.
5. Математика. Подготовка к ЕГЭ 2011. Тематические тесты. Часть II. / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. - Ростов-на-Дону, Легион-М, 2011.
6. Математика. Типовые экзаменационные варианты. / под ред. А. Л.Семенова, И.В. Ященко. - М.: Национальное образование, 2012.
7. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. Расстояния и углы в пространстве. - М.: Экзамен, 2009.