

**Овсянникова  
Людмила  
Александровна**

**Учитель математики  
МБОУ «Школа №127**

**г. Н. Новгород**

**16.02.2012**

# Геометрия 11 класс

## МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

### Программы

общеобразовательных  
учреждений  
Геометрия 10-11 классы  
Составитель:  
Бурмистрова Т.А.  
М., Просвещение, 2009 г.

### Геометрия

Учебник для 10-11  
классов  
общеобразовательных  
учреждений  
Л.С. Атанасян и др.  
М., Просвещение, 2009 г.

# Содержание

- **Пояснительная записка**
- **Дидактические цели и задачи**
- **Прогнозируемые результаты освоения темы**
- **Обоснование проекта**
- **Учебно-тематическое планирование**
- **Проект занятия факультатива «Углы в пространстве»**
- **Литература**

# Пояснительная записка

- ❖ **Тема «Метод координат в пространстве» занимает важное место в изучении геометрии.**
- ❖ **Метод координат необходим для приобретения конкретных знаний о пространстве, для развития пространственного воображения и интуиции, математической культуры, эстетического воспитания.**
- ❖ **К изучению метода координат в пространстве учащиеся приступают, имея определенный опыт, владея достаточно большим запасом математических понятий и умений, приобретенных на уроках геометрии 7-10 классов.**
- ❖ **Значимость раздела многократно увеличивается в связи с включением задач на нахождение углов и расстояний в пространстве в С2 ЕГЭ.**
- ❖ **Актуальность темы заключается и в межпредметных связях. Метод координат используется при изучении физики, астрономии.**

# Дидактические цели

## Познавательные

- ◆ **Формировать умения:**
  - **решать простейшие задачи в координатах**
  - **находить скалярное произведение векторов в пространстве**
- ◆ **Применять координатно-векторный метод для нахождения углов между прямыми, прямой и плоскостью**
- ◆ **Углублять знания путем рассмотрения нестандартных задач**
- ◆ **Работать с движениями**

## Развивающие

- ◆ **умение анализировать, выделять главное, сравнивать, обобщать**
- ◆ **графическую и функциональную культуру учащихся**
- ◆ **пространственное мышление учащихся**

## Воспитательные

- ◆ **показать взаимосвязь математики с окружающей действительностью**
- ◆ **воспитание ответственного отношения к учебному труду**
- ◆ **формирование навыков общения, умения работать в коллективе**

# Задачи

**Для достижения поставленных целей в процессе обучения решаются следующие задачи:**

- ❖ **Формировать навыки самостоятельности в поисках способов решения задачи**
- ❖ **Выделять и способствовать осмыслению логических приемов мышления, развитию образного и ассоциативного мышления**
- ❖ **Развивать пространственное воображение учащихся**
- ❖ **Показать связь теории с практикой**
- ❖ **Приобщать учащихся к работе с математической литературой**

# Прогнозируемые результаты освоения темы

**В результате изучения темы «Метод координат в пространстве» ученик должен:**

## Знать

- ❖ Определения коллинеарных и компланарных векторов
- ❖ Формулы для нахождения угла между прямыми, прямой и плоскостью
- ❖ Формулы для вычисления длины вектора, расстояния между двумя точками, координат середины отрезка.

## Уметь

- ❖ Изображать точки и простейшие многогранники в прямоугольной системе координат
- ❖ Находить координаты вершин многогранников
- ❖ Решать простейшие геометрические задачи, связанные с методом координат

## Использовать знания и умения в практической деятельности

- ❖ Для выполнения расчетов по формулам
- ❖ Для моделирования практических ситуаций
- ❖ При изучении других предметов

# Обоснование проекта

- ❖ **Выбор данного раздела обусловлен наличием богатого материала для реализации основных принципов педагогических технологий, применяемых на уроках: компьютерных технологий, проблемного обучения, развивающего обучения, традиционной классно-урочной технологии.**
- ❖ **Типы уроков при изучении темы разнообразны – это урок изучения нового, урок формирования знаний, умений и навыков, урок обобщения и систематизации знаний, урок проверки и оценки знаний, урок ключевых задач, комбинированный урок.**
- ❖ **На этих уроках предполагается работа с современными средствами обучения, такими как компьютер, проектор.**
- ❖ **Для поддержания мотивации учащихся необходимо использовать практико-ориентированные задачи.**



# Учебно-тематическое планирование

## Метод координат в пространстве – 15 ч.

	Содержание материала	Кол. часов	Тип урока	Ресурсы ИКТ	Формы контроля
<b>§1. Координаты точки и координаты вектора</b>		<b>7 ч.</b>			
1-3	Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора	3 ч.	Урок – лекция, урок усвоения новых знаний, практикум	Презентация	С.р.
4	Связь между координатами векторов и координатами точки	1 ч.	Лекция – беседа		
5-6	Простейшие задачи в координатах	2 ч.	Урок – лекция, практикум	Презентация	
7	Контрольная работы	1 ч.	Контроль знаний		К.р.
<b>§2. Скалярное произведение векторов</b>		<b>4 ч.</b>			
8-9	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.	2 ч.	Проблемное изучение материала, урок усвоения новых знаний	Презентация	Тест
10-11	Вычисление углов прямыми, прямыми и плоскостями	2 ч.	Урок ключевых задач, урок усвоения новых знаний	Презентация	С.р.
<b>§3. Движения</b>		<b>4 ч.</b>			
12-13	Движения: центральная симметрия, зеркальная симметрия, осевая симметрия, параллельный перенос	2 ч.	Групповая работа, урок усвоения новых знаний, практикум	Презентация	С.р.
14	Обобщающий урок: «Метод координат в пространстве»	1 ч.	Урок обобщения и систематизации знаний		
15	Зачет по теме«Метод координат в пространстве»	1 ч.	Контроль знаний		К.р.

# Проект занятия факультатива

## Метод координат. Углы в пространстве

### Цели урока:

- ❖ Повторить уравнение плоскости, проходящей через 3 ее точки, не лежащие на одной прямой
- ❖ Учить определять координаты вершин многогранников, помещенных в систему координат
- ❖ Формировать умения находить углы между прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями, используя формулы
- ❖ Углубить знания учащихся по теме
- ❖ Развивать:
  - логическое и алгоритмическое мышление учащихся
  - графическую культуру
  - пространственные представления учащихся
  - культуру математической речи
- ❖ Воспитывать:
  - коммуникативные и волевые качества
  - способность к преодолению трудностей
  - ответственное отношение к учебному труду
  - способность к контролю и самоконтролю
  - творческую личность

### Тип урока:

- ❖ комбинированный урок

### Методы обучения:

- ❖ объяснительный, репродуктивный, проблемный, частично-поисковый

### Способ изложения

- ❖ побуждает учащихся не только механически запоминать материал, но и размышлять над ним в процессе обучения

### Формы обучения:

- ❖ коллективная, фронтальная, индивидуальная

### Средства обучения:

- ❖ компьютер, проектор, экран

# Проект занятия факультатива

«Старайся дать уму как можно больше пищи...»  
М.В.Ломоносов

## Метод координат. Углы в пространстве.

### Структура урока

- ◆ Организационный момент
- ◆ Актуализация опорных знаний
- ◆ Мотивация учебной деятельности
- ◆ Постановка целей и учебных задач урока
- ◆ Введение проблемной ситуации
- ◆ Ознакомление с новым материалом
- ◆ Закрепление
- ◆ Постановка д/з
- ◆ Рефлексия, подведение итогов работы



# Организационный момент. Актуализация опорных знаний.

Устная работа с таблицей «Углы в пространстве» (имеется у каждого ученика)

<p><b>1. Угол между пересекающимися прямыми</b></p>		<p><b>Угол, не превосходящий по величине углов, образованных при пересечении прямых</b></p>
<p><b>2. Угол между скрещивающимися прямыми</b></p>		<p><b>На прямой <math>b</math> выбирается произвольная точка, через нее проводится прямая <math>a_1 \parallel a</math>. Угол между <math>a</math> и <math>b</math> равен углу между <math>a_1</math> и <math>b</math>.</b></p>
<p><b>3. Угол между прямой, пересекающей плоскость и не перпендикулярной ей</b></p>		<p><b>Угол между прямой и ее проекцией на плоскость</b></p>
<p><b>4. Угол между плоскостями</b></p>		<p><b>Угол, не превосходящий по величине углов, образованных при пересечении плоскостей</b></p>

# Формулы и методы решения

## ❖ Уравнение плоскости

$ax + by + cz + d = 0$  , где  $a, b, c, d$  – числа;  $x, y, z$  – переменные

## ❖ Угол между прямыми

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$  лежит на  $a$ ,  $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$  лежит на  $b$ ,  $\vec{a} \wedge \vec{b} = \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

## ❖ Угол между прямой и плоскостью

Прямая  $l$  образует угол  $\varphi$  ( $\varphi \leq 90^\circ$ ) с плоскостью  $\alpha$ ,  $\alpha : ax + by + cz + d = 0$

$\vec{l}\{x_1; y_1; z_1\}$  – направляющий вектор  $l$ ,  $\vec{n}\{a; b; c\}$  – вектор нормали

$$\sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot a + y_1 \cdot b + z_1 \cdot c|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

## ❖ Угол между двумя плоскостями

$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ,  $\vec{n}_1\{a_1; b_1; c_1\}$  – вектор нормали  $\alpha$

$\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ ,  $\vec{n}_2\{a_2; b_2; c_2\}$  – вектор нормали  $\beta$

$$\varphi = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2, \quad \cos \varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \quad (\cos \varphi \geq 0, \text{ т.к. угол } \varphi \text{ - острый})$$

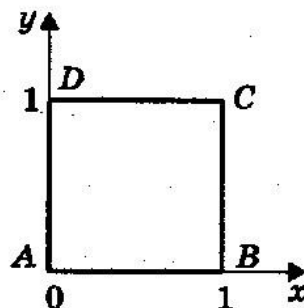
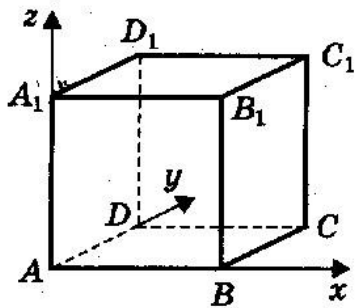
# Решение задач по готовым чертежам

## Координаты вершин многогранников

**Задача:** определить координаты вершин многогранников.  
В каждом случае вводится прямоугольная система координат.

1

Единичный куб  $A...D_1$

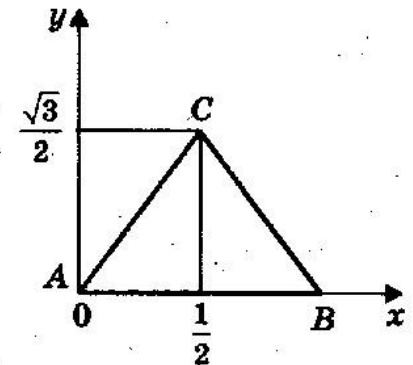
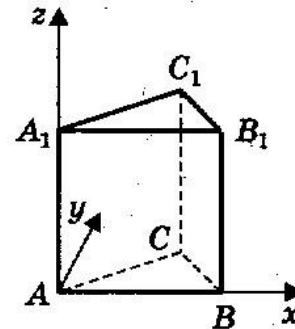


**Решение:**

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2.  $A(0;0;0)$ ,  $B(1;0;0)$ ,  $C(1,1,0)$ ,  
 $D(0;1;0)$ ,  $A_1(0;0;1)$ ,  $B_1(1;0;1)$ ,  
 $C_1(1;1;1)$ ,  $D_1(0;1;1)$

2

Правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1



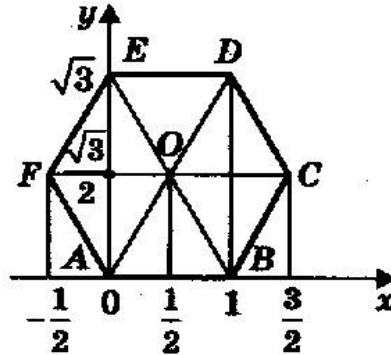
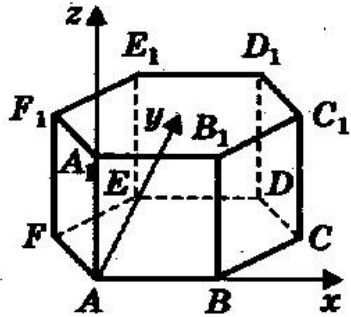
**Решение:**

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2.  $A(0;0;0)$ ,  $B(1;0;0)$ ,  $C(1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ ,  
 $A_1(0;0;1)$ ,  $B_1(1;0;1)$ ,  $C_1(1/2; \sqrt{3}/2, 1)$

# Решение задач по готовым чертежам

3

**Правильная шестиугольная призма  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1**

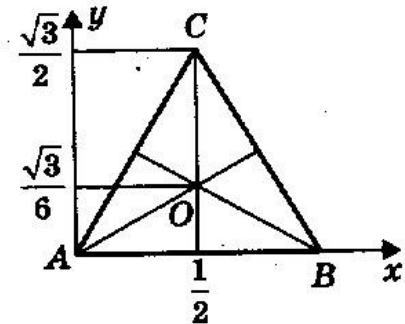
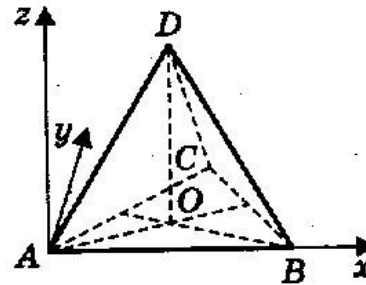


**Решение:**

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2.  $A(0;0;0)$ ,  $B(1;0;0)$ ,  $C(3/2, \sqrt{3}/2, 0)$ ,  
 $D(1; \sqrt{3}; 0)$ ,  $E(0; \sqrt{3}; 0)$ ,  
 $F(-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ ,  $A_1(0;0;1)$ ,  $B_1(1;0;1)$ ,  
 $C_1(3/2, \sqrt{3}/2, 1)$ ,  $D_1(1; \sqrt{3}; 1)$ ,  
 $E_1(0; \sqrt{3}; 1)$ ,  $F_1(-1/2, \sqrt{3}/2, 1)$

4

**Правильная треугольная пирамида  $ABCD$ , все ребра которой равны 1**



**Решение:**

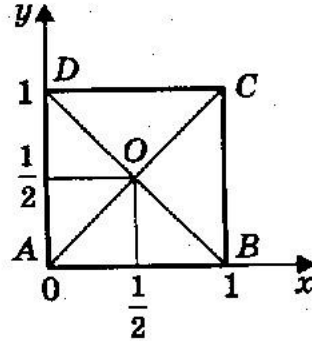
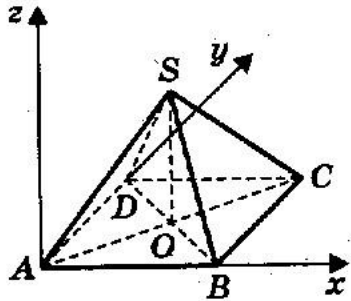
1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2.  $A(0;0;0)$ ,  $B(1;0;0)$ ,  $C(1/2, \sqrt{3}/2, 0)$
3. т. D проектируется в т. O – точку пересечения медиан  $\triangle ABC$ , поэтому  $CO:OK=2:1$
4.  $\triangle AOD$  – прямоугольный.  

$$OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$
5.  $D(1/2; \sqrt{3}/6; \sqrt{6}/3)$

# Решение задач по готовым чертежам

5

Правильная 4-угольная пирамида  $SABCD$ , все ребра которой равны 1

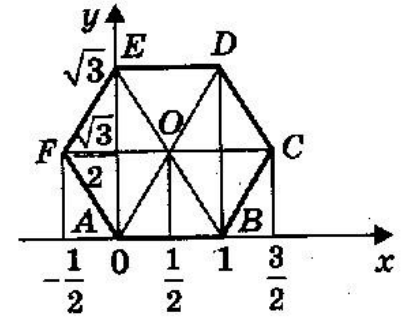
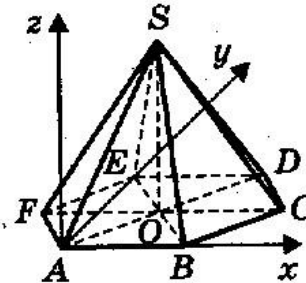


**Решение:**

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2.  $A(0;0;0)$ ,  $B(1;0;0)$ ,  $C(1,1,0)$ ,  
 $D(0;1;0)$ ,  $S(1/2;1/2;\sqrt{2}/2)$

6

Правильная 6-угольная пирамида  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, боковые ребра равны 2



**Решение:**

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2.  $A(0;0;0)$ ,  $B(1;0;0)$ ,  $C(3/2,\sqrt{3}/2,0)$ ,  
 $D(1;\sqrt{3};0)$ ,  $E(0;\sqrt{3};0)$ ,  $F(-1/2;\sqrt{3}/2;0)$ ,  
 $S(1/2;\sqrt{3}/2;\sqrt{3})$

**Домашнее задание:** Найти координаты вершин прямоугольного параллелепипеда, если три его измерения равны  $AB=6$ ,  $BC=4$ ,  $BB_1=5$ .

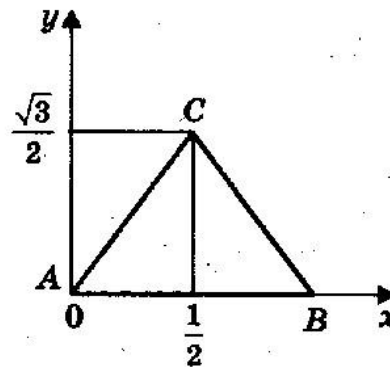
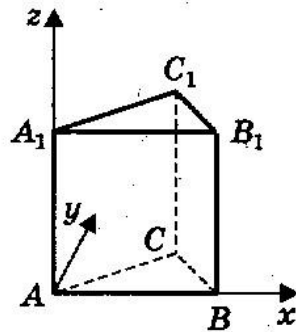
**Подведение итогов.**



# Решение задач по готовым чертежам

## Угол между прямыми

**Задача:** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найти косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .



### Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2.  $A(0;0;0)$ ,  $B(1;0;0)$ ,  $C(1/2;\sqrt{3}/2;0)$ ,  $A_1(0;0;1)$ ,  $B_1(1;0;1)$ ,  $C_1(1/2;\sqrt{3}/2;1)$
3. Координаты направляющих векторов:  $\vec{AB_1}\{1;0;1\}$ ,  $\vec{BC_1}\{-1/2;\sqrt{3}/2;1\}$

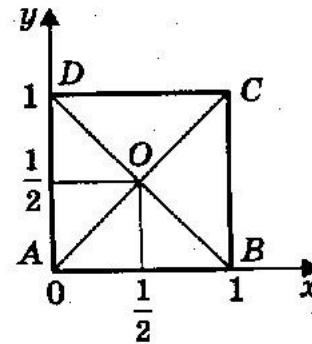
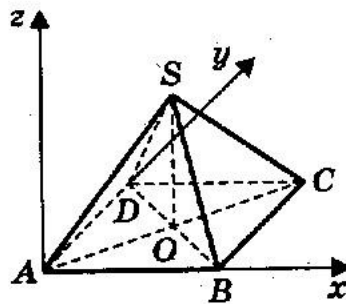
$$4. \cos(\angle AB_1 \wedge BC_1) = \frac{\left| 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot 1 \right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{1}{4}$$

Ответ: 1/4

# Решение задач по готовым чертежам

## Угол между прямой и плоскостью

**Задача:** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найти косинус угла между прямой  $AB$  и  $(SAD)$ .



### Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.

2.  $A(0;0;0)$ ,  $B(1;0;0)$ ,  $D(0;1;0)$ ,  $S(1/2;1/2;\sqrt{2}/2)$

3.  $\vec{AB}\{1;0;0\}$  - направляющий вектор прямой  $AB$

4.  $(SAD): ax+by+cz+d=0$  (\*)

$$\begin{array}{l} A: \begin{cases} d=0 \\ by=0 \end{cases} \\ D: \begin{cases} d=0 \\ b=0 \end{cases} \\ S: \begin{cases} 1/2 a + \sqrt{2}/2 c = 0 \\ a = -\sqrt{2}c \end{cases} \end{array}$$

\*  $-\sqrt{2}cx + cz = 0$ ;  $-\sqrt{2}x + z = 0$ ;  $\vec{n}\{-\sqrt{2};0;1\}$  - вектор нормали  $(SAD)$

$$5. \cos(\vec{AB} \wedge \vec{n}) = \frac{|1 \cdot (-\sqrt{2}) + 0 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$6. \cos(\vec{AB} \wedge \vec{n}) = \sin \varphi; \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - (\sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{1/3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

# Решение задач по готовым чертежам

## Угол между плоскостями

**Задача:** В правильном параллелепипеде  $A...D_1$ , точки  $E$  и  $F$  – середины ребер  $B_1C_1$  и  $C_1D_1$  соответственно.  $AB=6$ ,  $AD=4$ ,  $AA_1=5$ . Найти угол между плоскостями  $CEF$  и  $BDD_1$ .

**Решение:**

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.  $(CEF) \wedge (BDD_1)$

2.  $D(0;0;0)$ ,  $D_1(0;0;5)$ ,  $B(4;6;0)$ ,  $C(0;6;0)$ ,  $E(2;6;5)$ ,  $F(0;3;5)$

3.  $(DD_1B): ax+by+cz+d=0$  (\*)

$$\begin{cases} D: & \begin{cases} d=0 \\ 5c=0 \\ 4a+6b=0 \end{cases} \\ D_1: & \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ a=-3/2 b \end{cases} \\ S: & \end{cases}$$

$$*-3/2bx+by=0; 3x-2y=0;$$

$n_1 \{3; -2; 0\}$  – вектор нормали  $(DD_1B)$

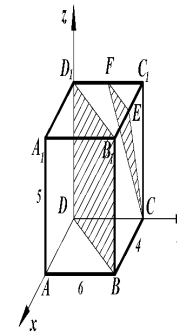
4.  $(FEC): mx+ky+pz+q=0$  (\*\*)

$$\begin{cases} C: & \begin{cases} 5k+q=0 & (1) \\ 2m+6k+5p+q=0 & (2) \\ 3k+5p+q=0 & (3) \end{cases} \\ E: & \\ F: & \end{cases} \quad \begin{cases} (2)-(3): 2m+3k=0 \\ k=-2/3m \\ q=4m \\ p=-2/5m \end{cases}$$

$$** mx-2/3my-2/5mz+4m=0; x-2/3y-2/5z+4=0; 15x-10y-6z+60=0$$

$n_2 \{15; -10; -6\}$  – вектор нормали  $(FEC)$

$$5. \cos \varphi = \frac{|3 \cdot 15 + (-2) \cdot (-10) + 0 \cdot (-6)|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{15^2 + (-10)^2 + (-6)^2}} = \frac{65}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{361}} = \frac{5\sqrt{13}}{19}; \quad \varphi = \arccos \frac{5\sqrt{13}}{19}$$



**Ответ:**  $\varphi = \arccos \frac{5\sqrt{13}}{19}$

# Задачи для самостоятельного решения

- ◆ 1. В правильной треугольной призме  $A...C_1$ , все рёбра которой равны 1, найти косинус угла между прямыми  $AD_1$  и  $CE_1$ , где  $D_1$  и  $E_1$  – середины рёбер  $A_1C_1$  и  $B_1C_1$  соответственно.
- ◆ 2. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все рёбра которой равны 1, найти угол между прямой  $AF$  и плоскостью  $BCC_1$ .
- ◆ 3. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$ , все рёбра которой равны 1, найти синус угла между прямой  $BE$  и плоскостью  $SAD$ , где  $E$  – середина  $SC$ .
- ◆ 4. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все рёбра которой равны 1, найти угол между плоскостями  $AFF_1$  и  $DEE_1$ .
- ◆ 5. В правильной треугольной призме  $A...C_1$ , все рёбра которой равны 1, найти косинус угла между плоскостями  $ACB_1$  и  $BA_1C_1$ .

# Подведение итогов. Рефлексия.

**Итак, мы повторили:**

- ❖ **угол между прямыми**
- ❖ **угол между прямой и плоскостью**
- ❖ **угол между плоскостями**
- ❖ **определение координат вершин многогранников**
- ❖ **уравнение плоскости**

- 1. Что нового вы узнали на уроке?**
- 2. На уроке вы работали:** *активно / пассивно*
- 3. Своей работой вы:** *довольны / недовольны*
- 4. Материал урока вам был:** *понятен / непонятен*  
*полезен / бесполезен*  
*интересен / неинтересен*
- 5. Можете ли вы объяснить решение пройденных задач однокласснику, пропустившему урок?**
- 6. Каков основной урок для вас лично?**

# Литература

1. **Атанасян Л.С. и др. Геометрия, 10-11. - М.: Просвещение, 2009.**
2. **Севрюков П.Ф. Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии - Ставрополь, Сервисшкола, 2008.**
3. **Смирнов В.А. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С2. / под ред. А.Л. Семенова и И.В. Яценко. - М.: МЦНМО, 2010.**
4. **Единый государственный экзамен 2011. Математика. Типовые тестовые задания. / под ред. А.Л.Семенова, И.В. Яценко. - М.: Экзамен, 2011.**
5. **Математика. Подготовка к ЕГЭ 2011. Тематические тесты. Часть II. / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. - Ростов-на-Дону, Легион-М, 2011.**
6. **Математика. Типовые экзаменационные варианты. / под ред. А. Л.Семенова, И.В. Яценко. - М.: Национальное образование, 2012.**
7. **Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. Расстояния и углы в пространстве. - М.: Экзамен, 2009.**