

**Овсянникова
Людмила
Александровна**

**Учитель математики
МБОУ «Школа №127**

г. Н. Новгород

16.02.2012

Геометрия 11 класс

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Программы

общеобразовательных
учреждений
Геометрия 10-11 классы
Составитель:
Бурмистрова Т.А.
М., Просвещение, 2009 г.

Геометрия

Учебник для 10-11
классов
общеобразовательных
учреждений
Л.С. Атанасян и др.
М., Просвещение, 2009 г.

Содержание

- **Пояснительная записка**
- **Дидактические цели и задачи**
- **Прогнозируемые результаты освоения темы**
- **Обоснование проекта**
- **Учебно-тематическое планирование**
- **Проект занятия факультатива «Углы в пространстве»**
- **Литература**

Пояснительная записка

- ❖ **Тема «Метод координат в пространстве» занимает важное место в изучении геометрии.**
- ❖ **Метод координат необходим для приобретения конкретных знаний о пространстве, для развития пространственного воображения и интуиции, математической культуры, эстетического воспитания.**
- ❖ **К изучению метода координат в пространстве учащиеся приступают, имея определенный опыт, владея достаточно большим запасом математических понятий и умений, приобретенных на уроках геометрии 7-10 классов.**
- ❖ **Значимость раздела многократно увеличивается в связи с включением задач на нахождение углов и расстояний в пространстве в С2 ЕГЭ.**
- ❖ **Актуальность темы заключается и в межпредметных связях. Метод координат используется при изучении физики, астрономии.**

Дидактические цели

Познавательные

- ◆ **Формировать умения:**
 - **решать простейшие задачи в координатах**
 - **находить скалярное произведение векторов в пространстве**
- ◆ **Применять координатно-векторный метод для нахождения углов между прямыми, прямой и плоскостью**
- ◆ **Углублять знания путем рассмотрения нестандартных задач**
- ◆ **Работать с движениями**

Развивающие

- ◆ **умение анализировать, выделять главное, сравнивать, обобщать**
- ◆ **графическую и функциональную культуру учащихся**
- ◆ **пространственное мышление учащихся**

Воспитательные

- ◆ **показать взаимосвязь математики с окружающей действительностью**
- ◆ **воспитание ответственного отношения к учебному труду**
- ◆ **формирование навыков общения, умения работать в коллективе**

Задачи

Для достижения поставленных целей в процессе обучения решаются следующие задачи:

- ❖ **Формировать навыки самостоятельности в поисках способов решения задачи**
- ❖ **Выделять и способствовать осмыслению логических приемов мышления, развитию образного и ассоциативного мышления**
- ❖ **Развивать пространственное воображение учащихся**
- ❖ **Показать связь теории с практикой**
- ❖ **Приобщать учащихся к работе с математической литературой**

Прогнозируемые результаты освоения темы

В результате изучения темы «Метод координат в пространстве» ученик должен:

Знать

- ❖ Определения коллинеарных и компланарных векторов
- ❖ Формулы для нахождения угла между прямыми, прямой и плоскостью
- ❖ Формулы для вычисления длины вектора, расстояния между двумя точками, координат середины отрезка.

Уметь

- ❖ Изображать точки и простейшие многогранники в прямоугольной системе координат
- ❖ Находить координаты вершин многогранников
- ❖ Решать простейшие геометрические задачи, связанные с методом координат

Использовать знания и умения в практической деятельности

- ❖ Для выполнения расчетов по формулам
- ❖ Для моделирования практических ситуаций
- ❖ При изучении других предметов

Обоснование проекта

- ❖ **Выбор данного раздела обусловлен наличием богатого материала для реализации основных принципов педагогических технологий, применяемых на уроках: компьютерных технологий, проблемного обучения, развивающего обучения, традиционной классно-урочной технологии.**
- ❖ **Типы уроков при изучении темы разнообразны – это урок изучения нового, урок формирования знаний, умений и навыков, урок обобщения и систематизации знаний, урок проверки и оценки знаний, урок ключевых задач, комбинированный урок.**
- ❖ **На этих уроках предполагается работа с современными средствами обучения, такими как компьютер, проектор.**
- ❖ **Для поддержания мотивации учащихся необходимо использовать практико-ориентированные задачи.**

Учебно-тематическое планирование

Метод координат в пространстве – 15 ч.

	Содержание материала	Кол. часов	Тип урока	Ресурсы ИКТ	Формы контроля
§1. Координаты точки и координаты вектора		7 ч.			
1-3	Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора	3 ч.	Урок – лекция, урок усвоения новых знаний, практикум	Презентация	С.р.
4	Связь между координатами векторов и координатами точки	1 ч.	Лекция – беседа		
5-6	Простейшие задачи в координатах	2 ч.	Урок – лекция, практикум	Презентация	
7	Контрольная работы	1 ч.	Контроль знаний		К.р.
§2. Скалярное произведение векторов		4 ч.			
8-9	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.	2 ч.	Проблемное изучение материала, урок усвоения новых знаний	Презентация	Тест
10-11	Вычисление углов прямыми, прямыми и плоскостями	2 ч.	Урок ключевых задач, урок усвоения новых знаний	Презентация	С.р.
§3. Движения		4 ч.			
12-13	Движения: центральная симметрия, зеркальная симметрия, осевая симметрия, параллельный перенос	2 ч.	Групповая работа, урок усвоения новых знаний, практикум	Презентация	С.р.
14	Обобщающий урок: «Метод координат в пространстве»	1 ч.	Урок обобщения и систематизации знаний		
15	Зачет по теме«Метод координат в пространстве»	1 ч.	Контроль знаний		К.р.

Проект занятия факультатива

Метод координат. Углы в пространстве

Цели урока:

- ❖ Повторить уравнение плоскости, проходящей через 3 ее точки, не лежащие на одной прямой
- ❖ Учить определять координаты вершин многогранников, помещенных в систему координат
- ❖ Формировать умения находить углы между прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями, используя формулы
- ❖ Углубить знания учащихся по теме
- ❖ Развивать:
 - логическое и алгоритмическое мышление учащихся
 - графическую культуру
 - пространственные представления учащихся
 - культуру математической речи
- ❖ Воспитывать:
 - коммуникативные и волевые качества
 - способность к преодолению трудностей
 - ответственное отношение к учебному труду
 - способность к контролю и самоконтролю
 - творческую личность

Тип урока:

- ❖ комбинированный урок

Методы обучения:

- ❖ объяснительный, репродуктивный, проблемный, частично-поисковый

Способ изложения

- ❖ побуждает учащихся не только механически запоминать материал, но и размышлять над ним в процессе обучения

Формы обучения:

- ❖ коллективная, фронтальная, индивидуальная

Средства обучения:

- ❖ компьютер, проектор, экран

Проект занятия факультатива

«Старайся дать уму как можно больше пищи...»
М.В.Ломоносов

Метод координат. Углы в пространстве.

Структура урока

- ◆ Организационный момент
- ◆ Актуализация опорных знаний
- ◆ Мотивация учебной деятельности
- ◆ Постановка целей и учебных задач урока
- ◆ Введение проблемной ситуации
- ◆ Ознакомление с новым материалом
- ◆ Закрепление
- ◆ Постановка д/з
- ◆ Рефлексия, подведение итогов работы



Организационный момент. Актуализация опорных знаний.

Устная работа с таблицей «Углы в пространстве» (имеется у каждого ученика)

<p>1. Угол между пересекающимися прямыми</p>		<p>Угол, не превосходящий по величине углов, образованных при пересечении прямых</p>
<p>2. Угол между скрещивающимися прямыми</p>		<p>На прямой b выбирается произвольная точка, через нее проводится прямая $a_1 \parallel a$. Угол между a и b равен углу между a_1 и b.</p>
<p>3. Угол между прямой, пересекающей плоскость и не перпендикулярной ей</p>		<p>Угол между прямой и ее проекцией на плоскость</p>
<p>4. Угол между плоскостями</p>		<p>Угол, не превосходящий по величине углов, образованных при пересечении плоскостей</p>

Формулы и методы решения

❖ Уравнение плоскости

$ax + by + cz + d = 0$, где a, b, c, d – числа; x, y, z – переменные

❖ Угол между прямыми

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ лежит на a , $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ лежит на b , $\vec{a} \wedge \vec{b} = \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

❖ Угол между прямой и плоскостью

Прямая l образует угол φ ($\varphi \leq 90^\circ$) с плоскостью α , $\alpha : ax + by + cz + d = 0$

$\vec{l}\{x_1; y_1; z_1\}$ – направляющий вектор l , $\vec{n}\{a; b; c\}$ – вектор нормали

$$\sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot a + y_1 \cdot b + z_1 \cdot c|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

❖ Угол между двумя плоскостями

$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $\vec{n}_1\{a_1; b_1; c_1\}$ – вектор нормали α

$\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, $\vec{n}_2\{a_2; b_2; c_2\}$ – вектор нормали β

$$\varphi = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2, \quad \cos \varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \quad (\cos \varphi \geq 0, \text{ т.к. угол } \varphi \text{ - острый})$$

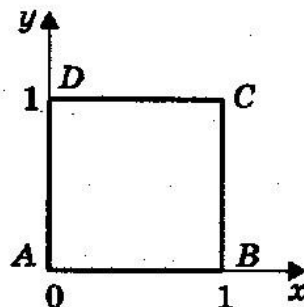
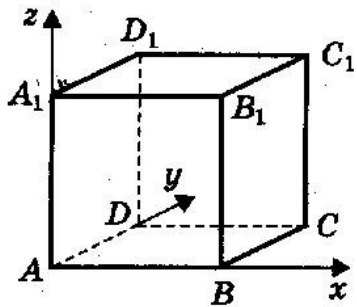
Решение задач по готовым чертежам

Координаты вершин многогранников

Задача: определить координаты вершин многогранников.
В каждом случае вводится прямоугольная система координат.

1

Единичный куб $A...D_1$

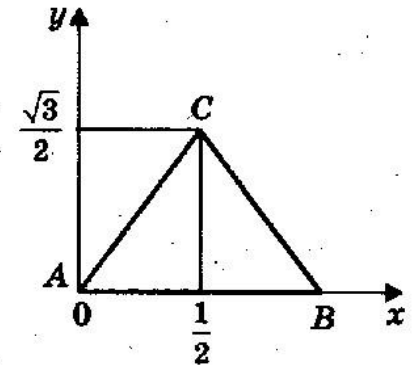
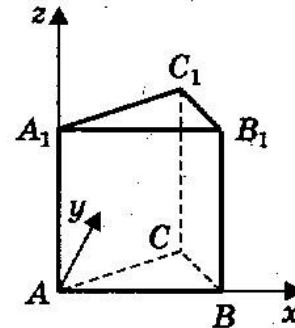


Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1,1,0)$,
 $D(0;1;0)$, $A_1(0;0;1)$, $B_1(1;0;1)$,
 $C_1(1;1;1)$, $D_1(0;1;1)$

2

Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1



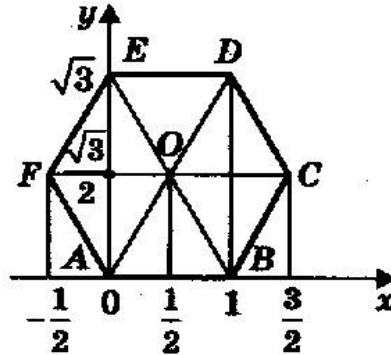
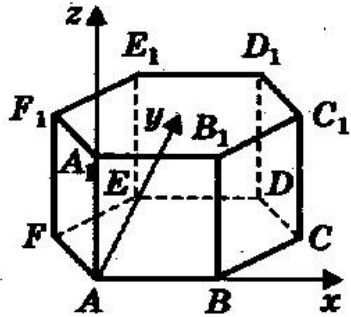
Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1/2, \sqrt{3}/2, 0)$,
 $A_1(0;0;1)$, $B_1(1;0;1)$, $C_1(1/2; \sqrt{3}/2, 1)$

Решение задач по готовым чертежам

3

Правильная шестиугольная призма $A...F_1$, все ребра которой равны 1

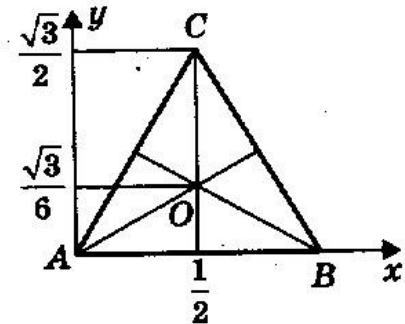
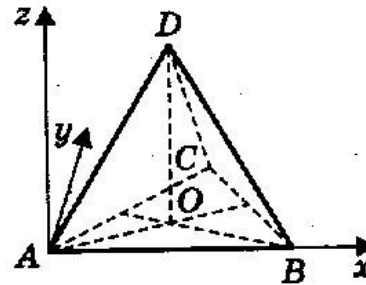


Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(3/2, \sqrt{3}/2, 0)$,
 $D(1; \sqrt{3}; 0)$, $E(0; \sqrt{3}; 0)$,
 $F(-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$, $A_1(0;0;1)$, $B_1(1;0;1)$,
 $C_1(3/2, \sqrt{3}/2, 1)$, $D_1(1; \sqrt{3}; 1)$,
 $E_1(0; \sqrt{3}; 1)$, $F_1(-1/2, \sqrt{3}/2, 1)$

4

Правильная треугольная пирамида $ABCD$, все ребра которой равны 1



Решение:

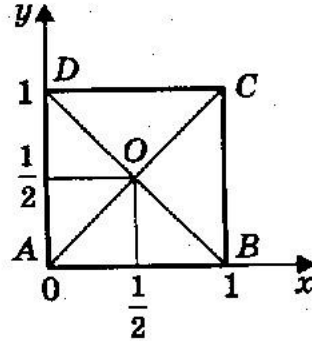
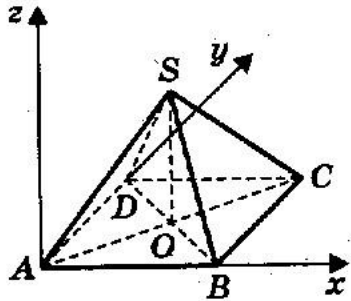
1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1/2, \sqrt{3}/2, 0)$
3. т. D проектируется в т. O – точку пересечения медиан $\triangle ABC$, поэтому $CO:OK=2:1$
4. $\triangle AOD$ – прямоугольный.

$$OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$
5. $D(1/2; \sqrt{3}/6; \sqrt{6}/3)$

Решение задач по готовым чертежам

5

Правильная 4-угольная пирамида $SABCD$, все ребра которой равны 1

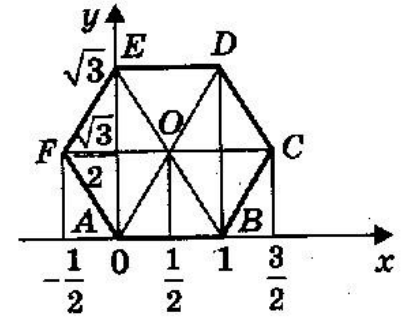
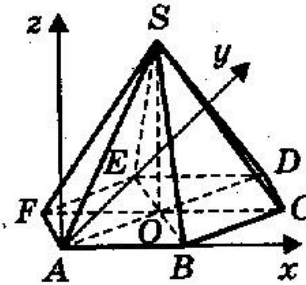


Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1,1,0)$, $D(0;1;0)$, $S(1/2;1/2;\sqrt{2}/2)$

6

Правильная 6-угольная пирамида $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, боковые ребра равны 2



Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(3/2,\sqrt{3}/2,0)$, $D(1;\sqrt{3};0)$, $E(0;\sqrt{3};0)$, $F(-1/2;\sqrt{3}/2;0)$, $S(1/2;\sqrt{3}/2;\sqrt{3})$

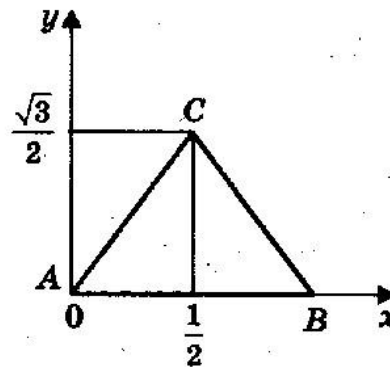
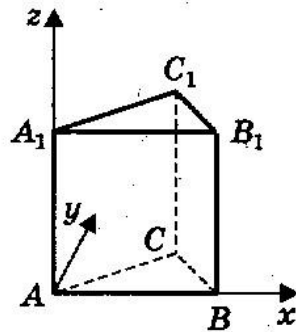
Домашнее задание: Найти координаты вершин прямоугольного параллелепипеда, если три его измерения равны $AB=6$, $BC=4$, $BB_1=5$.

Подведение итогов.

Решение задач по готовым чертежам

Угол между прямыми

Задача: В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найти косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .



Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.
2. $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1/2;\sqrt{3}/2;0)$, $A_1(0;0;1)$, $B_1(1;0;1)$, $C_1(1/2;\sqrt{3}/2;1)$
3. Координаты направляющих векторов: $\vec{AB_1}\{1;0;1\}$, $\vec{BC_1}\{-1/2;\sqrt{3}/2;1\}$

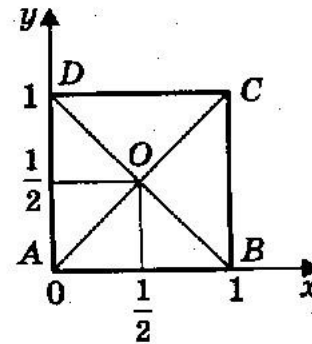
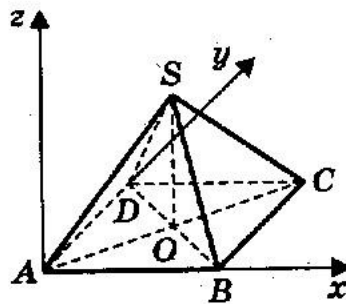
$$4. \cos(\angle AB_1 \wedge BC_1) = \frac{\left| 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot 1 \right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{1}{4}$$

Ответ: 1/4

Решение задач по готовым чертежам

Угол между прямой и плоскостью

Задача: В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найти косинус угла между прямой AB и (SAD) .



Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке.

2. $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $S(1/2;1/2;\sqrt{2}/2)$

3. $\vec{AB}\{1;0;0\}$ - направляющий вектор прямой AB

4. $(SAD): ax+by+cz+d=0$ (*)

$$\begin{cases} A: d=0 \\ D: by=0 \\ S: 1/2 a + \sqrt{2}/2 c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d=0 \\ b=0 \\ a = -\sqrt{2}c \end{cases}$$

* $-\sqrt{2}cx + cz = 0$; $-\sqrt{2}x + z = 0$; $\vec{n}\{-\sqrt{2};0;1\}$ - вектор нормали (SAD)

$$5. \cos(\vec{AB} \wedge \vec{n}) = \frac{|1 \cdot (-\sqrt{2}) + 0 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$6. \cos(\vec{AB} \wedge \vec{n}) = \sin \varphi; \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - (\sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{1/3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Решение задач по готовым чертежам

Угол между плоскостями

Задача: В правильном параллелепипеде $A...D_1$, точки E и F – середины ребер B_1C_1 и C_1D_1 соответственно. $AB=6$, $AD=4$, $AA_1=5$. Найти угол между плоскостями CEF и BDD_1 .

Решение:

1. Введем систему координат, как показано на рисунке. $(CEF) \wedge (BDD_1)$

2. $D(0;0;0)$, $D_1(0;0;5)$, $B(4;6;0)$, $C(0;6;0)$, $E(2;6;5)$, $F(0;3;5)$

3. $(DD_1B): ax+by+cz+d=0$ (*)

$$\begin{cases} D: & \begin{cases} d=0 \\ 5c=0 \\ 4a+6b=0 \end{cases} \\ D_1: & \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ a=-3/2 b \end{cases} \\ S: & \end{cases}$$

$$*-3/2bx+by=0; 3x-2y=0;$$

$n_1 \{3; -2; 0\}$ – вектор нормали (DD_1B)

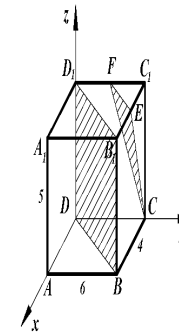
4. $(FEC): mx+ky+pz+q=0$ (**)

$$\begin{cases} C: & \begin{cases} 5k+q=0 & (1) \\ 2m+6k+5p+q=0 & (2) \\ 3k+5p+q=0 & (3) \end{cases} \\ E: & \\ F: & \end{cases} \quad \begin{cases} (2)-(3): 2m+3k=0 \\ k=-2/3m \\ q=4m \\ p=-2/5m \end{cases}$$

$$** mx-2/3my-2/5mz+4m=0; x-2/3y-2/5z+4=0; 15x-10y-6z+60=0$$

$n_2 \{15; -10; -6\}$ – вектор нормали (FEC)

$$5. \cos \varphi = \frac{|3 \cdot 15 + (-2) \cdot (-10) + 0 \cdot (-6)|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{15^2 + (-10)^2 + (-6)^2}} = \frac{65}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{361}} = \frac{5\sqrt{13}}{19}; \quad \varphi = \arccos \frac{5\sqrt{13}}{19}$$



Ответ: $\varphi = \arccos \frac{5\sqrt{13}}{19}$

Задачи для самостоятельного решения

- ❖ 1. В правильной треугольной призме $A...C_1$, все рёбра которой равны 1, найти косинус угла между прямыми AD_1 и CE_1 , где D_1 и E_1 – середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно.
- ❖ 2. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все рёбра которой равны 1, найти угол между прямой AF и плоскостью BCC_1 .
- ❖ 3. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найти синус угла между прямой BE и плоскостью SAD , где E – середина SC .
- ❖ 4. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все рёбра которой равны 1, найти угол между плоскостями AFF_1 и DEE_1 .
- ❖ 5. В правильной треугольной призме $A...C_1$, все рёбра которой равны 1, найти косинус угла между плоскостями ACB_1 и BA_1C_1 .

Подведение итогов. Рефлексия.

Итак, мы повторили:

- ❖ **угол между прямыми**
- ❖ **угол между прямой и плоскостью**
- ❖ **угол между плоскостями**
- ❖ **определение координат вершин многогранников**
- ❖ **уравнение плоскости**

- 1. Что нового вы узнали на уроке?**
- 2. На уроке вы работали:** *активно / пассивно*
- 3. Своей работой вы:** *довольны / недовольны*
- 4. Материал урока вам был:** *понятен / непонятен*
полезен / бесполезен
интересен / неинтересен
- 5. Можете ли вы объяснить решение пройденных задач однокласснику, пропустившему урок?**
- 6. Каков основной урок для вас лично?**

Литература

1. **Атанасян Л.С. и др. Геометрия, 10-11. - М.: Просвещение, 2009.**
2. **Севрюков П.Ф. Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии - Ставрополь, Сервисшкола, 2008.**
3. **Смирнов В.А. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С2. / под ред. А.Л. Семенова и И.В. Яценко. - М.: МЦНМО, 2010.**
4. **Единый государственный экзамен 2011. Математика. Типовые тестовые задания. / под ред. А.Л.Семенова, И.В. Яценко. - М.: Экзамен, 2011.**
5. **Математика. Подготовка к ЕГЭ 2011. Тематические тесты. Часть II. / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. - Ростов-на-Дону, Легион-М, 2011.**
6. **Математика. Типовые экзаменационные варианты. / под ред. А. Л.Семенова, И.В. Яценко. - М.: Национальное образование, 2012.**
7. **Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. Расстояния и углы в пространстве. - М.: Экзамен, 2009.**