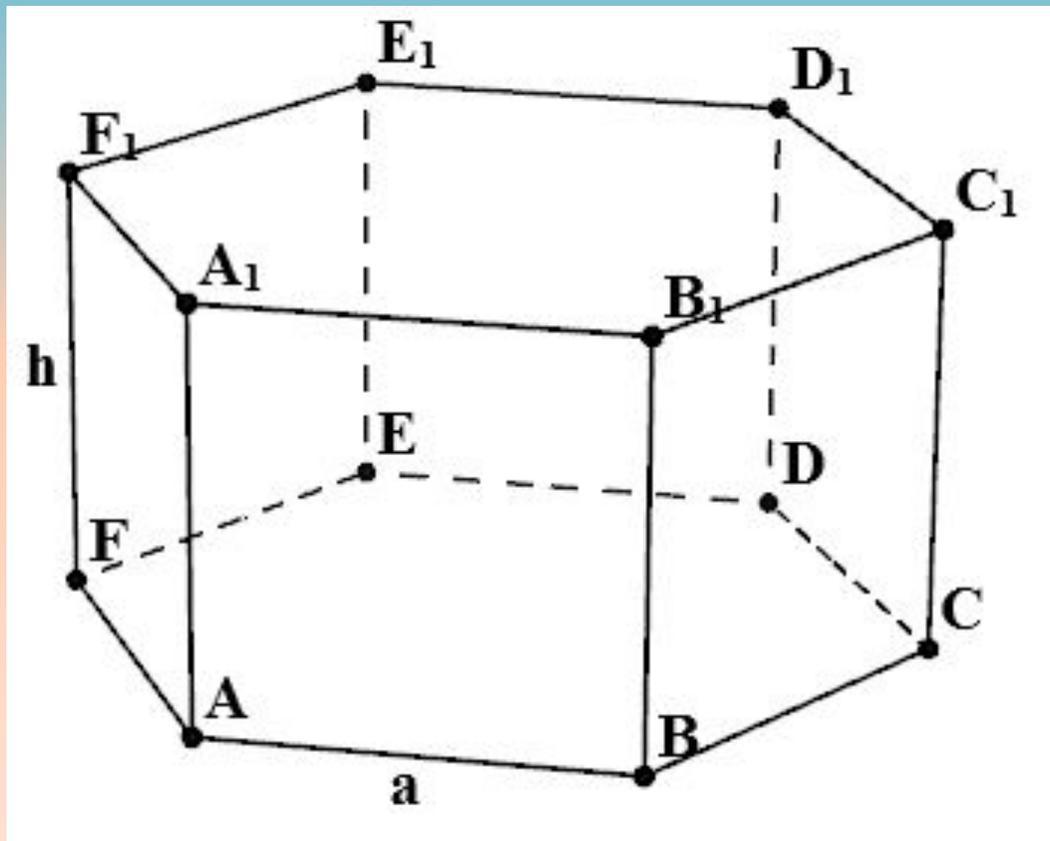

Шестиугольная призма

Правильная шестиугольная призма — призма, в основаниях которой лежат два правильных шестиугольника, а все боковые грани строго перпендикулярны этим основаниям.



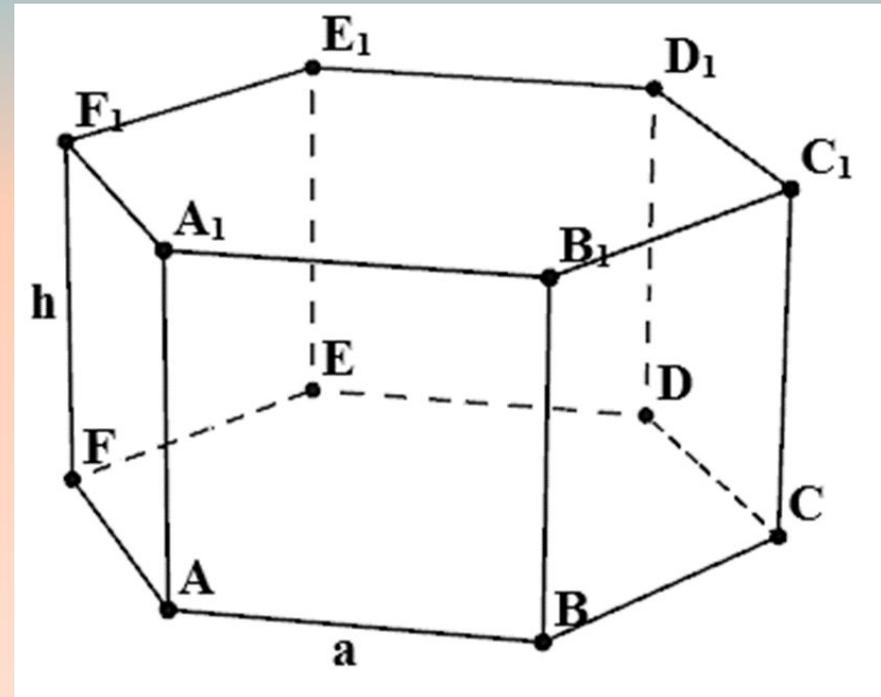
$ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ — правильная шестиугольная призма
 a — длина стороны основания призмы
 h — длина бокового ребра призмы

Площадь оснований призмы

В основаниях призмы находятся правильные шестиугольники со стороной a . По свойствам правильного шестиугольника, площадь оснований призмы равна:

$$S_{\text{осн.}} = 3\sqrt{3}/2 \cdot a^2.$$

Таким образом, получается, что $S_{ABCDEF} = S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = 3\sqrt{3}/2 \cdot a^2$.



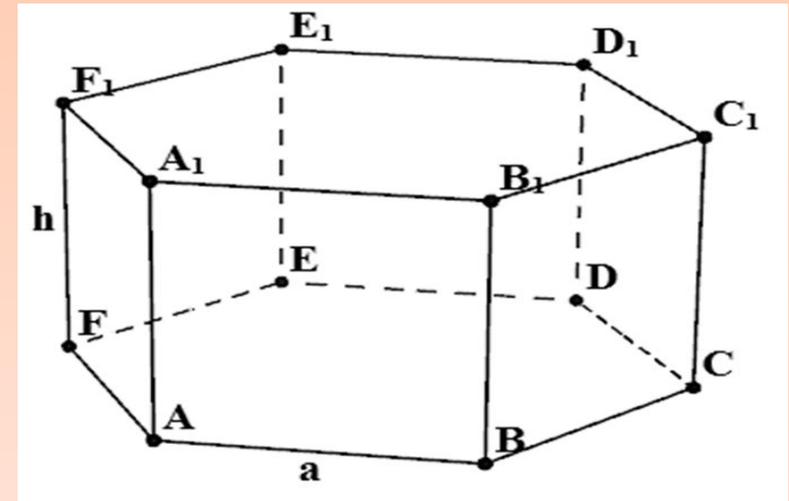
Площадь полной поверхности призмы

Площадь полной поверхности призмы складывается из площадей боковых граней призмы и площадей ее оснований. Каждая из боковых граней призмы является прямоугольником со сторонами a и h . Следовательно, по свойствам прямоугольника

$$S_{\text{бок.}} = a \cdot h$$

У призмы шесть боковых граней и два основания, следовательно, площадь ее полной поверхности равна

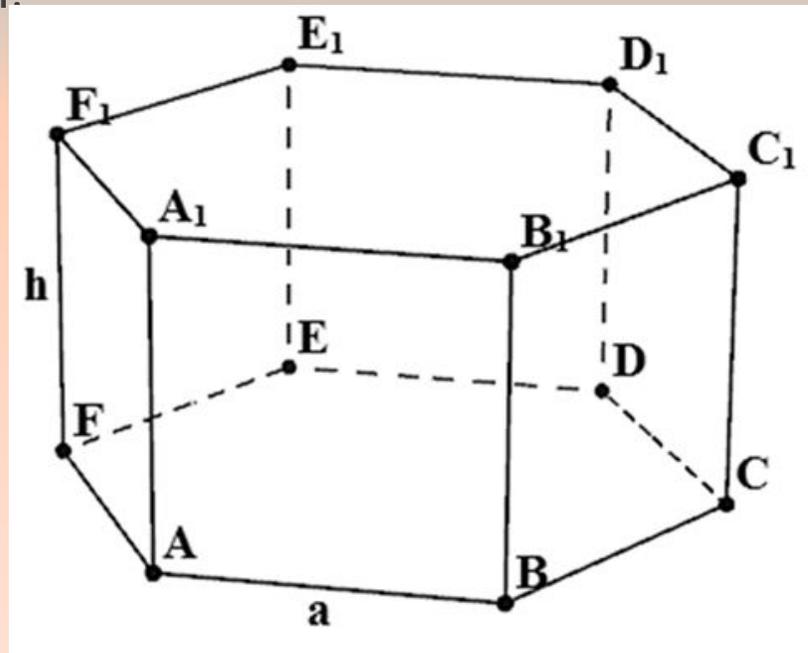
$$S_{\text{полн.}} = 6 \cdot S_{\text{бок.}} + 2 \cdot S_{\text{осн.}} = 6 \cdot a \cdot h + 2 \cdot 3\sqrt{3}/2 \cdot a^2.$$



Объем призмы

Объем призмы вычисляется как произведение площади ее основания на ее высоту. Высотой правильной призмы является любое из ее боковых ребер, например, ребро AA_1 . В основании правильной шестиугольной призмы находится правильный шестиугольник, площадь которого нам известна. Получаем:

$$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн.}} \cdot AA_1 = 3\sqrt{3}/2 \cdot a^2 \cdot h$$



Правильный шестиугольник в основаниях призмы

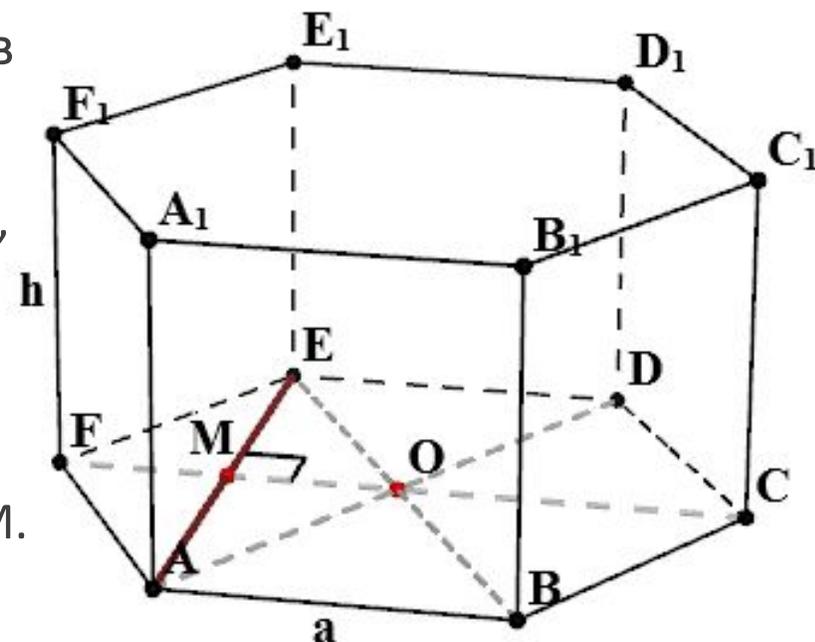
Рассматриваем правильный шестиугольник $ABCDEF$, лежащий в основании призмы. Проводим отрезки AD , BE и CF . Пусть пересечением этих отрезков является точка O . По свойствам правильного шестиугольника, треугольники AOB , BOC , COD , DOE , EOF , FOA являются правильными треугольниками. Отсюда следует, что

$$AO=OD=EO=OB=CO=OF=a$$

Проводим отрезок AE , пересекающийся с отрезком CF в точке M . Треугольник AEO равнобедренный, в нём $AO=OE=a$, $\angle EOA=120^\circ$. По свойствам равнобедренного треугольника

$$AE=a \cdot \sqrt{2(1-\cos EOA)}=\sqrt{3} \cdot a$$

Аналогичным образом приходим к заключению, что $AC=CE=\sqrt{3} \cdot a$,
 $FM=MO=1/2 \cdot a$.



Находим EA_1

В треугольнике AEA_1 :

$$AA_1=h$$

$AE=\sqrt{3} \cdot a$ — как мы только что выяснили

$\angle EAA_1=90^\circ$ — по свойствам правильной призмы

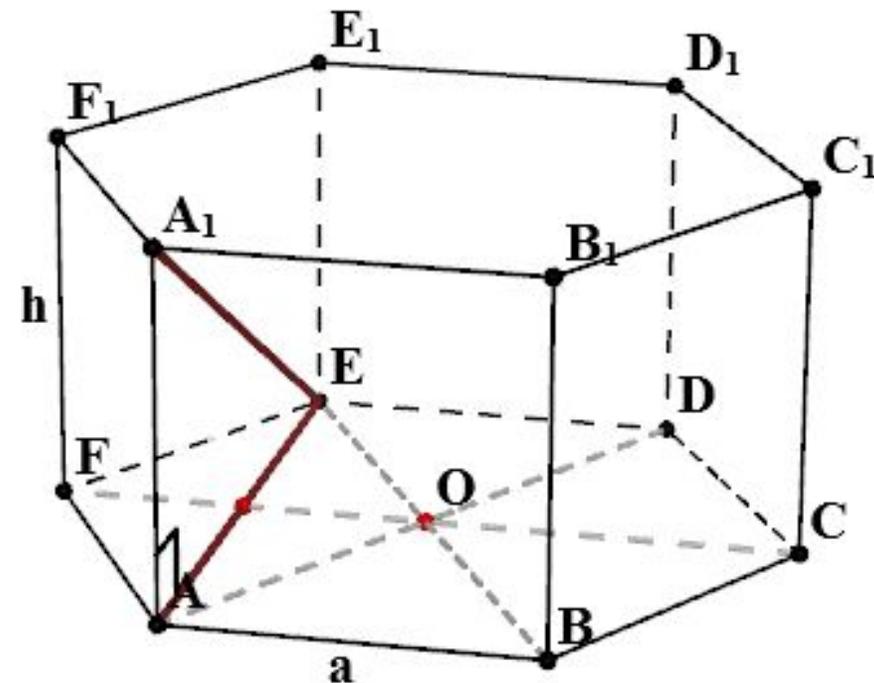
Таким образом, получается, что треугольник AEA_1 прямоугольный. По свойствам прямоугольного треугольника

$$EA_1=\sqrt{AA_1^2+AE^2}=\sqrt{h^2+3 \cdot a^2}$$

Если $h=a$, то тогда $EA_1=2 \cdot a$

После аналогичных рассуждений получаем, что

$$FB_1=AC_1=BD_1=CE_1=DF_1=\sqrt{h^2+3 \cdot a^2}.$$



Находим EB_1

В треугольнике VEB_1 :

$$VB_1=h$$

$$VE=2 \cdot a \text{ — потому что } EO=OB=a$$

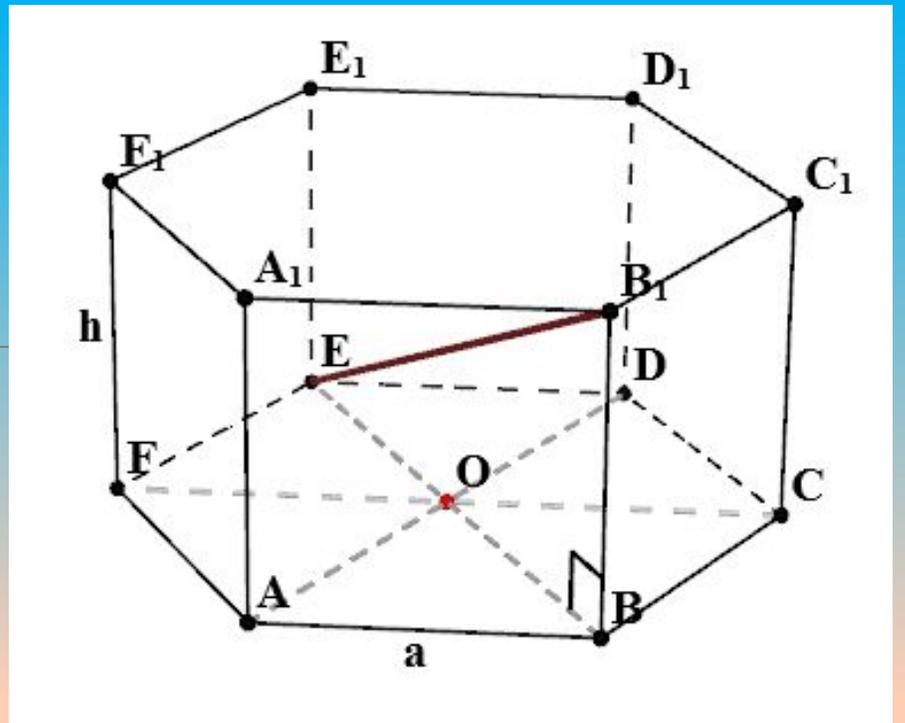
$\angle EBB_1=90^\circ$ — по свойствам правильной призмы

Таким образом, получается, что треугольник VEB_1 прямоугольный. По свойствам прямоугольного треугольника

$$EB_1= \sqrt{VB_1^2+VE^2}=\sqrt{h^2+4 \cdot a^2}$$

$$\text{Если } h=a, \text{ то тогда } EB_1=\sqrt{5} \cdot a$$

После аналогичных рассуждений получаем, что $FC_1=AD_1=EB_1=CF_1=DA_1=\sqrt{h^2+4 \cdot a^2}$.



Находим OF_1

В треугольнике FOF_1 :

$$FF_1=h$$

$$FO=a$$

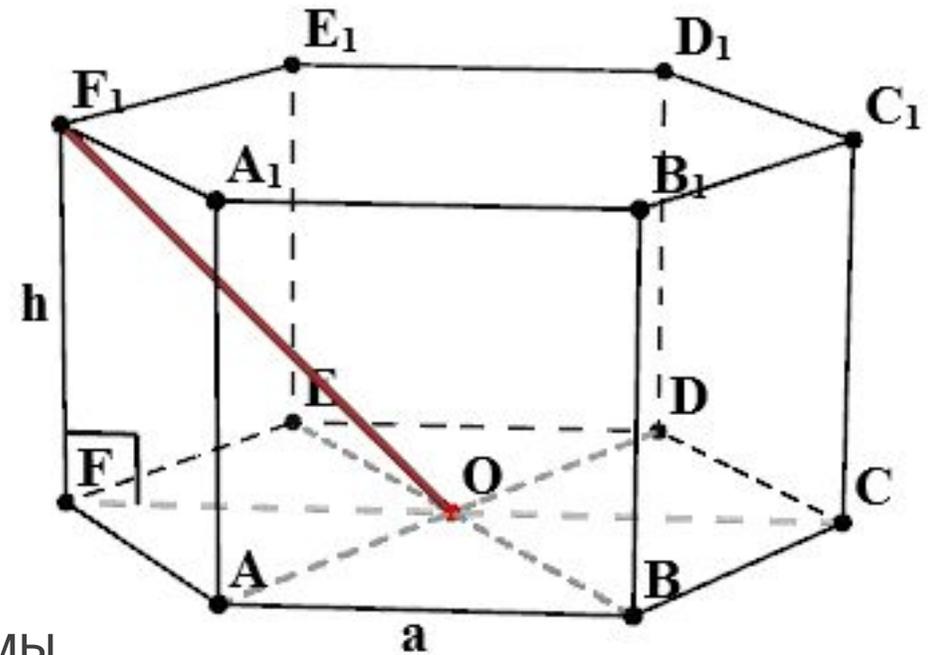
$\angle OFF_1=90^\circ$ — по свойствам правильной призмы

Таким образом, получается, что треугольник FOF_1 прямоугольный. По свойствам прямоугольного треугольника

$$OF_1=\sqrt{FF_1^2+OF^2}=\sqrt{h^2+a^2}$$

Если $h=a$, то тогда $OF_1=\sqrt{2} \cdot a$

После аналогичных рассуждений получаем, что $OA_1=OB_1=OC_1=OD_1=OE_1=\sqrt{h^2+a^2}$.



Находим FE_1

В треугольнике FEE_1 :

$$EE_1=h$$

$$FE=a$$

$\angle FEE_1=90^\circ$ — по свойствам правильной призмы

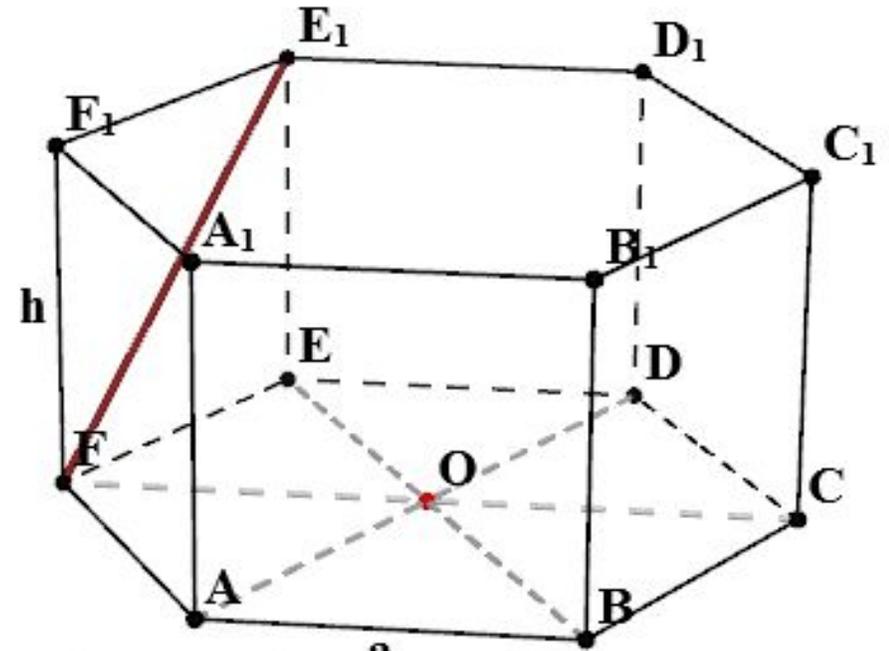
Таким образом, получается, что треугольник FEE_1 прямоугольный. По свойствам прямоугольного треугольника

$$FE_1=\sqrt{FE^2+EE_1^2}=\sqrt{h^2+a^2}$$

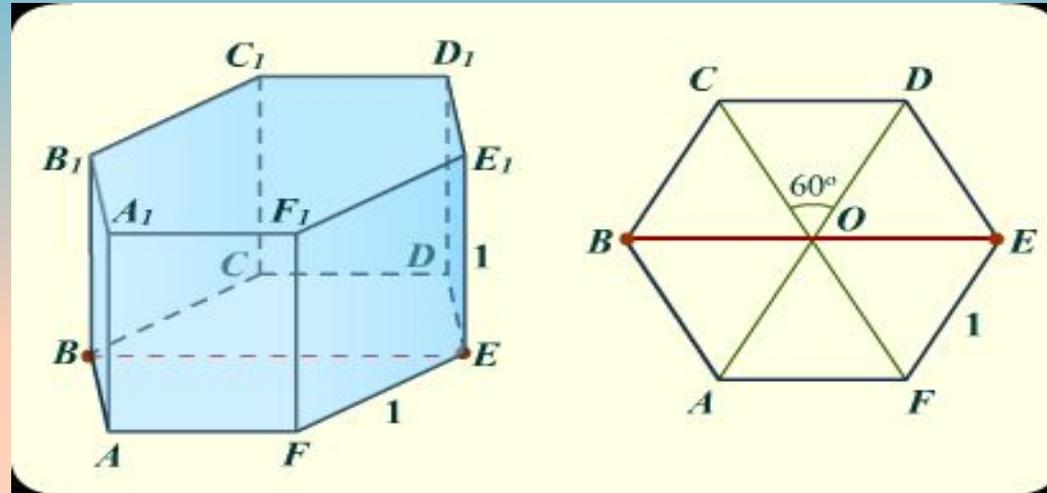
Если $h=a$, то тогда

$$FE_1=\sqrt{2} \cdot a$$

После аналогичных рассуждений получаем, что длины диагоналей остальных боковых граней призмы также равны $\sqrt{h^2+a^2}$.



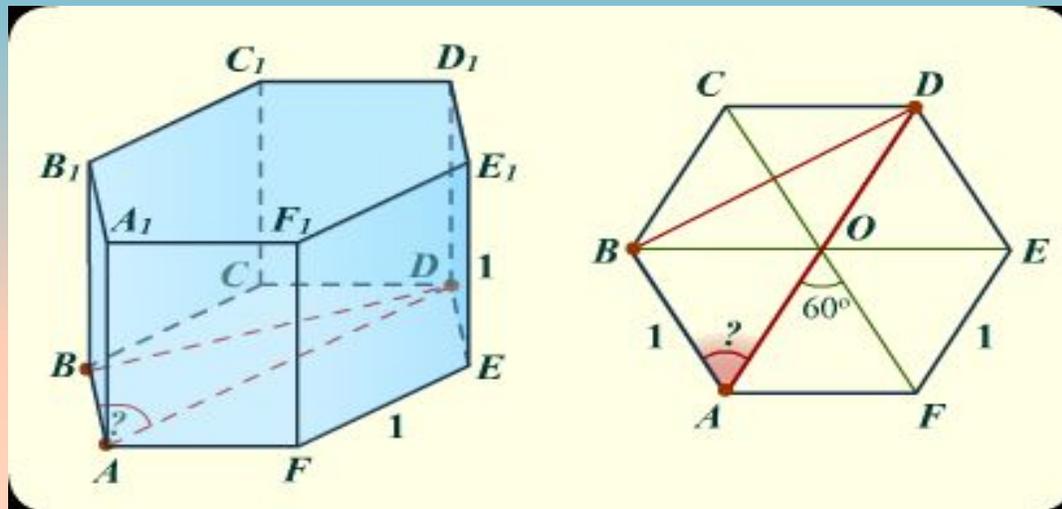
№1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками B и E .



Отмечаем точки B и E на чертеже призмы, соединяем их. Видно, что обе точки и весь отрезок принадлежат основанию, значит задача сразу сводится к планиметрии - нужно найти длину отрезка в правильном шестиугольнике. Чертим шестиугольник, точки, отрезок. Из правого чертежа получаем: $BO = OE = EF = 1$; следовательно $BE = 2EF = 2 \times 1 = 2$.

Ответ: 2

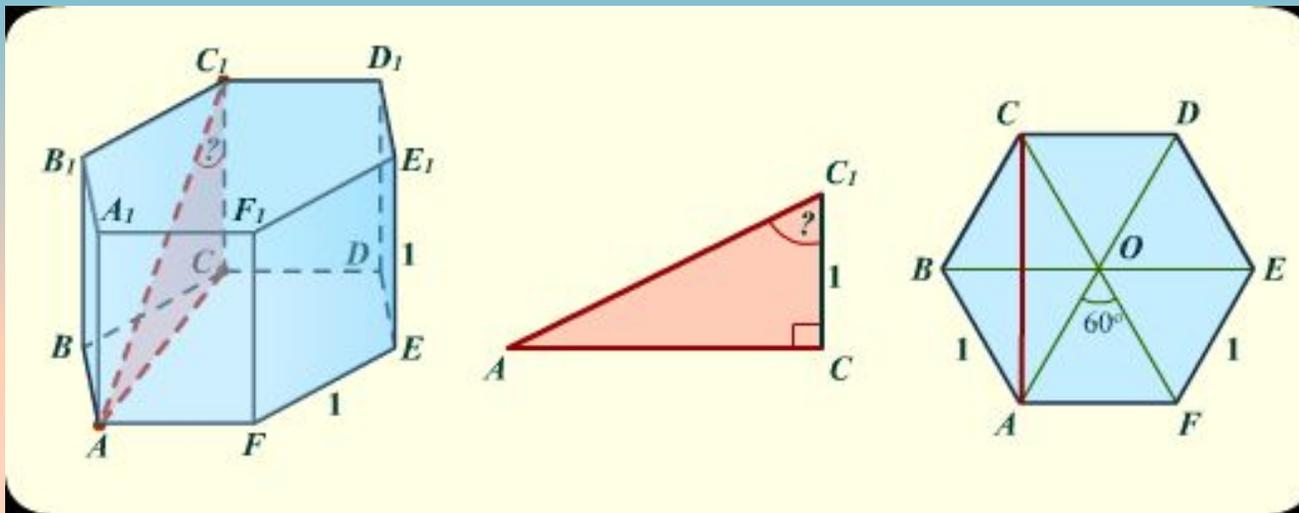
№2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол DAB . Ответ дайте в градусах.



Отмечаем угол DAB на чертеже призмы. Он полностью находится в плоскости основания, переходим к плоскому чертежу шестиугольника. Отмечаем искомый угол, он является углом при вершине равностороннего треугольника AOB , следовательно равен 60° .

Ответ: 60

№3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол $AC_1 C$. Ответ дайте в градусах.



Отмечаем угол $AC_1 C$ на чертеже призмы. Треугольник $AC_1 C$, содержащий искомый угол, также включает боковое ребро призмы и отрезок, лежащий в её основании, следовательно он прямоугольный (боковое ребро прямой призмы перпендикулярно основанию)

По условию все ребра равны 1, значит $C_1C = 1$. Чтобы найти угол прямоугольного треугольника через синус, нам еще понадобится длина гипотенузы AC_1 , а чтобы найти угол через тангенс понадобится длина катета AC . Катет AC является отрезком внутри правильного шестиугольника, поэтому его длину найти легче, чем длину диагонали призмы AC_1 , выбираем способ "через тангенс".

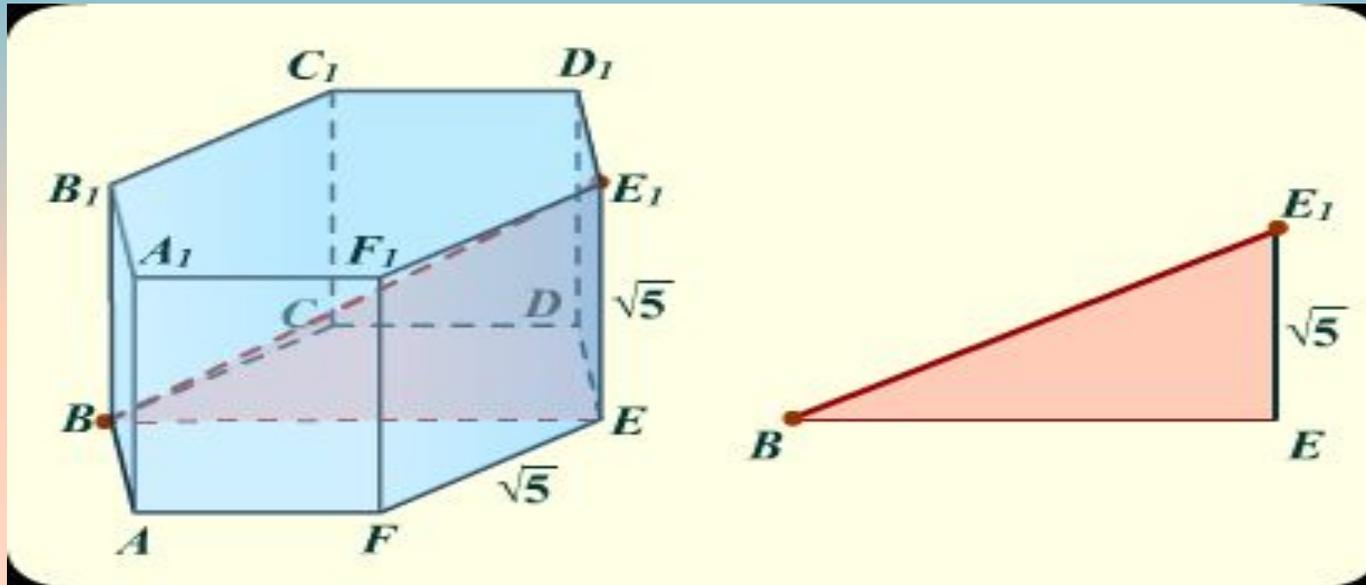
AC находим как основание равнобедренного треугольника ABC с известными боковыми сторонами и углом при вершине 120° . См. самый правый чертеж.

Получим $AC = 2 \cdot BC \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$.

Тогда $\operatorname{tg} \angle AC_1C = AC/CC_1 = \sqrt{3}/1 = \sqrt{3}$. Это табличное значение тангенса. Вспоминаем, что ему соответствует угол 60° .

Ответ: 60

№4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны $\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B и E_1 .



Отмечаем точки B и E_1 на чертеже призмы, соединяем их. Видно, что точки принадлежат разным граням, т.е. отрезок BE_1 является диагональю призмы. Соединим также точки B и E , чтобы построить прямоугольный треугольник BEE_1 , который представлен на чертеже справа.

Угол BE_1E - прямой. Убедимся в этом: призма прямая, значит ребро EE_1 перпендикулярно плоскости основания, значит EE_1 перпендикулярно любой прямой в этой плоскости, в том числе BE . Гипотенузу BE_1 можно найти по теореме Пифагора, так как катет $EE_1 = \sqrt{5}$ по условию задачи, а катет BE легко найти пользуясь свойствами шестиугольника. Мы как раз это делали в предыдущей задаче и получили $BE = 2EF = 2 \cdot \sqrt{5}$.

$$BE_1^2 = EE_1^2 + BE^2 = (\sqrt{5})^2 + (2 \cdot \sqrt{5})^2 = 5 + 4 \cdot 5 = 25;$$

$$BE_1 = 5.$$

Ответ: 5

№5. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота – 10.

Решение.

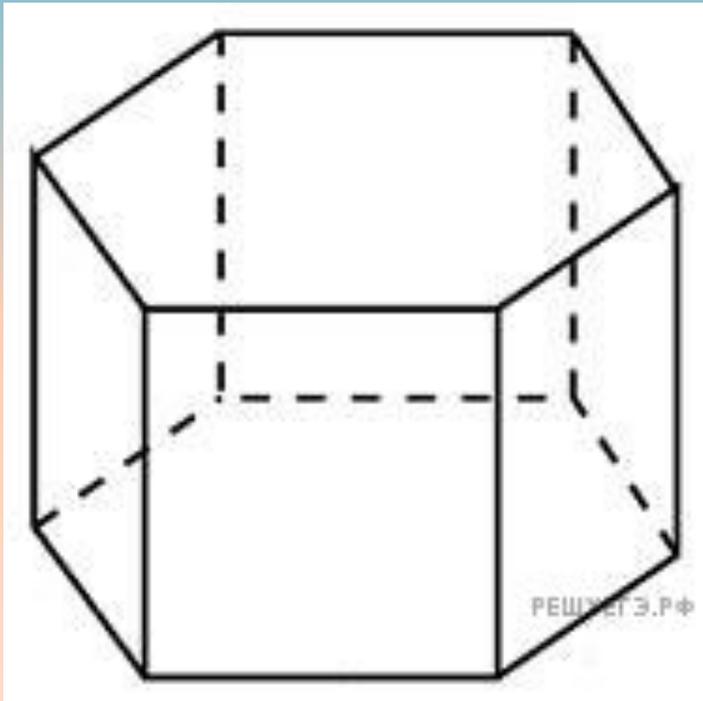
Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей всех ее боковых граней:

$$S_{\text{бок}} = 6S_{\text{гр}}$$

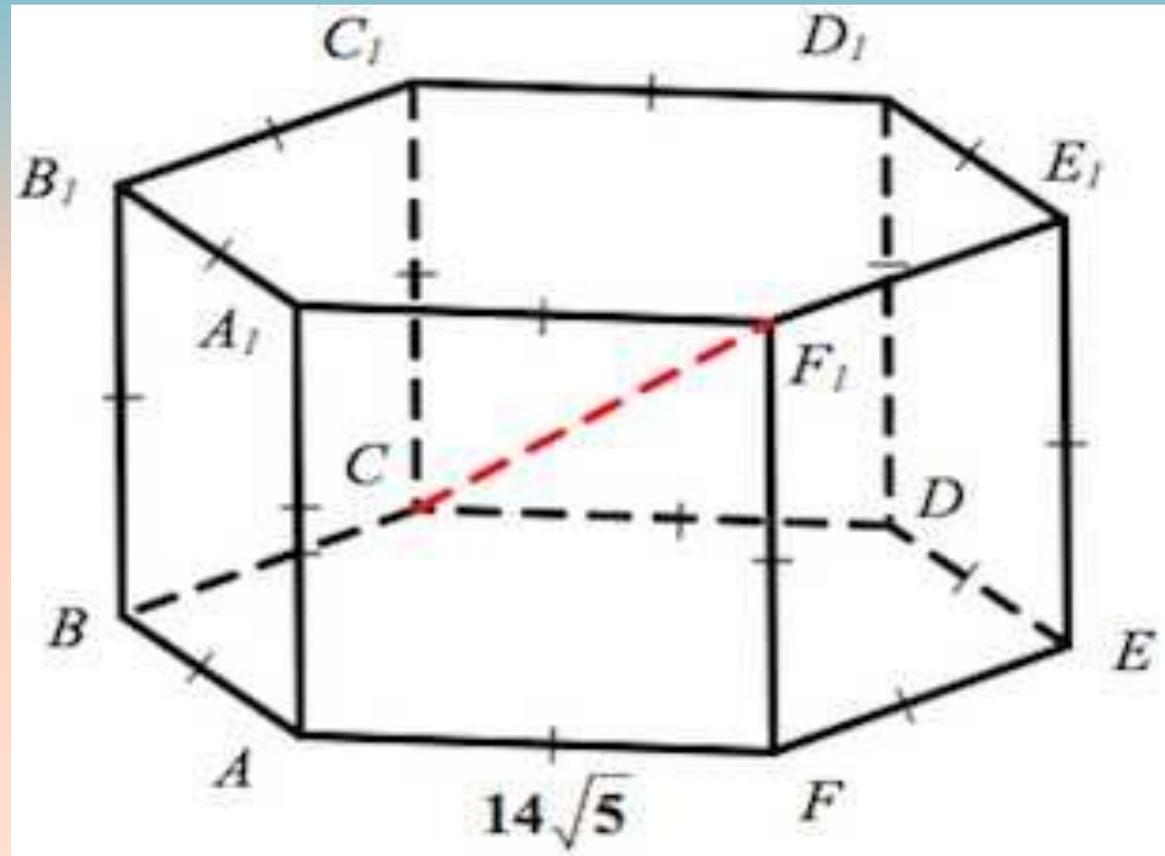
$$S_{\text{гр}} = ah$$

$$S_{\text{бок}} = 6 \cdot 5 \cdot 10$$

Ответ: 300.



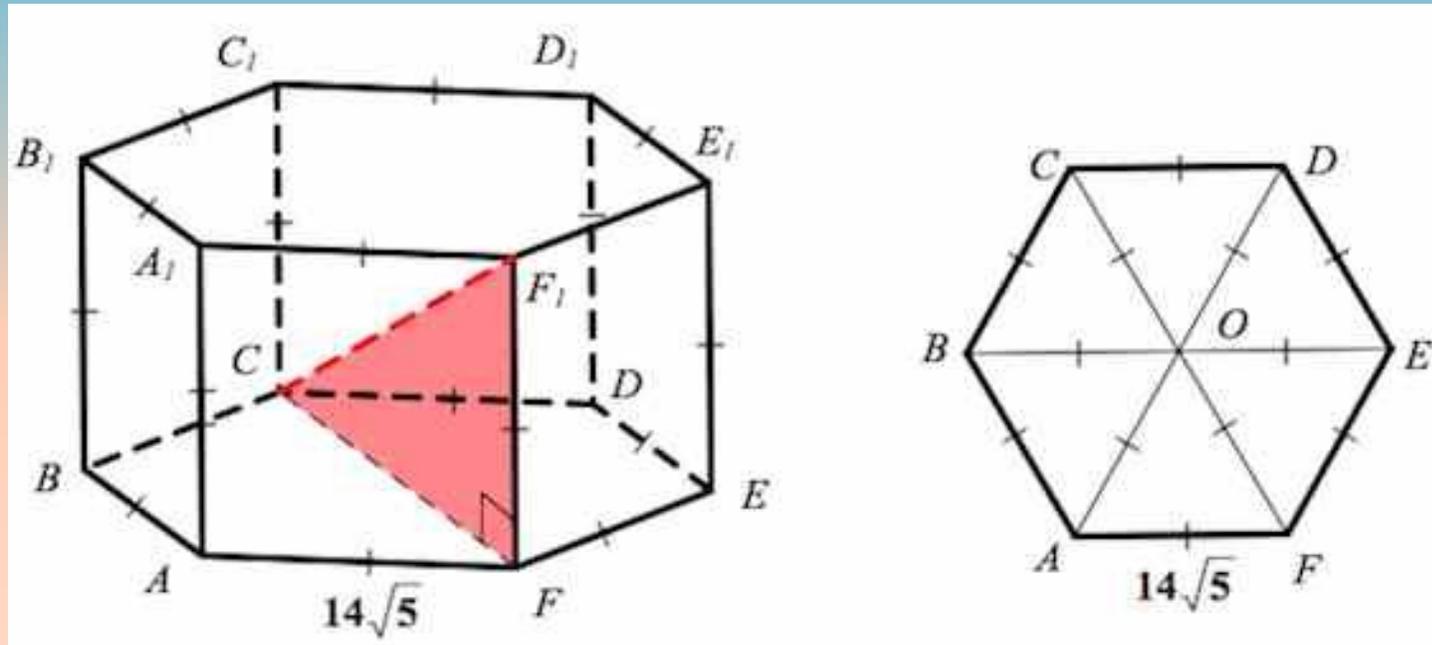
№6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны $14\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками C и F_1 .



CF_1 будем искать из прямоугольного треугольника CF_1F .

Для этого нам предстоит найти CF :

$CF=2AB=28\sqrt{5}$ (правильный шестиугольник состоит из шести равных друг другу правильных треугольников).

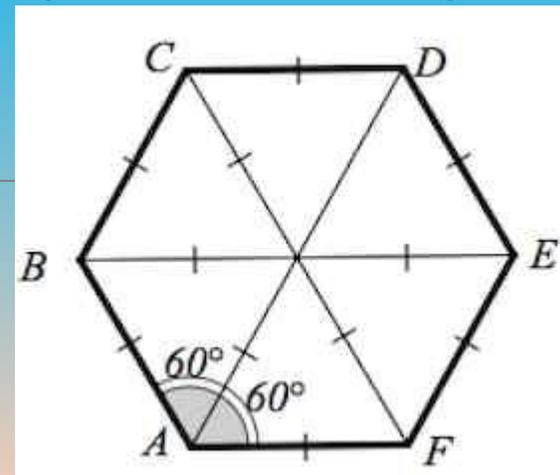
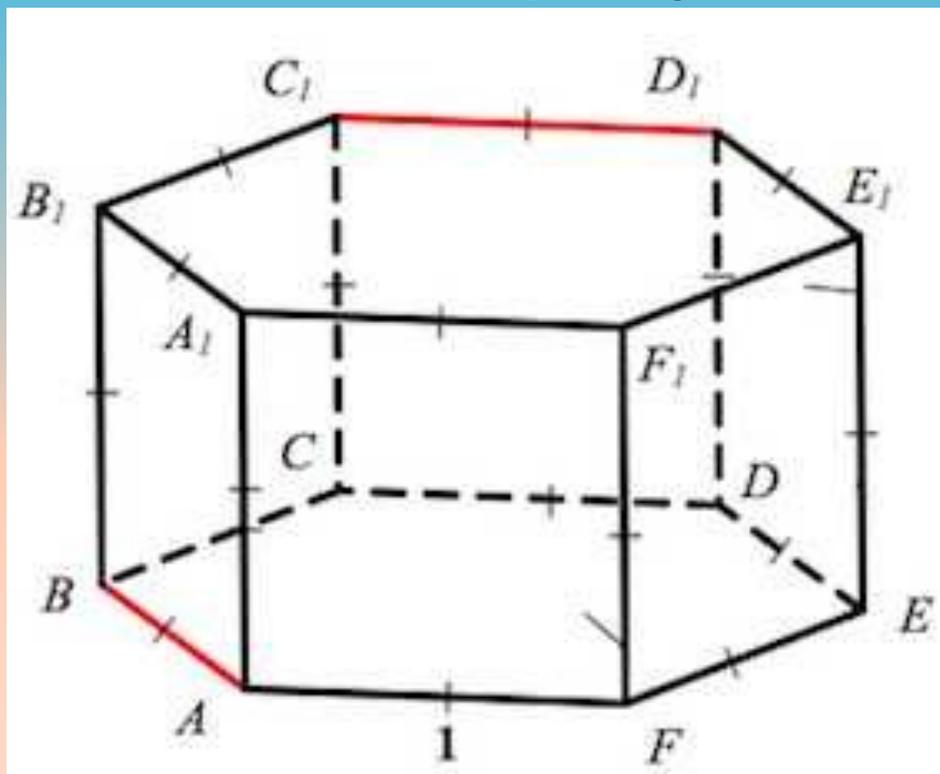


Тогда по т. Пифагора $CF_1 = \sqrt{CF^2 + FF_1^2}$

$$CF_1 = \sqrt{(28\sqrt{5})^2 + (14\sqrt{5})^2} = \sqrt{(14\sqrt{5})^2 \cdot 5} = 70;$$

Ответ: 70.

№7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и $C_1 D_1$. Ответ дайте в градусах.



Угол между искомыми скрещивающимися прямыми AB и $C_1 D_1$ — угол между прямыми AB и AF , так как $AF \parallel C_1 D_1$.

А угол между прямыми AB и AF равен 60 градусов.

Ответ: 60.