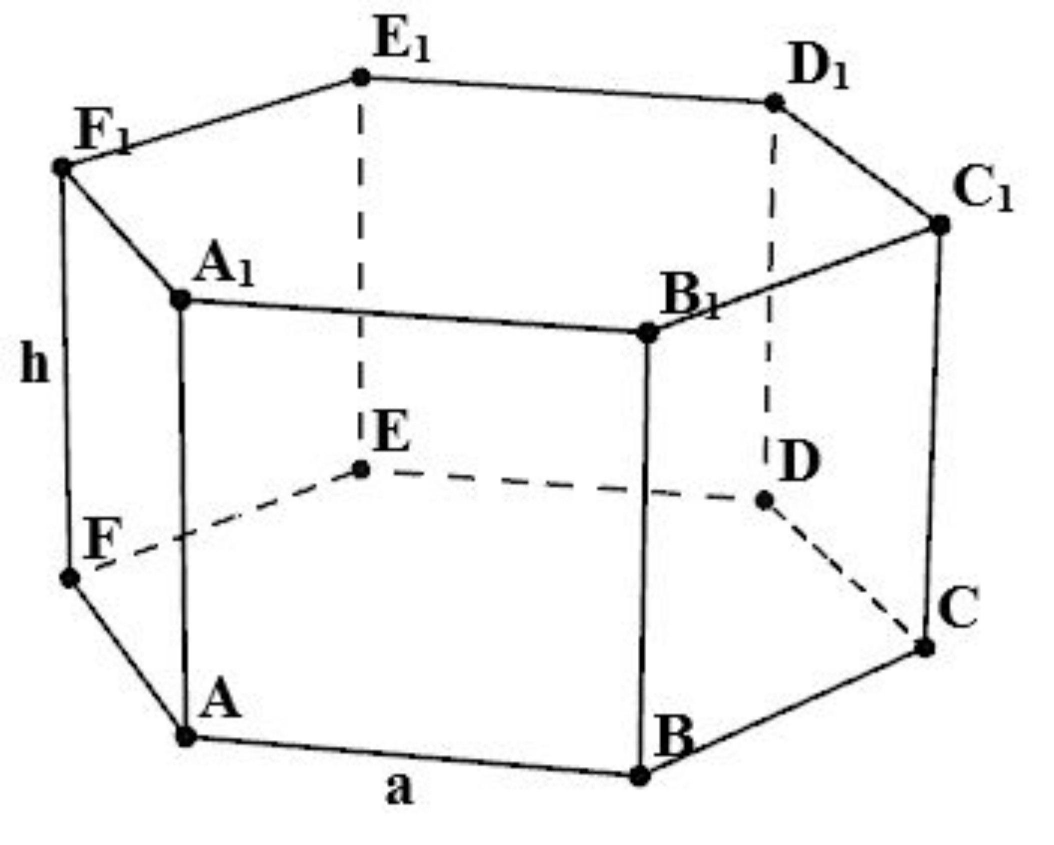
Шестиугольная призма

Правильная шестиугольная призма — призма, в основаниях которой лежат два правильных шестиугольника, а все боковые грани строго перпендикулярны этим основаниям.



$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма

a — длина стороны основания призмы

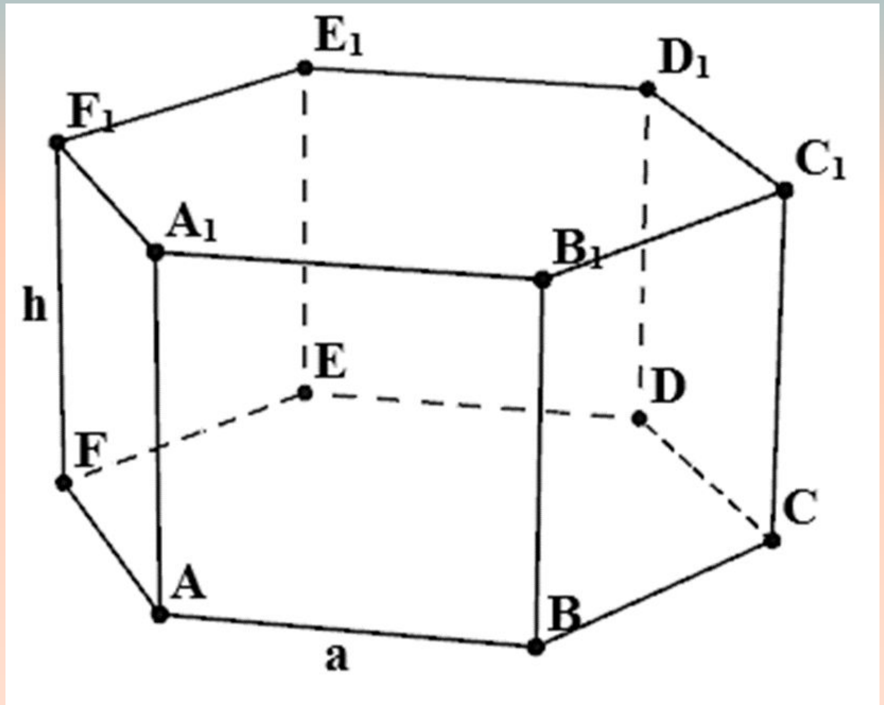
h — длина бокового ребра призмы

Площадь оснований призмы

В основаниях призмы находятся правильные шестиугольники со стороной a. По свойствам правильного шестиугольника, площадь оснований призмы равна:

Sосн.$=3\sqrt{3}/2 \cdot a^2$.

Таким образом, получается, что $S_{ABCDEF}=S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1} =3\sqrt{3}/2 \cdot a^2$.



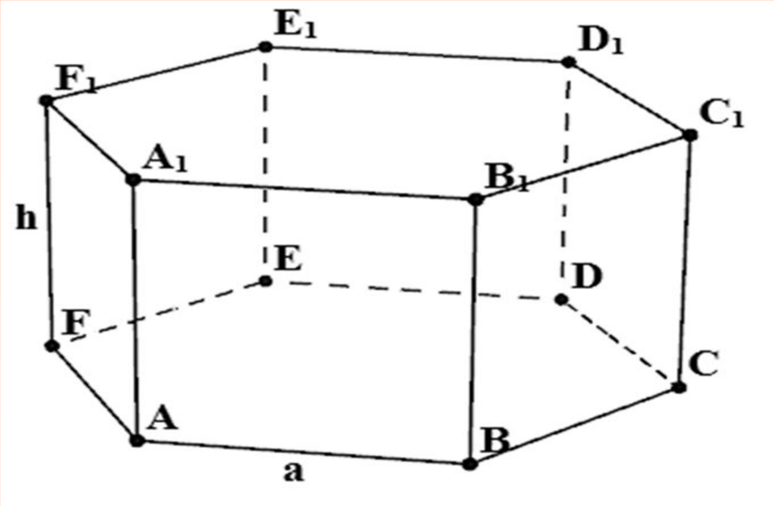
Площадь полной поверхности призмы

Площадь полной поверхности призмы складывается из площадей боковых граней призмы и площадей ее оснований. Каждая из боковых граней призмы является прямоугольником со сторонами a и h. Следовательно, по свойствам прямоугольника

Sбок.=a · h

У призмы шесть боковых граней и два основания, следовательно, площадь ее полной поверхности равна

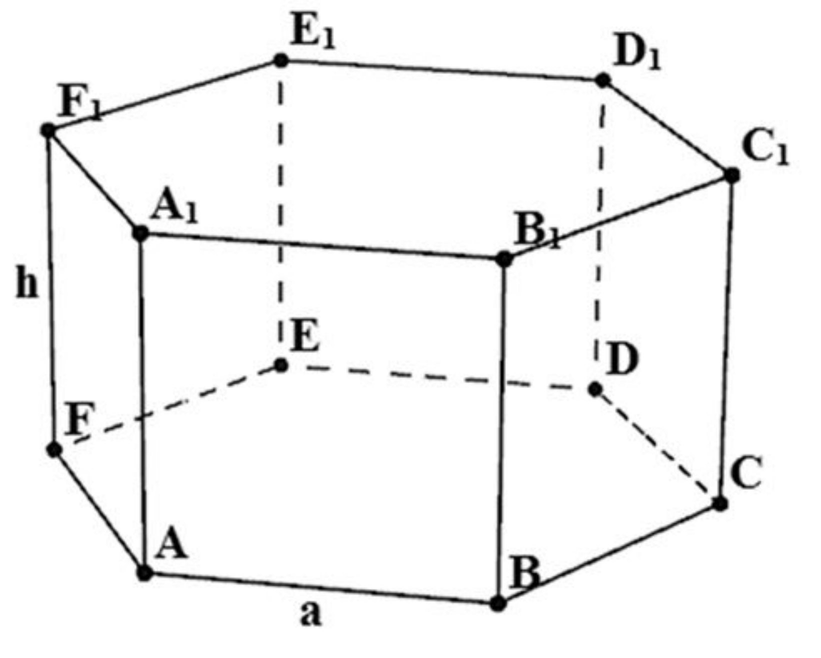
Sполн.=6 · Sбок.+2 · Sосн.=6 · a · h+2 · 3√3/2 · a².



Объем призмы

Объем призмы вычисляется как произведение площади ее основания на ее высоту. Высотой правильной призмы является любое из ее боковых ребер, например, ребро AA_1. В основании правильной шестиугольной призмы находится правильный шестиугольник, площадь которого нам известна. Получаем:

$V_{призмы} = S_{осн.} \cdot AA_1 = 3\sqrt{3}/2 \cdot a^2 \cdot h$



Правильный шестиугольник в основаниях призмы

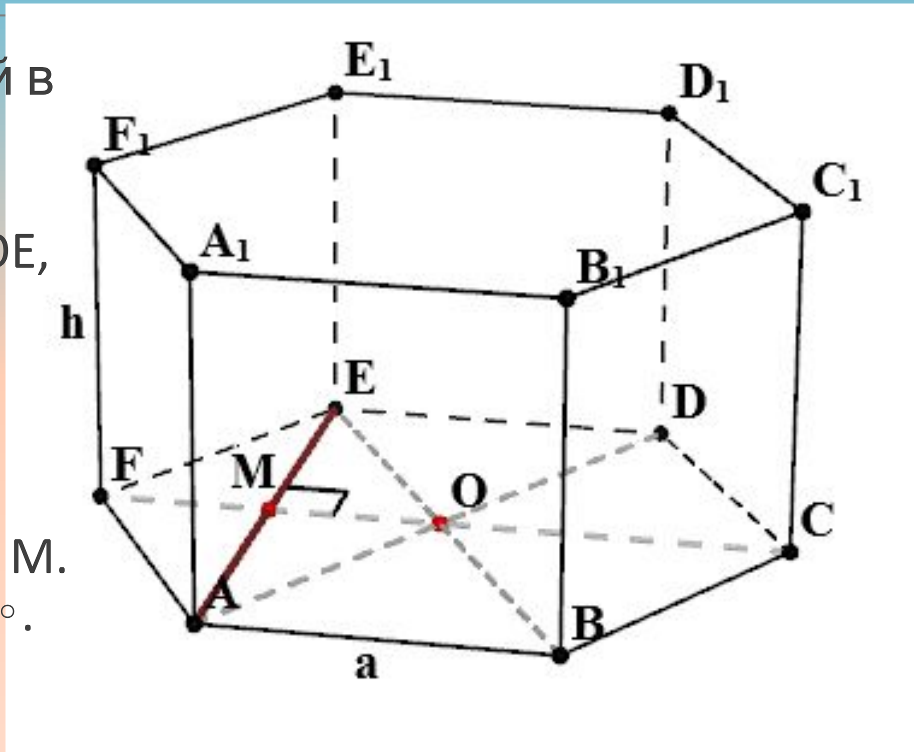
Рассматриваем правильный шестиугольник ABCDEF, лежащий в основании призмы. Проводим отрезки AD, BE и CF. Пусть пересечением этих отрезков является точка O. По свойствам правильного шестиугольника, треугольники AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA являются правильными треугольниками. Отсюда следует, что

AO=OD=EO=OB=CO=OF=a

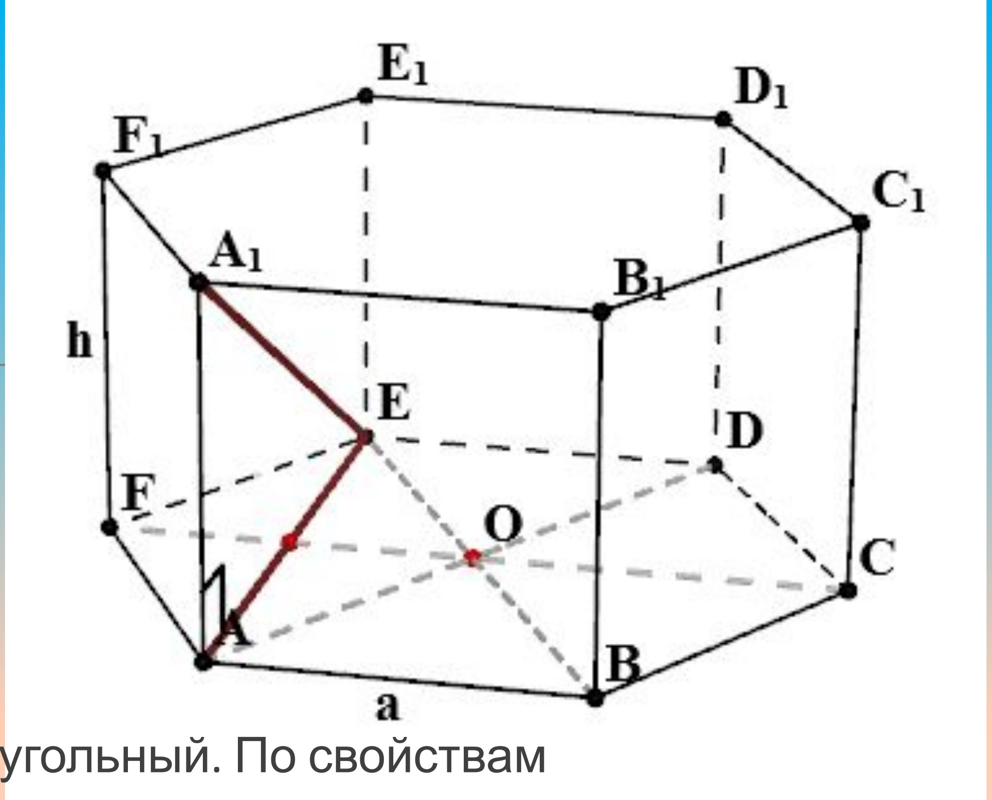
Проводим отрезок AE, пересекающийся с отрезком CF в точке M. Треугольник AEO равнобедренный, в нём AO=OE=a, $\angle EOA=120^\circ$. По свойствам равнобедренного треугольника

$AE=a\cdot\sqrt{2(1-\cos EOA)}=\sqrt{3}\cdot a$

Аналогичным образом приходим к заключению, что $AC=CE=\sqrt{3}\cdot a$, $FM=MO=1/2\cdot a$.



Находим EA_1



В треугольнике AEA_1:

$AA_1=h$

$AE=\sqrt{3}\cdot a$ — как мы только что выяснили

$\angle EAA_1=90^\circ$ — по свойствам правильной призмы

Таким образом, получается, что треугольник AEA1 прямоугольный. По свойствам прямоугольного треугольника

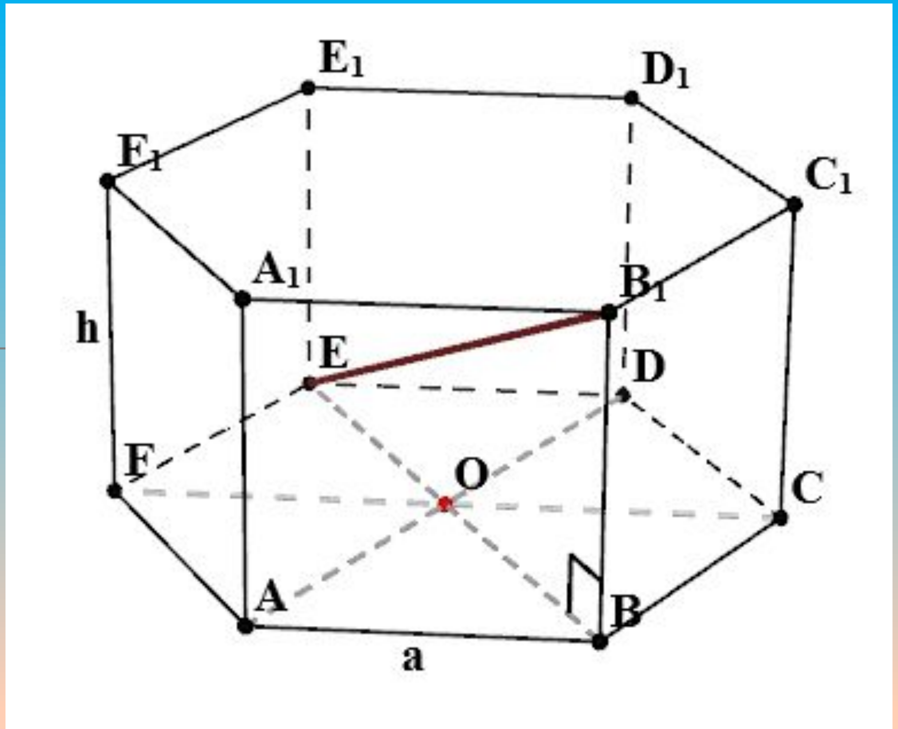
$EA1=\sqrt{AA_1^2+AE^2}=\sqrt{h2+3\cdot a2}$

Если $h=a$, то тогда $:EA_1=2\cdot a$

После аналогичных рассуждений получаем, что

$FB_1=AC_1=BD_1=CE_1=DF_1=\sqrt{h2+3\cdot a^2}$.

Находим EB_1



В треугольнике BEB_1:

$BB_1=h$

$BE=2\cdot a$ — потому что $EO=OB=a$

$\angle EBB_1=90^\circ$ — по свойствам правильной призмы

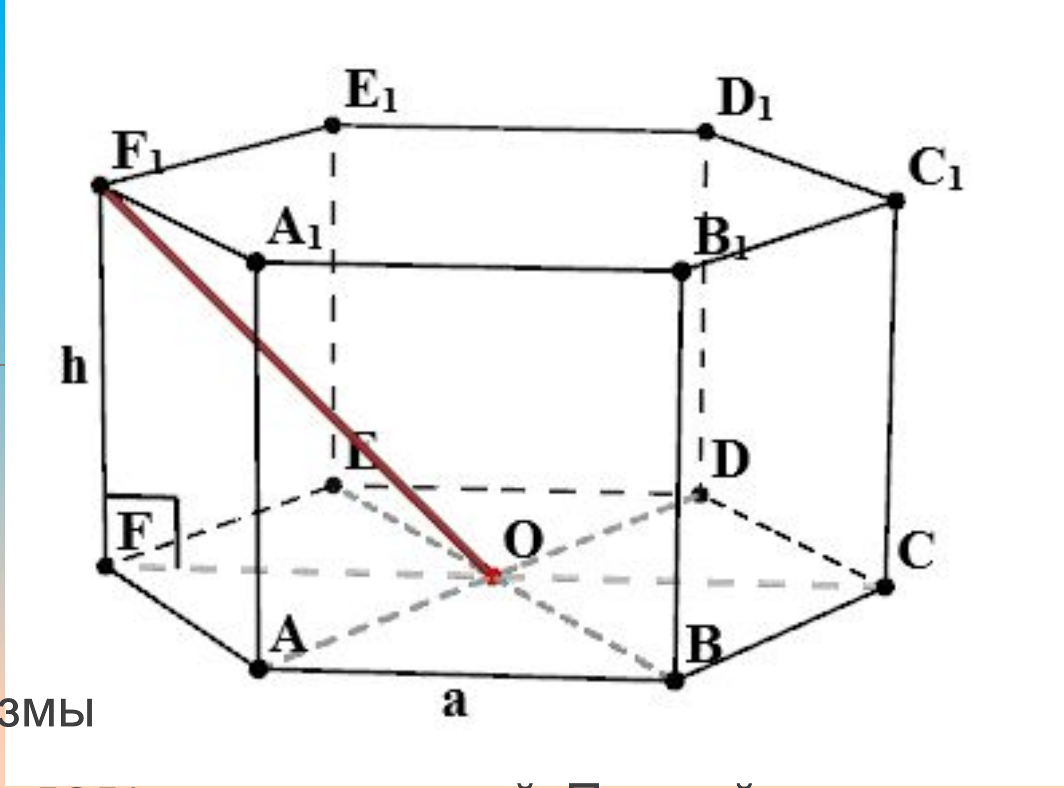
Таким образом, получается, что треугольник BEB1 прямоугольный. По свойствам прямоугольного треугольника

$EB1=\sqrt{BB_1^2+BE^2}=\sqrt{h^2+4\cdot a2}$

Если $h=a$, то тогда $EB_1=\sqrt{5}\cdot a$

После аналогичных рассуждений получаем, что $FC_1=AD_1=BE_1=CF_1=DA_1=\sqrt{h^2+4\cdot a^2}$.

Находим OF_1



В треугольнике FOF_1:

$FF_1=h$

$FO=a$

$\angle OFF_1=90^\circ$ — по свойствам правильной призмы

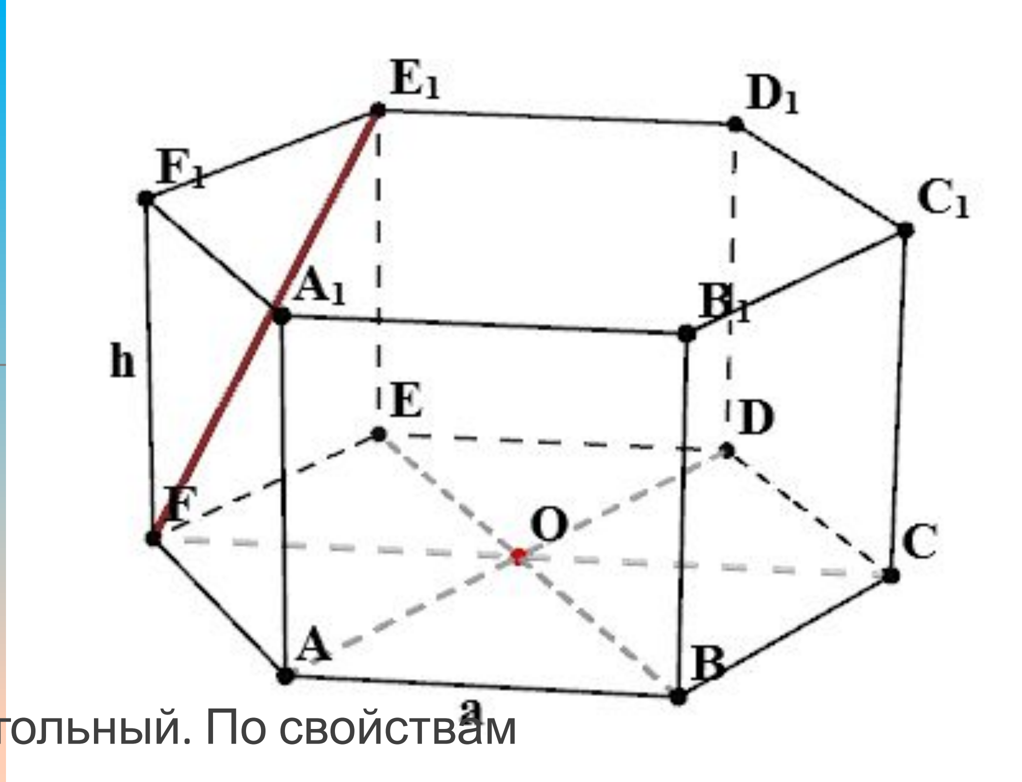
Таким образом, получается, что треугольник FOF1 прямоугольный. По свойствам прямоугольного треугольника

$OF_1=\sqrt{FF_1^2+OF^2}=\sqrt{h^2+a^2}$

Если $h=a$, то тогда $OF_1=\sqrt{2}\cdot a$

После аналогичных рассуждений получаем, что $OA_1=OB_1=OC_1=OD_1=OE_1=\sqrt{h^2+a^2}$.

Находим FE_1



В треугольнике FEE_1:

$EE_1=h$

$FE=a$

$\angle FEE_1=90^\circ$ — по свойствам правильной призмы

Таким образом, получается, что треугольник FEE_1 прямоугольный. По свойствам прямоугольного треугольника

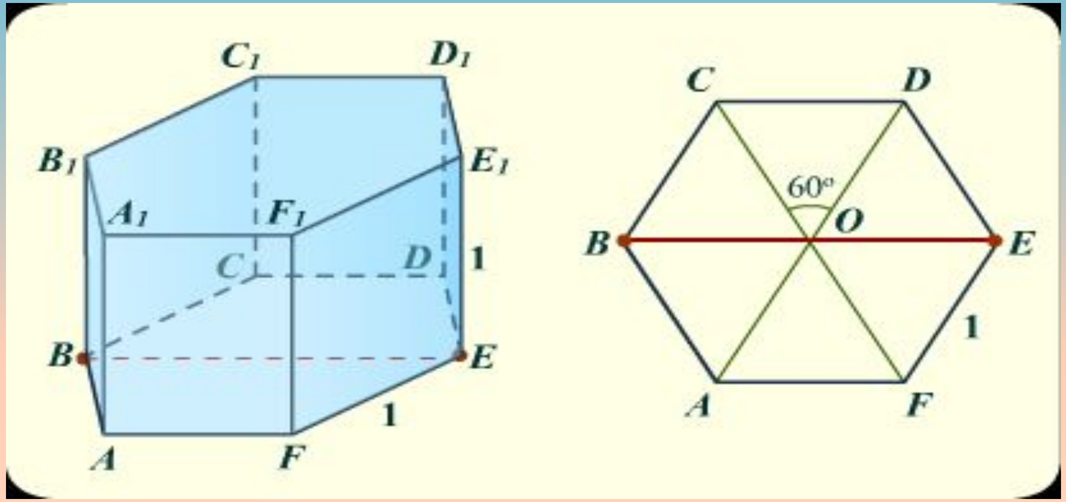
$FE_1=\sqrt{FE^2+EE_1^2}=\sqrt{h^2+a^2}$

Если $h=a$, то тогда

$FE_1=\sqrt{2}\cdot a$

После аналогичных рассуждений получаем, что длины диагоналей остальных боковых граней призмы также равны $\sqrt{h^2+a^2}$.

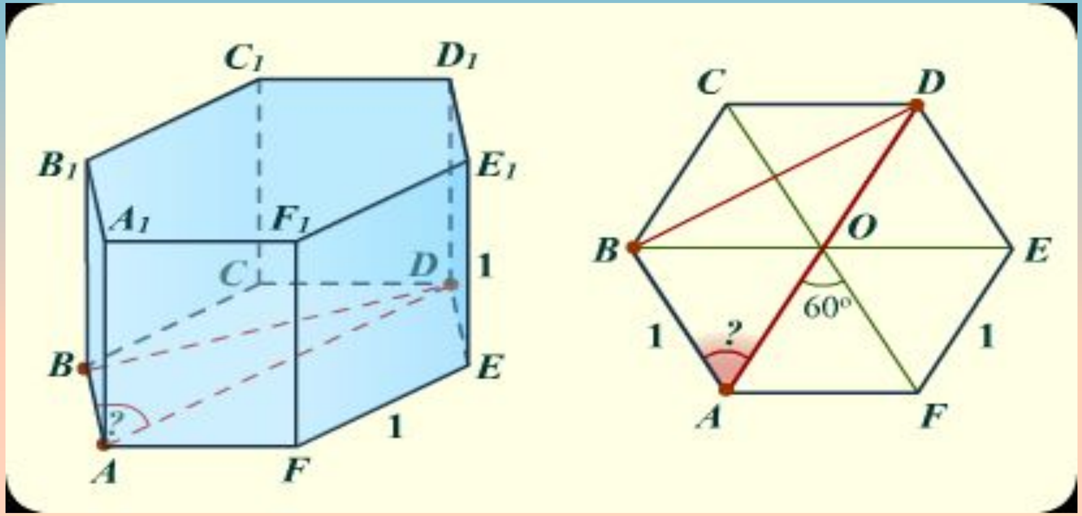
№1.В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками B и E.



Отмечаем точки B и E на чертеже призмы, соединяем их. Видно, что обе точки и весь отрезок принадлежат основанию, значит задача сразу сводится к планиметрии - нужно найти длину отрезка в правильном шестиугольнике. Чертим шестиугольник, точки, отрезок. Из правого чертежа получаем: BO = OE = EF = 1; следовательно BE = 2EF = 2×1 = 2.

Ответ: 2

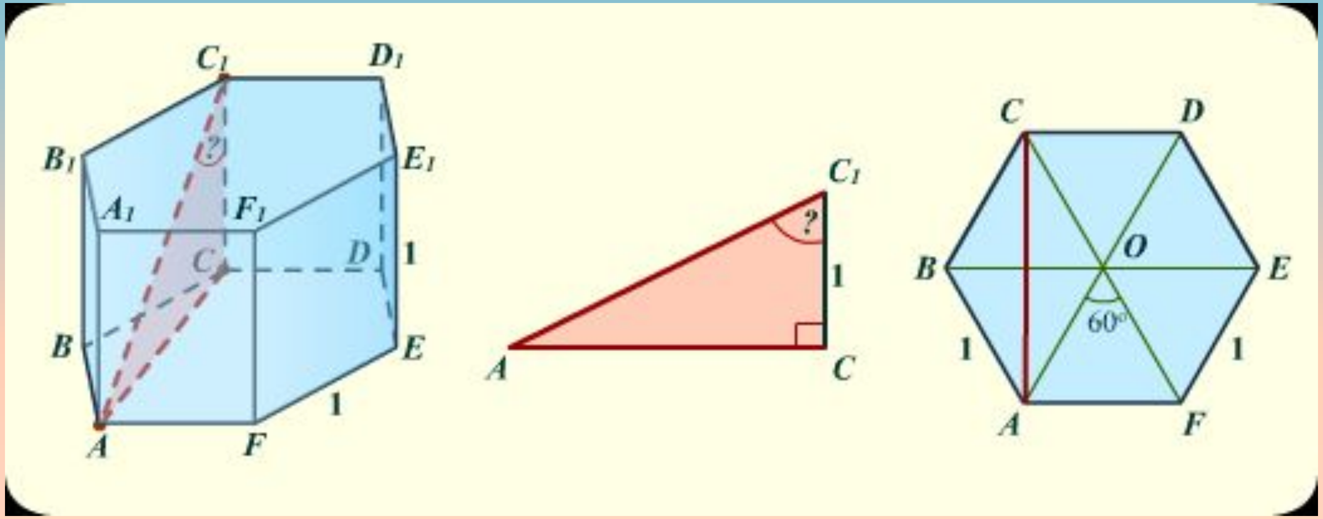
№2.В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол DAB. Ответ дайте в градусах.



Отмечаем угол *DAB* на чертеже призмы. Он полностью находится в плоскости основания, переходим к плоскому чертежу шестиугольника. Отмечаем искомый угол, он является углом при вершине равностороннего треугольника *AOB*, следовательно равен 60^o.

Ответ: **60**

№3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол AC_1C. Ответ дайте в градусах.



Отмечаем угол AC_1C на чертеже призмы. Треугольник AC_1C, содержащий искомый угол, также включает боковое ребро призмы и отрезок, лежащий в её основании, следовательно он прямоугольный (боковое ребро прямой призмы перпендикулярно основанию)

По условию все ребра равны 1, значит $C_1C = 1$. Чтобы найти угол прямоугольного треугольника через синус, нам еще понадобится длина гипотенузы AC_1, а чтобы найти угол через тангенс понадобится длина катета AC. Катет AC является отрезком внутри правильного шестиугольника, поэтому его длину найти легче, чем длину диагонали призмы AC_1, выбираем способ "через тангенс".

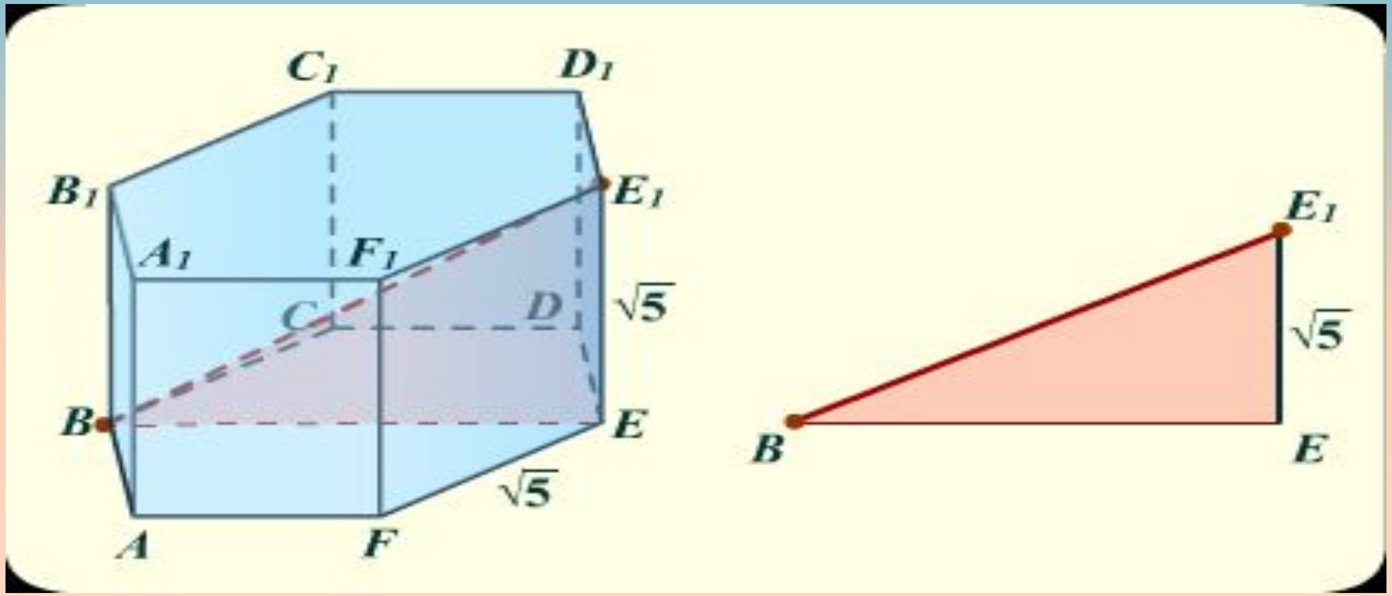
AC находим как основание равнобедренного треугольника ABC с известными боковыми сторонами и углом при вершине 120^o. См. самый правый чертеж.

Получим $AC = 2 \cdot BC \cdot \cos 30^o = 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$.

Тогда $tg \angle AC_1C = AC/CC_1 = \sqrt{3}/1 = \sqrt{3}$. Это табличное значение тангенса. Вспоминаем, что ему соответствует угол 60^o.

Ответ: **60**

№4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны $\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B и E_1.



Отмечаем точки B и E_1 на чертеже призмы, соединяем их. Видно, что точки принадлежат разным граням, т.е. отрезок BE_1 является диагональю призмы. Соединим также точки B и E, чтобы построить прямоугольный треугольник BEE_1, который представлен на чертеже справа.

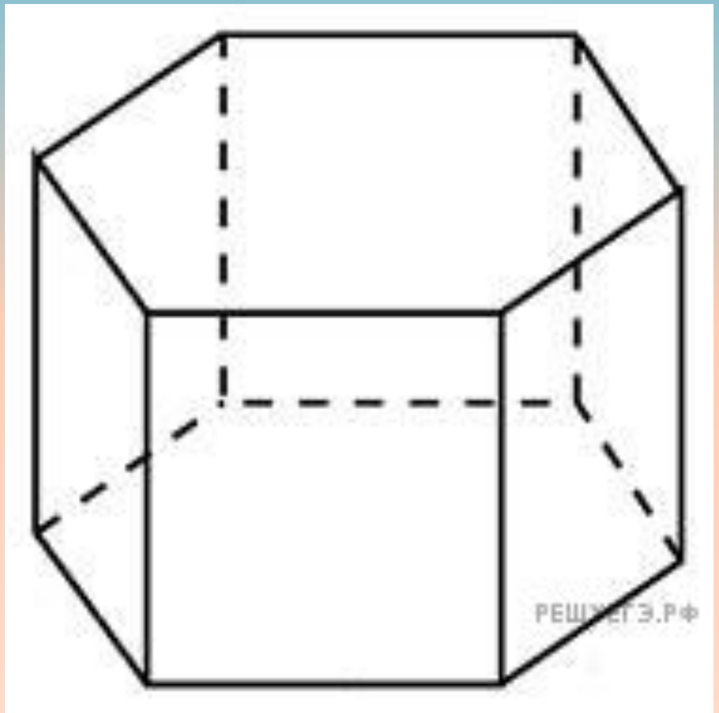
Угол BEE_1 - прямой. Убедимся в этом: призма прямая, значит ребро EE_1 перпендикулярно плоскости основания, значит EE_1 перпендикулярно любой прямой в этой плоскости, в том числе BE. Гипотенузу BE_1 можно найти по теореме Пифагора, так как катет $EE_1 = \sqrt{5}$ по условию задачи, а катет BE легко найти пользуясь свойствами шестиугольника. Мы как раз это делали в предыдущей задаче и получили $BE = 2EF = 2 \cdot \sqrt{5}$.

$BE_1^2 = EE_1^2 + BE^2 = (\sqrt{5})^2 + (2 \cdot \sqrt{5})^2 = 5 + 4 \cdot 5 = 25;$

$BE_1 = 5.$

Ответ: **5**

№5.Найдите площадь боковой поверхности пра вильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота – 10.



Решение.

Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей всех ее боковых граней:

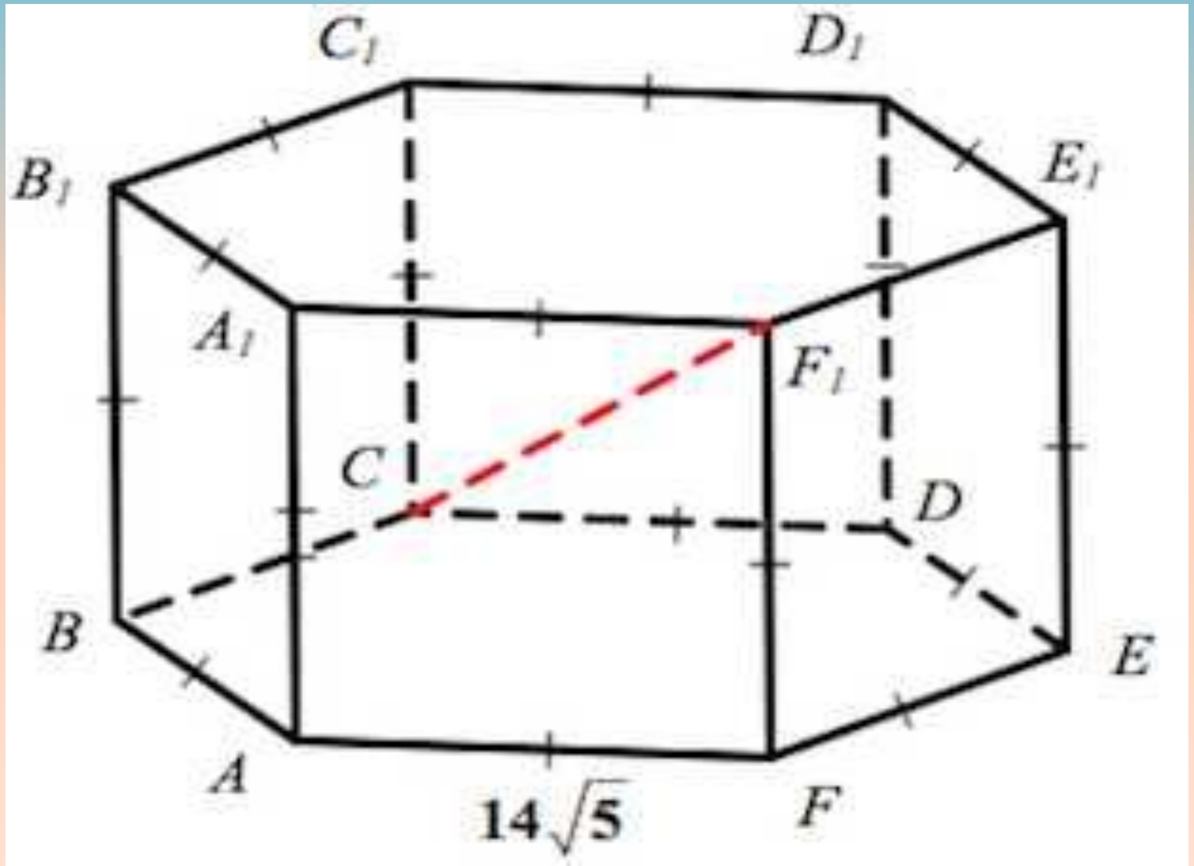
Sбок=6Sгр

Sгр=ah

Sбок=6·5·10

Ответ: 300.

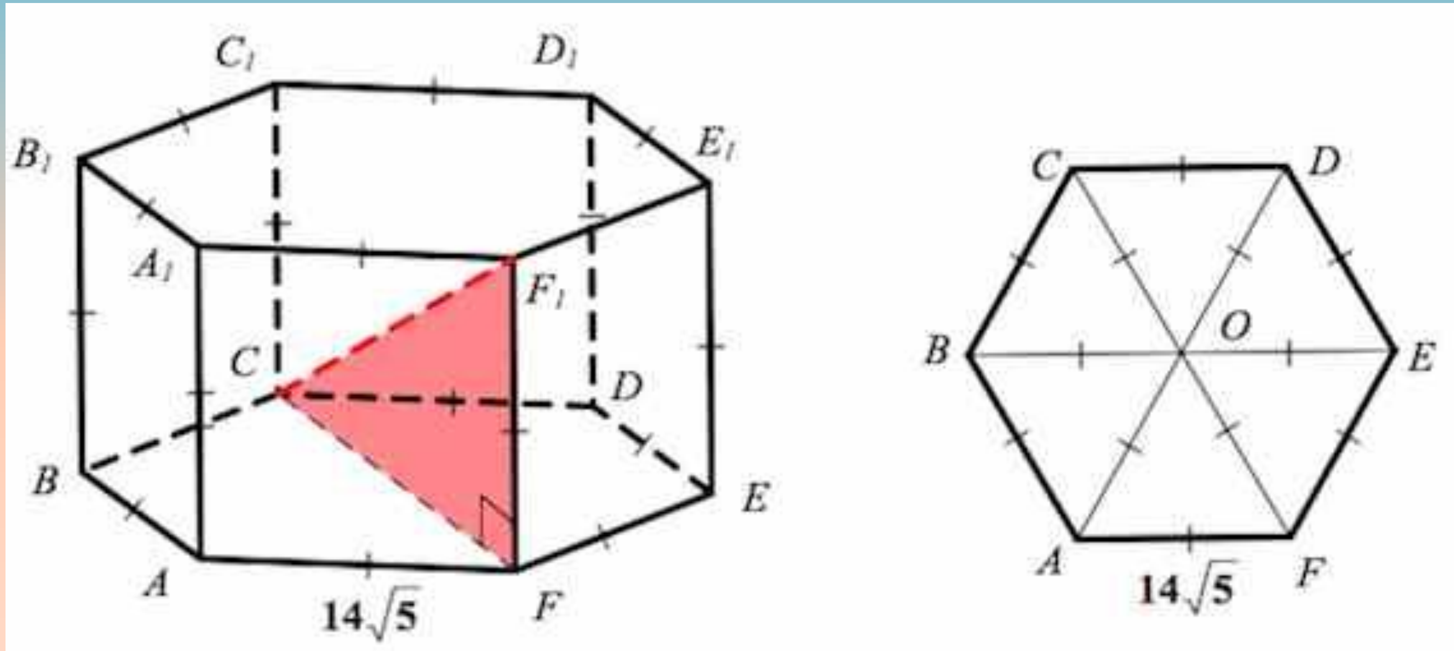
№6.В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны $14\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками C и F_1.



CF_1 будем искать из прямоугольного треугольника CF_1F.

Для этого нам предстоит найти CF:

$CF=2AB=28\sqrt{5}$ (правильный шестиугольник состоит из шести равных друг другу правильных треугольников).

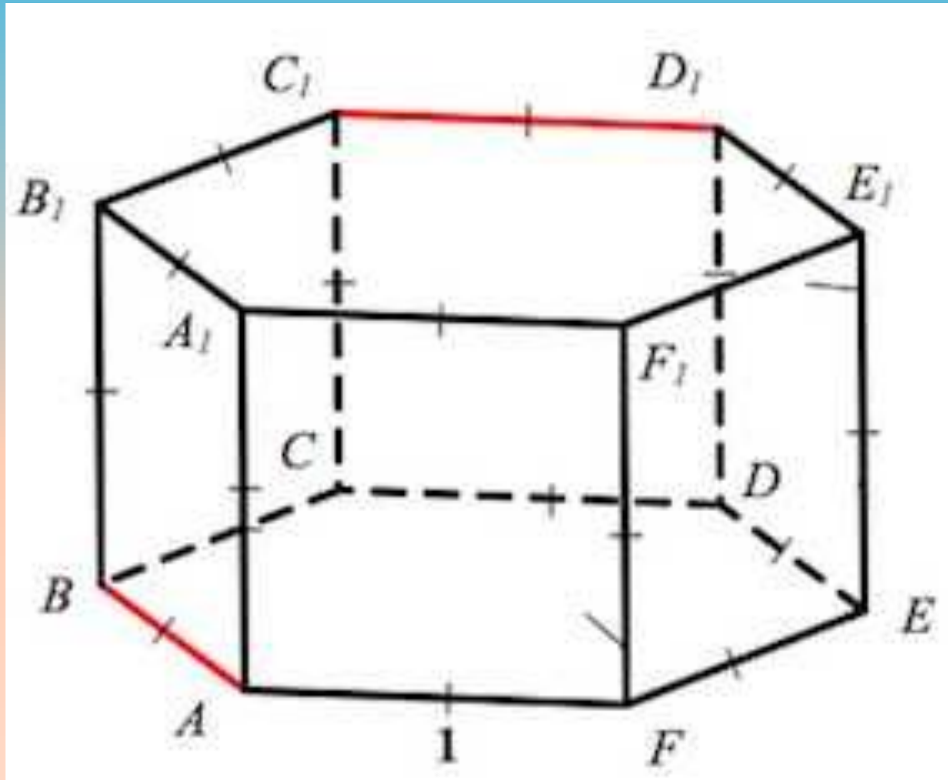


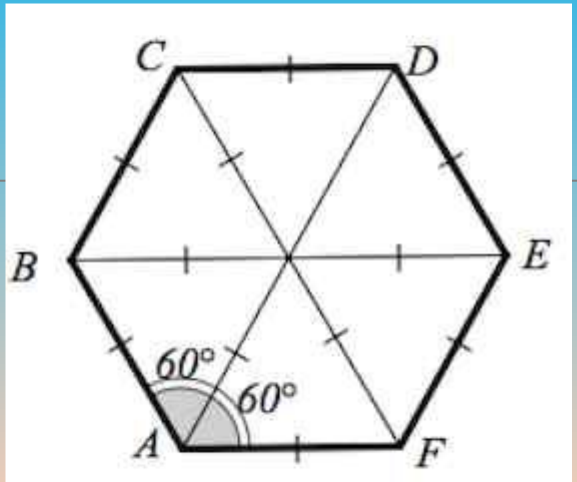
Тогда по т. Пифагора $CF_1=\sqrt{CF^2+FF_1^2}$

$CF_1= \sqrt{(28\sqrt{5})^2+(14\sqrt{5})^2} = \sqrt{(14\sqrt{5})^2\cdot 5}= 70;$

Ответ: 70.

№7.В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и C_1D_1. Ответ дайте в градусах.





Угол между искомыми скрещивающимися прямыми AB и C_1D_1– угол между прямыми AB и AF, так как $AF || C_1D_1$.

А угол между прямыми AB и AF равен 60 градусов.

Ответ: 60.