

Решение геометрических задач в формате подготовки к ГИА

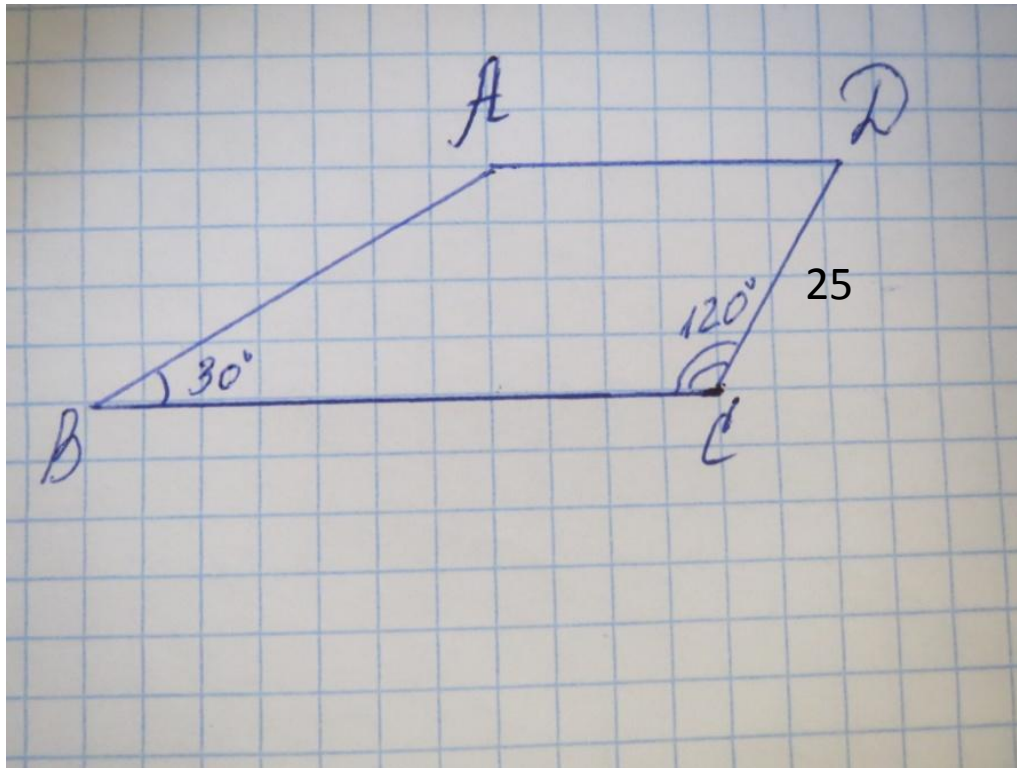
Учитель математики

МБОУ «ШКОЛА № 30»

Лазуткина О.В.

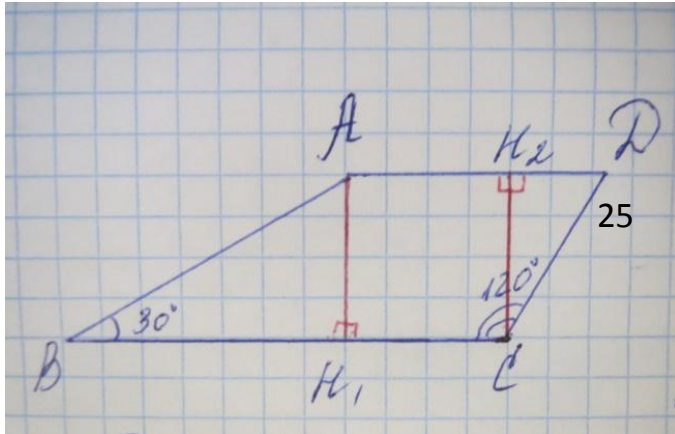
Вариант 21 № 24.

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 30 и 120 градусов, а $CD = 25$.



Вариант 21 № 24.

Найдите боковую сторону АВ трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 30 и 120 градусов, а CD = 25.



Решение: Проведем высоты AH_1 и CH_2 .

Найдем $\angle DCH_2$. $\angle DCH_2 = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

Рассмотрим $\triangle DCH_2$. $\angle CH_2D = 90^\circ$, значит $\triangle DCH_2$ прямоугольный.

Зная, что в прямоугольном треугольнике напротив угла 30° лежит катет равный половине гипотенузы, найдем $DH_2 = CD/2 = 25/2$.

Найдем катет CH_2 треугольника DCH_2 .

По теореме Пифагора $25^2 - (\frac{25}{2})^2 = 25^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 25^2 \cdot \frac{3}{4}$

$$CH_2^2 = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - DH_2^2 =$$

$$CH_2 =$$

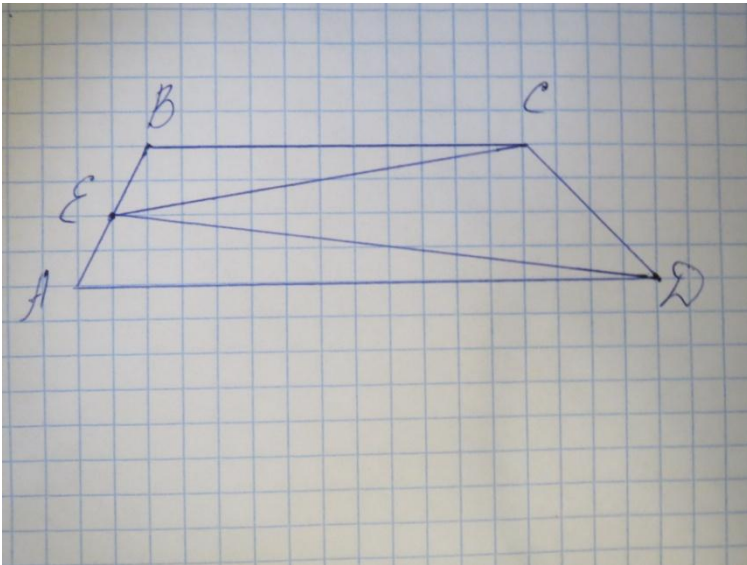
$CH_2 = AH_1$ как высоты. $\triangle ABH_1$ -
прямоугольный.

$\angle ABH_1 = 30^\circ$, значит $AB = 2AH_1 = 25\sqrt{3}$.

Ответ: $AB = 25\sqrt{3}$.

Вариант 21 № 25.

Точка Е – середина боковой стороны АВ трапеции ABCD.
Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине
площади трапеции



Дано:

трапеция ABCD,

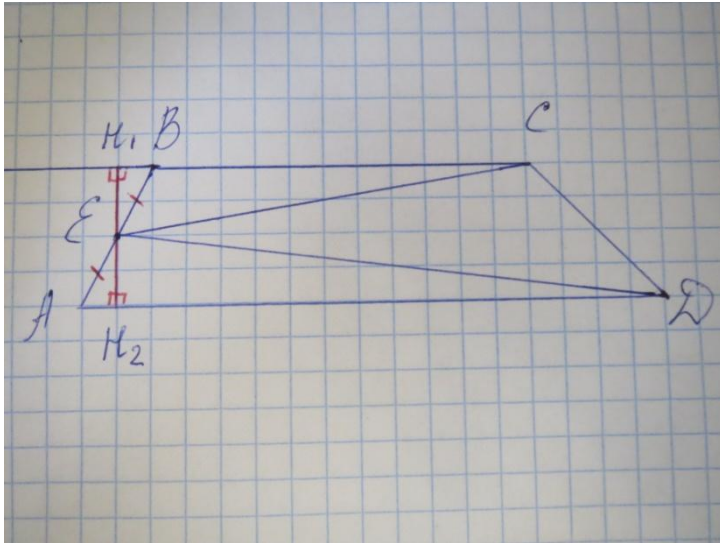
точка E- середина АВ.

Доказать : $S_{ECD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Вариант 21 № 25.

Точка E – середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции

Доказательство:



Проведем $EH_1 \perp CB$ и $EH_2 \perp AD$.

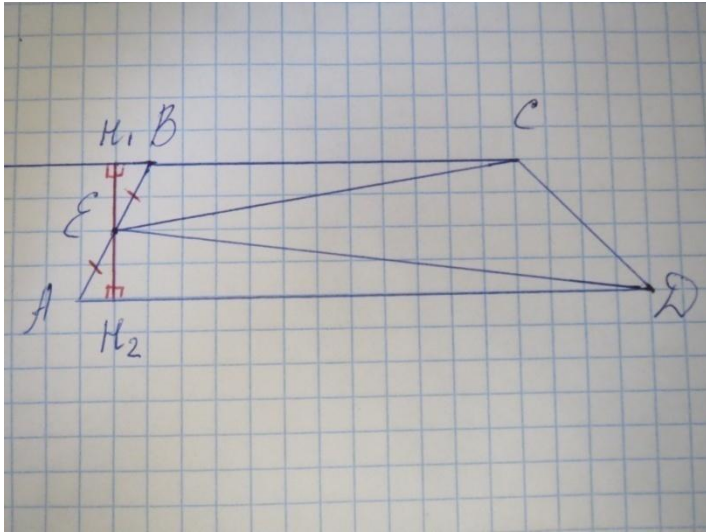
Т.к. $AD \parallel BC$, то точки H_1 , E и H_2 лежат на одной прямой, значит H_1H_2 – высота трапеции $ABCD$.

Рассмотрим $\triangle EBH_1$ и $\triangle EAH_2$. Они прямоугольные, т.к. $EH_1 \perp CB$ и $EH_2 \perp AD$. $AE = EB$, т.к. E – середина AB , $\angle EBH_1 = \angle EAH_2$ как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AB . Значит $\triangle EBH_1 = \triangle EAH_2$ по гипотенузе и прилежащему к ней, острому углу.

Значит $EH_1 = EH_2$. Значит $EH_1 = EH_2 = 1/2 H_1H_2$.

Вариант 21. № 25.

Точка Е – середина боковой стороны АВ трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции



Найдем S_{AED} и S_{BEC} .

$$S_{AED} = \frac{1}{2} AD \cdot EH_2 = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{1}{2} H_1H_2,$$

$$S_{BEC} = \frac{1}{2} BC \cdot EH_1 = \frac{1}{2} BC \cdot \frac{1}{2} H_1H_2.$$

$$S_{AED} + S_{BEC} = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{1}{2} H_1H_2 + \frac{1}{2} BC \cdot \frac{1}{2} H_1H_2$$

$$= \frac{AD + BC}{2} \cdot \frac{H_1H_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{AD + BC}{2} \cdot H_1H_2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

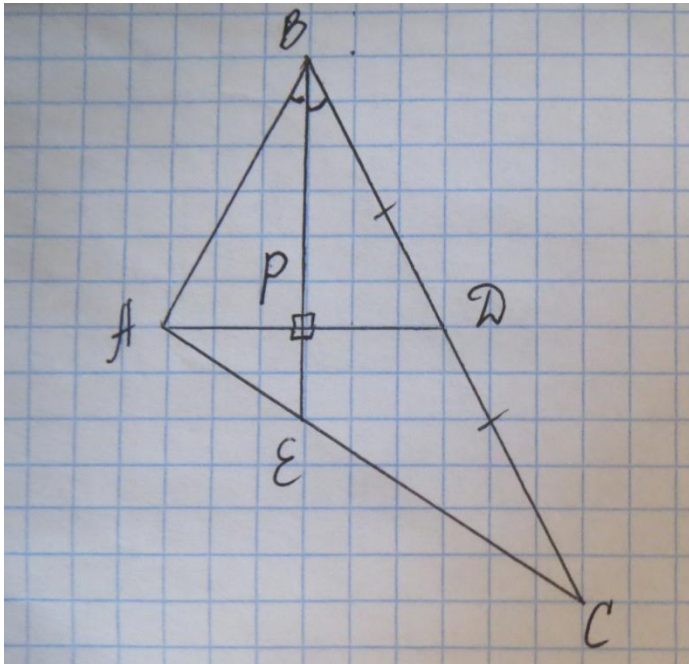
$S_{ECD} = S_{ABCD} - (S_{AED} + S_{BEC})$ по свойству площадей.

$$\text{Значит } S_{ECD} = S_{ABCD} - \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Ч.Т.Д.

Вариант 21 № 26

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 8. Найдите стороны треугольника ABC .



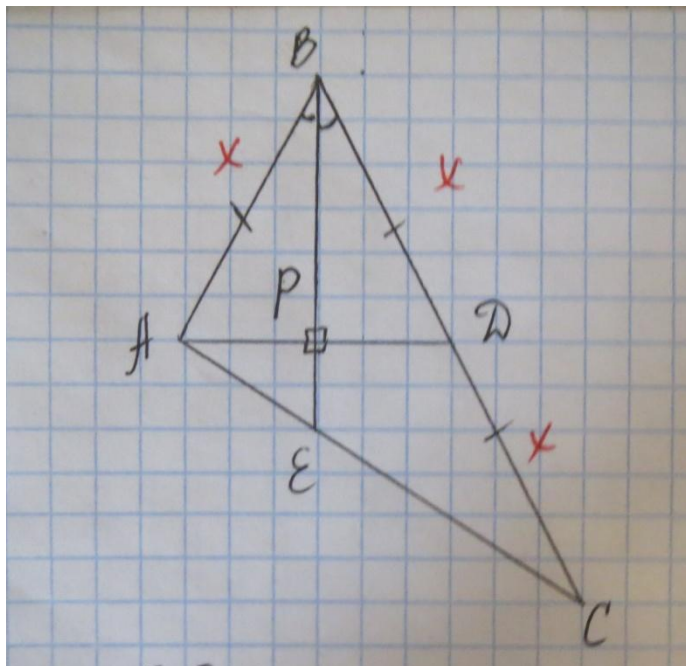
Дано: $\triangle ABC$, BE - биссектриса,
 AD - медиана, $BE \perp AD$,
 $BE = AD = 8$

Найти: AB, BC, AC .

Решение:

$BE \cap AD = P$, значит $P \in BE$,
 $P \in AD$.

$BP \perp AD$, значит является высотой
 $\triangle ABD$ и BP - биссектриса $\angle B$, зна-
чит $\triangle ABD$ - равнобедренный с
основанием AD . Значит $AB = BD$.
 $BD = DC$, тк. AD - медиана $\triangle ABC$.

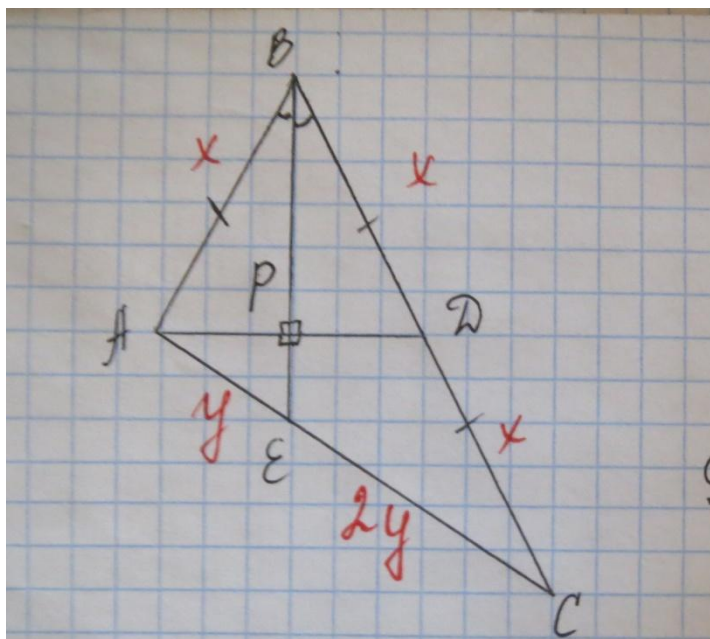


Обозначим $AB = BD = DC = x$,
тогда $BC = 2x$.

По свойству биссектрисы:
биссектриса делит противо-
лежащую сторону треуго-
льника на отрезки, пропор-
циональные прилежащим
сторонам, составим отно-
шение $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EC}$.

По свойству пропорции $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC}$.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$



Обозначим $AE = y$, $EC = 2y$,
т.к. $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$.

По формуле для нахождения
медианы треугольника, зная
все его стороны, запишем:
 $AD^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$.

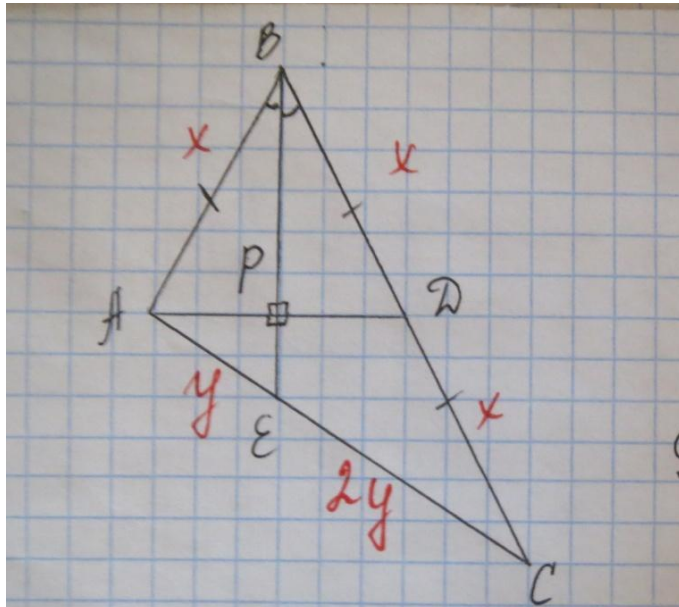
Подставим введенные обозна-
чения: $AD^2 = \frac{2x^2 + 18y^2 - 4x^2}{4}$.

Получим: $6H = 4,5y^2 - 0,5x^2$ (1)

По формуле для биссектрисы:

$BE^2 = AB \cdot BC - AE \cdot EC$, отсюда:

$6H = 2x^2 - 2y^2$ (2)



Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 64 = 4,5y^2 - 0,5x^2 \\ 64 = 2x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 128 = 9y^2 - x^2 \\ + \\ 32 = x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$\hline 160 = 8y^2$$

$$y^2 = 20$$

$$y = 2\sqrt{5}$$

Найдем x . $32 = x^2 - 20$

$$52 = x^2$$

$$x = 2\sqrt{13}$$

Тогда $AB = x = 2\sqrt{13}$

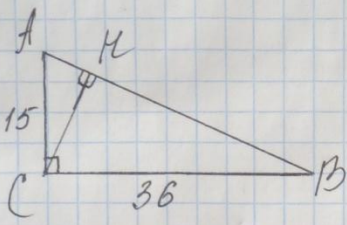
$$BC = 2x = 4\sqrt{13}$$

$$AC = 3y = 6\sqrt{5}$$

Ответ: $AB = 2\sqrt{13}$, $BC = 4\sqrt{13}$, $AC = 6\sqrt{5}$

Вариант 23 № 24.

Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 36. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.



Дано:

$\triangle ABC$ - прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$
 $AC = 15$, $CB = 36$
 CH - высота

Найти: CH .

Решение:

(1) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH$

(2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB$

По теореме Пифагора

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 15^2 + 36^2 = 225 + 1296 = 1521, AB = 39$$

По формуле (2): $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 36 = 270$

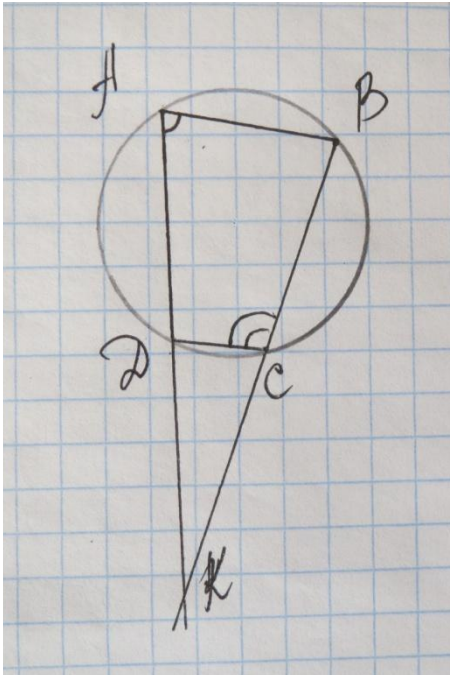
Подставим найденное значение в формулу (1): $270 = \frac{1}{2} \cdot 39 \cdot CH$

Отсюда $CH = \frac{540}{39}$

Ответ: $CH = 540/39$

Вариант 23 № 25.

Известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырехугольника пересекаются в точке K .
Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.



Дано: $ABCD$ - четырехугольник.

$AD \cap BC = K$.

Около $ABCD$ можно описать окружность.

Доказать: $\triangle KAB \sim \triangle KCD$.

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle KAB$ и $\triangle KCD$.

$\angle K$ - общий.

П.к. четырехугольник $ABCD$ - вписанный, то $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

$\angle KCD + \angle C = 180^\circ$ по свойству смежных углов. Значит

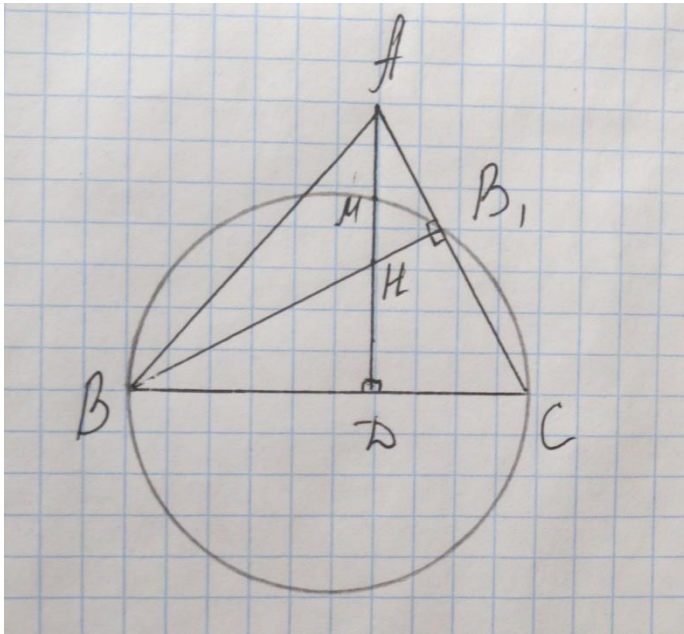
$\angle A = \angle KCD$. Значит $\triangle KAB \sim \triangle KCD$

по двум углам.

Ч.Т.Д.

Вариант 23 № 26.

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 49$, $MD = 42$, H - точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .



Решение:

Основание B_1 высоты BB_1 находится в точке пересечения окружности со стороной AC , т.к. $\angle BB_1C = 90^\circ$ как вписанной опирающейся на диаметр. Значит BB_1 - высота.

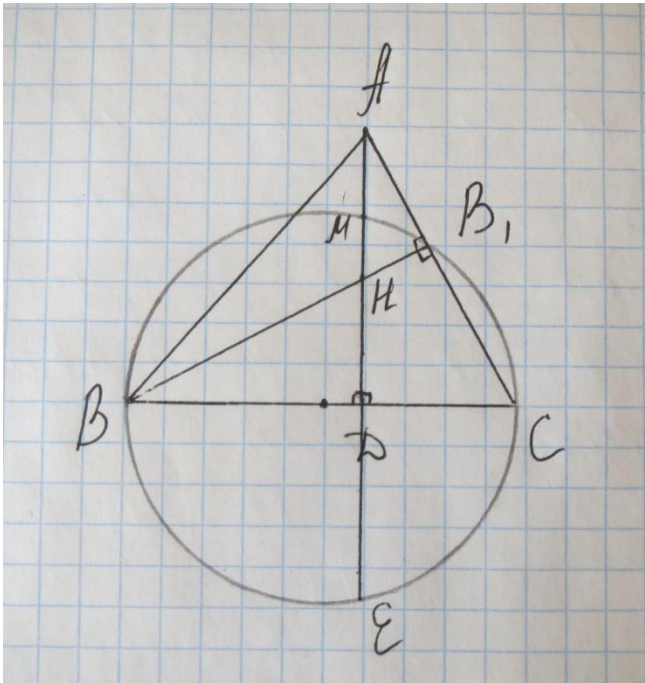
$\triangle AB_1H \sim \triangle ADC$ по двум углам ($\angle A$ - общий, $\angle AB_1H = \angle ADC = 90^\circ$). Тогда

$$\frac{AB_1}{AD} = \frac{AH}{AC} = \frac{B_1H}{DC}.$$

Возьмем отношения $\frac{AB_1}{AD} = \frac{AH}{AC}$.
По свойству пропорции
 $AB_1 \cdot AC = AD \cdot AH$.

Вариант 23 № 26.

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 49$, $MD = 42$, H - точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .



Тогда $AH = \frac{AB_1 \cdot AC}{49}$.

AC - секущая, AB_1 - часть секущей AC .

Проведем секущую AE через т. D . AM - часть секущей AE

По теореме о секущих $AB_1 \cdot AC = AM \cdot AE$, Тогда

$$AH = \frac{AB_1 \cdot AC}{49} = \frac{AM \cdot AE}{49}$$

$$AM = AD - MD = 49 - 42 = 7$$

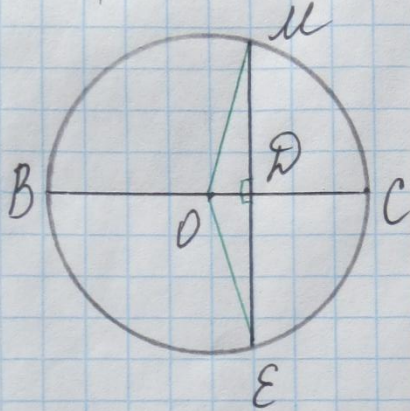
$$AE = AD + DE = AD + DM = 49 + 42 = 91$$

(* $DE = DM$)

$$\text{значит } AH = \frac{7 \cdot 91}{49} = \frac{91}{7} = 13$$

Ответ: $AH = 13$.

* Докажем, что $DE = DM$



$$ME \cap BC = D$$

$$ME \perp BC$$

$$\triangle M OD = \triangle E OD$$

по катету и
гипотенузе.

(OD - общий катет

$OM = OE$ как радиусы).

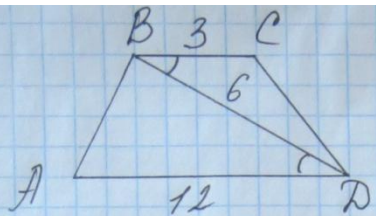
значит

$DE = DM$ как

соответствующие элементы
равных треугольников.

Вариант 29 № 25.

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 12, BD равно 6. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.



Дано:
 $ABCD$ - трапеция;
 BC, AD - основания,
 $BC = 3, AD = 12$
 $BD = 6$

Доказать: $\triangle CBD \sim \triangle BDA$

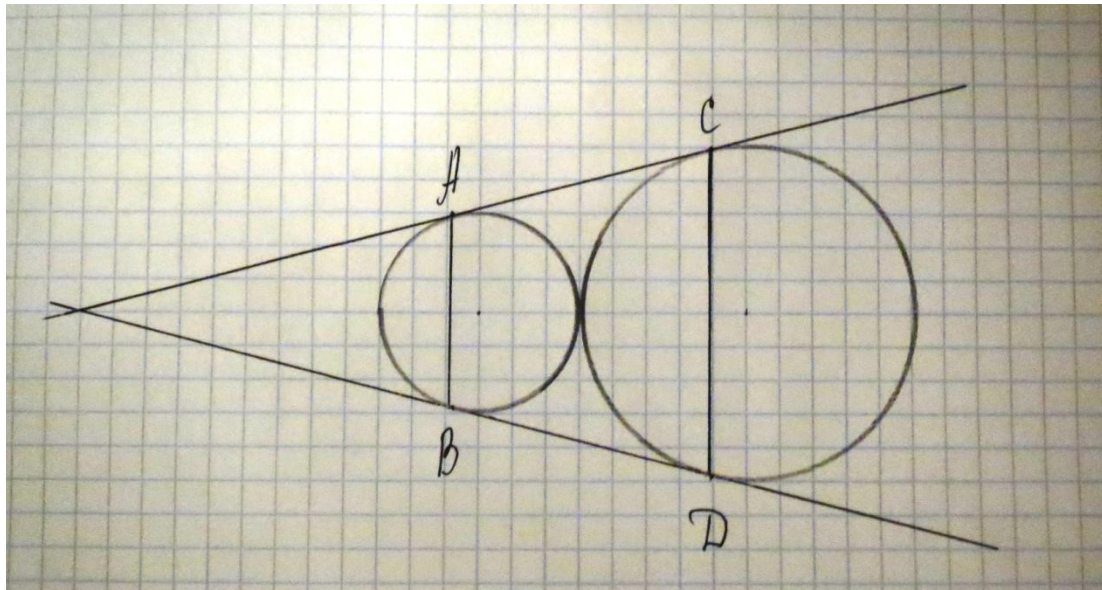
Доказательство:
 $\frac{AD}{BD} = \frac{12}{6} = 2; \frac{BD}{BC} = \frac{6}{3} = 2.$

$AD \parallel BC$ как основания трапеции,
значит $\angle BDA = \angle CBD$ как
внутренние накрест лежащие при
 $AD \parallel BC$ и секущей BD .

Значит $\triangle CBD \sim \triangle BDA$.
Ч.т.д.

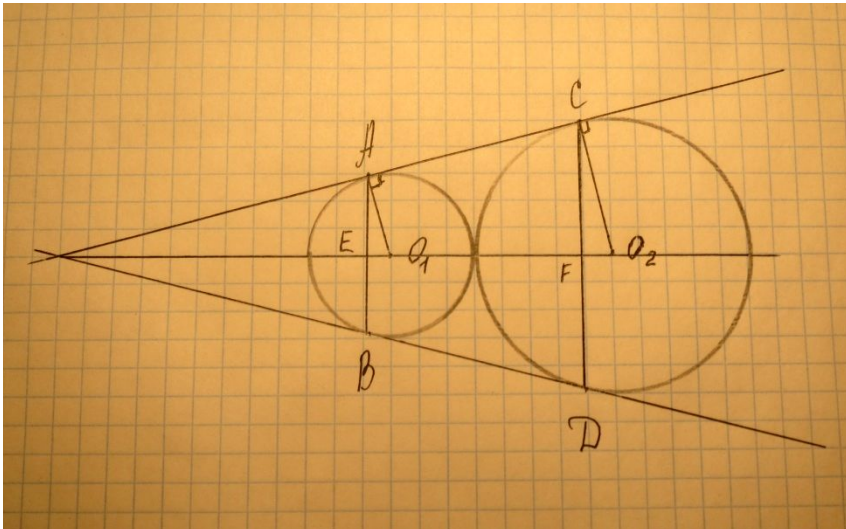
Вариант 29 № 26.

Окружности радиусов 33 и 99 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между AB и CD .



Вариант 29 № 26.

Окружности радиусов 33 и 99 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между AB и CD .



Решение:

Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 ; проведем радиусы O_1A и O_2C в точки касания.

$O_1A \perp AC$ и $O_2C \perp AC$ по свойству касательной.

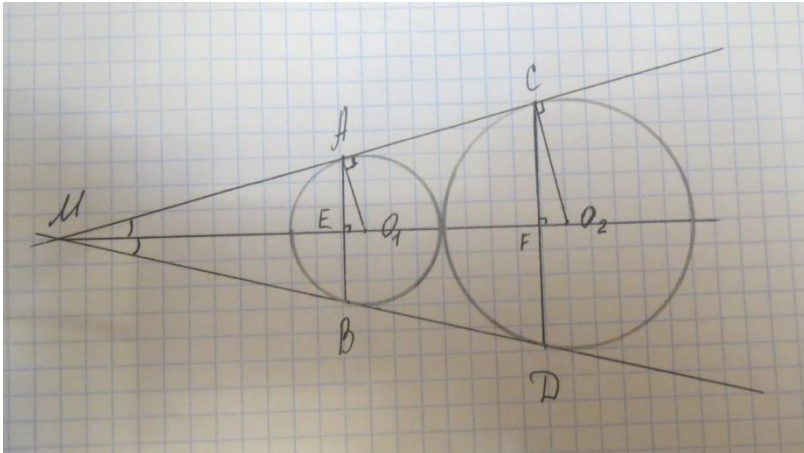
Центр окружности, вписанной в угол находится на биссектрисе угла.

Проведем биссектрису угла. Она пройдет через оба центра O_1 и O_2 , а также через точку касания.

Т.е. биссектриса пересечет AB и CD . Обозначим эти точки E и F .

Вариант 29 № 26.

Окружности радиусов 33 и 99 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между AB и CD .

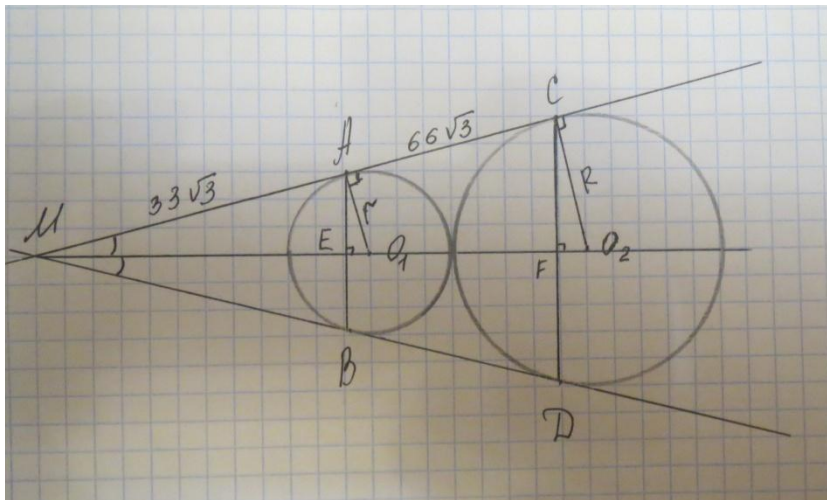


Пусть AC и BD пересекаются в т. M .
 $\triangle AMB$ – равнобедренный,
т. к. $AM = BM$ по свойству
касательных, проведен-
ных из одной точки. Тог-
да ME – биссектриса, ме-
диана и высота. Значит
 $AB \perp ME$.

Аналогично, $CD \perp MF$.
Значит EF – искомое рас-
стояние и $AB \parallel CD$.

Вариант 29 № 26.

Окружности радиусов 33 и 99 касаются внешним образом. Точки А и В лежат на первой окружности, точки С и D на второй. При этом АС и ВD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между АВ и СD



Найдем АС, отрезок касательной между двумя окружностями.

$$AC = 2\sqrt{r \cdot R} = 2 \cdot \sqrt{33 \cdot 99} = 2 \cdot 33 \cdot \sqrt{3}$$

$$AC = 66\sqrt{3}$$

$\triangle MO_1A \sim \triangle MO_2C$ по двум углам. ($\angle M$ - общий; $\angle MAO_1 = \angle MCO_2 = 90^\circ$).

Найдем коэффициент подобия. $k = \frac{r}{R} = \frac{33}{99} = \frac{1}{3}$.

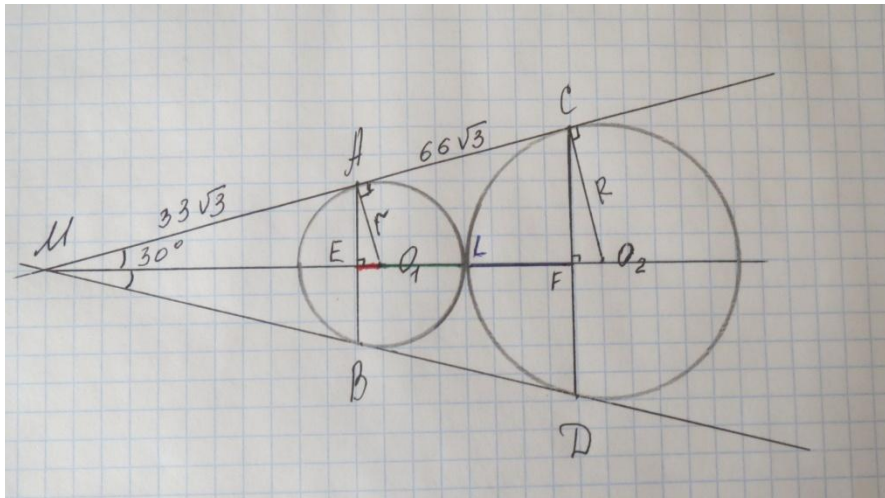
$$\frac{MA}{MC} = \frac{1}{3}, \quad MC = MA + AC,$$

$$\frac{MA}{MA + AC} = \frac{1}{3}$$

$\frac{MA}{MA + 66\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$. Решив пропорцию, получили $MA = 33\sqrt{3}$

Вариант 29 № 26.

Окружности радиусов 33 и 99 касаются внешним образом. Точки А и В лежат на первой окружности, точки С и D на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между АВ и CD.



Найдем $\angle AMO_1$.

$$\operatorname{tg} \angle AMO_1 = \frac{AO_1}{MA} = \frac{33}{33\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\angle AMO_1 = 30^\circ.$$

Тогда в $\triangle AEO_1$ угол $\angle AO_1M = 60^\circ$,
а $\angle EAO_1 = 30^\circ$.

$$\text{Значит } EO_1 = \frac{1}{2} AO_1 = \frac{33}{2}.$$

$$\text{Аналогично, } FO_2 = \frac{1}{2} CO_2 = \frac{99}{2}.$$

$$\text{Тогда } LF = LO_2 - FO_2 = 99 - \frac{99}{2} = \frac{99}{2}$$

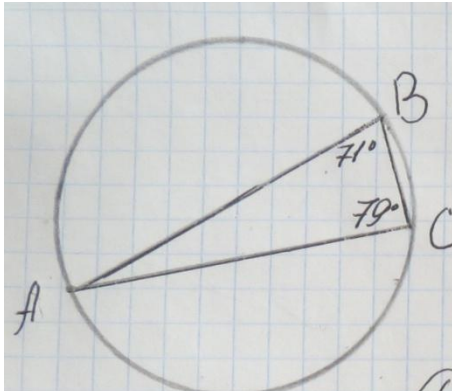
$$EF = EO_1 + O_1L + LF$$

$$EF = \frac{33}{2} + 33 + \frac{99}{2} = 99.$$

Ответ: 99.

Вариант 13 № 24.

Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 71 и 79 градусов. Найдите BC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 8 .



Дано:

$\triangle ABC$; $\angle B = 71^\circ$;
 $\angle C = 79^\circ$; $R = 8$

Найти: BC .

Решение: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.
 $\angle A = 180^\circ - (71^\circ + 79^\circ) = 30^\circ$ (по теореме о сумме углов треугольника).

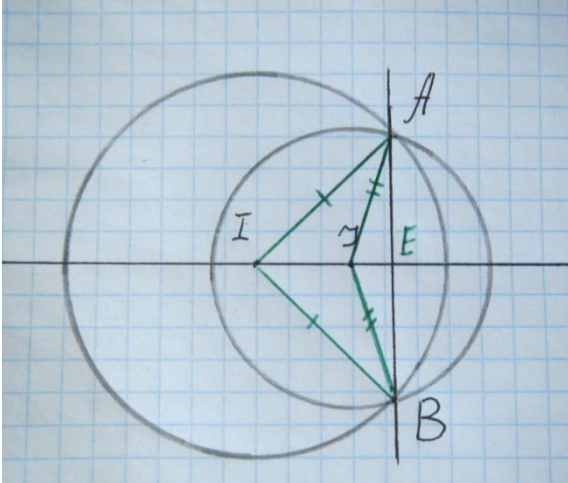
По теореме синусов: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$.

Тогда $BC = 2R \cdot \sin A = 2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 8$.

Ответ: $BC = 8$.

Вариант 13 № 25.

Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B , причем точки I и J лежат по одну сторону от прямой AB . Докажите, что прямые AB и IJ перпендикулярны.



Решение:

Проведем радиусы AI и BI ; AJ и BJ .

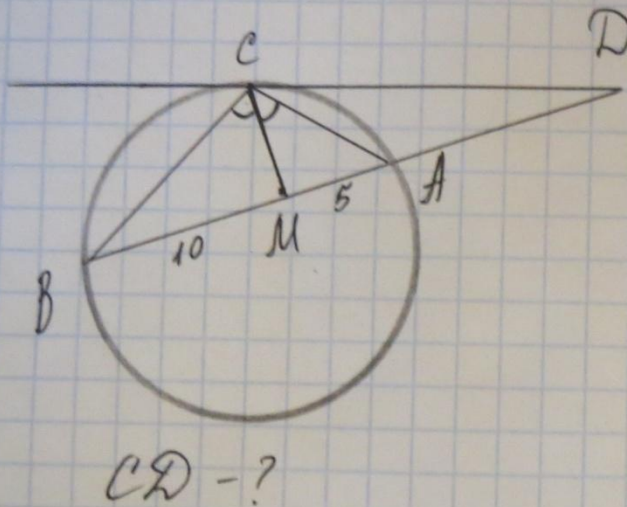
Тогда $AI = BI$; $AJ = BJ$.

Точки I и J равноудалены от концов отрезка AB , значит $IJ \perp AB$

по теореме о серединном перпендикуляре

Вариант 13 № 26.

Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 5$ и $MB = 10$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC , проходящая через точку C , пересекает прямую AB в точке D .
Найдите CD .



Решение:

По свойству биссектрисы угла треугольника

$$\frac{BM}{BC} = \frac{AM}{AC}, \quad \frac{10}{BC} = \frac{5}{AC}$$

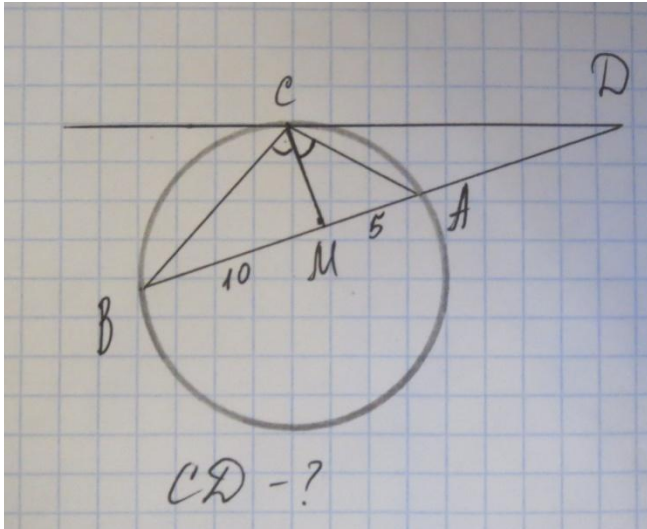
Тогда $\frac{AC}{BC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

$$AB = AM + BM = 15$$

по свойству отрезков

Вариант 13 № 26.

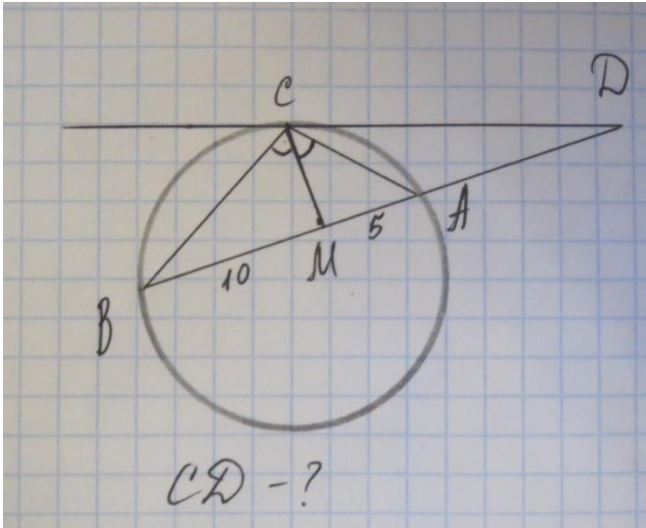
Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 5$ и $MB = 10$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC , проходящая через точку C , пересекает прямую AB в точке D .
Найдите CD .



Рассмотрим $\triangle DCA$ и $\triangle DBC$.
 $\angle D$ - общий, $\angle DCA = \frac{1}{2} \sphericalangle AC$
 т.к. это угол между касательной и хордой;
 $\angle B = \frac{1}{2} \sphericalangle AC$ как вписанный.
 Значит $\angle DCA = \angle B$. Значит $\triangle DCA \sim \triangle DBC$ по двум углам. Значит:
 $\frac{DC}{DB} = \frac{DA}{DC} = \frac{CA}{BC} = \frac{1}{2}$. Отсюда:
 $\frac{DC}{DB} = \frac{DA}{DC}$; $DC^2 = DA \cdot DB$
 $DB = DA + AB = DA + 15$.
 $\frac{DA}{DC} = \frac{1}{2}$, значит $DC = 2DA$,
 Тогда $4DA^2 = DA \cdot (DA + 15)$

Вариант 13 № 26.

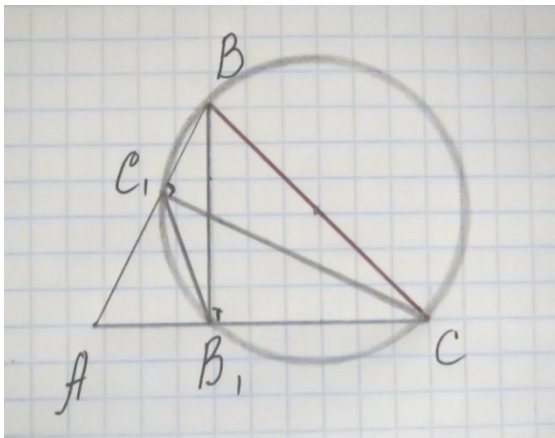
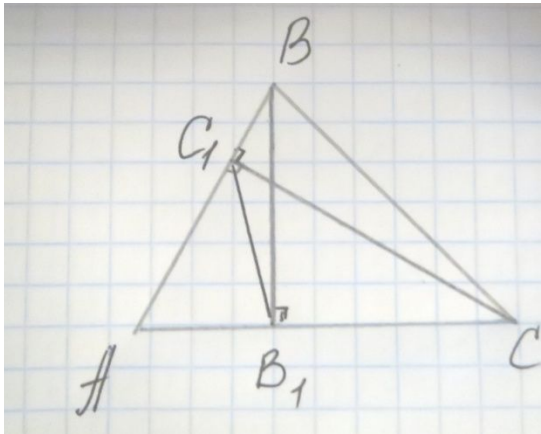
Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 5$ и $MB = 10$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC , проходящая через точку C , пересекает прямую AB в точке D .
Найдите CD .



Отсюда $DA = 5$.
П.к. $CD = 2 DA$, то
 $CD = 2 \cdot 5 = 10$
Ответ: $CD = 10$.

Вариант 19 № 25.

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 .
Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.



Доказательство:

$\angle BB_1C = \angle BCC_1 = 90^\circ$, т.к.

BB_1 и CC_1 - высоты.

$\triangle BCC_1$ и $\triangle BB_1C$ - общая
гипотенуза BC .

Значит $\angle BB_1C$ и $\angle BCC_1$

опираются на диаметр
одной окружности.

BC - диаметр. Проведем
эту окружность

$\angle BB_1C_1$ и $\angle BCC_1$ опира-
ются на одну и ту же ду-
гу окружности и являют-
ся вписанными.

Значит $\angle BB_1C_1 = \frac{1}{2} \angle BCC_1$;

$\angle BCC_1 = \frac{1}{2} \angle BCC_1$, значит

$\angle BB_1C_1 = \angle BCC_1$ Ч.Т.Д.

Вариант 19 № 26.

В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведенную из вершины B, отношении 5:4, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 12$.

Решение: Пусть

$AL \cap BH$ в точке K. Тогда $\frac{BK}{KH} = \frac{5}{4}$

Обозначим: $BK = 5x$, $KH = 4x$,
 $BH = 9x$. Рассмотрим $\triangle ABH$.

По свойству биссектрисы:

$$\frac{AB}{AH} = \frac{BK}{KH}$$

Обозначим $AB = 5y$, $AH = 4y$.

По теореме Пифагора:

$$BH^2 + AH^2 = AB^2$$

$$(9x)^2 + (4y)^2 = (5y)^2$$

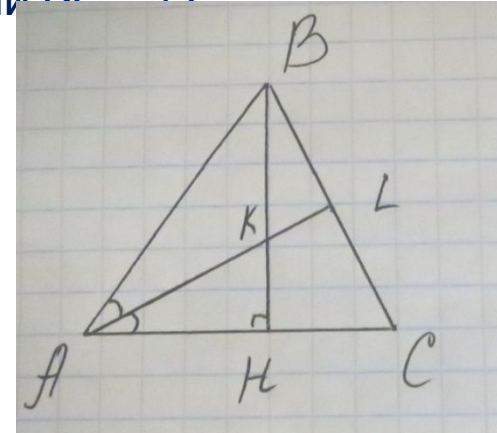
$$81x^2 + 16y^2 = 25y^2$$

$$81x^2 = 25y^2 - 16y^2$$

$$81x^2 = 9y^2$$

$$9x^2 = y^2$$

$$y = 3x$$



Тогда $AB = 5y = 5 \cdot 3x = 15x$

$$\sin A = \frac{BH}{AB} = \frac{9x}{15x} = \frac{3}{5}$$

По теореме синусов:

$$2R = \frac{BC}{\sin A}$$

$$2R = 12 : \frac{3}{5} = \frac{12 \cdot 5}{3} = 20$$

$$R = 10.$$

Ответ: 10

Спасибо за внимание.