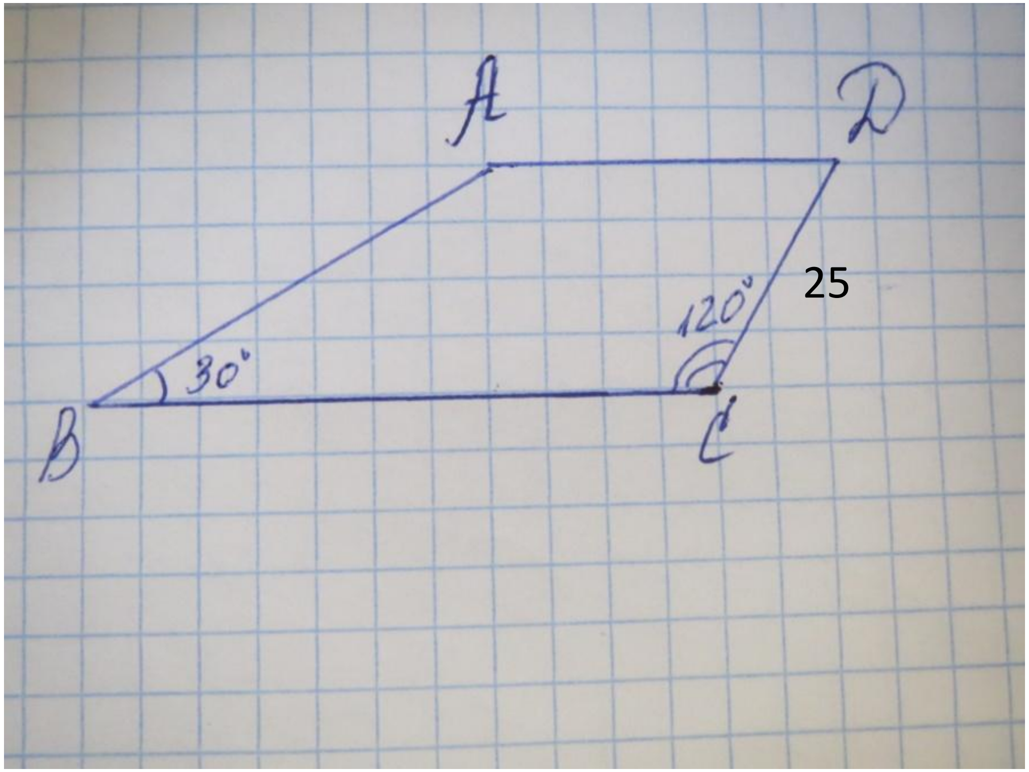
Решение геометрических задач в формате подготовки к ГИА

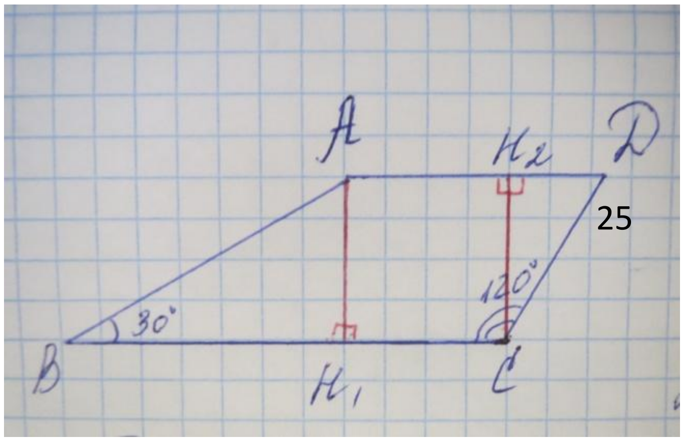
Учитель математики
МБОУ «ШКОЛА № 30»
Лазуткина О.В.

Вариант 21 № 24.
Найдите боковую сторону AB трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 30 и 120 градусов, а CD = 25.



Вариант 21 № 24.

Найдите боковую сторону AB трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 30 и 120 градусов, а CD = 25.



Решение: Проведем высоты AH_1 и CH_2.

Найдем $\angle DCH_2$. $\angle DCH_2 = 120^0 - 90^0 = 30^0$.

Рассмотрим ΔDCH_2. $\angle CH_2D = 90^0$, значит ΔDCH_2 прямоугольный.

Зная, что в прямоугольном треугольнике напротив угла 30^0 лежит катет равный половине гипотенузы, найдем $DH_2 = CD/2 = 25/2$.

Найдем катет CH_2 треугольника DCH_2.

По теореме Пифа $25^2 - (\frac{25}{2})^2 = 25^2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 25^2 \cdot \frac{3}{4}$

$CH_2^2 = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - DH_2^2 =$

$CH_2 =$

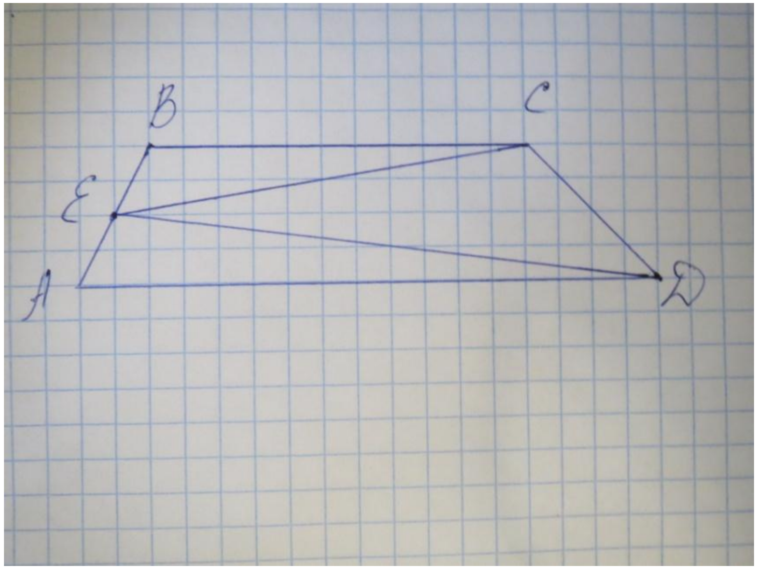
$CH_2 = AH_1$ как высоты. ΔABH_1 - прямоугольный.

$\angle ABH_1 = 30^0$, значит $AB = 2AH_1 = 25\sqrt{3}$.

Ответ: $AB = 25\sqrt{3}$.

Вариант 21 № 25.

Точка E – середина боковой стороны AB трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции



<u>Дано:</u>

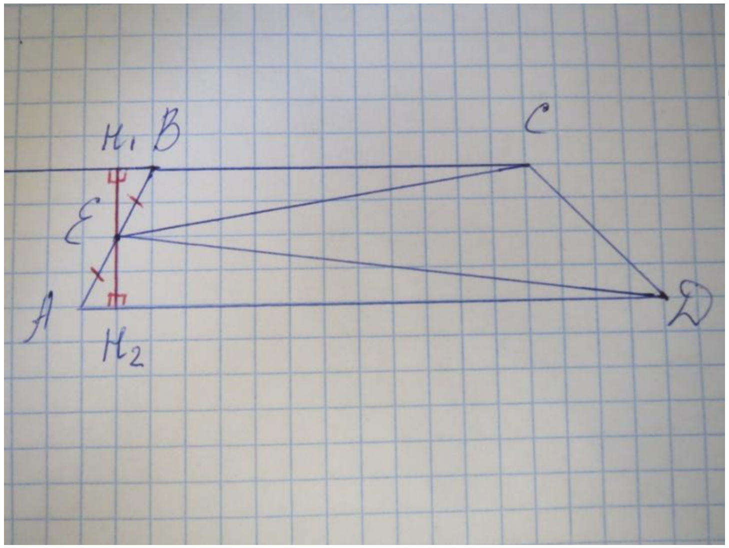
трапеция ABCD,

точка E- середина AB.

<u>Доказать :</u> $S_{ECD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Вариант 21 № 25.

Точка E – середина боковой стороны AB трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции



Доказательство:

Проведем $EH_1 \perp CB$ и $EH_2 \perp AD$.

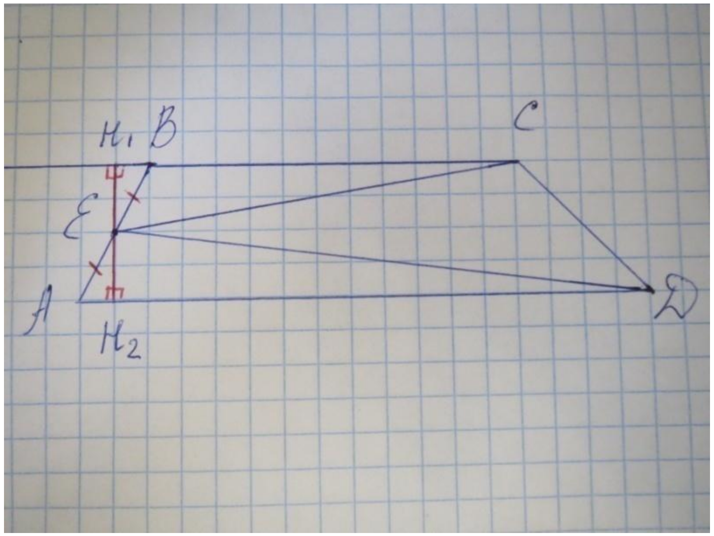
Т.К. AD II BC, то точки H_1, E и H_2 лежат на одной прямой, значит H_1H_2 – высота трапеции ABCD.

Рассмотрим $\Delta\ EBH_1$ и $\Delta\ EAH_2$. Они прямоугольные, т.к. $EH_1 \perp CB$ и $EH_2 \perp AD$. AE = EB, т.к. E – середина AB, $\angle EBH_1 = \angle EAH_2$ как внутренние накрест лежащие при BCIIAD и секущей AB. Значит $\Delta\ EBH_1 = \Delta\ EAH_2$ по гипотенузе и прилежащему к ней, острому углу.

Значит $EH_1 = EH_2$. Значит $EH_1 = EH_2 = 1/2\ H_1H_2$.

Вариант 21. № 25.

Точка E – середина боковой стороны AB трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции



Найдем S_{AED} и S_{BEC}.

$S_{AED} = ½\, AD \cdot EH_2 = ½\, AD \cdot ½\, H_1H_2$,

$S_{BEC} = ½\, BC \cdot EH_1 = ½\, BC \cdot ½\, H_1H_2$.

$S_{AED} + S_{BEC} = ½\, AD \cdot ½\, H_1H_2 + ½\, BC \cdot ½\, H_1H_2$

$= \frac{AD+BC}{2} * \frac{H1H2}{2} = ½ \left(\frac{AD+BC}{2} * H1H2\right) =$

$= ½\, S_{ABCD}$.

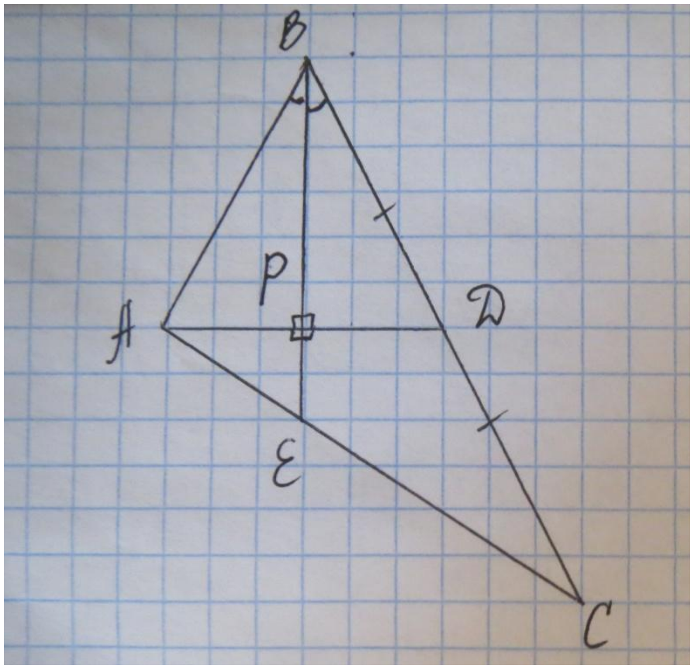
$S_{ECD} = S_{ABCD} - (S_{AED} + S_{BEC})$ по свойству площадей.

Значит $S_{ECD} = S_{ABCD} - ½\, S_{ABCD} = ½\, S_{ABCD}$.

Ч.Т.Д.

Вариант 21 № 26

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 8. Найдите стороны треугольника ABC.



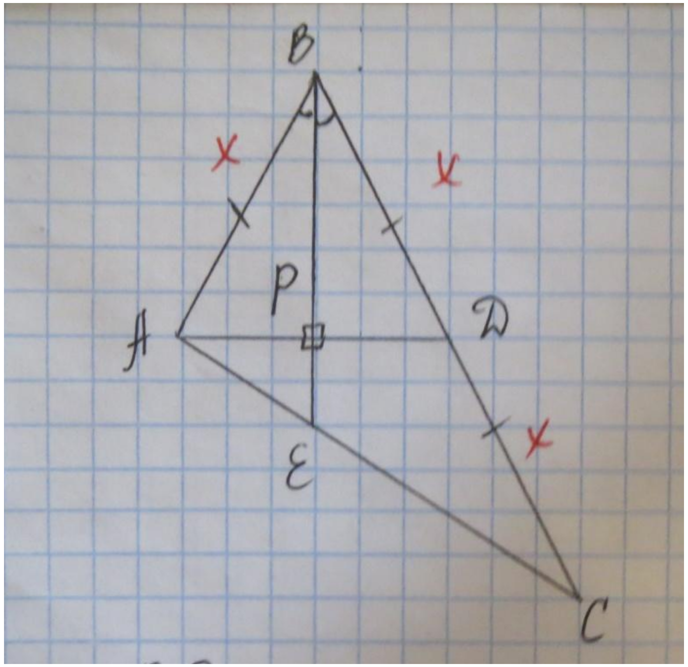
Дано: $\triangle ABC$, BE - биссектриса,
AD - медиана, $BE \perp AD$,
$BE = AD = 8$

Найти: AB, BC, AC.

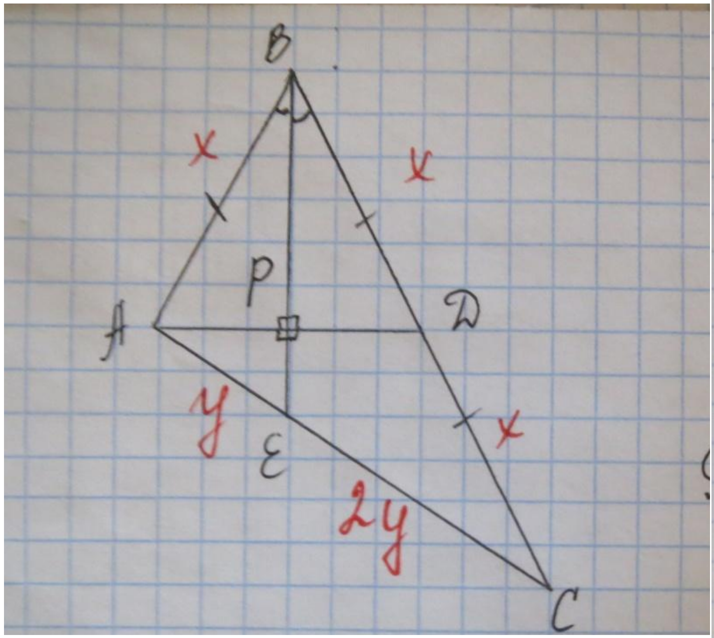
Решение:

$BE \cap AD = P$, значит $P \in BE$,
$P \in AD$.

$BP \perp AD$, значит является высотой
$\triangle ABD$ и BP - биссектриса $\angle B$, зна-
чит $\triangle ABD$ - равнобедренный с
основанием AD. Значит $AB = BD$.
$BD = DC$, т.к. AD - медиана $\triangle ABC$.



Обозначим $AB = BD = DC = x$,
тогда $BC = 2x$.
По свойству биссектрисы:
биссектриса делит противоположную сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, составим отношение $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EC}$.
По свойству пропорции $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC}$.
$\frac{AB}{BC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.



Обозначим $AE = y$, $EC = 2y$,

т. к. $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$.

По формуле для нахождения медианы треугольника, зная все его стороны, запишем:

$$AD^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}.$$

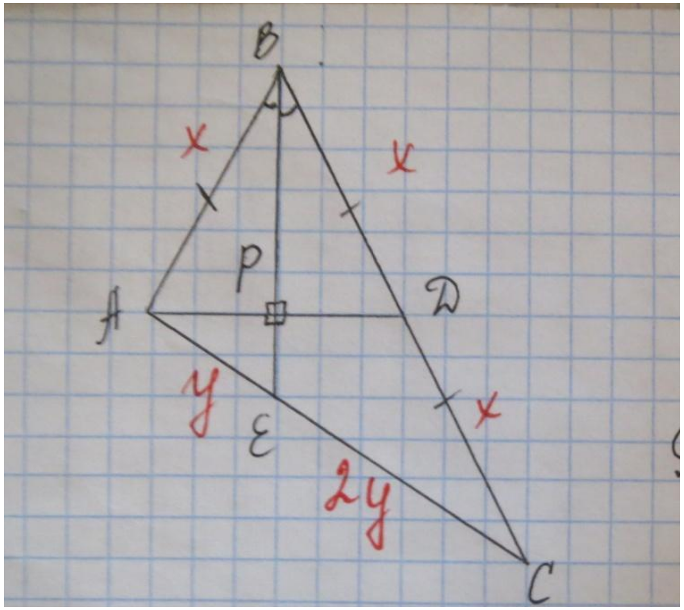
Подставим введенные обозначения: $AD^2 = \frac{2x^2 + 18y^2 - 4x^2}{4}$.

Получим: $64 = 4{,}5y^2 - 0{,}5x^2$ (1)

По формуле для биссектрисы:

$BE^2 = AB \cdot BC - AE \cdot EC$, отсюда:

$64 = 2x^2 - 2y^2$ (2)



Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 64 = 4{,}5y^2 - 0{,}5x^2 \\ 64 = 2x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 128 = 9y^2 - x^2 \\ 32 = x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$160 = 8y^2$$

$$y^2 = 20$$

$$y = 2\sqrt{5}$$

Найдем x. $32 = x^2 - 20$

$$52 = x^2$$

$$x = 2\sqrt{13}$$

Тогда $AB = x = 2\sqrt{13}$

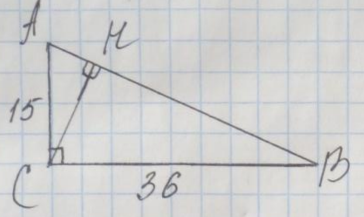
$BC = 2x = 4\sqrt{13}$

$AC = 3y = 6\sqrt{5}$

Ответ: $AB = 2\sqrt{13}$, $BC = 4\sqrt{13}$, $AC = 6\sqrt{5}$

Вариант 23 № 24.

Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 36. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.



Дано:

$\triangle ABC$ – прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$

$AC = 15$, $CB = 36$

CH – высота

Найти: CH

Решение:

(1) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH$

(2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB$

По теореме Пифагора

$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 15^2 + 36^2 = 225 + 1296 = 1521$, $AB = 39$

По формуле (2): $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 36 = 270$

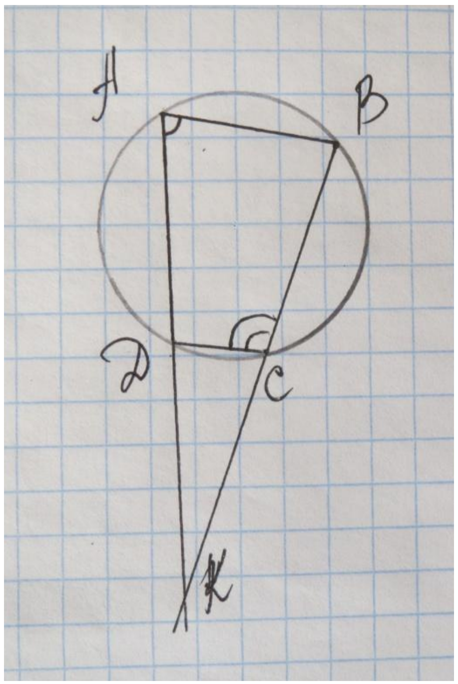
Подставим найденное значение в формулу (1): $270 = \frac{1}{2} \cdot 39\, CH$

Отсюда $CH = \frac{540}{39}$

Ответ: CH = 540/39

Вариант 23 № 25.

Известно, что около четырехугольника ABCD можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырехугольника пересекаются в точке K. Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.



Дано: ABCD - четырехугольник.

$AD \cap BC = K$.

Около ABCD можно описать окружность.

Доказать: $\triangle KAB \sim \triangle KCD$.

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle KAB$ и $\triangle KCD$.

$\angle K$ - общий.

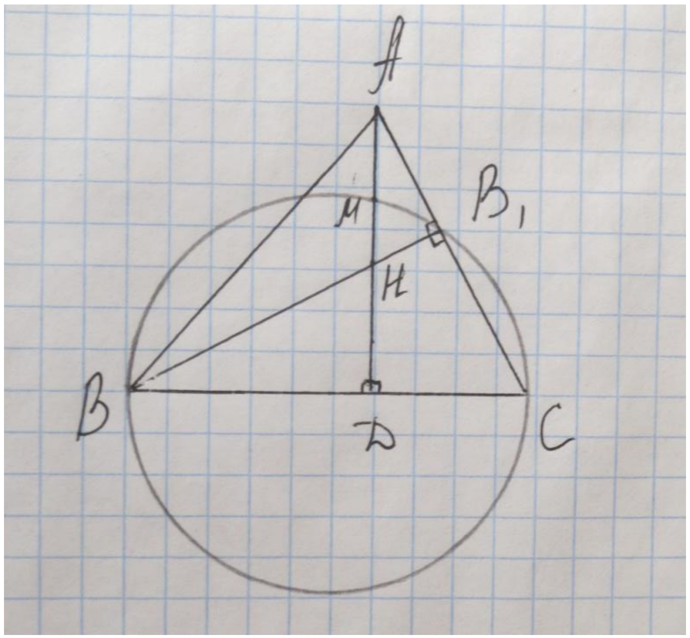
Т.к. четырехугольник ABCD - вписанный, то $\angle A + \angle C = 180°$.

$\angle KCD + \angle C = 180°$ по свойству смежных углов. Значит $\angle A = \angle KCD$. Значит $\triangle KAB \sim \triangle KCD$ по двум углам.

Ч. Т. Д.

Вариант 23 № 26.

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность , пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 49$, $MD = 42$, H - точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.



Решение:

Основание B_1 высоты BB_1 находится в точке пересечения окружности со стороной AC, т.к. $\angle BB_1C = 90°$ как вписанный опирающийся на диаметр. Значит BB_1 - высота.

$\triangle AB_1H \sim \triangle ADC$ по двум углам ($\angle A$-общий, $\angle AB_1H = \angle ADC = 90°$). Тогда

$$\frac{AB_1}{AD} = \frac{AH}{AC} = \frac{B_1H}{DC}.$$

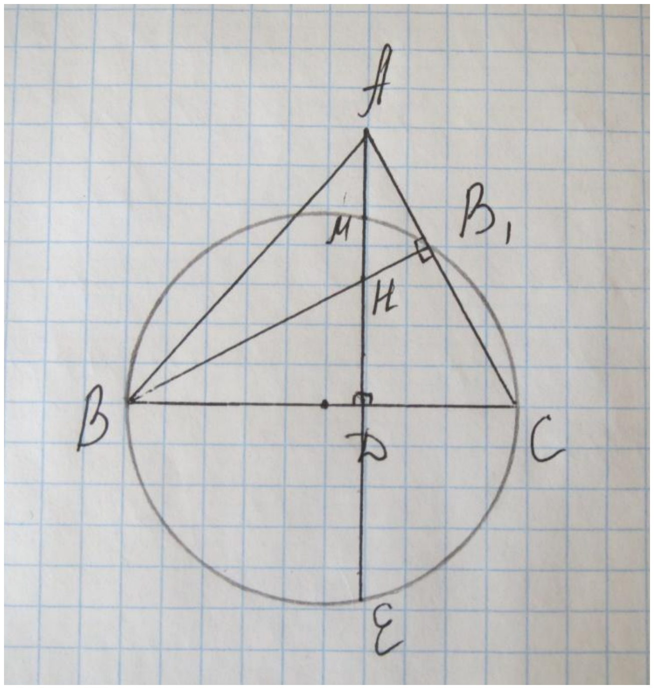
Возьмем отношения $\frac{AB_1}{AD} = \frac{AH}{AC}$

По свойству пропорции

$AB_1 \cdot AC = AD \cdot AH.$

Вариант 23 № 26.

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 49$, $MD = 42$, H - точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.



Тогда $AH = \frac{AB_1 \cdot AC}{49}$.

AC - секущая, AB_1 - часть секущей AC.

Проведем секущую AE через т. D. AM - часть секущей AE

По теореме о секущих

$AB_1 \cdot AC = AM \cdot AE$, Тогда

$AH = \frac{AB_1 \cdot AC}{49} = \frac{AM \cdot AE}{49}$.

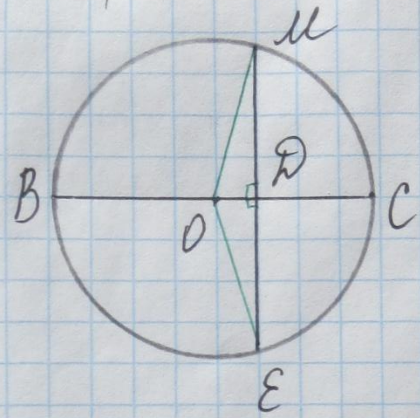
$AM = AD - MD = 49 - 42 = 7$

$AE = AD + DE = AD + DM = 49 + 42 =$
$= 91$. (*$DE = DM$)

Значит $AH = \frac{7 \cdot 91}{49} = \frac{91}{7} = 13$

Ответ: $AH = 13$.

* Докажем, что $DE = DM$



$ME \cap BC = D$

$ME \perp BC$

$\triangle MOD = \triangle EOD$

по катету и гипотенузе.

(OD - общий катет

$OM = OE$ как радиусы). значит

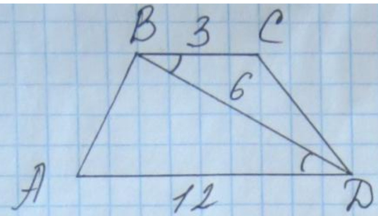
$DE = DM$ как

соответсвующие элементы

равных треугольников.

Вариант 29 № 25.

Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 3 и 12, BD равно 6. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.



Дано:

ABCD - трапеция; BC, AD – основания,

$BC = 3$, $AD = 12$

$BD = 6$

Доказать: $\triangle CBD \sim \triangle BDA$

Доказательство:

$\frac{AD}{BD} = \frac{12}{6} = 2$; $\frac{BD}{BC} = \frac{6}{3} = 2$.

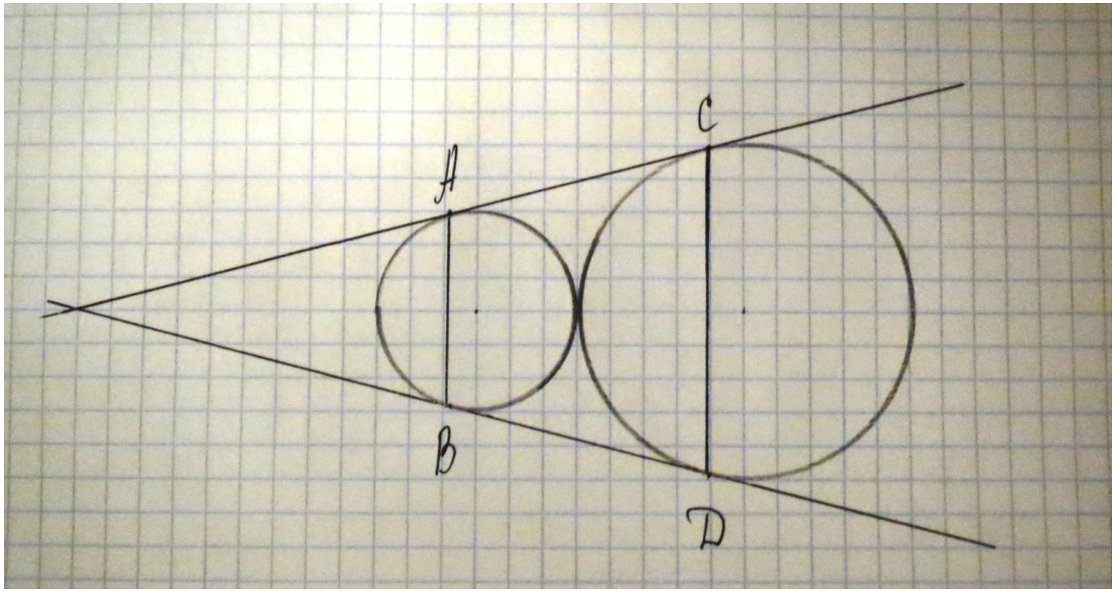
$AD \parallel BC$ как основания трапеции, значит $\angle BDA = \angle CBD$ как внутренние накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей BD.

Значит $\triangle CBD \sim \triangle BDA$.

ч.т.д.

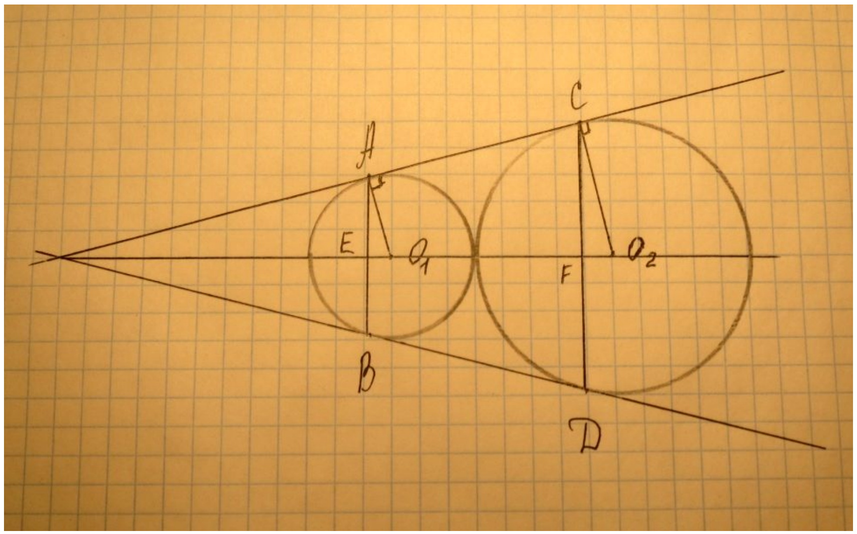
Вариант 29 № 26.

Окружности радиусов 33 и 99 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между AB и CD.



Вариант 29 № 26.

Окружности радиусов 33 и 99 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между AB и CD.



Решение:

Обозначим центры окружностей O_1 и O_2; проведем радиусы O_1A и O_2C в точки касания.

$OA_1 \perp AC$ и $O_2C \perp AC$ по свойству касательной.

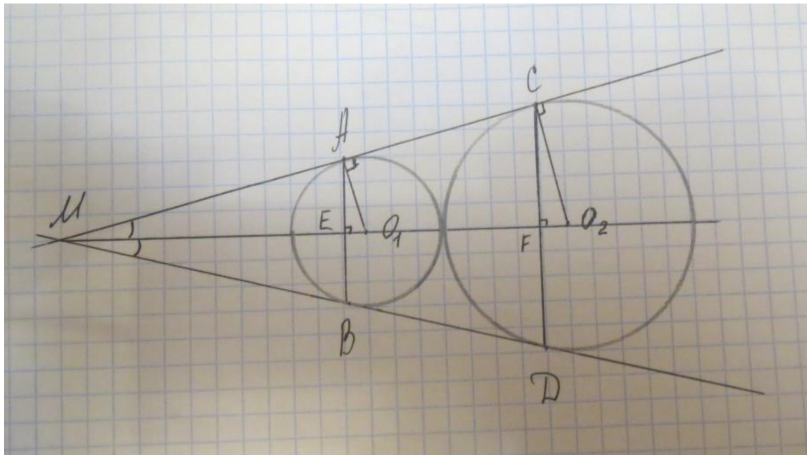
Центр окружности, вписанной в угол находится на биссектрисе угла.

Проведем биссектрису угла. Она пройдет через оба центра O_1 и O_2, а также через точку касания.

Т.к. биссектриса пересечет AB и CD. Обозначим эти точки E и F.

Вариант 29 № 26.

Окружности радиусов 33 и 99 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между AB и CD.



Пусть AC и BD пересекаются в т. M.

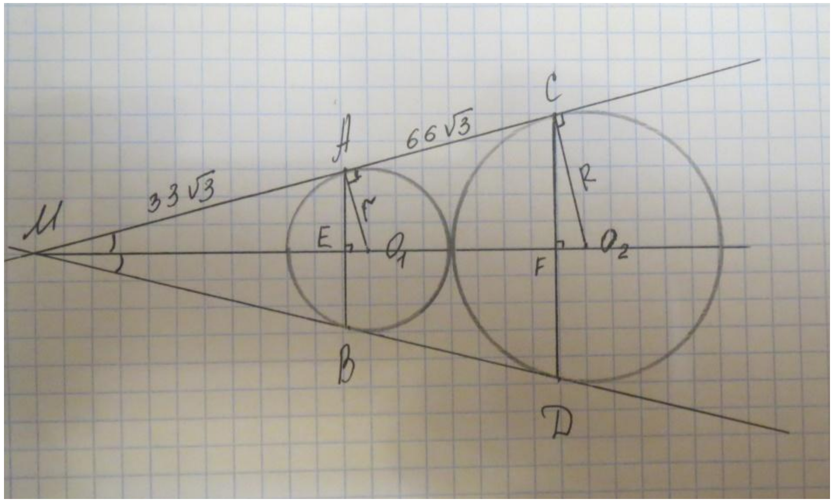
$\triangle AMB$ – равнобедренный, т. к. $AM = BM$ по свойству касательных, проведенных из одной точки. Тогда ME – биссектриса, медиана и высота. Значит $AB \perp ME$.

Аналогично, $CD \perp MF$.

Значит EF – искомое расстояние и $AB \parallel CD$.

Вариант 29 № 26.

Окружности радиусов 33 и 99 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между AB и CD



Найдем AC, отрезок касательной лежащий между двумя окружностями.

$AC = 2\sqrt{r \cdot R} = 2 \cdot \sqrt{33 \cdot 99} = 2 \cdot 33 \cdot \sqrt{3}$

$AC = 66\sqrt{3}$.

$\triangle MO_1A \sim \triangle MO_2C$ по двум углам. ($\angle M$ – общий; $\angle MAO_1 = \angle MCO_2 = 90°$).

Найдем коэффициент подобия. $k = \frac{r}{R} = \frac{33}{99} = \frac{1}{3}$.

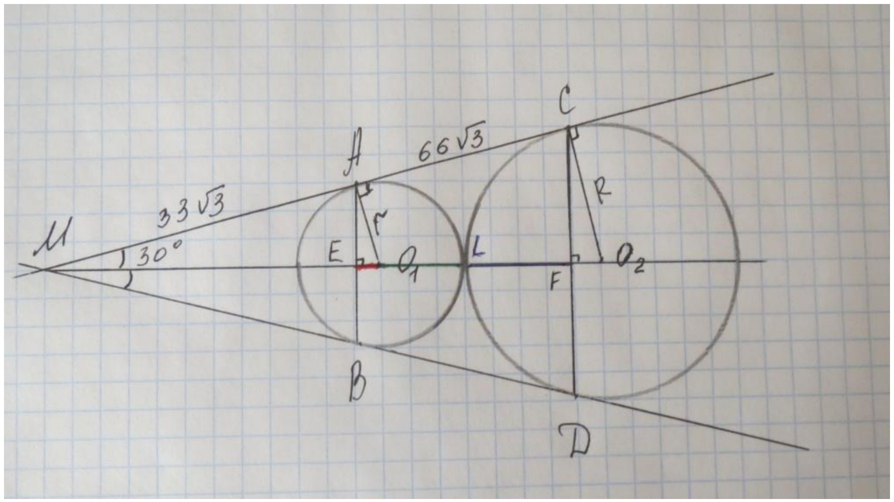
$\frac{MA}{MC} = \frac{1}{3}$, $MC = MA + AC$,

$\frac{MA}{MA + AC} = \frac{1}{3}$

$\frac{MA}{MA + 66\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$. Решив пропорцию, получим $MA = 33\sqrt{3}$

Вариант 29 № 26.

Окружности радиусов 33 и 99 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между AB и CD.



Найдем $\angle AMO_1$.

$tg\angle AMO_1 = \frac{AO_1}{MA} = \frac{33}{33\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\angle AMO_1 = 30°$.

Тогда в $\triangle AEO_1$ угол $AO_1M = 60°$,

а $\angle EAO_1 = 30°$.

Значит $EO_1 = \frac{1}{2}AO_1 = \frac{33}{2}$.

Аналогично, $FO_2 = \frac{1}{2}CO_2 = \frac{99}{2}$.

Тогда $LF = LO_2 - FO_2 = 99 - \frac{99}{2} = \frac{99}{2}$

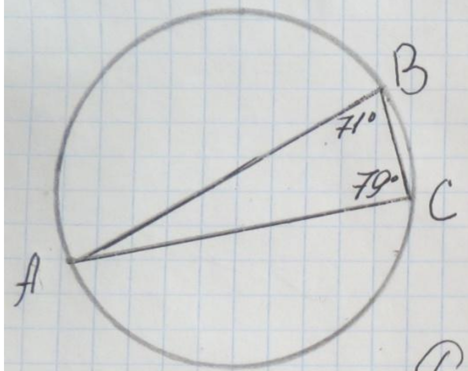
$EF = EO_1 + O_1L + LF$

$EF = \frac{33}{2} + 33 + \frac{99}{2} = 99$.

Ответ: 99.

Вариант 13 № 24.

Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 71 и 79 градусов. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 8.



Дано:

$\triangle ABC$; $\angle B = 71°$;

$\angle C = 79°$; $R = 8$

Найти: BC.

Решение: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

$\angle A = 180° - (71° + 79°) = 30°$ (по теореме о сумме углов треугольника).

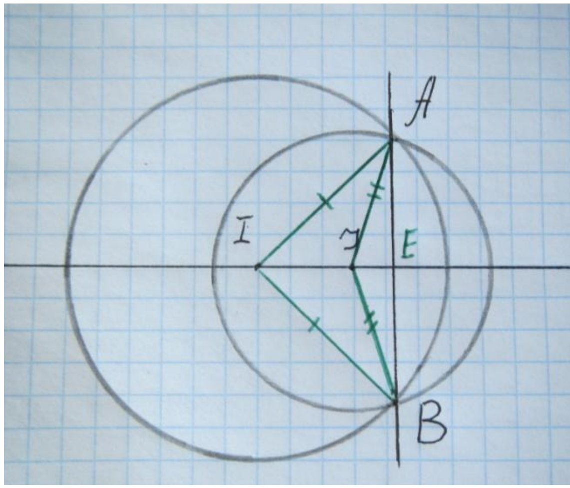
По теореме синусов: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$.

Тогда $BC = 2R \cdot \sin A = 2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 8$.

Ответ: $BC = 8$.

Вариант 13 № 25.

Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B, причем точки I и J лежат по одну сторона от прямой AB. Докажите, что прямые AB и IJ перпендикулярны.

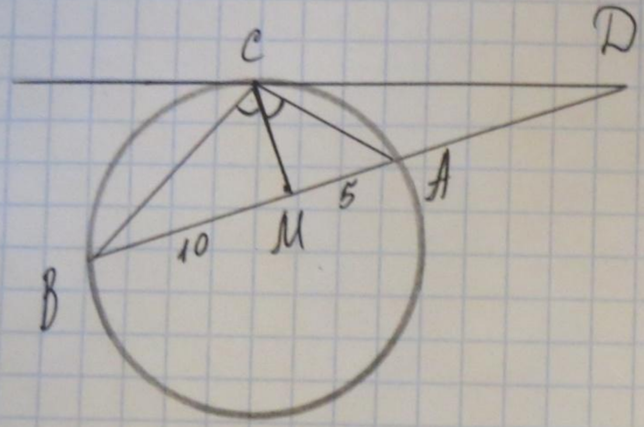


Решение:

Проведем радиусы AI и BI; AJ и BJ.
Тогда $AI = BI$; $AJ = BJ$.
Точки I и J равноудалены от концов отрезка AB, значит $IJ \perp AB$ по теореме о серединном перпендикуляре

Вариант 13 № 26.

Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AM = 5 и MB = 10. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, Пересекает прямую AB точке D. Найдите CD.



CD – ?

Решение:

По свойству биссектрисы угла треугольника

$\frac{BM}{BC} = \frac{AM}{AC}$, $\frac{10}{BC} = \frac{5}{AC}$.

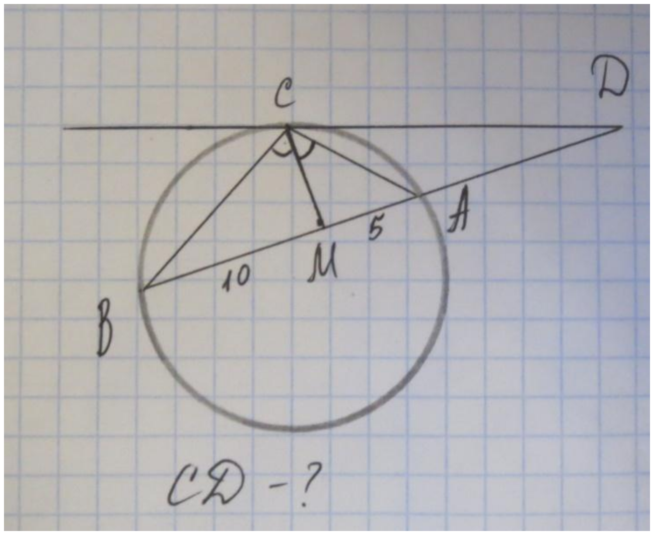
Тогда $\frac{AC}{BC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

$AB = AM + BM = 15$

по свойству отрезков

Вариант 13 № 26.

Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AM = 5 и MB = 10. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, Пересекает прямую AB точке D. Найдите CD.



Рассмотрим $\triangle DCA$ и $\triangle DBC$

$\angle D$ - общий, $\angle DCA = \frac{1}{2} \cup AC$ т.к. это угол между касательной и хордой;

$\angle B = \frac{1}{2} \cup AC$ как вписанный

значит $\angle DCA = \angle B$. Значит $\triangle DCA \sim \triangle DBC$ по двум углам. Значит:

$\frac{DC}{DB} = \frac{DA}{DC} = \frac{CA}{BC} = \frac{1}{2}$. Отсюда:

$\frac{DC}{DB} = \frac{DA}{DC}$; $DC^2 = DA \cdot DB$

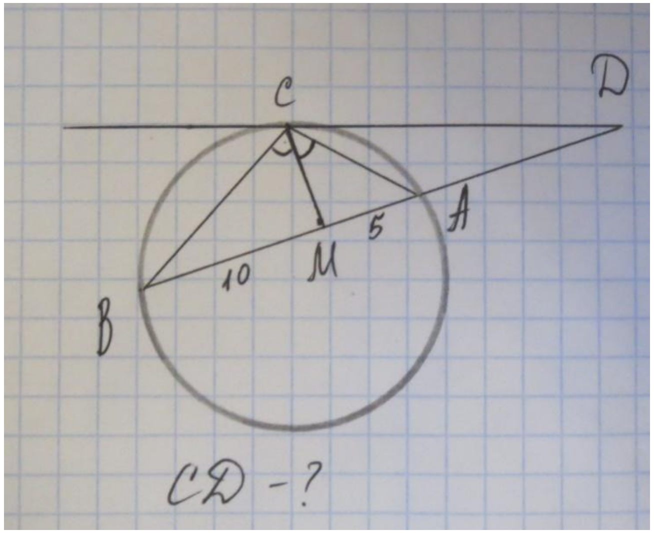
$DB = DA + AB = DA + 15$.

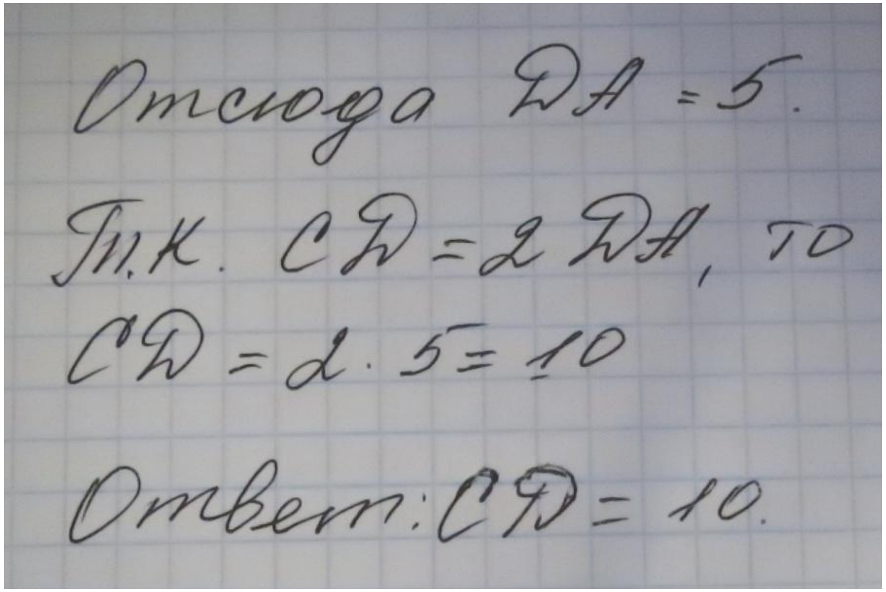
$\frac{DA}{DC} = \frac{1}{2}$, значит $DC = 2DA$,

Тогда $4DA^2 = DA \cdot (DA + 15)$

Вариант 13 № 26.

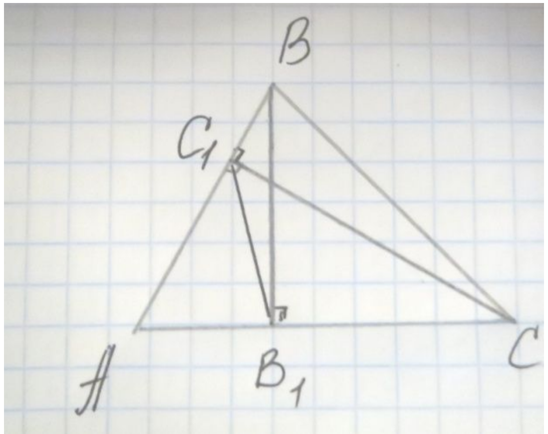
Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AM = 5 и MB = 10. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, Пересекает прямую AB точке D. Найдите CD.

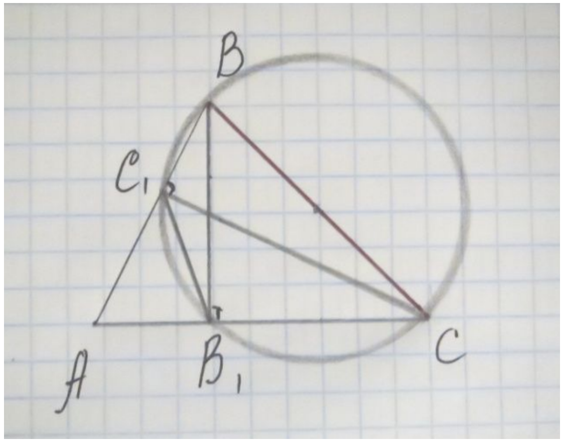




Вариант 19 № 25.

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.





Доказательство:

$\angle BB_1C = \angle BC_1C = 90^\circ$, т.к. BB_1 и CC_1 - высоты.

У $\triangle BC_1C$ и $\triangle BB_1C$ - общая гипотенуза BC.

Значит $\angle BB_1C$ и $\angle BC_1C$ опираются на диаметр одной окружности.

BC - диаметр. Проведем эту окружность

$\angle BB_1C_1$ и $\angle BCC_1$ опираются на одну и ту же дугу окружности и являются вписанными.

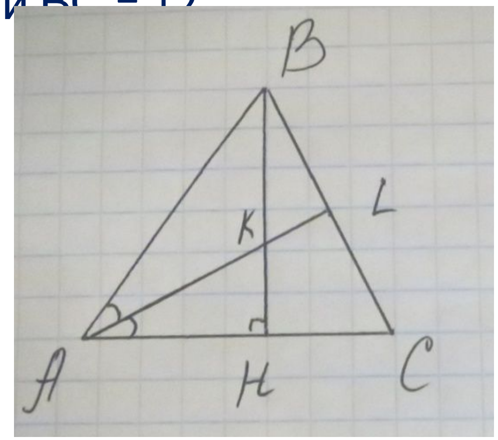
Значит $\angle BB_1C_1 = \frac{1}{2} \smile BC_1$;

$\angle BCC_1 = \frac{1}{2} \smile BC_1$, значит

$\angle BB_1C_1 = \angle BCC_1$ ч.т.д.

Вариант 19 № 26.

В треугольнике АВС биссектриса угла А делит высоту, проведенную из вершины В, отношении 5:4, считая от точки В. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника АВС, если ВС = 12.



<u>Решение</u>: Пусть

$AL \cap BH$ в точке K. Тогда $\frac{BK}{KH} = \frac{5}{4}$

Обозначим: $BK = 5x$, $KH = 4x$,

$BH = 9x$. Рассмотрим $\triangle ABH$.

По свойству биссектрисы:

$\frac{AB}{AH} = \frac{BK}{KH}$.

Обозначим $AB = 5y$, $AH = 4y$.

По теореме Пифагора:

$BH^2 + AH^2 = AB^2$

$(9x)^2 + (4y)^2 = (5y)^2$

$81x^2 + 16y^2 = 25y^2$

$81x^2 = 25y^2 - 16y^2$

$81x^2 = 9y^2$

$9x^2 = y^2$

$y = 3x$.

Тогда $AB = 5y = 5 \cdot 3x = 15x$

$\sin A = \frac{BH}{AB} = \frac{9x}{15x} = \frac{3}{5}$

По теореме синусов:

$2R = \frac{BC}{\sin A}$

$2R = 12 : \frac{3}{5} = \frac{12 \cdot 5}{3} = 20$

$R = 10$.

Ответ: 10

Спасибо за внимание.