

# «Перпендикулярность прямых и плоскостей»





# План:

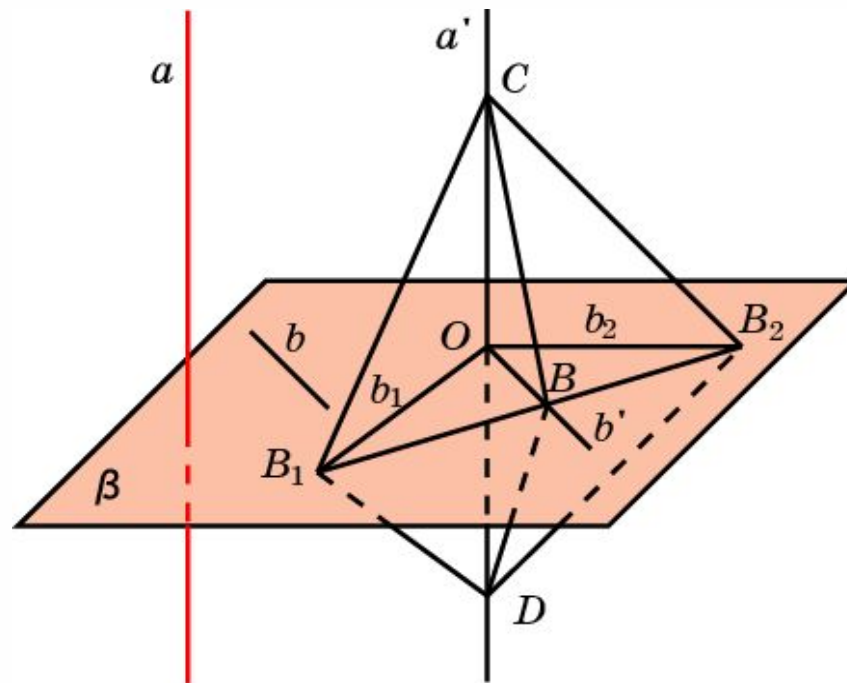
- ❖ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ
- ❖ ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ
- ❖ ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ
- ❖ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ
- ❖ ДВУГРАННЫЙ УГОЛ
- ❖ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ



# ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая называется **перпендикулярной** плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

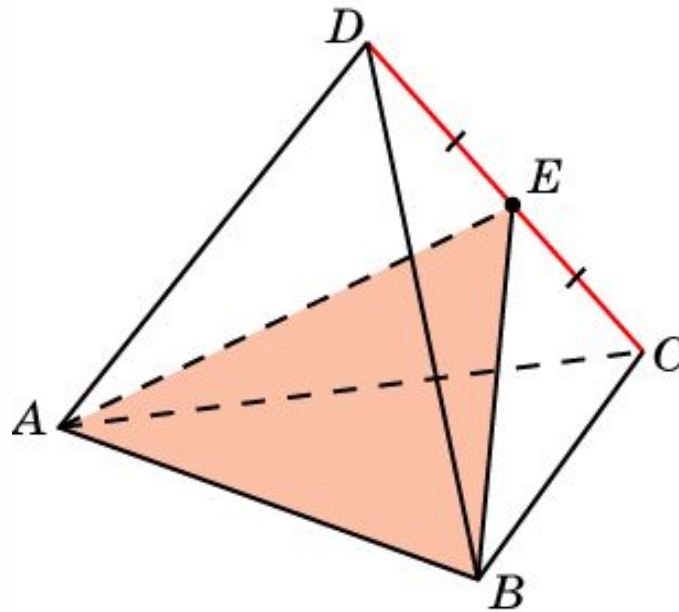
**Теорема.** (Признак перпендикулярности прямой и плоскости.) Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.





## Упражнение 1

Докажите, что плоскость, проходящая через ребро  $AB$  правильного тетраэдра  $ABCD$  и точку  $E$  – середину ребра  $CD$ , перпендикулярна ребру  $CD$ .

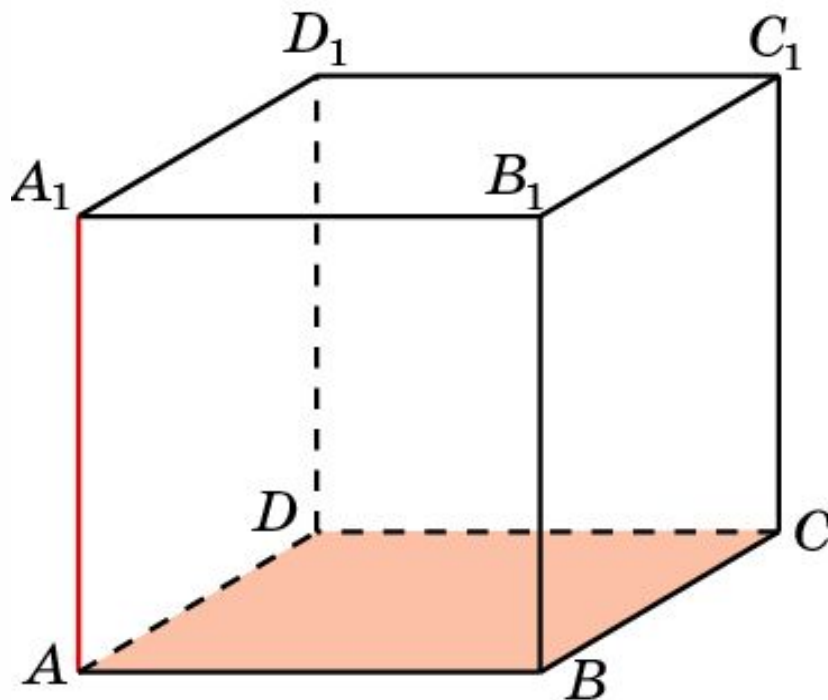


**Доказательство:** Прямая  $CD$  перпендикулярна прямым  $AE$  и  $BE$ . Следовательно, она перпендикулярна плоскости  $ABE$ .



## Упражнение 2

Докажите, что прямая  $AA_1$ , проходящая через вершины куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .



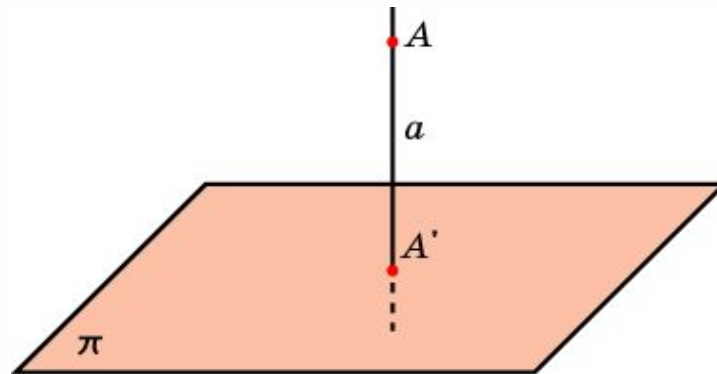
**Доказательство.** Прямая  $AA_1$  перпендикулярна прямым  $AB$  и  $AD$ . Следовательно, она перпендикулярна плоскости  $ABC$ .



# ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Пусть дана плоскость  $\pi$  и точка  $A$  пространства. Через точку  $A$  проведем прямую  $a$ , перпендикулярную плоскости  $\pi$ . Точку пересечения прямой  $a$  с плоскостью  $\pi$  обозначим  $A'$ . Она называется **ортогональной проекцией** точки  $A$  на плоскость  $\pi$ .

Отрезок  $AA'$  называется **перпендикуляром**, опущенным из точки  $A$  на плоскость  $\pi$ .

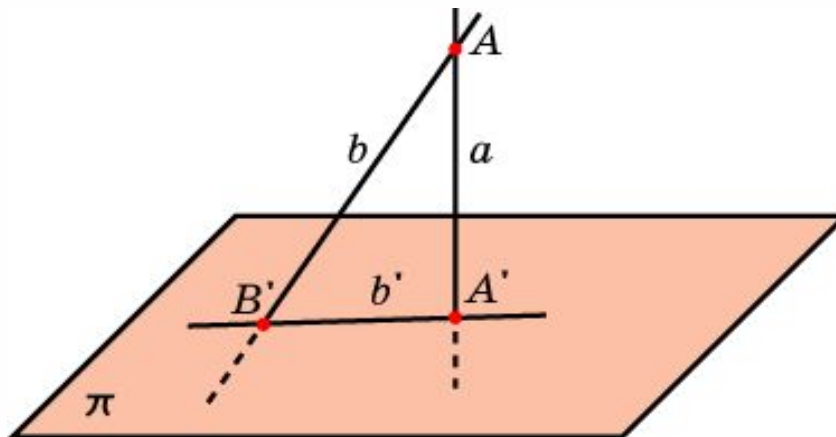




# ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

**Наклонной** к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная ей. Наклонной называют также отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости, и не являющийся перпендикуляром.

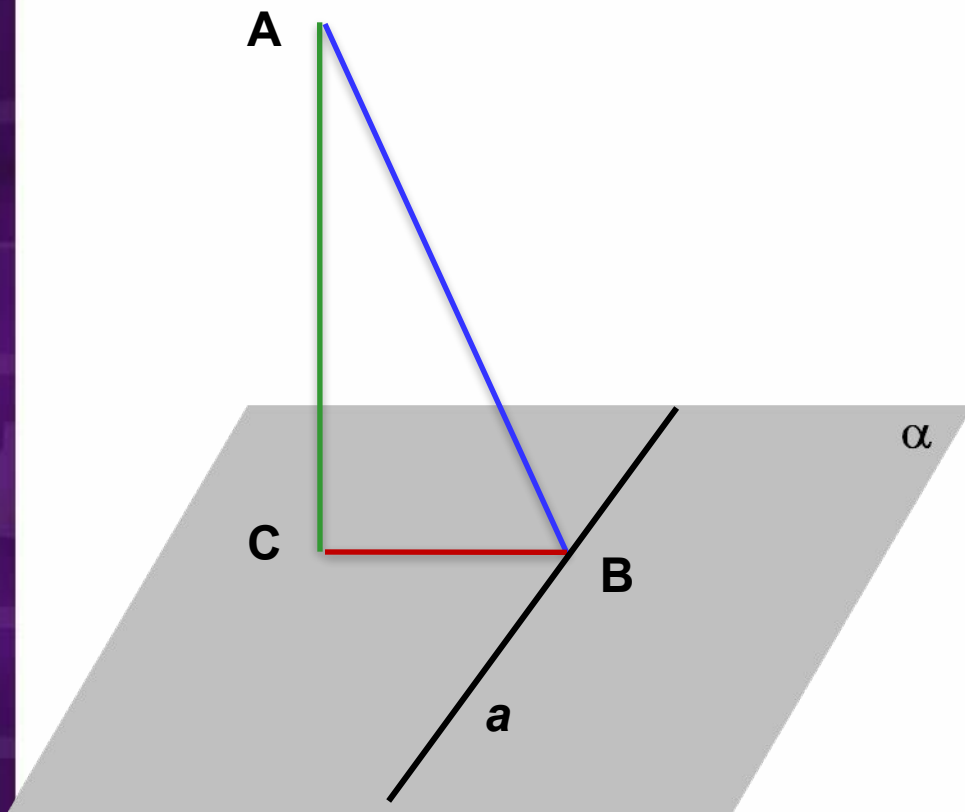
Соответствие, при котором точке  $A$  пространства сопоставляется ортогональная проекция  $A'$ , называется **ортогональным проектированием** на плоскость  $\pi$ .





# ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна и к самой наклонной



*Дано:*

$\alpha$   
 $AC \perp \alpha; C \in \alpha$

AB - наклонная

BC - проекция

$a \subset \alpha$

$a \perp$

BC

*Доказать:*

$a \perp$

AB



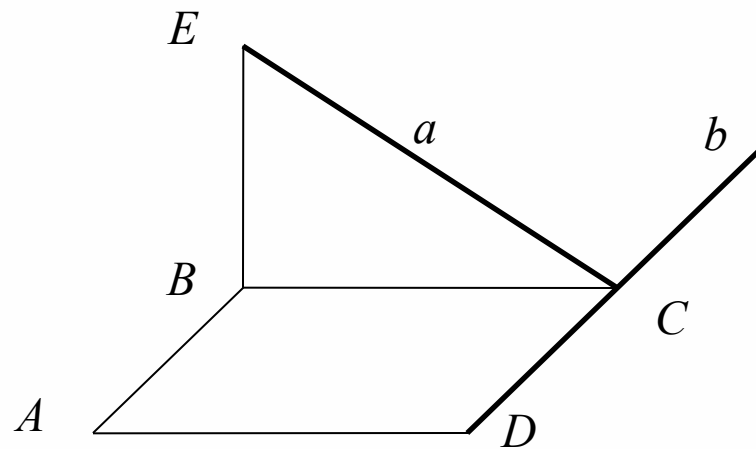


## Упражнение 3

Установить взаимное положение прямых  $a$  и  $b$  по готовым чертежам

Задача 1. ABCD – квадрат

$BE \perp ABCD$

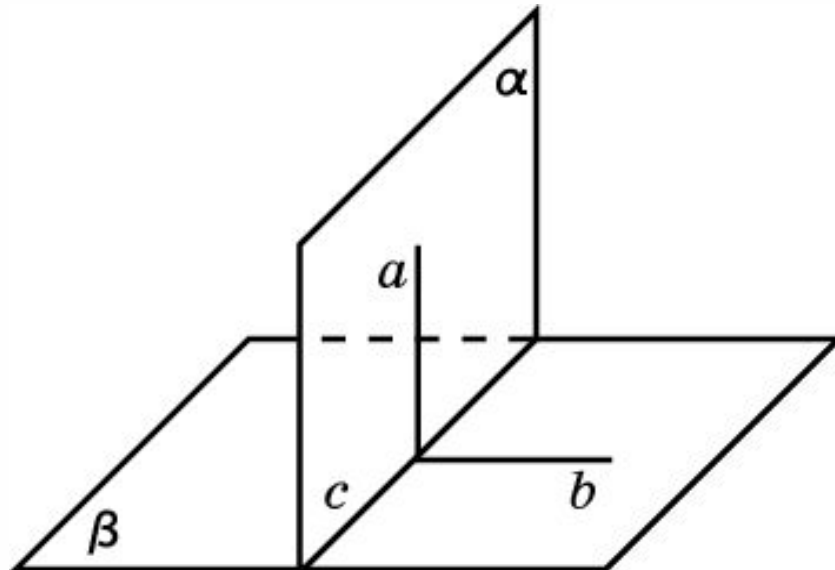




# ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости называются **перпендикулярными**, если угол между ними прямой.

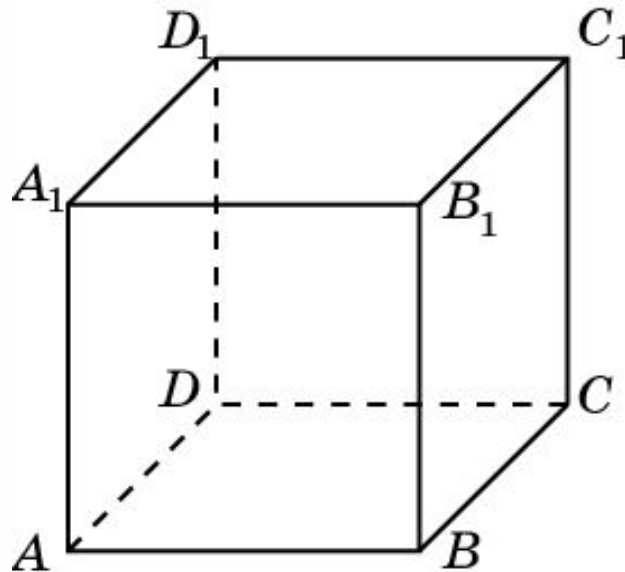
**Теорема.** (Признак перпендикулярности двух плоскостей.) Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.





## Упражнение 4

В кубе  $A...D_1$  укажите плоскости, проходящие через вершины куба, перпендикулярные плоскости: а)  $ABC$ ; б)  $B_1C_1D_1$ .



**Ответ:** а)  $ABB_1$ ,  $BCC_1$ ,  $CDD_1$ ,  $ADD_1$ ,  $ACC_1$ ,  $BDD_1$ ;

б)  $ABB_1$ ,  $CDD_1$ ,  $AB_1C_1$ .



# ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

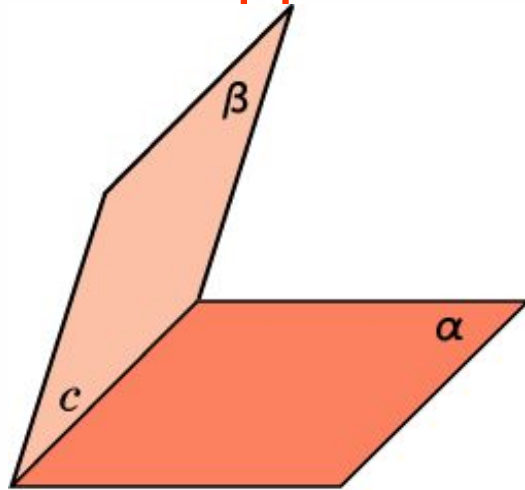


Рис. 1

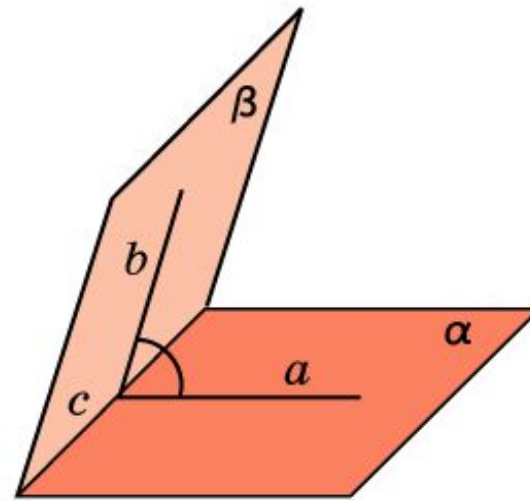


Рис. 2

**Двугранным углом** называется фигура (рис. 1), образованная двумя полуплоскостями, с общей ограничивающей их прямой, и частью пространства, ограниченной этими полуплоскостями. Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая граничная прямая – ребром двугранного угла.

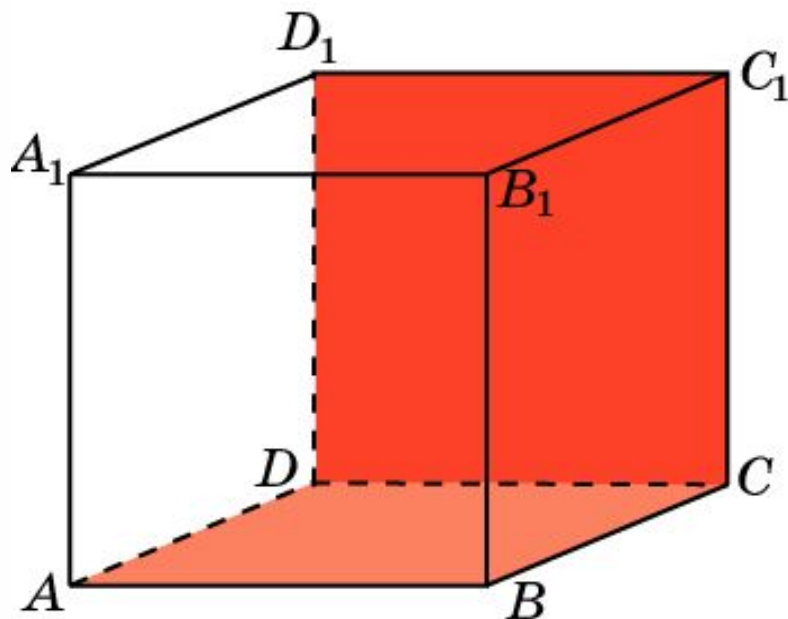
**Линейным углом** двугранного угла называется угол, полученный в результате пересечения данного двугранного угла и какой-нибудь плоскости, перпендикулярной его ребру (рис. 2).

**Величиной двугранного угла** называется величина его линейного угла.



## Упражнение 5

В кубе  $A...D_1$  найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $CDD_1$ .

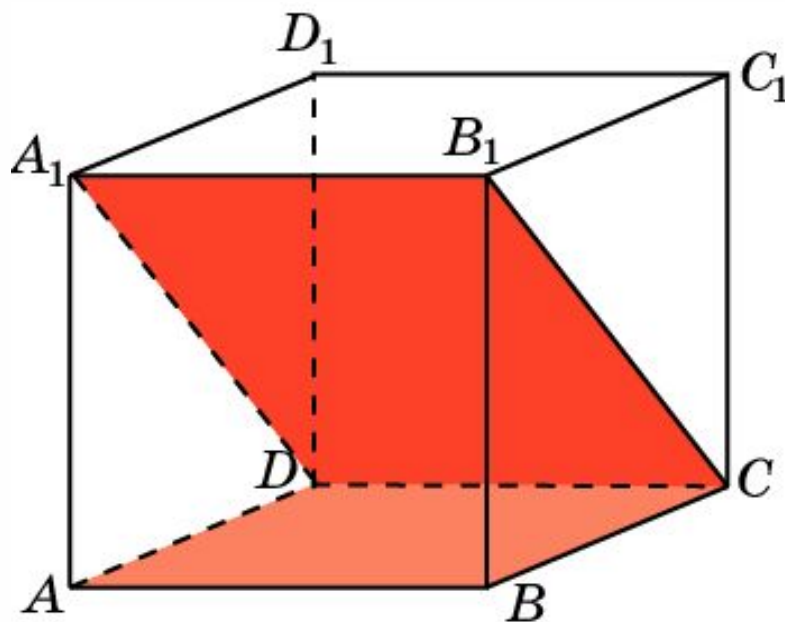


Ответ:  $90^\circ$ .



## Упражнение 6

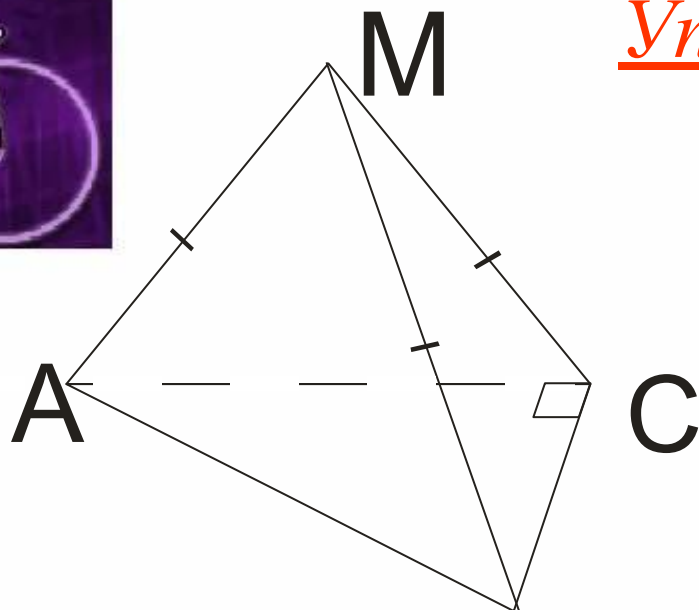
В кубе  $A...D_1$  найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $CDA_1$ .



Ответ:  $45^\circ$ .



## Упражнение 7

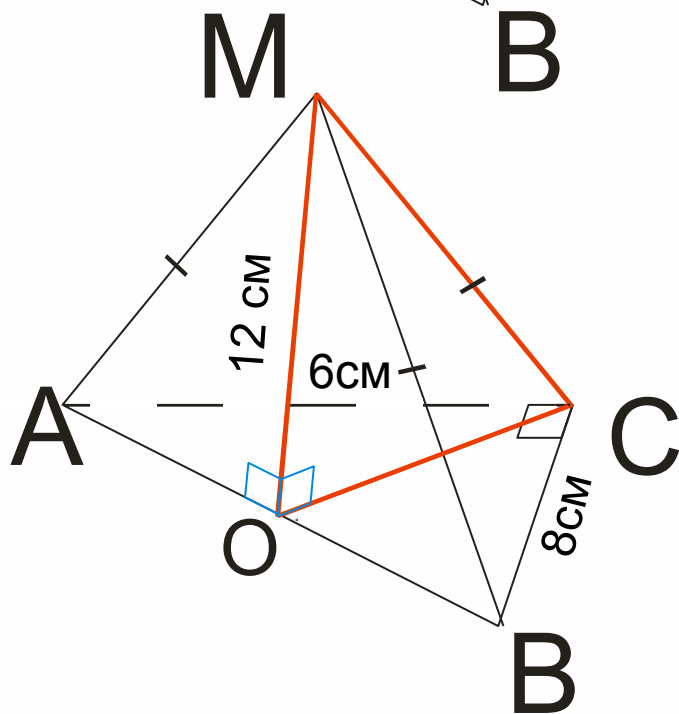


Дано :  $\triangle ABC$ , где  $\angle C = 90^\circ$ ,  $M \notin (ABC)$

$AM = MC = MB$ ,  $AC = 6\text{ см}$ ,  $BC = 8\text{ см}$

$MO$  – расстояние от точки  $M$  до  $(ABC)$

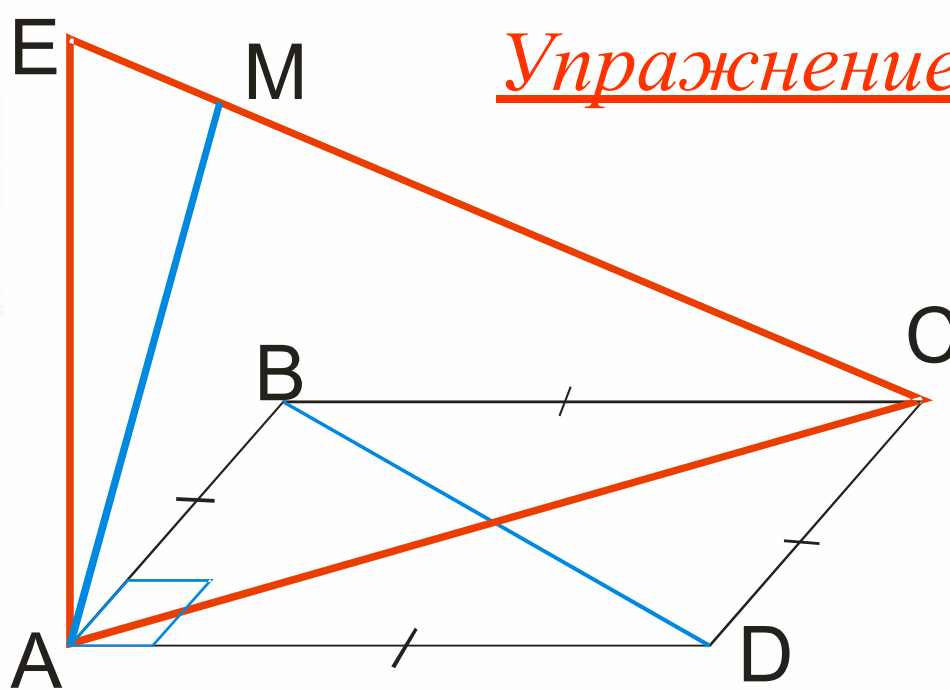
$MO = 12\text{ см}$ .



Найти : расстояние от точки  $M$  до вершины  $B$



## Упражнение 8



$ABCD$  – квадрат

$AE \perp (ABC)$

$M \in EC$

Найти угол между  
рямыми  $BD$  и  $AM$

Решение :

$AC \perp BD$  по свойству диагоналей квадрата.

$AE \perp (ABC)$  – по усл.  
 $BD \subset (ABC)$  }  $\Rightarrow AE \perp BD$  (по опр.).

$AC \cap AE$  и лежат в одной плоскости

следовательно по признаку перпендикулярности

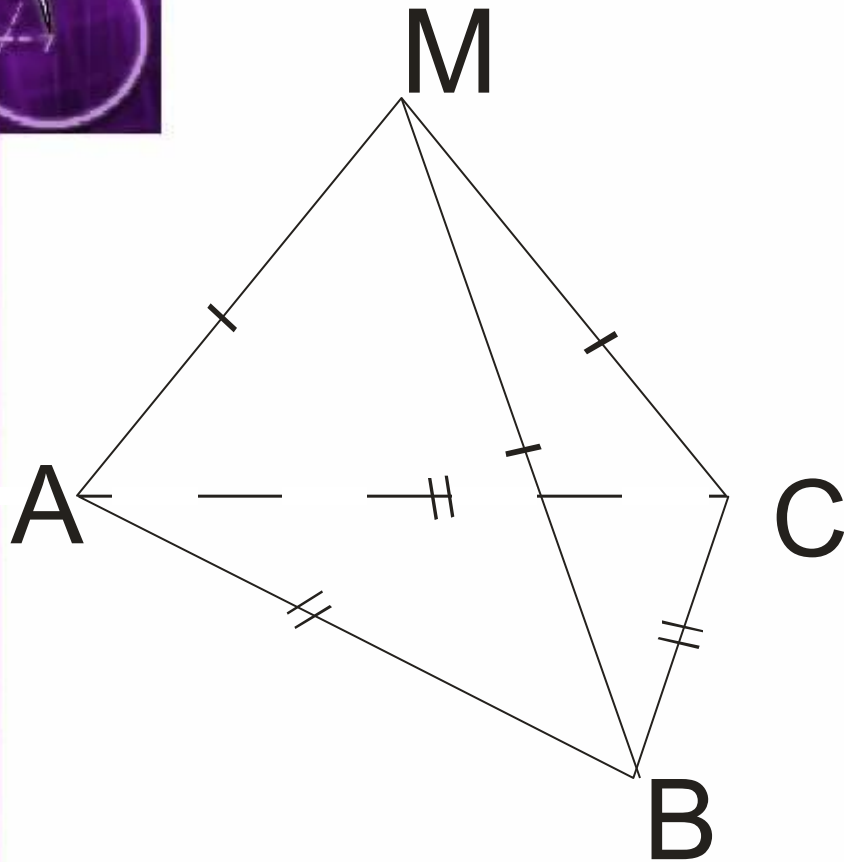
прямой и плоскости,  $\left. \begin{array}{l} BD \perp (AEC) \\ AM \subset (AEC) \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp AM,$

а значит, угол между  $BD$  и  $AM$  равен  $90^\circ$ .





## Упражнение 9

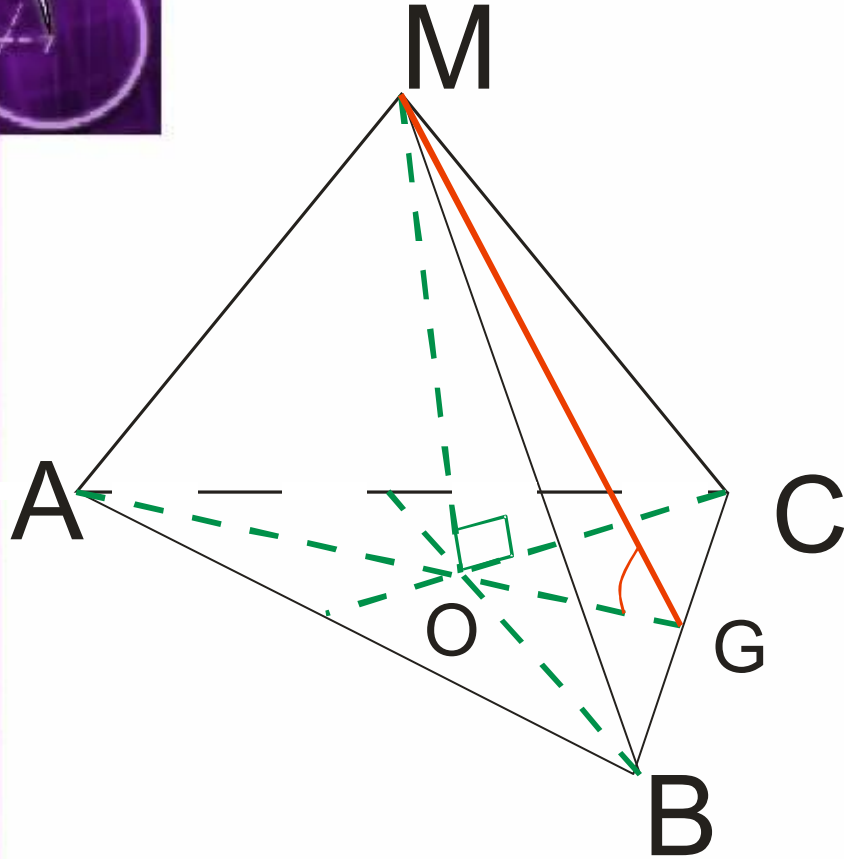


Точка  $M$  равноудалена от всех вершин правильного треугольника  $ABC$ , сторона которого равна 4 см. Расстояние от точки  $M$  до плоскости  $ABC$  равно 2 см.

- 1) Докажите, что  $(AMO) \perp (BMC)$ , где  $O$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на плоскость  $ABC$ .
- 2) Найдите угол между  $(BMC)$  и  $(ABC)$
- 3) Найдите угол между прямой  $MC$  и плоскостью  $ABC$ .



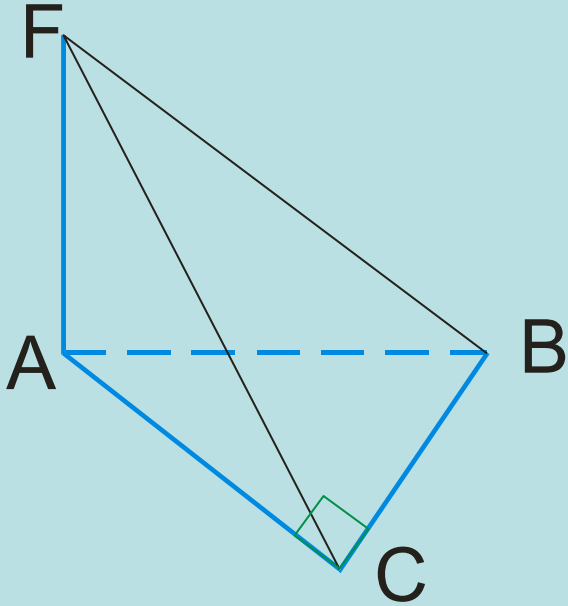
## Упражнение 10



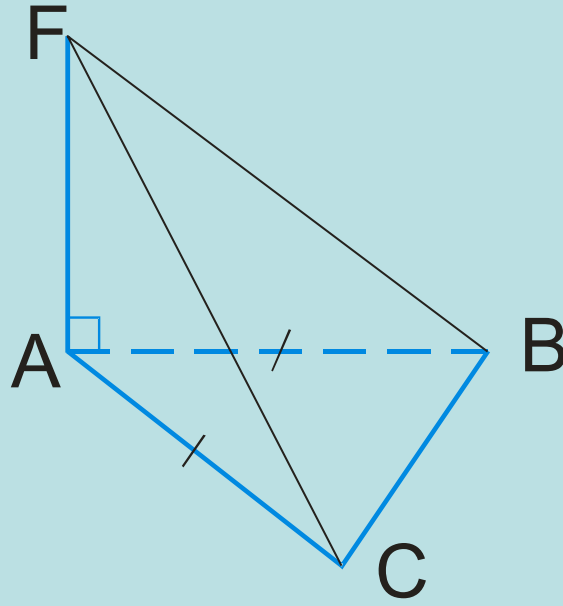
Дано :  $\triangle ABC$  – правильный  
 $M \notin (ABC)$ ,  $AM = CM = BM$   
 $AB = 4\text{ см}$ ,  $MO$  – расстояние  
от точки  $M$  до  $(ABC)$ ,  
 $MO = 2\text{ см}$ .

Доказать :

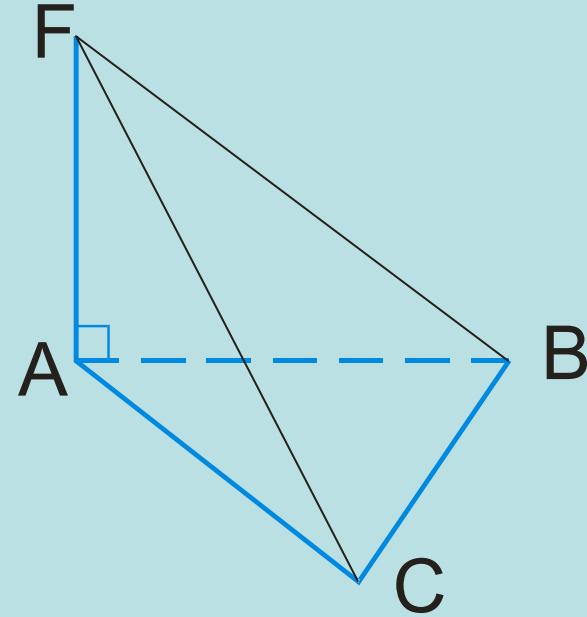
1.  $(AMO) \perp (BMC)$
2. Найти угол между  $(BMC)$  и  $(ABC)$
3. Найти угол между  $MC$  и  $(ABC)$



Дано:  $AF \perp (ABC)$   
 $\Delta ABC$  – прямоугольный  
 $\angle C = 90^\circ$   
 Найти: угол между  
 $(ABC)$  и  $(FCB)$



Дано:  $AF \perp (ABC)$   
 $\Delta ABC$  – равнобедренный  
 $AB = AC$   
 Найти: угол между  
 $(ABC)$  и  $(FCB)$



Дано:  $AF \perp (ABC)$   
 $\Delta ABC$  – тупоугольный  
 $\angle C$  – тупой  
 Найти: угол между  
 $(ABC)$  и  $(FCB)$