# «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

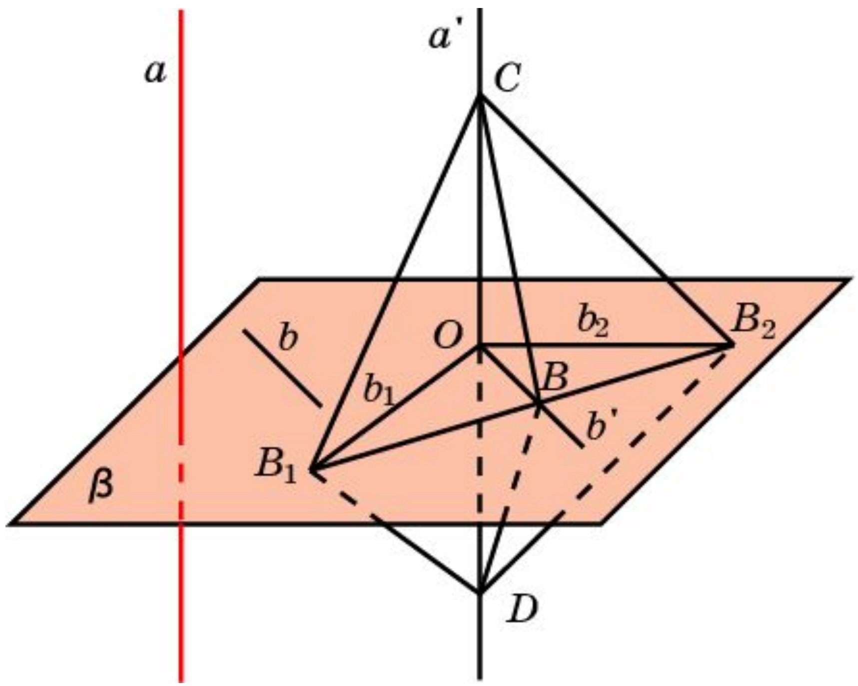
# План:

- ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ
- ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ
- ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ
- ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ
- ДВУГРАННЫЙ УГОЛ
- РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

# ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

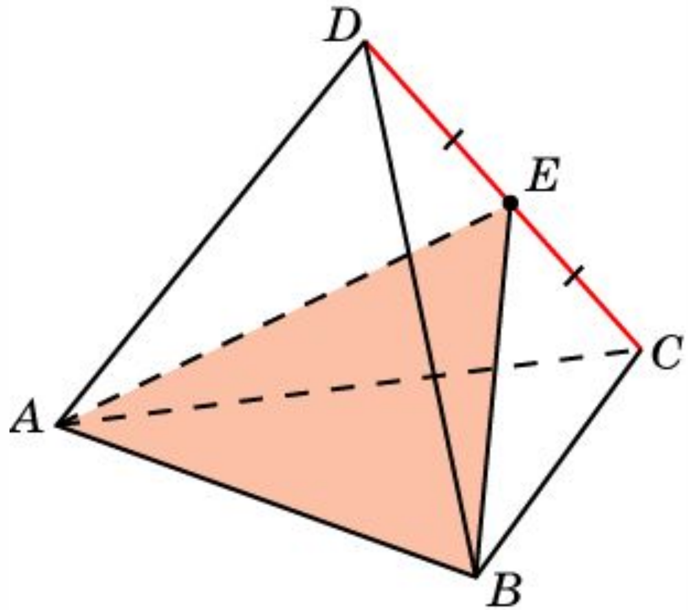
Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Теорема. (Признак перпендикулярности прямой и плоскости.) Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.



# Упражнение 1

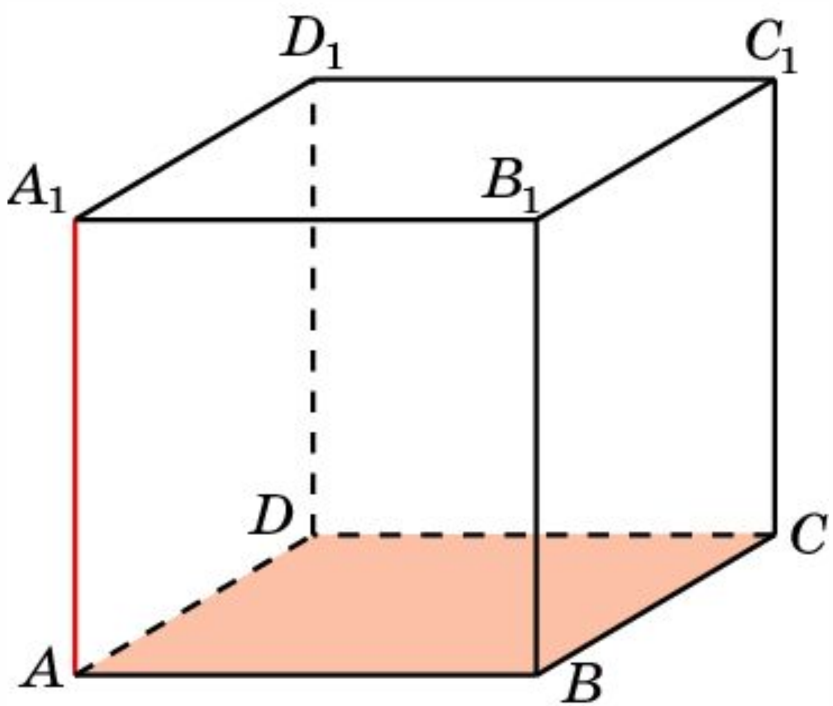
Докажите, что плоскость, проходящая через ребро *AB* правильного тетраэдра *ABCD* и точку *E* – середину ребра *CD*, перпендикулярна ребру *CD*.




Доказательство: Прямая *CD* перпендикулярна прямым *AE* и *BE*. Следовательно, она перпендикулярна плоскости *ABE*.

# Упражнение 2

Докажите, что прямая $AA_1$, проходящая через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости $ABC$.

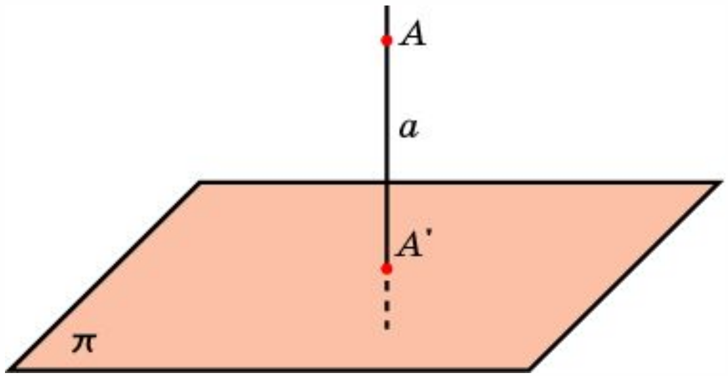



Доказательство. Прямая $AA_1$ перпендикулярна прямым $AB$ и $AD$. Следовательно, она перпендикулярна плоскости $ABC$.

# ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Пусть дана плоскость π и точка *A* пространства. Через точку *A* проведем прямую *a*, перпендикулярную плоскости π. Точку пересечения прямой *a* с плоскостью π обозначим *A’*. Она называется ортогональной проекцией точки *A* на плоскость π.

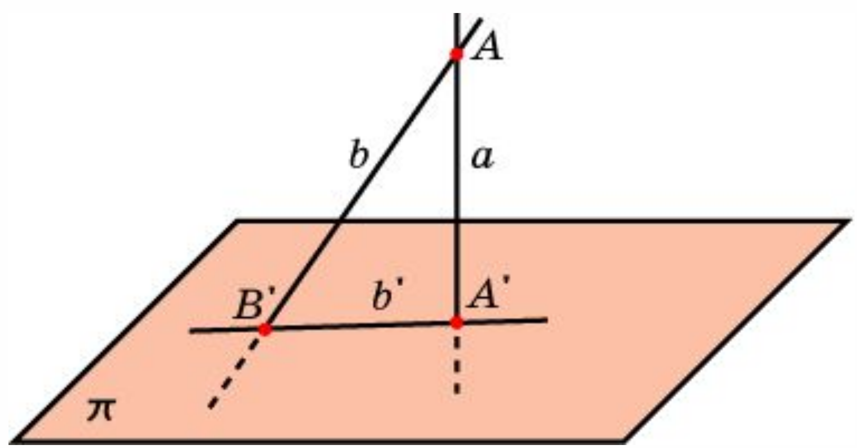
Отрезок *AA’* называется перпендикуляром, опущенным из точки *A* на плоскость π.



# ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

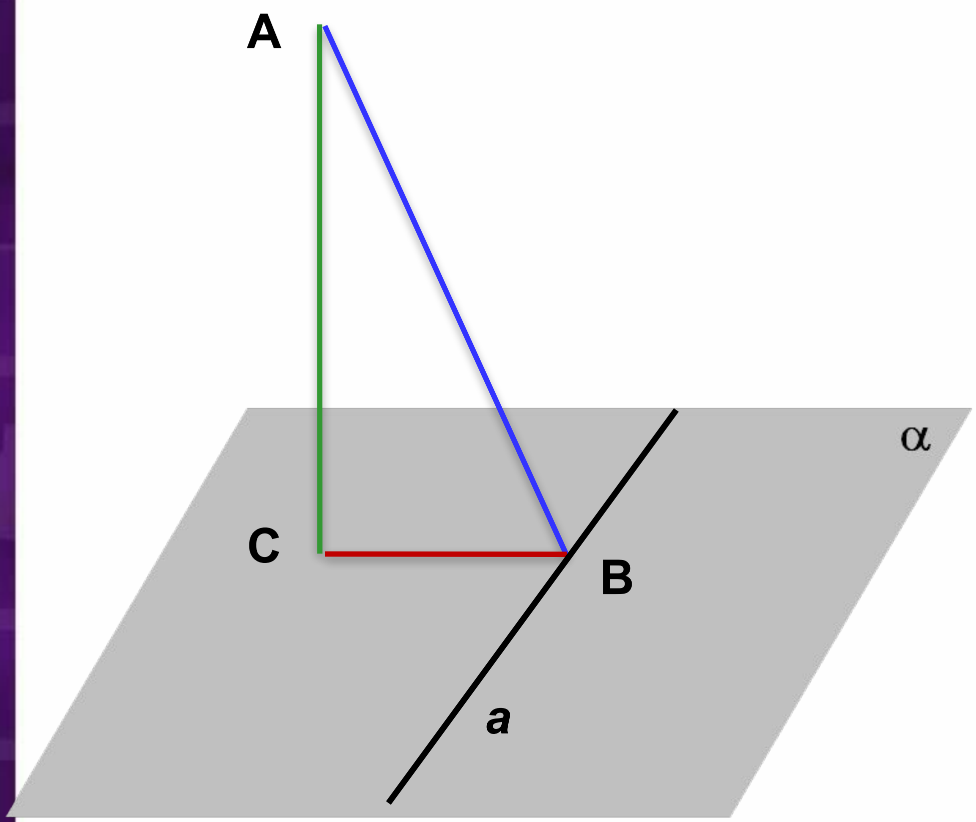
Наклонной к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная ей. Наклонной называют также отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости, и не являющийся перпендикуляром.

Соответствие, при котором точке *A* пространства сопоставляется ортогональная проекция *A'*, называется ортогональным проектированием на плоскость π.



# ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна и к самой наклонной




**Дано:**

**α**

**AC ⊥ α; C ∈ α**

**AB - наклонная**

**BC - проекция**

***a* ⊂ α**

***a* ⊥ BC**

**Доказать:**

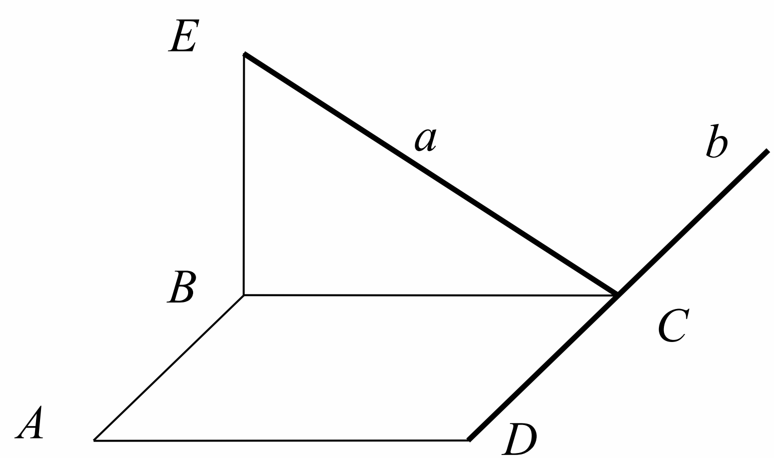
***a* ⊥ AB**

# Упражнение 3

## Установить взаимное положение прямых *а* и *в* по готовым чертежам

Задача1. ABCD – квадрат

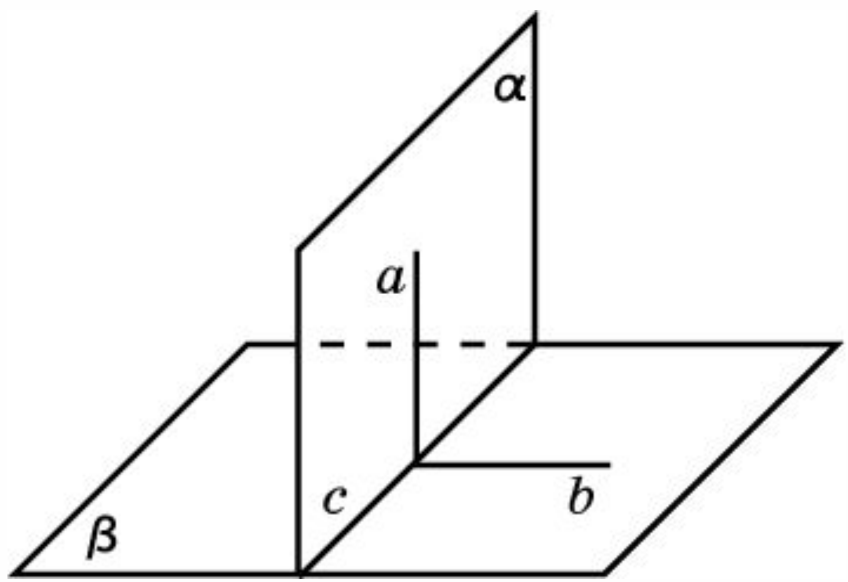
BE ⊥ ABCD



# ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

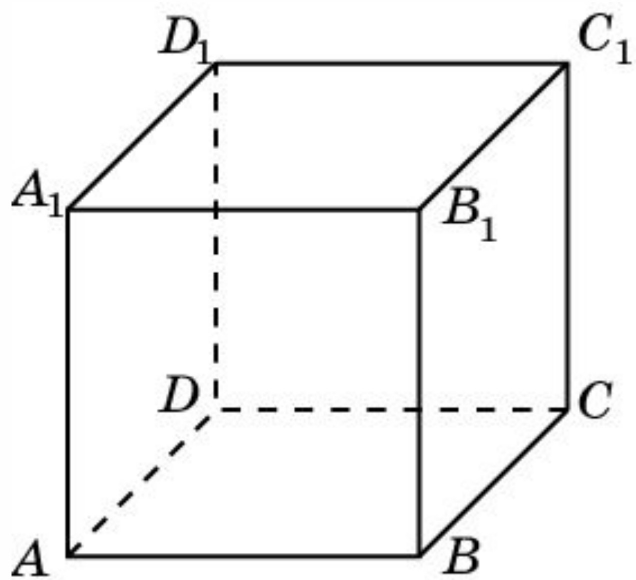
Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними прямой.

Теорема. (Признак перпендикулярности двух плоскостей.) Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



# Упражнение 4

В кубе $A \dots D_1$ укажите плоскости, проходящие через вершины куба, перпендикулярные плоскости: а) $ABC$; б) $BCD_1$.




Ответ: а) $ABB_1$, $BCC_1$, $CDD_1$, $ADD_1$, $ACC_1$, $BDD_1$;

б) $ABB_1$, $CDD_1$, $AB_1C_1$.

# ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

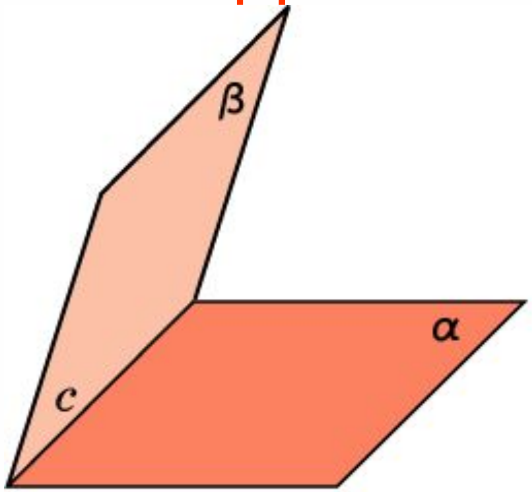



Рис. 1

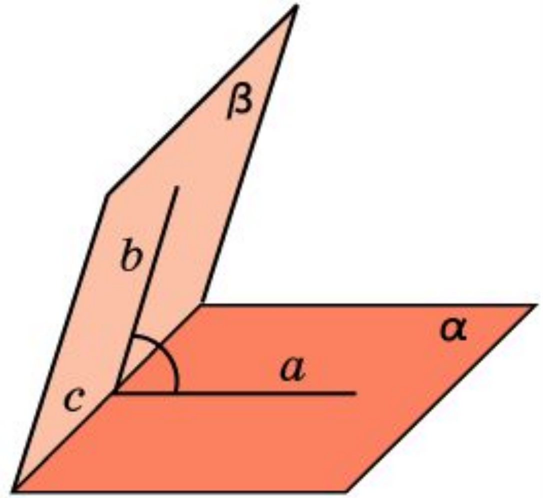



Рис. 2

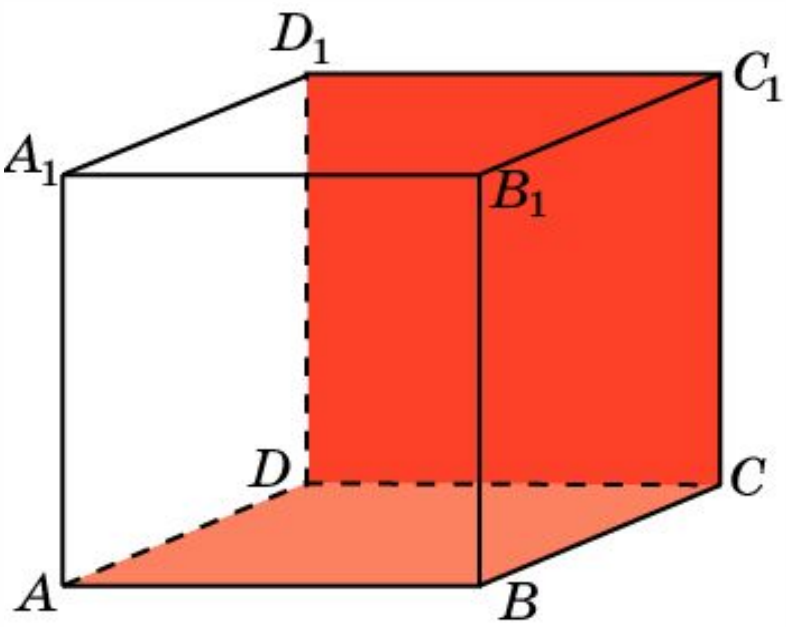
Двугранным углом называется фигура (рис. 1), образованная двумя полуплоскостями, с общей ограничивающей их прямой, и частью пространства, ограниченной этими полуплоскостями. Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая граничная прямая – ребром двугранного угла.

Линейным углом двугранного угла называется угол, полученный в результате пересечения данного двугранного угла и какой-нибудь плоскости, перпендикулярной его ребру (рис. 2).

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

# Упражнение 5

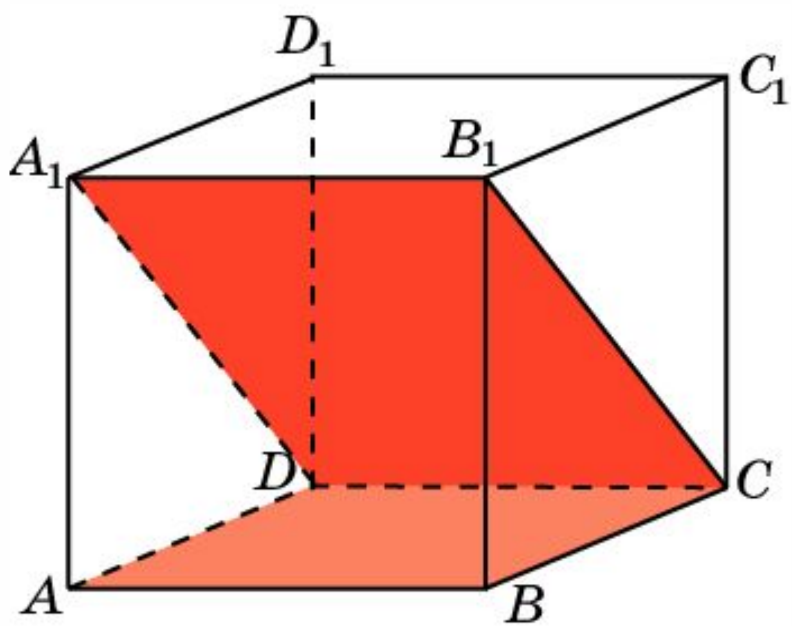
В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между плоскостями $ABC$ и $CDD_1$.




Ответ: 90°.

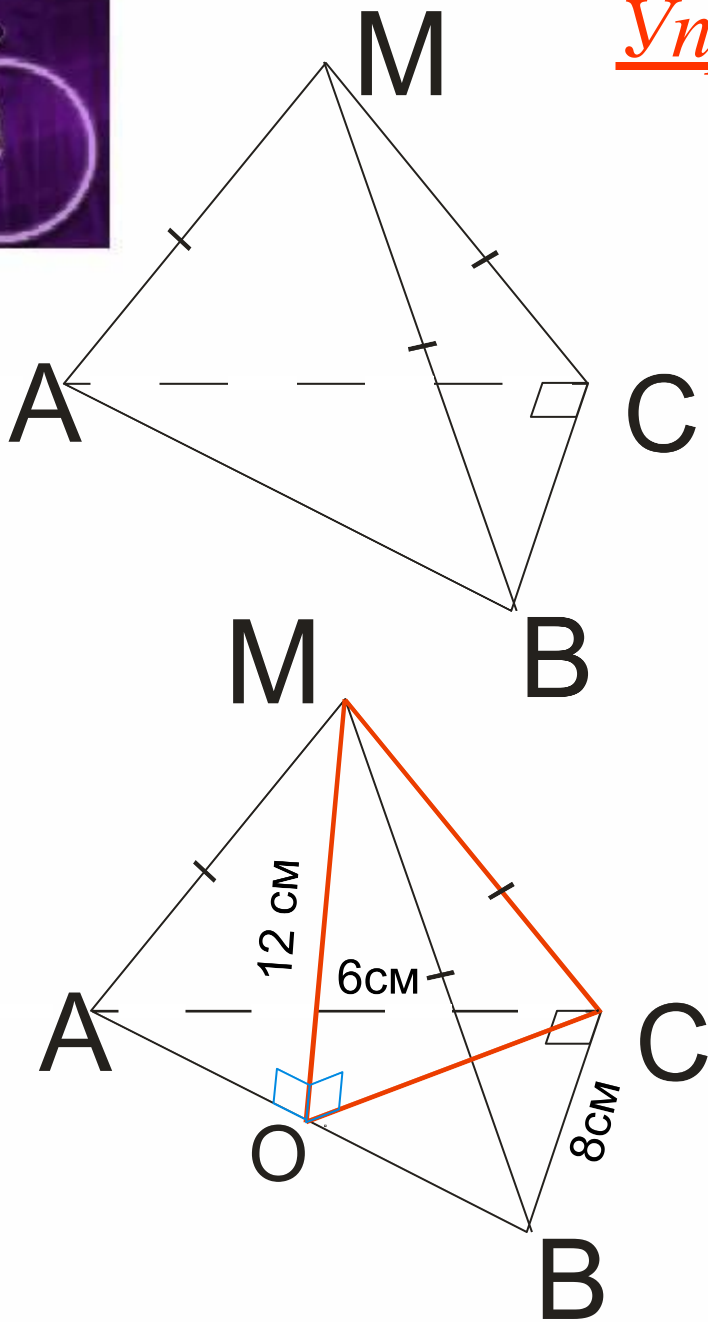
## Упражнение 6

В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между плоскостями $ABC$ и $CDA_1$.




Ответ: 45°.

# Упражнение 7




$Дано: \Delta ABC$, $где\ \angle C = 90°$, $M \notin (ABC)$

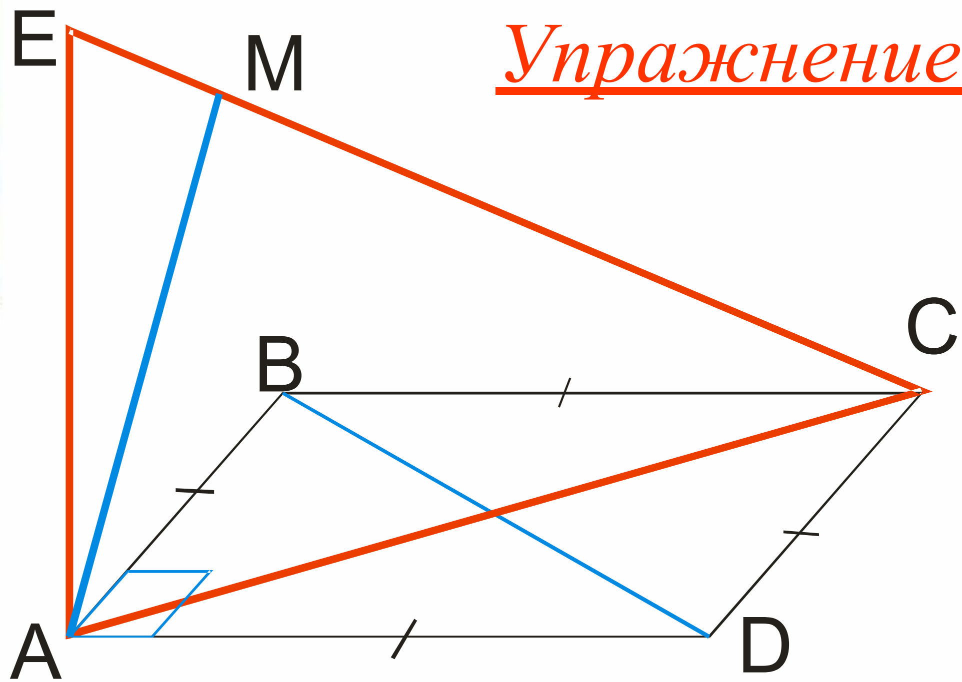
$AM = MC = MB$, $AC = 6см$, $BC = 8см$

$MO$ – $расстояние\ от\ точки\ M\ до\ (ABC)$

$MO = 12см.$

*Найти: расстояние от точки M до вершины B*

# Упражнение 8




$ABCD$ – квадрат

$AE \perp (ABC)$

$M \in EC$

Найти угол между рямыми $BD$ и $AM$

Решение:

$AC \perp BD$ по свойству диагоналей квадрата.

$$\left.\begin{array}{l} AE \perp (ABC) \text{ – по усл.} \\ BD \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow AE \perp BD \text{ (по опр.)}$$

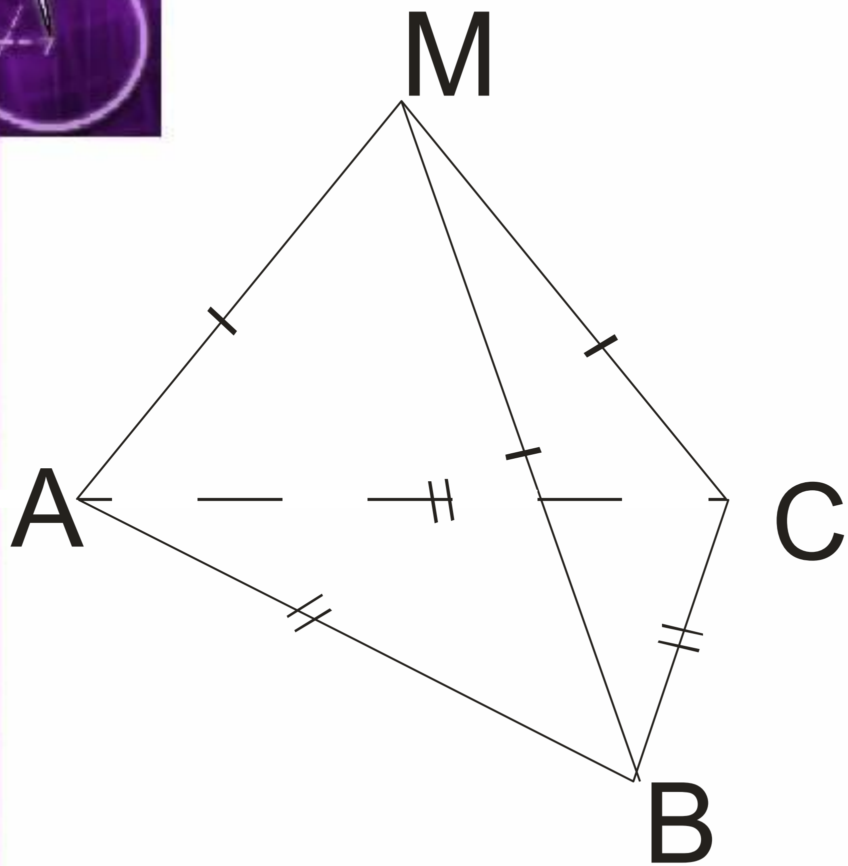
$AC \cap AE$ и лежат в одной плоскости

следовательно по признаку перпендикулярности

прямой и плоскости, $\left.\begin{array}{l} BD \perp (AEC) \\ AM \subset (AEC) \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp AM$,

а значит, угол между $BD$ и $AM$ равен $90°$.

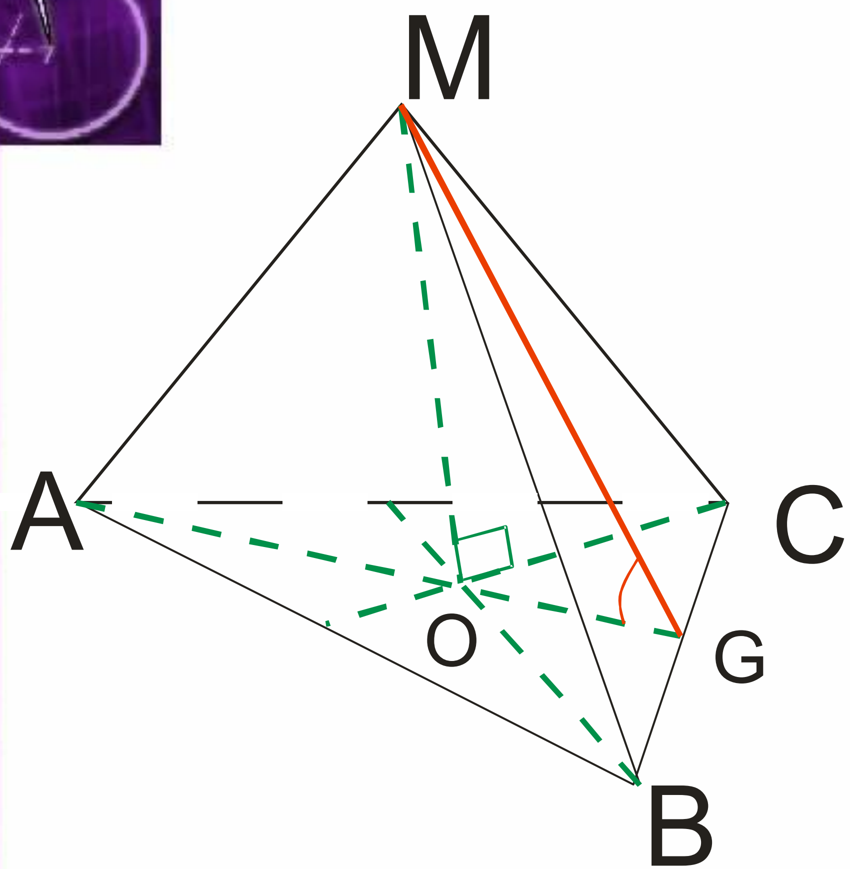
# Упражнение 9




Точка М равноудалена от всех вершин правильного треугольника АВС, сторона которого равна 4 см. Расстояние от точки М до плоскости АВС равно 2 см.

1) Докажите, что(АМО)$\perp$(ВМС), где О – основание перпендикуляра, опущенного из точки М на плоскость АВС.
2) Найдите угол между (ВМС) и (АВС)
3) Найдите угол между прямой МС и плоскостью АВС.

# Упражнение 10




*Дано*: $\Delta ABC$ – *правильный*

$M \notin (ABC)$, $AM = CM = BM$

$AB = 4$*см*, $MO$ – *расстояние*

*от точки* $M$ *до* $(ABC)$,

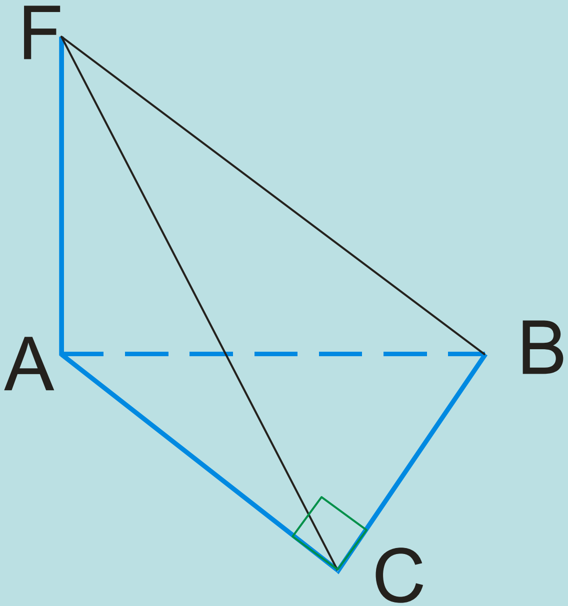
$MO = 2$*см*.

*Доказать*:

1. $(AMO) \perp (BMC)$

2. *Найти угол между* $(BMC)$ *и* $(ABC)$

3. *Найти угол между* $MC$ *и* $(ABC)$

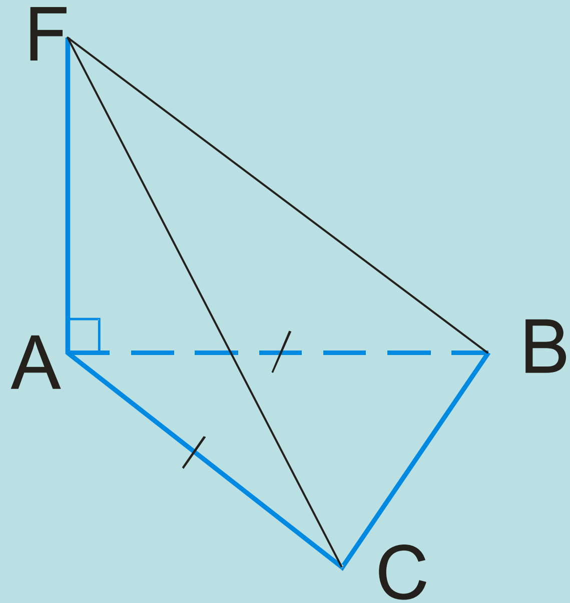



*Дано*: $AF \perp (ABC)$

$\Delta ABC$ – *прямоугольный*

$\angle C = 90°$

*Найти*: *угол между* $(ABC)$ *и* $(FCB)$

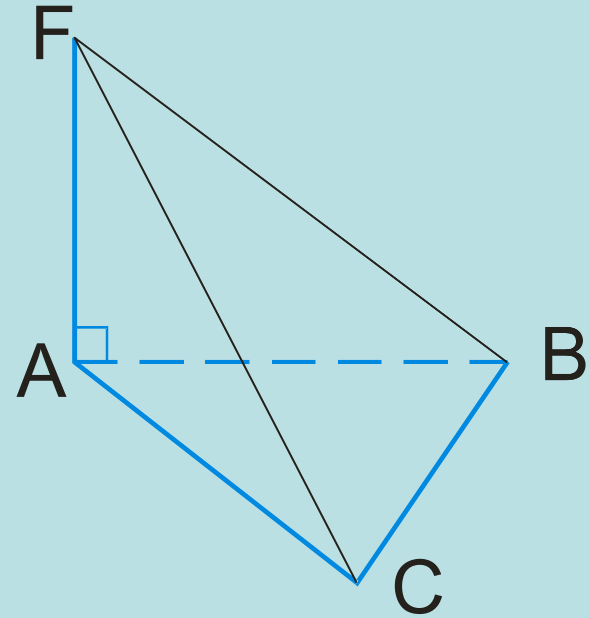



*Дано*: $AF \perp (ABC)$

$\Delta ABC$ – *равнобедренный*

$AB = AC$

*Найти*: *угол между* $(ABC)$ *и* $(FCB)$




*Дано*: $AF \perp (ABC)$

$\Delta ABC$ – *тупоугольный*

$\angle C$ – *тупой*

*Найти*: *угол между* $(ABC)$ *и* $(FCB)$