Четыре замечательные точки треугольника

Учитель математики МБОУ СОШ №4 г. Белгорода : Побегуца С.В.

Урок геометрии в 8 классе

ИЗ ИСТОРИИ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА

- В четвертой книге "Начал" Евклид решает задачу: "Вписать круг в данный треугольник". Из решения вытекает, что три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанного круга. Из решения другой задачи Евклида вытекает, что перпендикуляры, восстановленные к сторонам треугольника в их серединах, тоже пересекаются в одной точке – центре описанного круга. В "Началах" не говорится о том, что и три высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром (греческое слово "ортос" означает "прямой", "правильный"). Это предложение было, однако, известно Архимеду, Паппу, Проклу. Четвертой особенной точкой треугольника является точка пересечения медиан. Архимед доказал, что она является центром тяжести (барицентром) треугольника.

ИЗ ИСТОРИИ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА

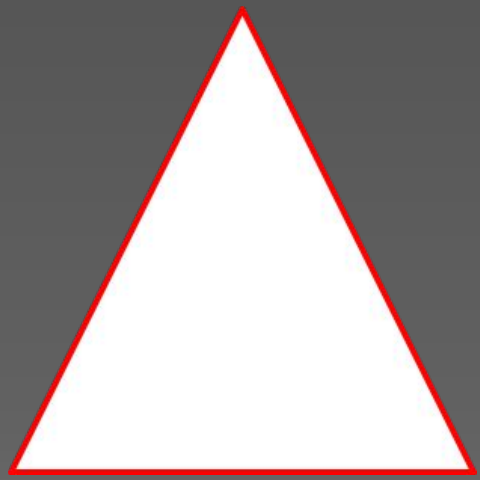
- На вышеназванные четыре точки было обращено особое внимание, и начиная с XVIII века они были названы "замечательными" или "особенными" точками треугольника. Исследование свойств треугольника, связанных с этими и другими точками, послужило началом для создания новой ветви элементарной математики – "геометрии треугольника" или "новой геометрии треугольника", одним из родоначальников которой стал Леонард Эйлер.
- В 1765 году Эйлер доказал, что в любом треугольнике ортоцентр, барицентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой, названной позже "прямой Эйлера".

ИЗ ИСТОРИИ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА

- В двадцатых годах XIX века французские математики Ж. Понселе, Ш. Брианшон и другие установили независимо друг от друга следующую теорему: основания медиан, основания высот и середины отрезков высот, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной и той же окружности.
- Эта окружность называется "окружностью девяти точек", или "окружностью Фейербаха", или "окружностью Эйлера". К. Фейербах установил, что центр этой окружности лежит на прямой Эйлера.
- Большой вклад в развитие геометрии треугольника внесли математики XIX – XX веков Лемуан, Брокар, Тебо и другие.

ВСПОМНИ:

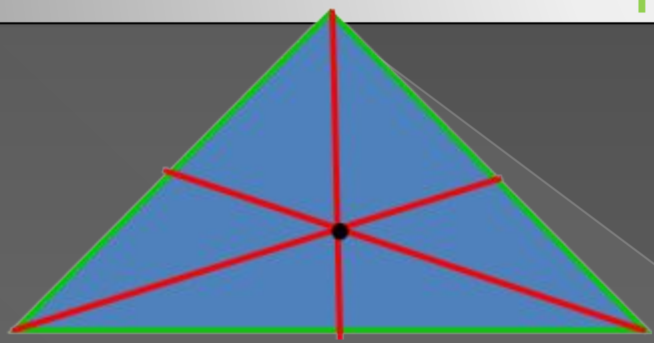
- Что называется :
- Медианой треугольника;
- Биссектрисой треугольника;
- Высотой треугольника;
- Серединным перпендикуляром к отрезку



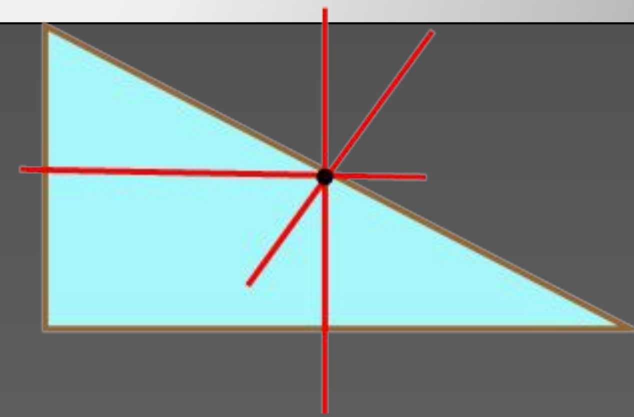
ВСПОМНИ

- Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны.
- Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы любого угла от вершины до пересечения с противоположной стороны
- Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противолежащую сторону или на ее продолжение.
- Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярно к нему.

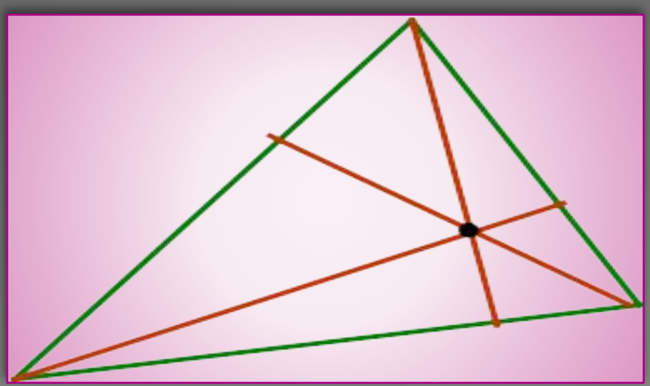
Четыре замечательные точки треугольника



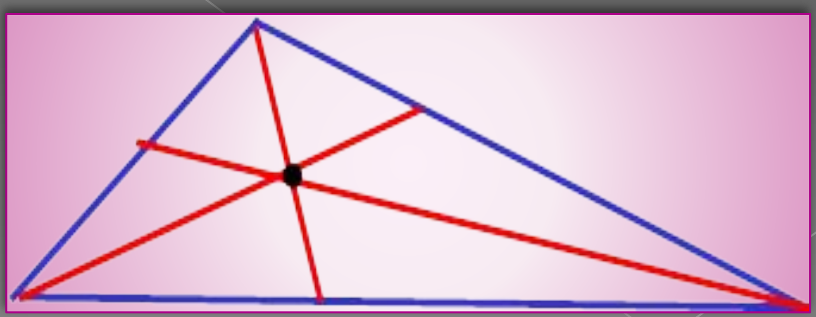
МЕДИАНЫ



СЕРЕДИННЫЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЫ



ВЫСОТЫ



БИССЕКТРИСЫ

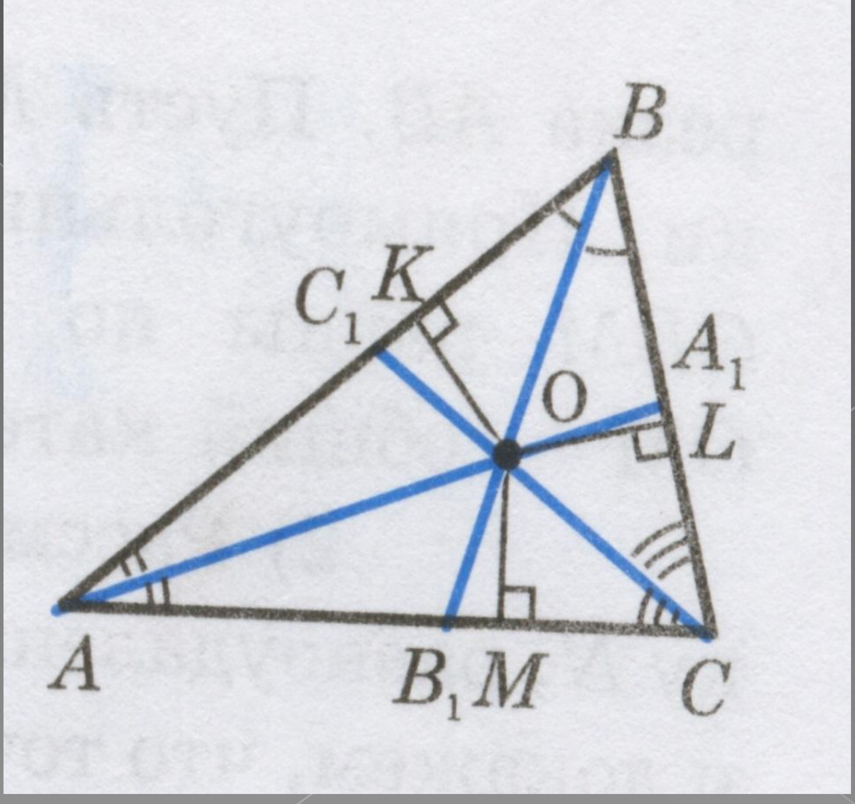
Первая замечательная точка треугольника-точка пересечения биссектрис

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Дано :ΔABC, AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы ΔABC

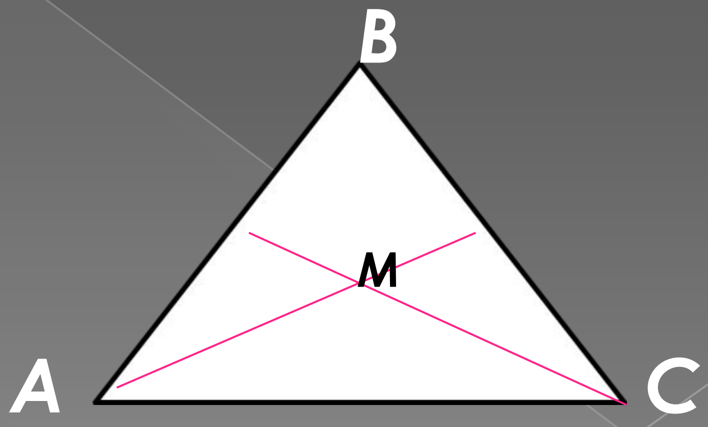
Доказать :$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$.

Доказательство : Пусть $AA_1 \cap BB_1 = O$, тогда если OK, OM, OL – перпендикуляры из O к сторонам ΔABC, то OK=OM, OK=OL – по свойству биссектрисы неразвернутого угла → OL=OM → O лежит на биссектрисе C (на CC_1) → $AA1 \cap BB1 \cap CC1 = O$.

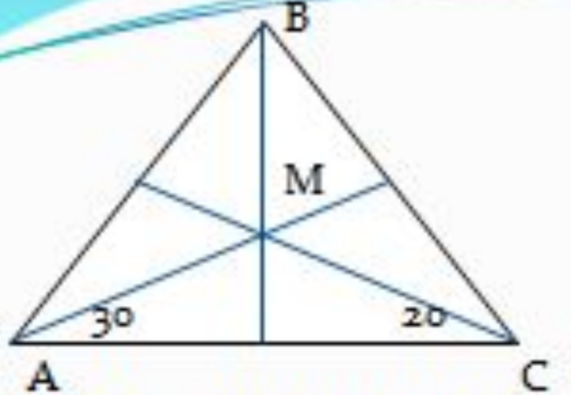


Реши задачу :

- Биссектрисы углов А и С треугольника АВС пересекаются в точке М. Найдите угол АВМ, если $\angle MAC$=30°, $\angle MCA$=20°



П Р О В Е Р Ь   Р Е Ш Е Н И Е



Дано:

$\Delta ABC, \angle MAC = 30°$,

$\angle MCA = 20°$.

Найти $\angle ABM$

Решение:

1.Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, следовательно луч BM является биссектрисой угла ABC, то есть $\angle ABM = \frac{1}{2}\angle ABC$.

2.По условию задачи лучи AM и CM биссектрисы углов A и C, поэтому $\angle A = 2 \cdot \angle MAC = 60°, \angle C = 2 \cdot \angle MCA = 40°$. Следовательно $\angle ABC = 180° - 60° - 40° = 80°$.

3.$\angle ABM = \frac{1}{2}\angle ABC = 40°$.

Ответ: 40°

Теорема о серединных перпендикулярах к сторонам треугольника

- Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.
- Дано: ΔABC, m-серединный перпендикуляр к *AB*,

n-серединный перпендикуляр к *BC*,

p-серединный перпендикуляр к *AC*.

- Доказать: $m \cap n \cap p = O$.
- Доказательство: $m \cap n = O$, т.к.

если m параллельна n,

то *m* перпендикулярна *BC*, и через *B*

проходят 2 прямые *AB, BC*,

перпендикулярные к *m*, чего не может

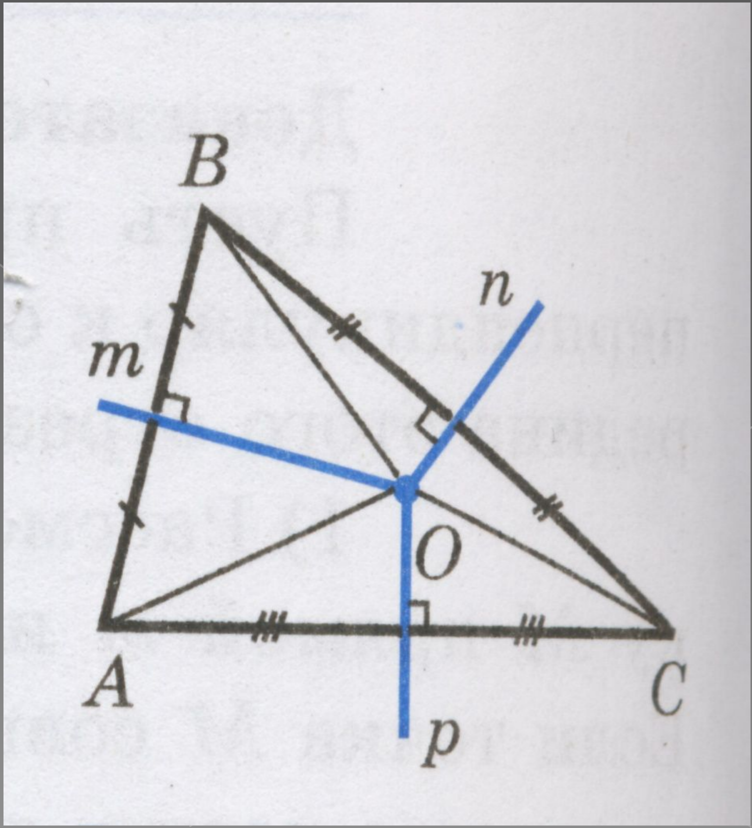
быть.

По свойству серединного перпендикуляра

к отрезку, *OA=OB, OB=OC* → *OA=OC* → *O*

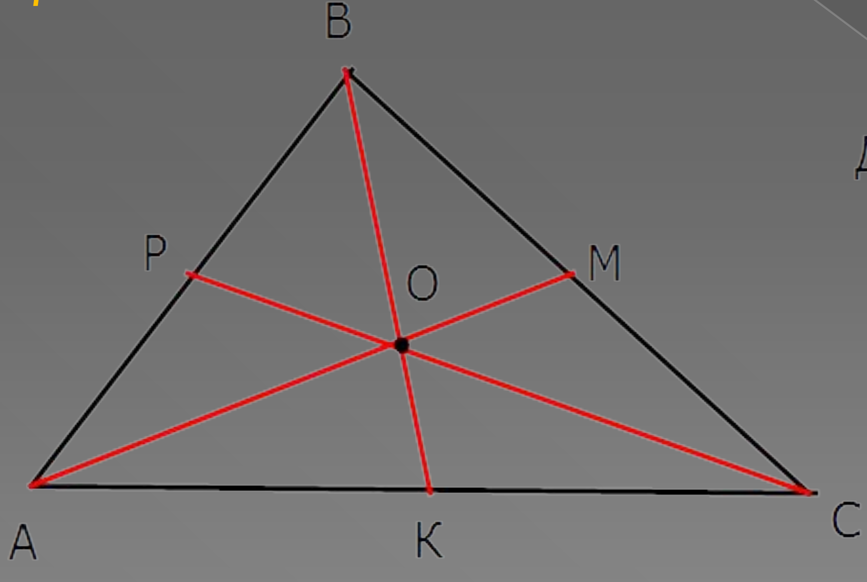
лежит на серединном перпендикуляре

к *AC*, т.е. на *p* → $m \cap n \cap p = O$.



Третья замечательная точка треугольника –точка пересечения медиан (центроид - цент тяжести треугольника)

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую в отношении 2: 1, считая от вершины.

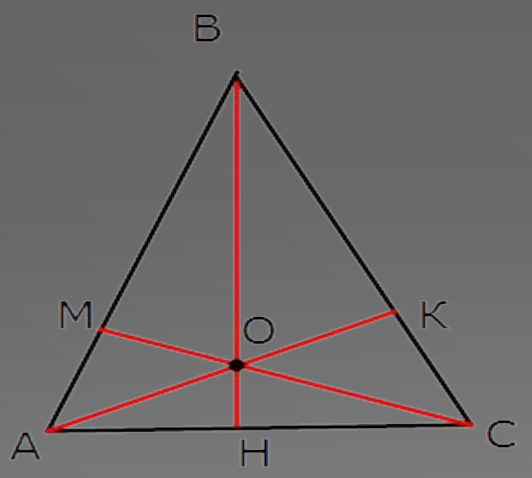


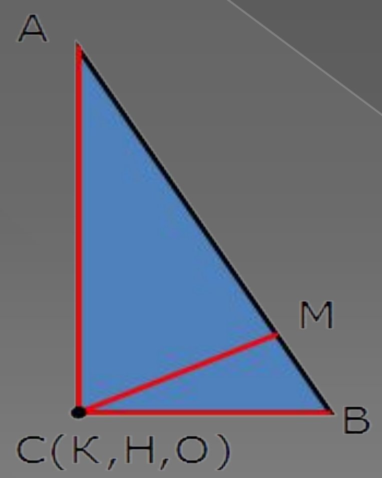
Дано: $\triangle$ ABC, AM,BK,CP - медианы

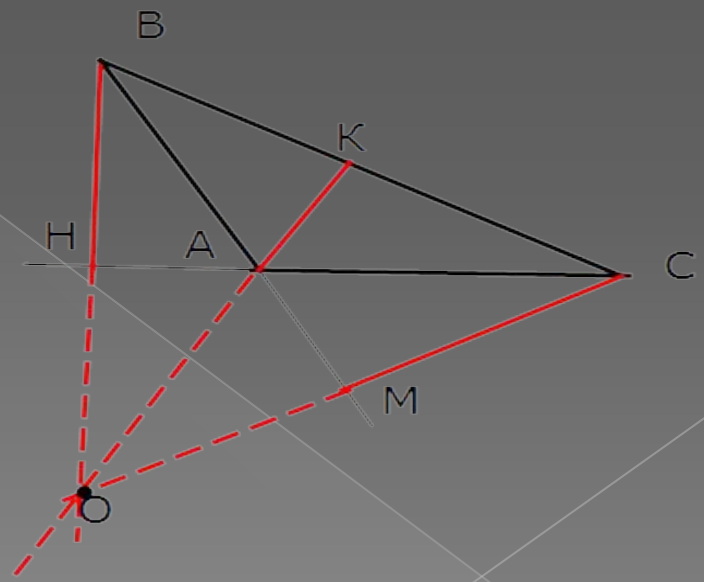
Доказать: $AM \cap BK \cap CP = O$

Четвёртая замечательная точка треугольника – точка пересечения высот (ортоцентр)

Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.





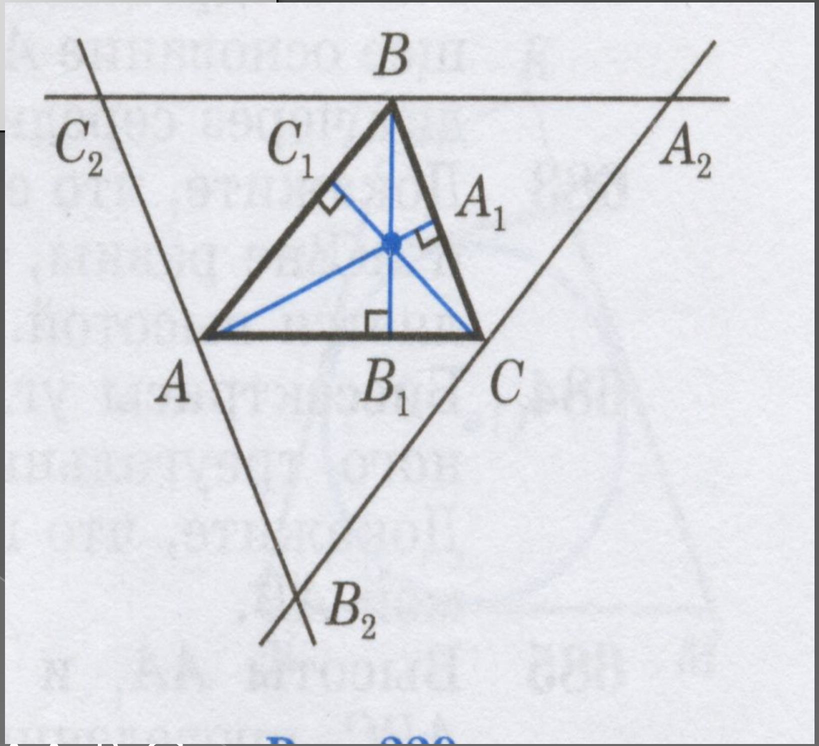


Дано: △ABC, AK, BH, CM - высоты

Доказать: O – точка пересечения высот или их продолжений.

Теорема о высотах треугольника

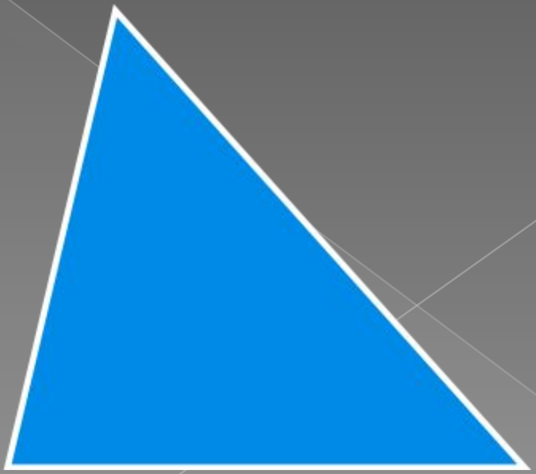
- *Прямые, на которых лежат высоты треугольника, пересекаются в одной точке.*
- *Дано:* ΔABC, AA_1, BB_1, CC_1 – высоты ΔABC.
- *Доказать:* $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$.
- *Доказательство:*



Проведем через каждую вершину ΔABC прямую, параллельную противоположной стороне. Получим $\Delta A_2B_2C_2$.
$A_2C=B_2C$, $B_2A=C_2A$, $A_2B=C_2B$ (объясните почему)
и по построению AA_1, BB_1, CC_1- перпендикуляры к сторонам $\Delta A_2B_2C_2 \rightarrow AA_1$, BB_1, CC_1- серединные перпендикуляры к сторонам $\Delta A_2B_2C_2 \rightarrow AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$.

Задача :

- В остроугольном   ABC , AD перпендикулярна BC, CF перпендикулярна AB, AD пересекает CF в точке M.
- Докажите, что угол ABM равен углу MCA.



Контрольные вопросы

- Дайте определение медиане треугольника.
- Сформулируйте теорему о медианах треугольника.
- Дайте определение биссектрисе треугольника.
- Сформулируйте свойство биссектрисы неразвернутого угла и обратное утверждение.
- Сформулируйте теорему о биссектрисах треугольника.
- Дайте определение серединному перпендикуляру к отрезку.
- Сформулируйте свойство серединного перпендикуляра к отрезку и обратное утверждение.
- Сформулируйте теорему о серединных перпендикулярах к сторонам треугольника.
- Дайте определение высоте треугольника.
- Сформулируйте теорему о высотах треугольника.

З А П О М Н И !

- 1. Точка пересечения биссектрис является центром вписанной окружности.
- 2. Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника является центром описанной окружности.
- 3.Точка пересечения медиан, называется центром тяжести треугольника. (Центроид). .
- 4. Точка пересечения высот называется ортоцентр.

Самостоятельная работа

1 вариант (2 вариант)

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC *(BC)* (серединный перпендикуляр стороны AB (AC)пересекает основание AC (BC) в точке P (M). Найдите угол C (*угол CAM*), если ABP = 52˚(*ABC = 43*˚)
2. Постройте точку на катете прямоугольного треугольника, равноудаленную от гипотенузы и другого катета.

2.Постройте точку на боковой стороне равнобедренного треугольника, равноудаленную от основания и другой боковой стороны.

УРОК ОКОНЧЕН.

СПАСИБО !