# Задачи по геометрии на доказательство

Начиная с 7 класса, дети под руководством учителя учатся решать задачи на доказательство.

В самом начале процесса подготовки к экзаменам, на уроках рассматриваются критерии оценивания задач второй части. Например, «Задача по геометрии на доказательство» 0 – 2 балла. Эти критерии применяем в дальнейшей работе. На основе этих критериев строим последующие само- и взаимопроверки.

На слайдах предоставлены несколько заданий: задача и ее решение.

*Окружности и их элементы*. При разборе предложенного номера многие учащиеся могут поставить 2 балла, но внимательные дети обратят внимание, что задание не выполнено, т.к. нет ответа на поставленный вопрос.

*Треугольники, четырехугольники и их элементы*. После решения задачи, предлагается проверить чьи-нибудь работы, с обязательным выставлением соответствующих баллов. Для начала можно работать с задачами не очень сложными, постепенно усложняя их, главное в данном случае, что дети учатся самопроверке, самоконтролю, что немаловажно в написании последующего экзамена.

Практика показывает, что после небольшого количества проверенных учащимися работ, ими выдвигается еще один пункт критериев оценивания – это аккуратность написания, возможность прочтения записей.

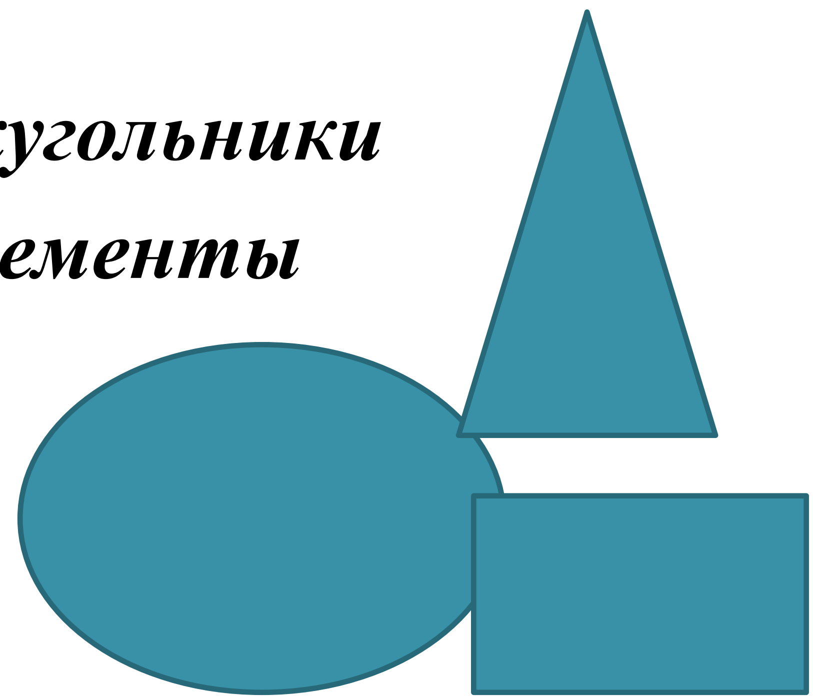
| Баллы | Содержание критерия |
|---|---|
| 2 | Доказательство верное, все шаги обоснованы. |
| 1 | Доказательство в целом верное, но содержит неточности. |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |
| 2 | *Максимальный балл.* |

# Задачи на доказательство

***Окружности и их элементы***

***Треугольники и их элементы***

***Четырехугольники и их элементы***

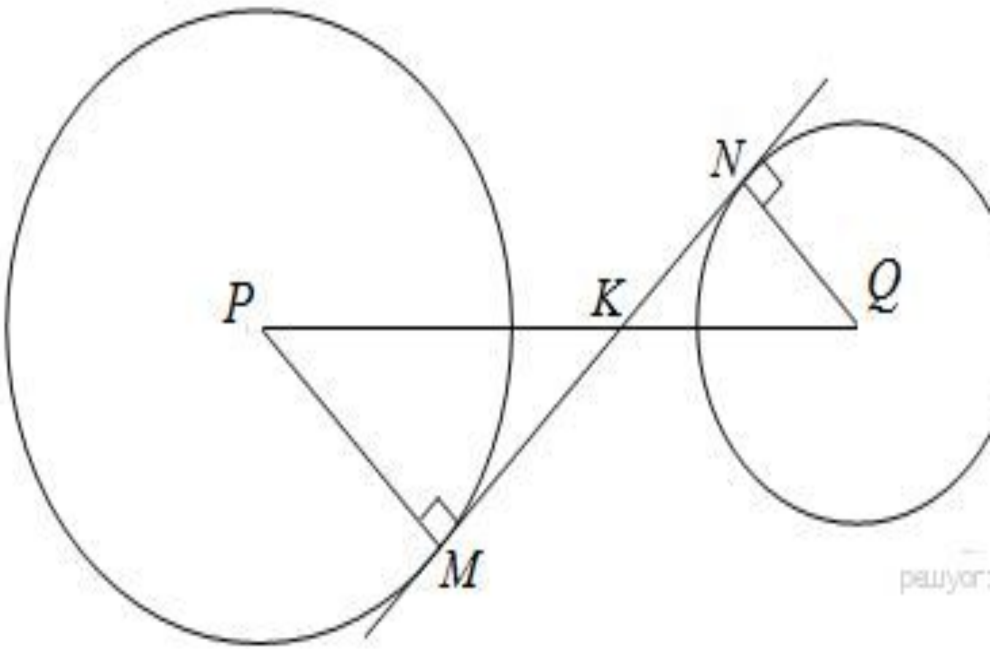


# Окружности и их элементы

Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $a:b$.

Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $a:b$.

# Доказательство:




MN- касательная, проведем

отрезок PQ,

PM– радиус, тогда $\angle PMK = 90°$,

NQ - радиус, тогда $\angle QNK = 90°$.

$\angle PKM = \angle QKN$ –

вертикальные, значит

треугольники PMK и

QNK подобные.

Значит PK:QK = PM:QN =

MK:KN,

откуда PM:QN = $a$:$b$.

# Окружности и их элементы

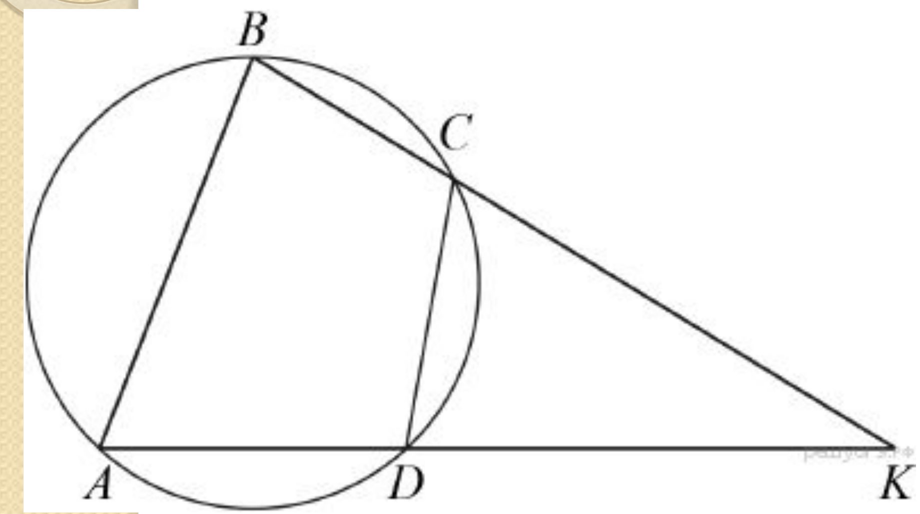
Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $a:b$.

Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $a:b$.

# Треугольники и их элементы

Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон $AD$ и $BC$ четырёхугольника пересекаются в точке $K$. Докажите, что треугольники $KAB$ и $KCD$ подобны.

# Доказательство:




Четырёхугольник $ABCD$

вписанный, значит

$\angle ABC + \angle ADC = 180°$.

Следовательно,

$\angle KDC = 180° - \angle ADC = \angle ABC$.

Получаем, что в треугольниках

$KAB$ и $KCD$ $\angle ABK = \angle CDK$,

$\angle K$ -общий,

следовательно, эти треугольники подобны .

Дано: ABCD – вписанный

AD ∩ BC = т. K.

Доказать:

$\triangle KAB \sim \triangle KCD$

Доказательство:

ABCD – вписанный,

значит

$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$,

$\angle ABC = 180^\circ - \angle ADC$.

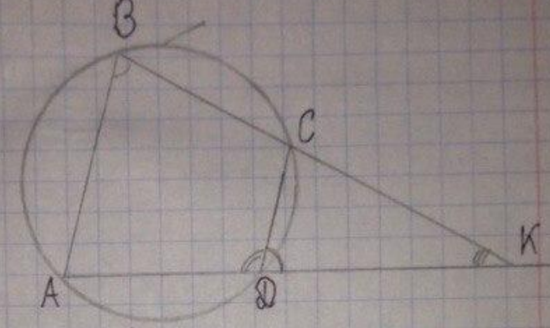
$\angle ADK$ – развернутый,

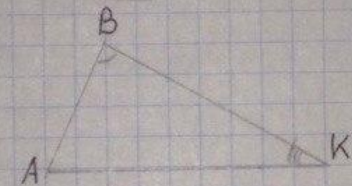
значит $\angle KDC = 180^\circ - \angle ADC$,

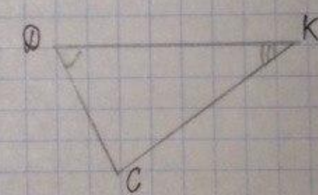
тогда $\angle ABC = \angle KDC$.

$\triangle KAB \sim \triangle KCD$: $\angle ABC = \angle KDC$,

$\angle K$ – общий (по II признаку)



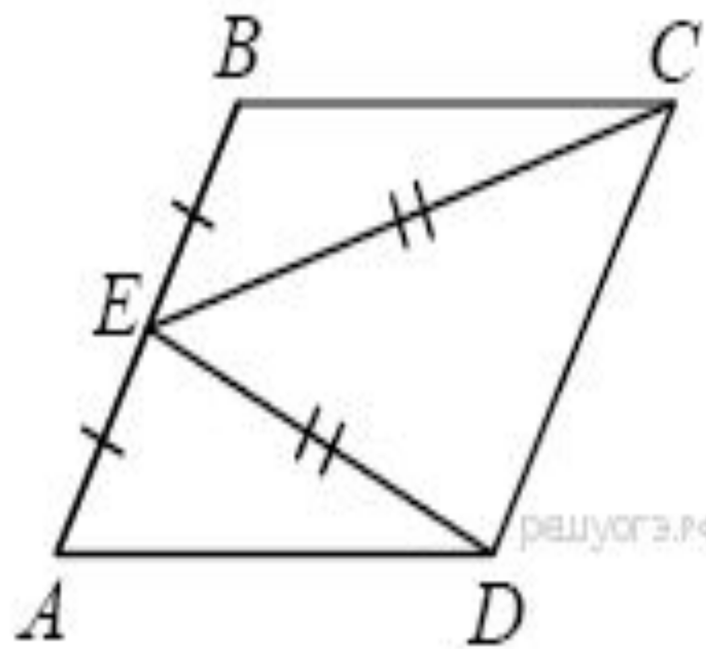

2 балла.

# Четырёхугольники и их элементы

В параллелограмме $ABCD$ точка $E$ — середина стороны $AB$. Известно, что $EC=ED$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

# Доказательство:

Треугольники $BEC$ и $AED$ равны по трём сторонам. Значит, углы $CBE$ и $DAE$ равны. Так как их сумма равна 180°, то углы равны 90°. Такой параллелограмм — прямоугольник.

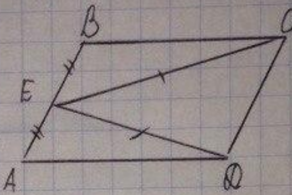


Дано: ABCD - параллелограмм,

E - середина AB, EC = ED

Доказать: ABCD - прямоугольник.

Доказательство:




EC = ED - по условию

EB = AE, т.к т. E - середина AB.

BC = AB, т.к.

противоположные стороны параллелограмма,

значит $\triangle EBC = \triangle EAD$ по III признаку.

Тогда $\angle EBC = \angle EAD$.

AB - секущая при прямых BC и AD, значит

$\angle EBC + EAD = 180°$.

$\angle EBC = \angle EAD = \cancel{18}\ \frac{180°}{2} = 90°$,

тогда и $\angle BCD = \angle ADC = 90°$.

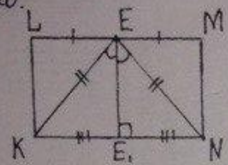
ABCD - прямоугольник.

2 б.

| **Баллы** | **Содержание критерия** |
|---|---|
| 2 | Доказательство верное, все шаги обоснованы. |
| 1 | Доказательство в целом верное, но содержит неточности. |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |
| 2 | *Максимальный балл.* <u>Рассматриваем как дополнительный критерий : аккуратность написания, возможность прочтения записей</u>. |

**Пример 9**

№20.



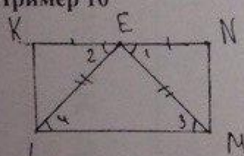

Дано: KLMN – параллелограмм; $LE = EM$, $EK = EN$.

Доказать: KLMN – прямоугольник.

Доказательство: проведем высоту $EE_1$ к стороне KN; $\Delta KEN$ – равнобедренный, т.к. $EK = EN \Rightarrow EE_1$ – высота, биссектриса и медиана $\Rightarrow KE_1 = E_1N$, $EE_1$ – общая сторона и $\angle KE_1E = \angle EE_1N$, т.к. $180° - 90 = 90°$ $\Rightarrow \Delta KEE_1 = \Delta EE_1N$ по 1 признаку; рассмотрим $\Delta KLE$ и $\Delta KEE_1$: $\angle LEK = \angle EKE_1$ т.к. накрест лежащие по свойству параллельных прямых, KE – общий, и $\angle KEE_1 = \angle LKE \Rightarrow \Delta KLE = \Delta KEE_1$ по 2 признаку, аналогично с $\Delta EE_1N$ и $\Delta EMN \Rightarrow \Delta E_1EN = \Delta EMN \Rightarrow \angle L = \angle E_1 = \angle M = \angle E_1 = 90° \Rightarrow \angle L = \angle M = \angle N = \angle K = 90° \Rightarrow$ KLMN – прямоугольник.

Об.

**Пример 10**




Дано: KLMN – параллелограмм.

$KE = EN$, $EL = EM$

D! KLMN – прямоугольник

Рассмотрим $\Delta LKE$ и $\Delta MNE$, они равны по двум сторонам и углу между ними: 1) $EL = EM$ (по усл.); 2) $KE = EN$ (по усл.) 3) $\angle KEL = \angle NEM$, т.к. $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$ (накр. лежащие $\angle$ при парал. прямых), а $\angle 3 = \angle 4$, т.к. $\Delta ELM$ – равнобедр. (видно по рисунку)

Теперь докажем, что $\angle L = \angle M$

1) $\angle KLE = \angle NME$ (следует из равенства $\Delta$)
2) $\angle ELM = \angle EML$ ($\Delta ELM$ – равнобедр., $\angle 3 = \angle 4$) $\Big\} \Rightarrow \angle L = \angle M$

Значит, $\angle K = \angle N$, $\angle L = \angle M$

Так как данный четырехугольник – параллелограмм, то его противоположные стороны равны, тогда $\angle K = \angle M$, $\angle L = \angle N \Rightarrow \angle K = \angle M = \angle L = \angle N = 90°$ (сумма $\angle$ в четырехуг. равна $360°$). А поскольку все углы в параллелограмме равны $90°$, то этот параллелограмм является прямоугольником.

Что и требовалось доказать!

2б