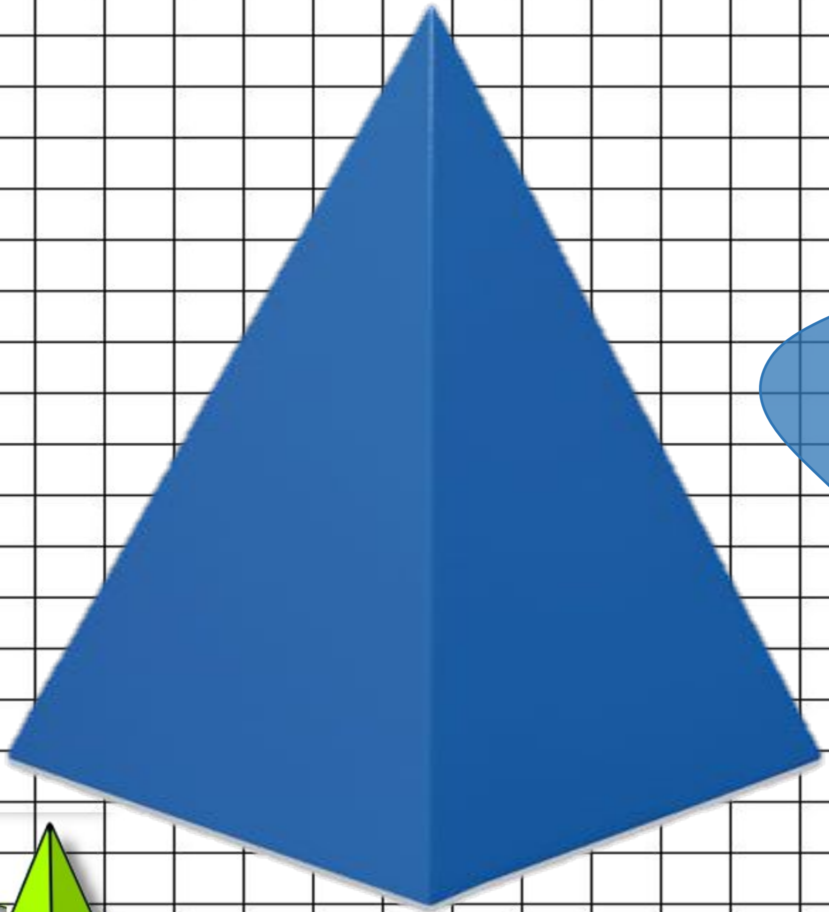
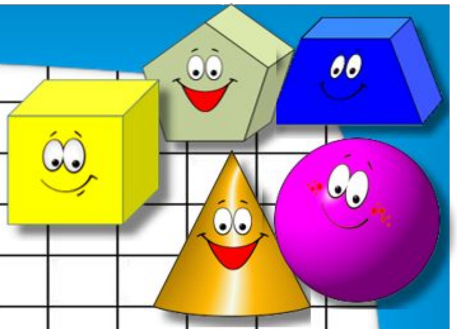
Урок геометрии
11 класс

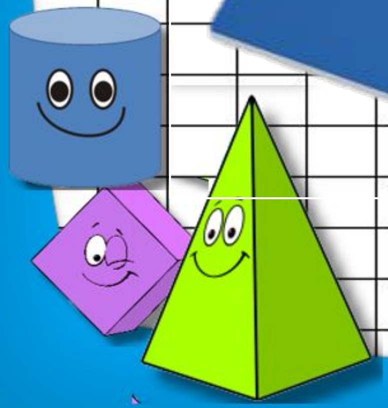


Пирамида. Правильная пирамида

Предметная область: геометрия

Автор: Бобылева Елена Александровна
Учитель математики и информатики
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №146
г. Челябинск

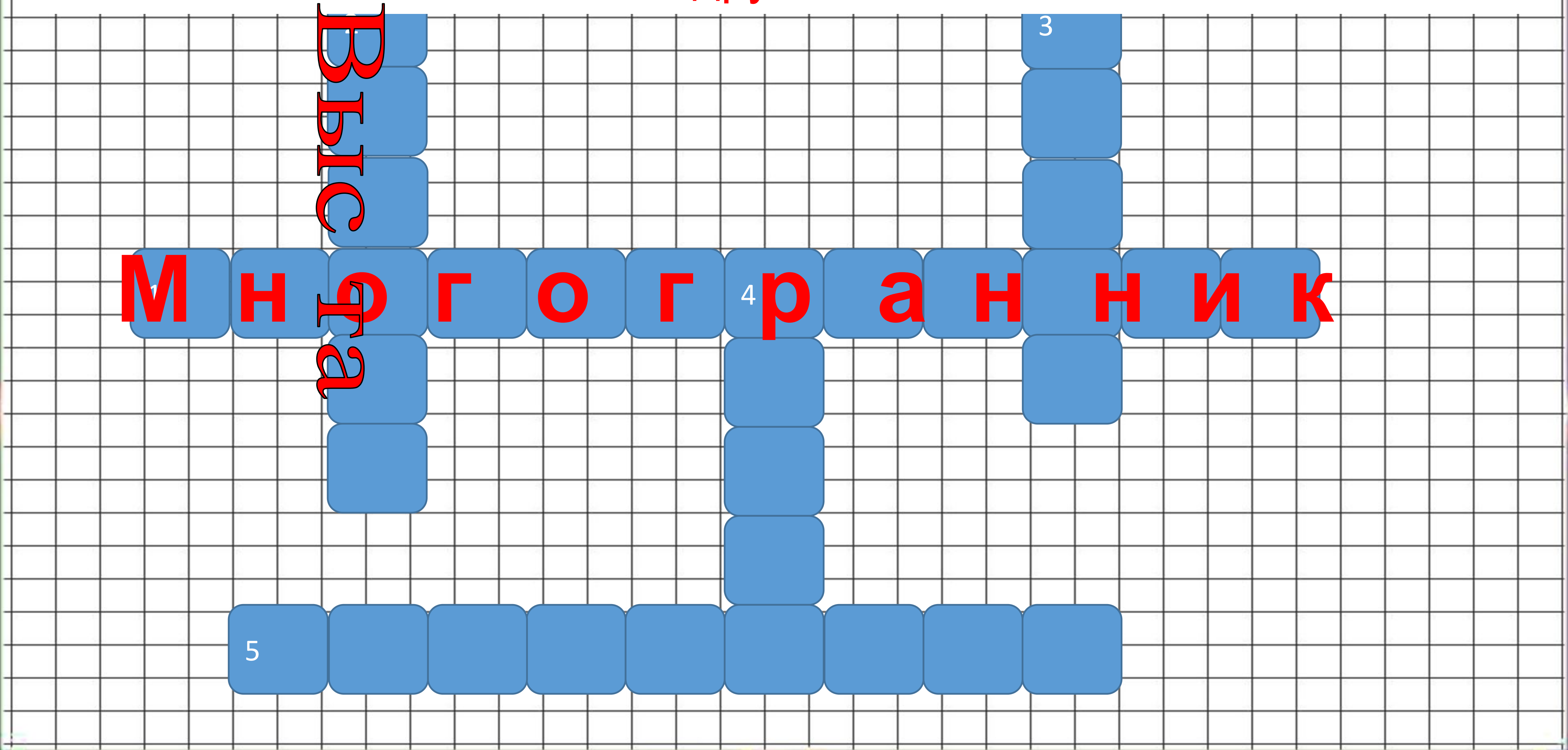




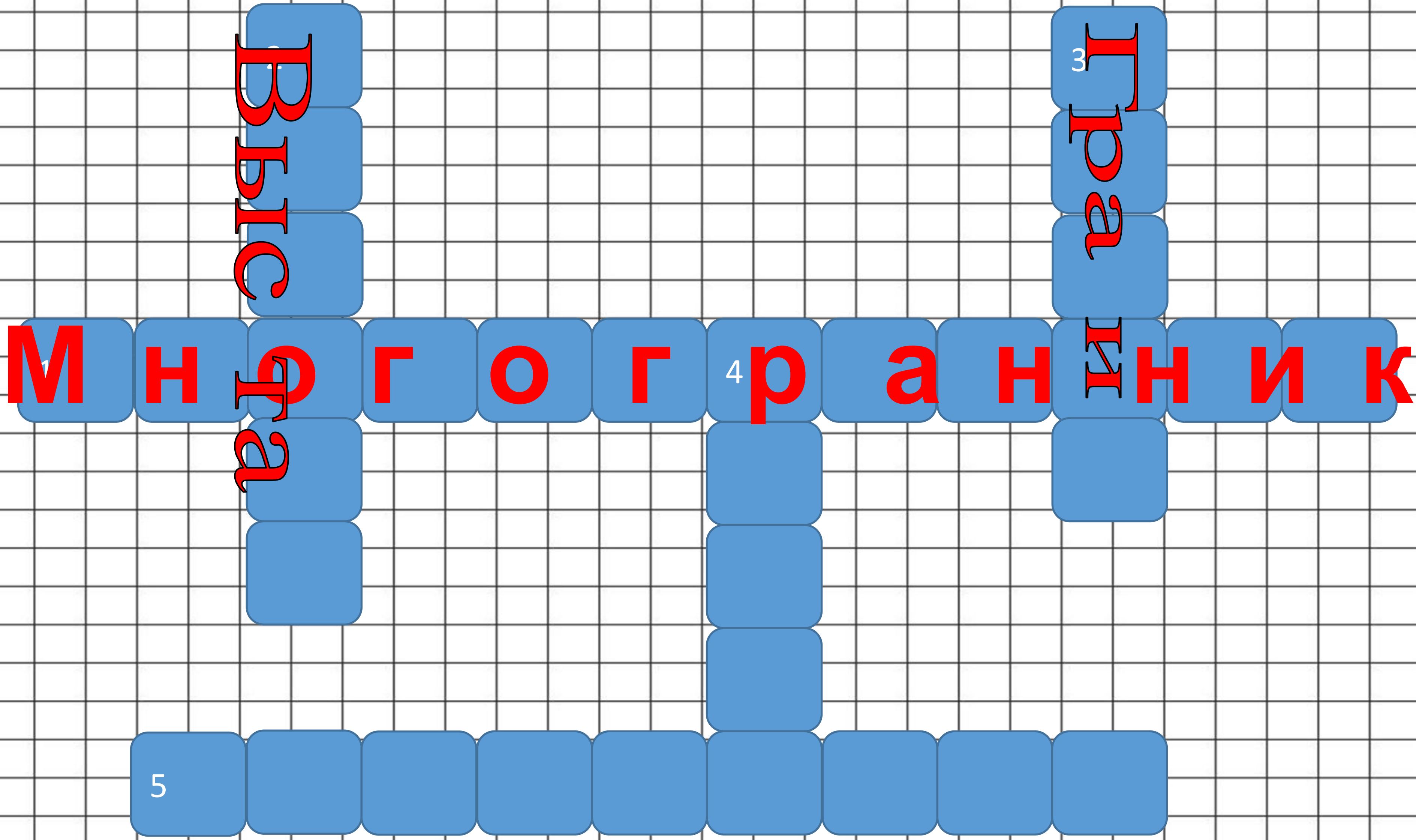
Повторение

1. Поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело

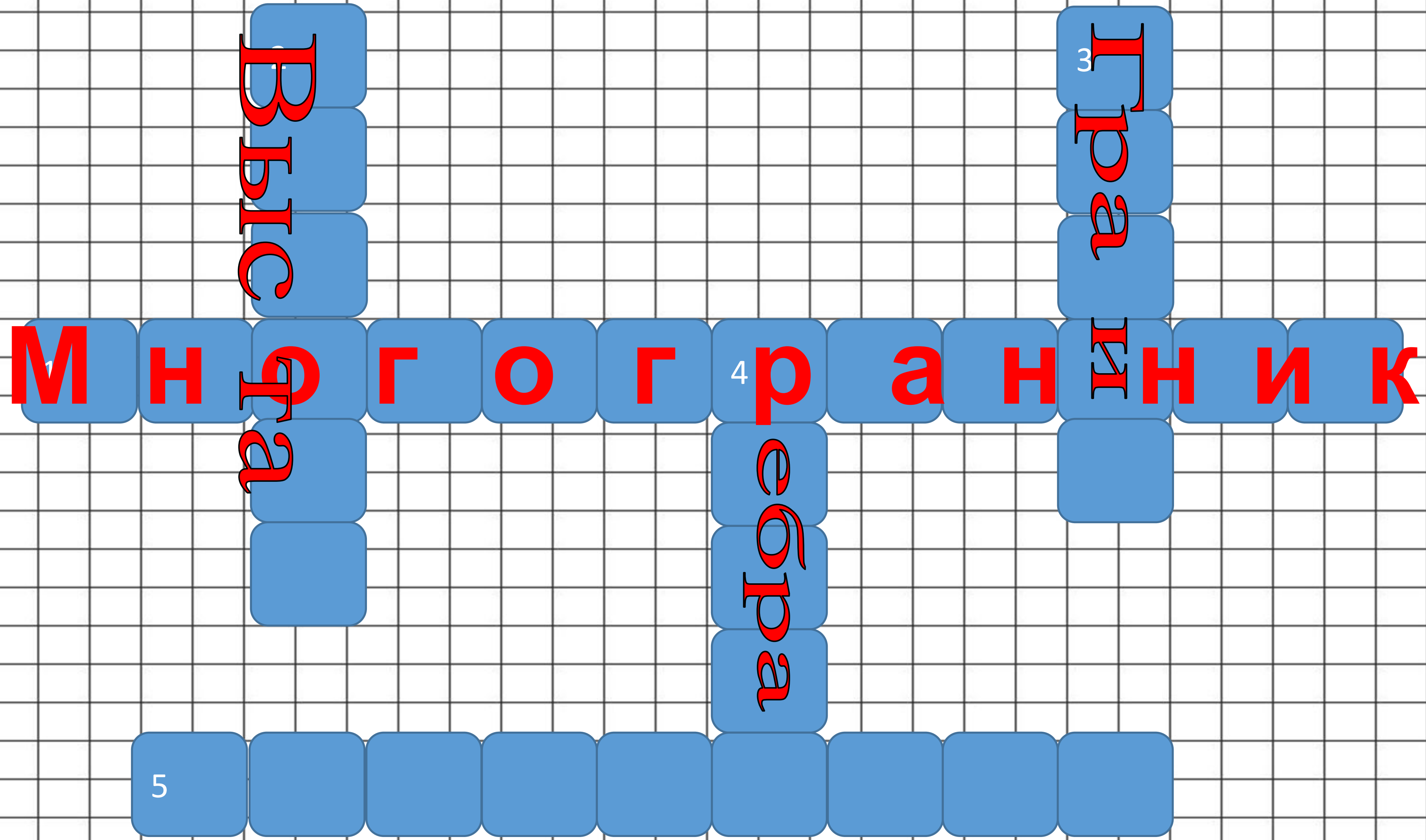
2. Перпендикуляр, опущенный из любой точки основания на плоскость другого основания.



3. Это многоугольники, составляющие многогранник



4. Стороны граней



5. ….. призмы равны и лежат в параллельных плоскостях

2 Высота

3 Грани

1 Многогранник

4 ребра

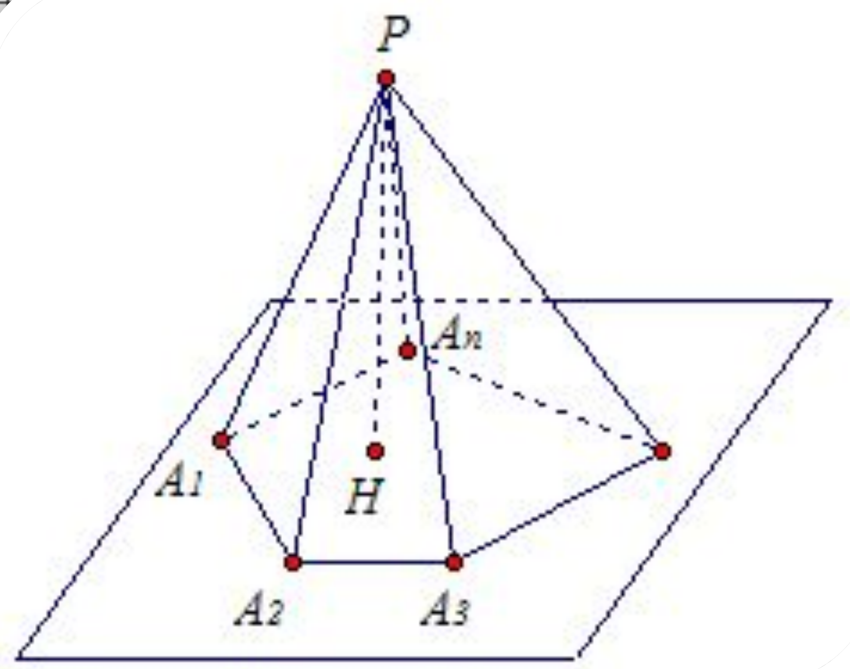
5 основ ния

Определите тему нашего урока

Египтяне их сложили
И так ловко смастерили,
Что стоят они веками.
Догадайтесь, дети, сами
Что же это за тела,
Где вершина всем
видна?
Догадались? Из-за вида
Всем и

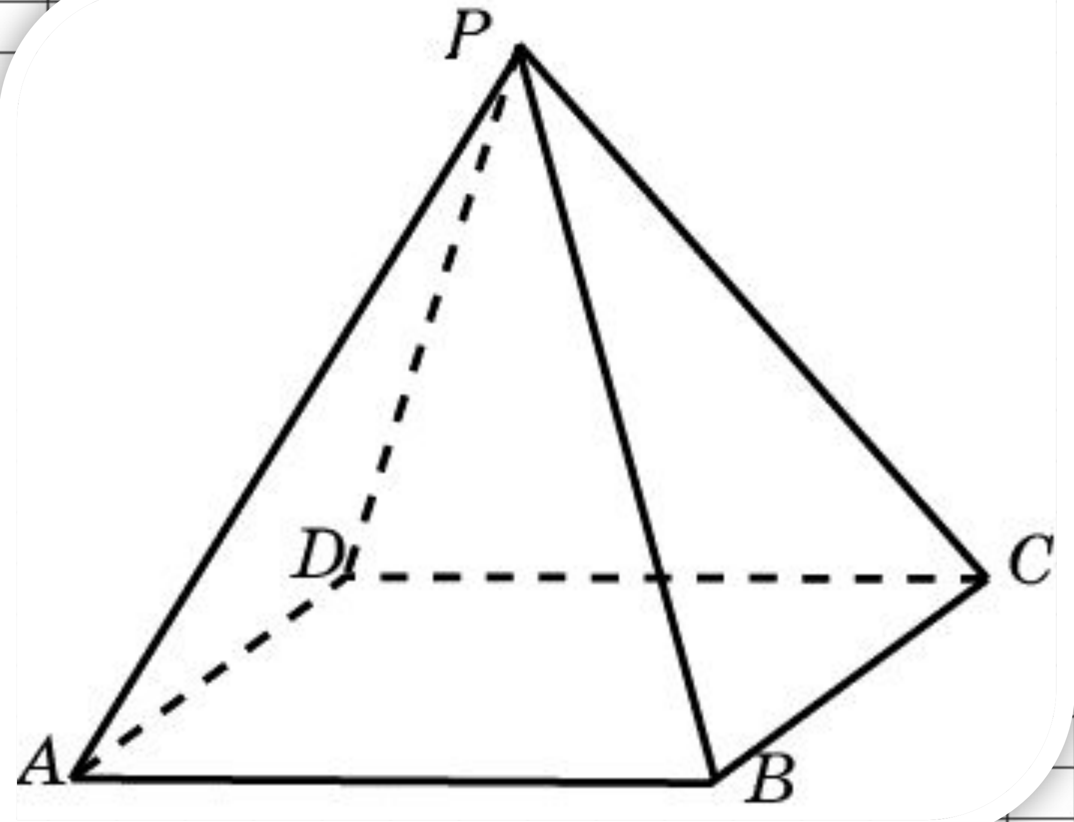
Пирамида

Рассмотрим пирамиду с математической точки зрения



Многогранник $PA_1A_2\ldots A_n$, составленный из n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ и n треугольников PA_1A_2, PA_2A_3 $\ldots PA_nA_{n-1}$, называется n-угольной пирамидой

Примеры пирамид



Рассмотрим четырехугольную пирамиду *PABCD*

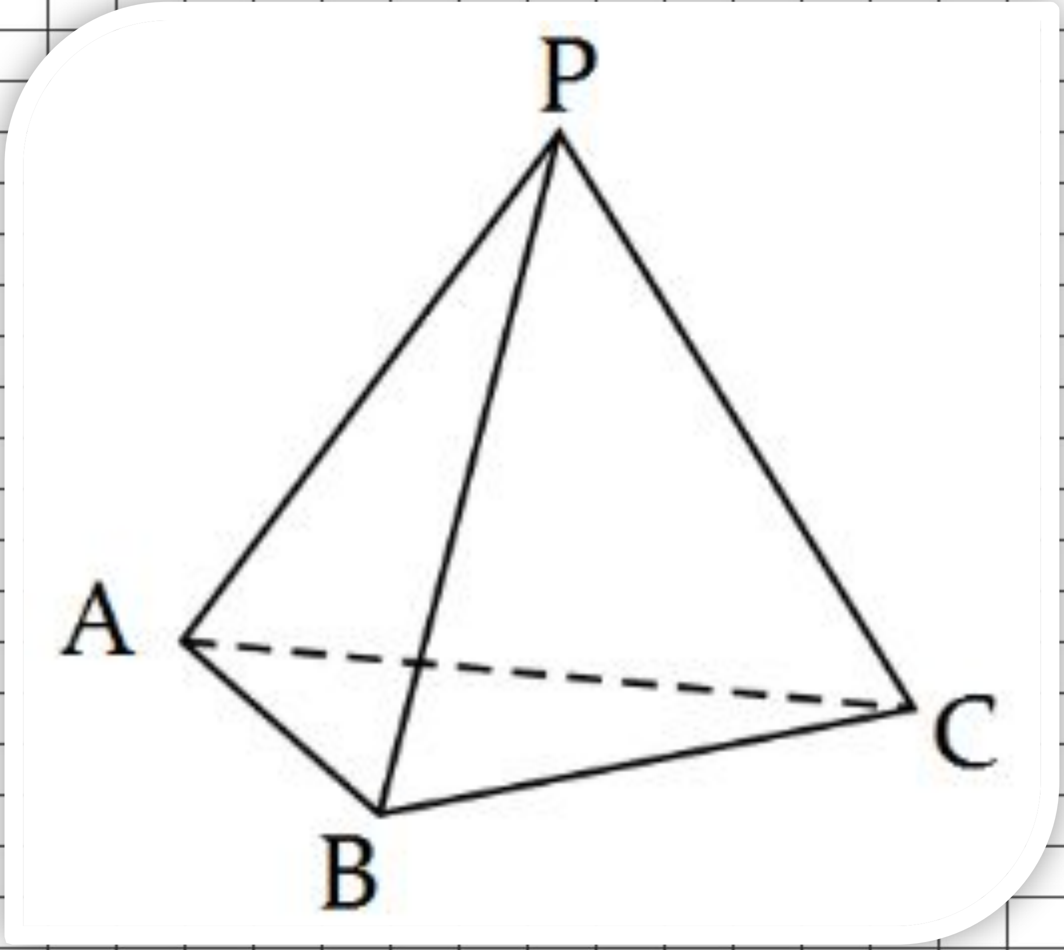
P – вершина пирамиды.

ABCD – основание пирамиды.

PA – боковое ребро.

AB – ребро основания.

Тетраэдр



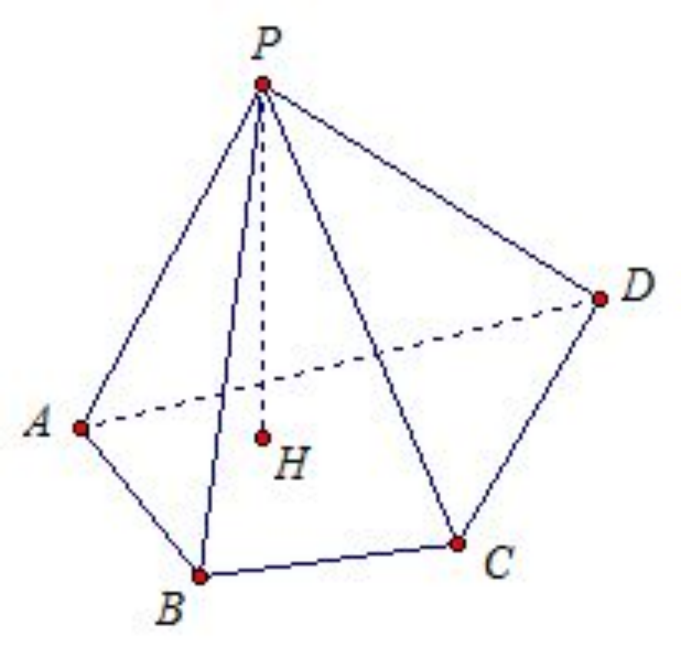
PABC – треугольная пирамида или **тетраэдр**.

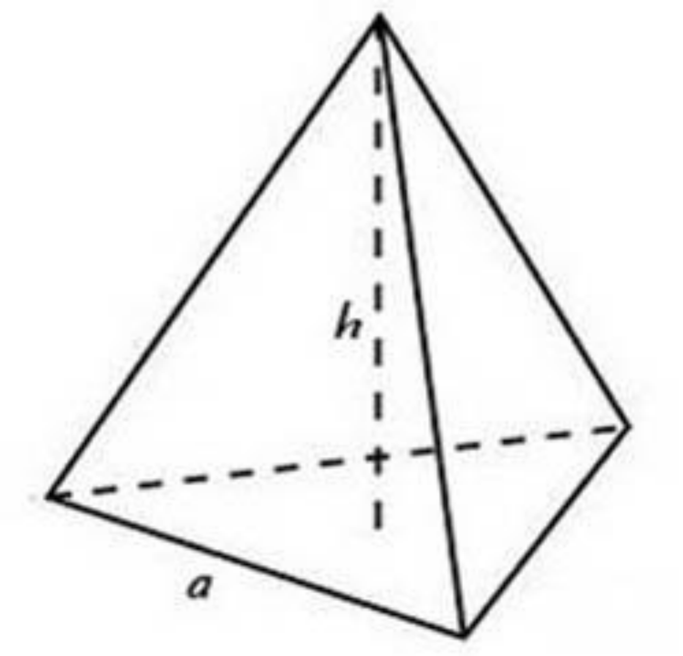
Тетраэдр - простейший многогранник, гранями которого являются четыре треугольника.

У **тетраэдра** 4 грани, 4 вершины и 6 рёбер.

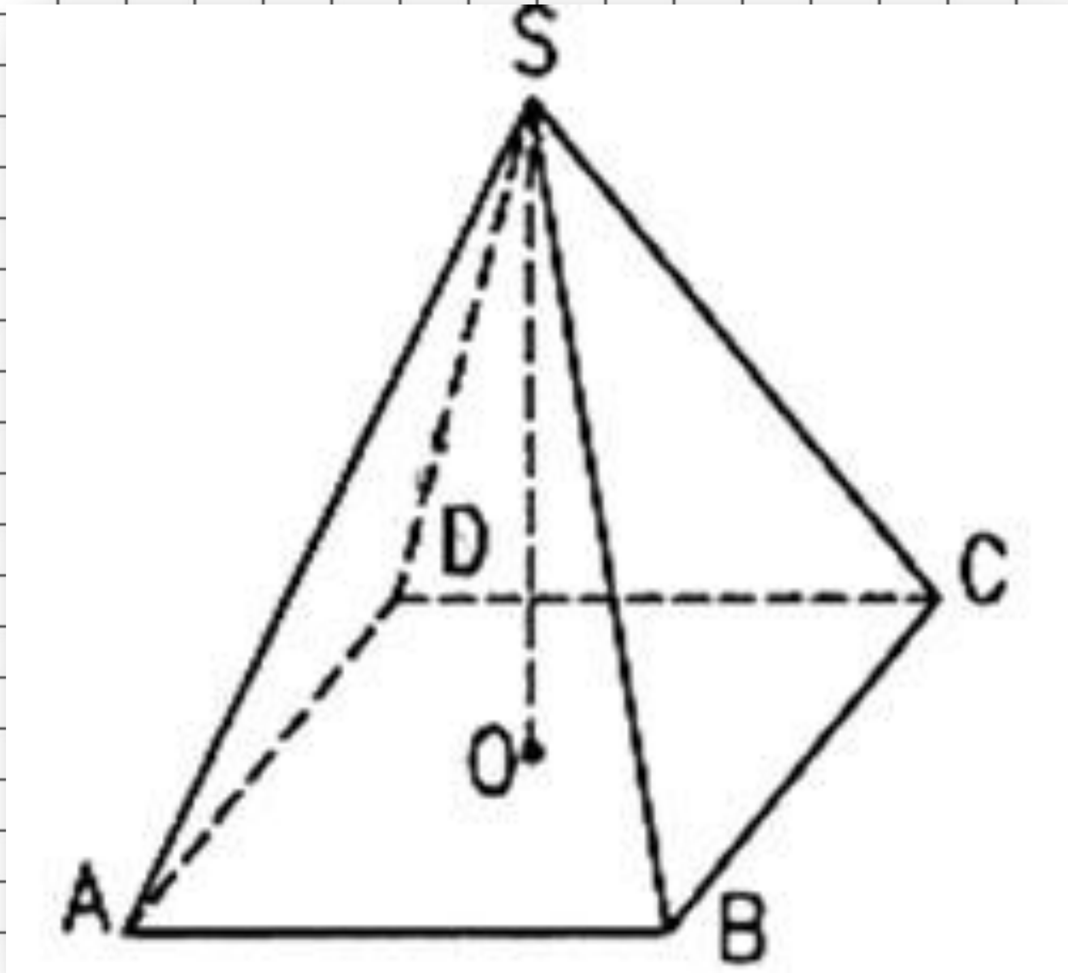
Высота пирамиды

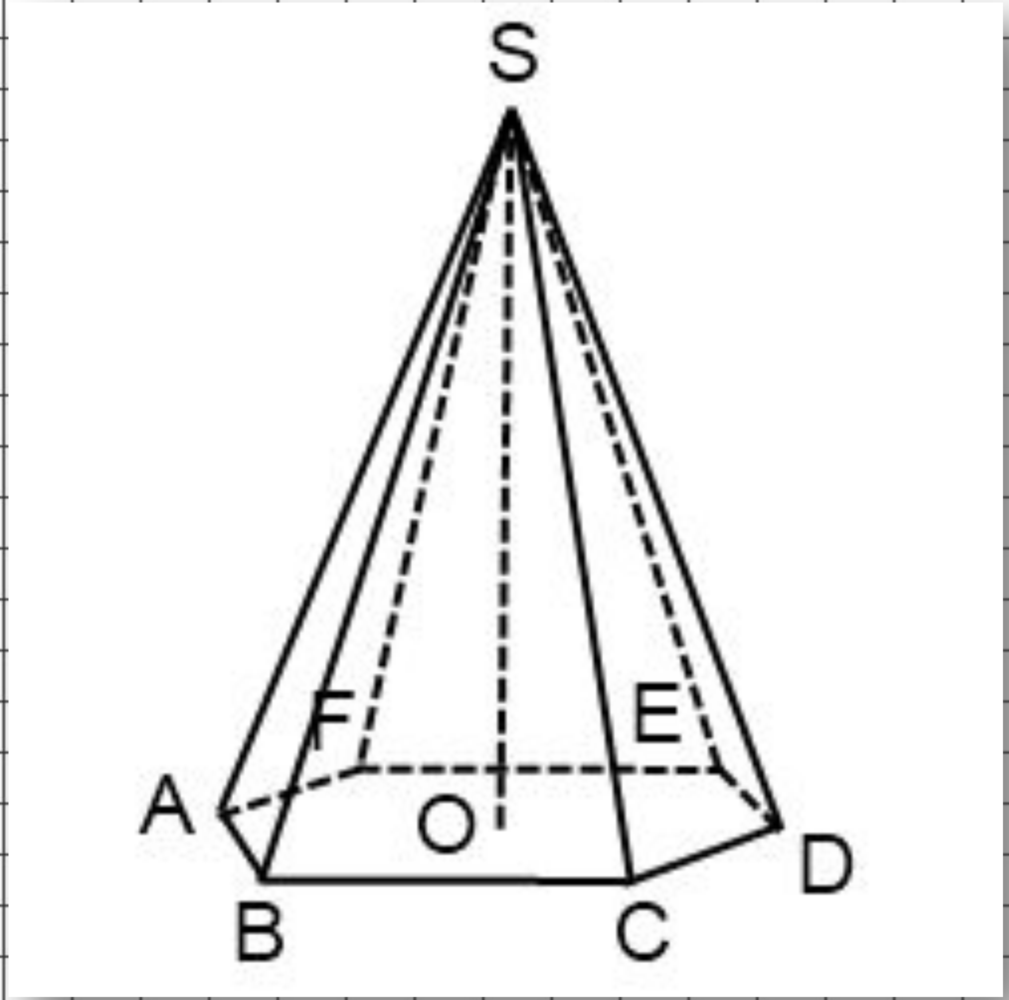
Из точки *P* опустим перпендикуляр *PH* на плоскость основания *ABCD*. Проведенный перпендикуляр является высотой пирамиды.





Назовите все элементы пирамиды

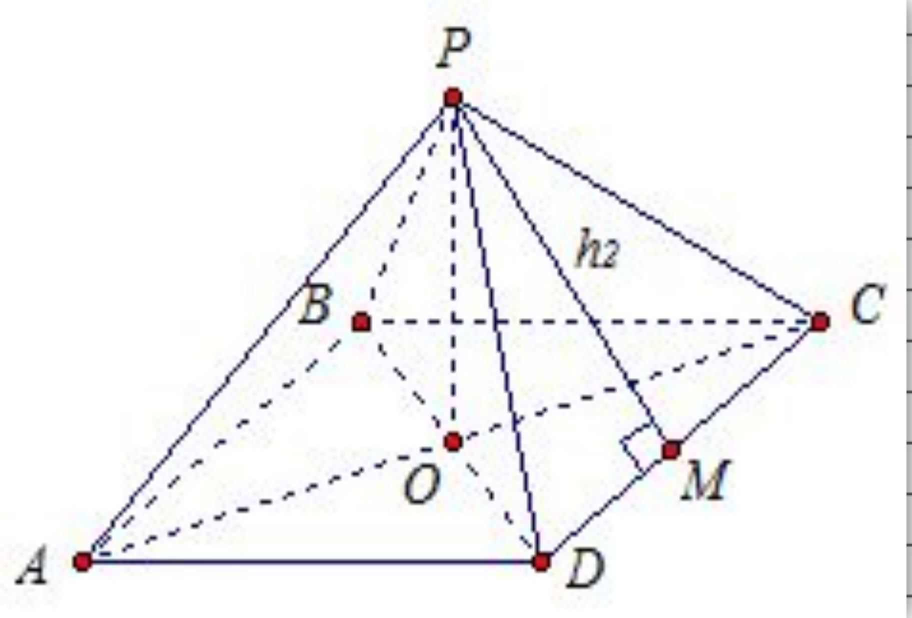




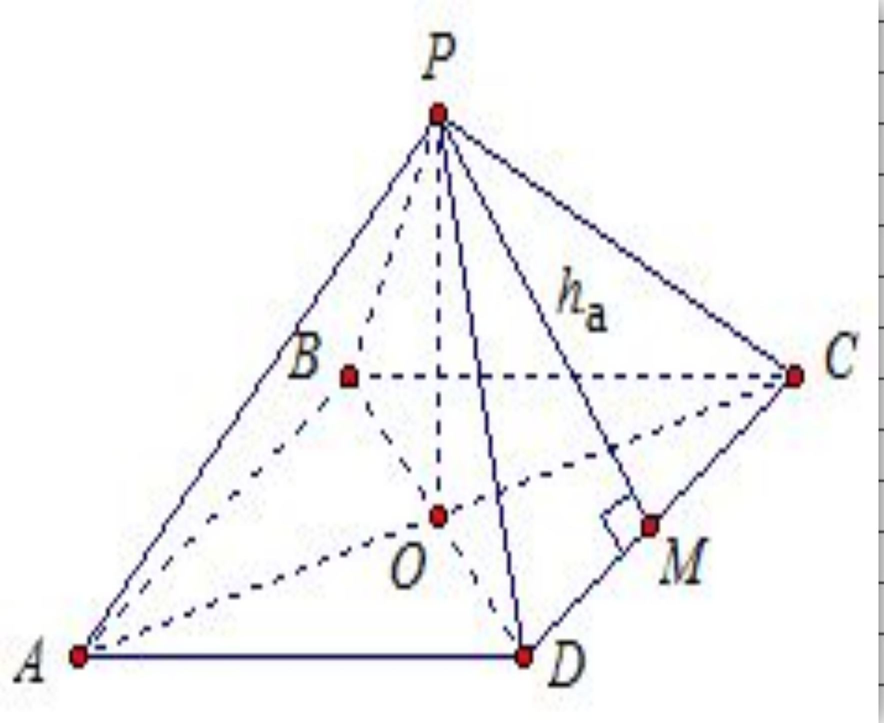
Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если:

- ее основание – правильный многоугольник;
- отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.



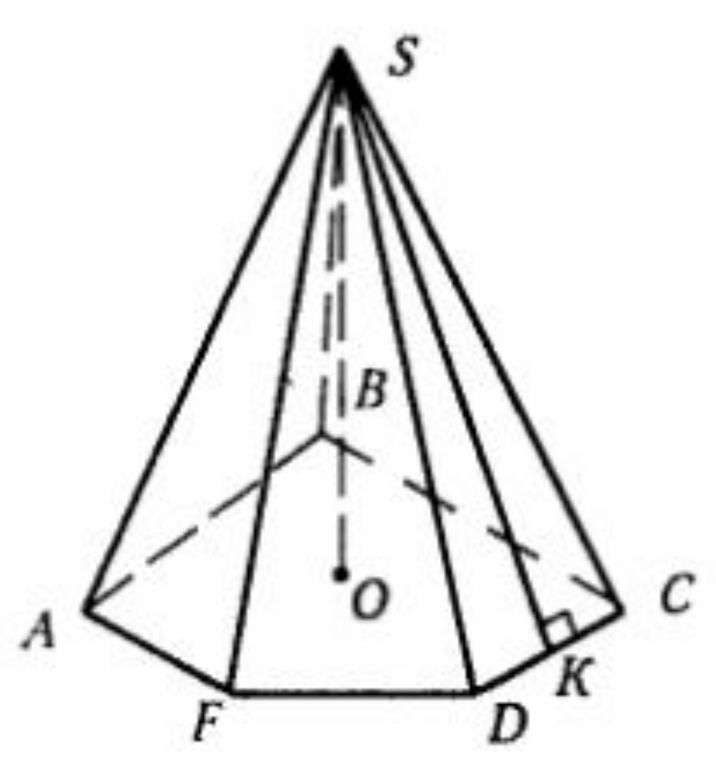
Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду *PABCD*.
P – вершина пирамиды.
Основание пирамиды *ABCD* – правильный четырехугольник, то есть квадрат. Точка *O*, точка пересечения диагоналей, является центром квадрата.
Значит, *PO* – это высота пирамиды.

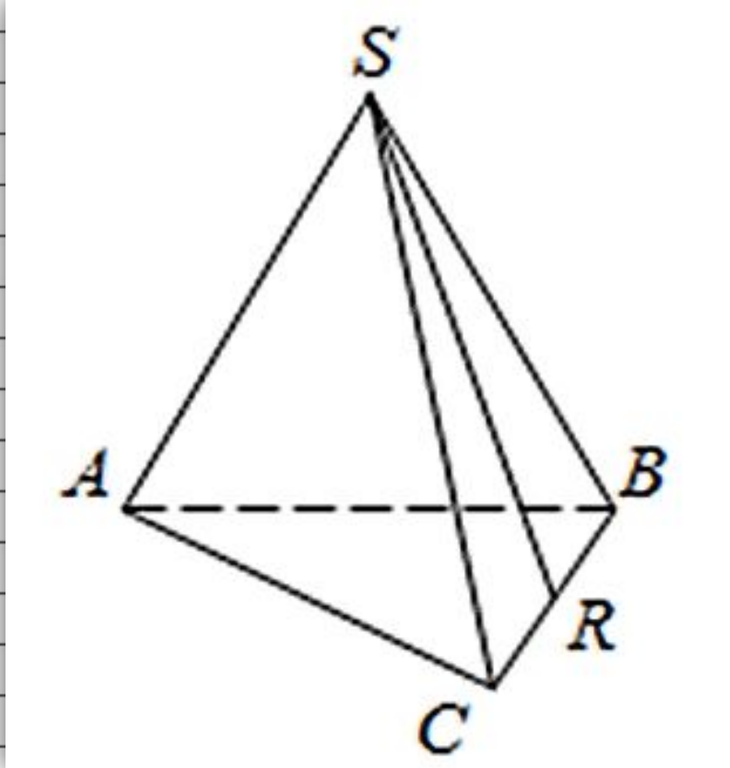


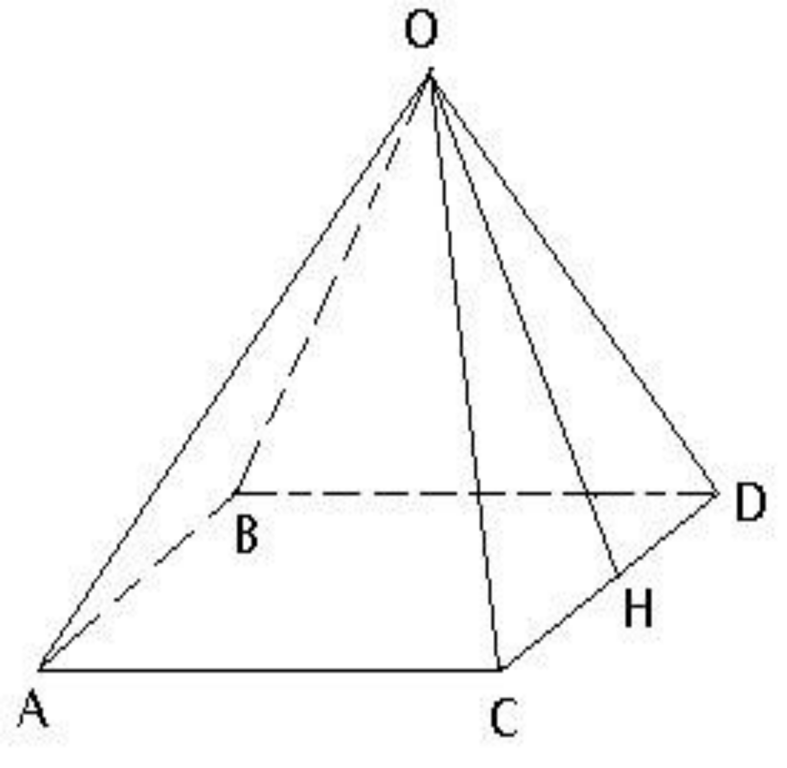
PM - апофема

В правильном *n*-угольнике центр вписанной и центр описанной окружности совпадает.
Этот центр и называется центром многоугольника.
Иногда говорят, что вершина проектируется в центр.
Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется ***апофемой*** и обозначается h_a.

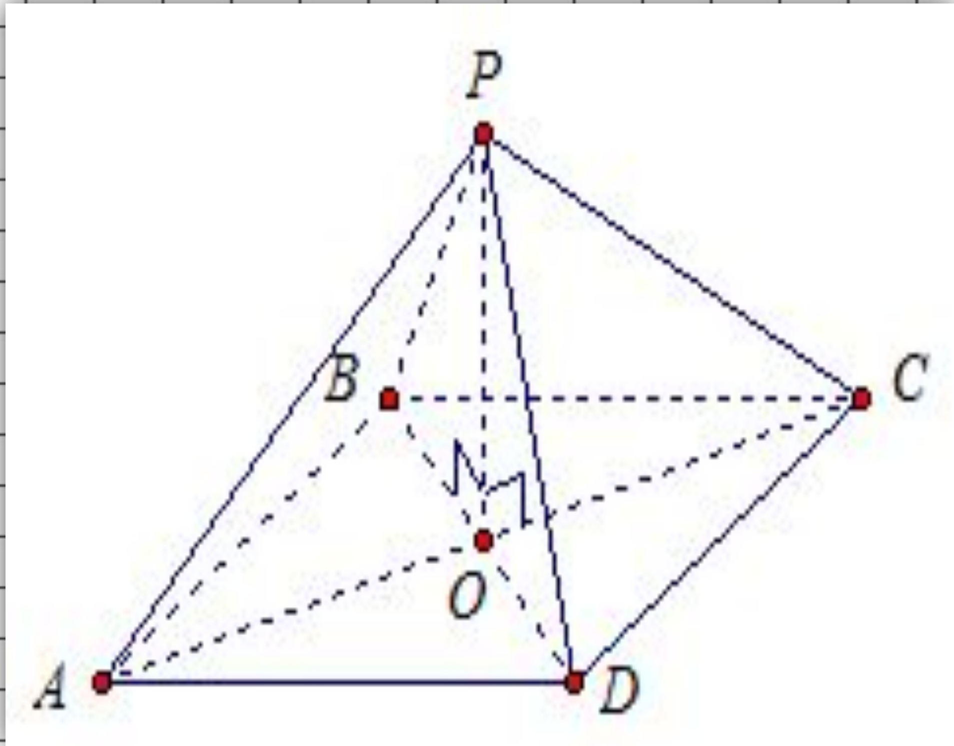
Назовите апофему







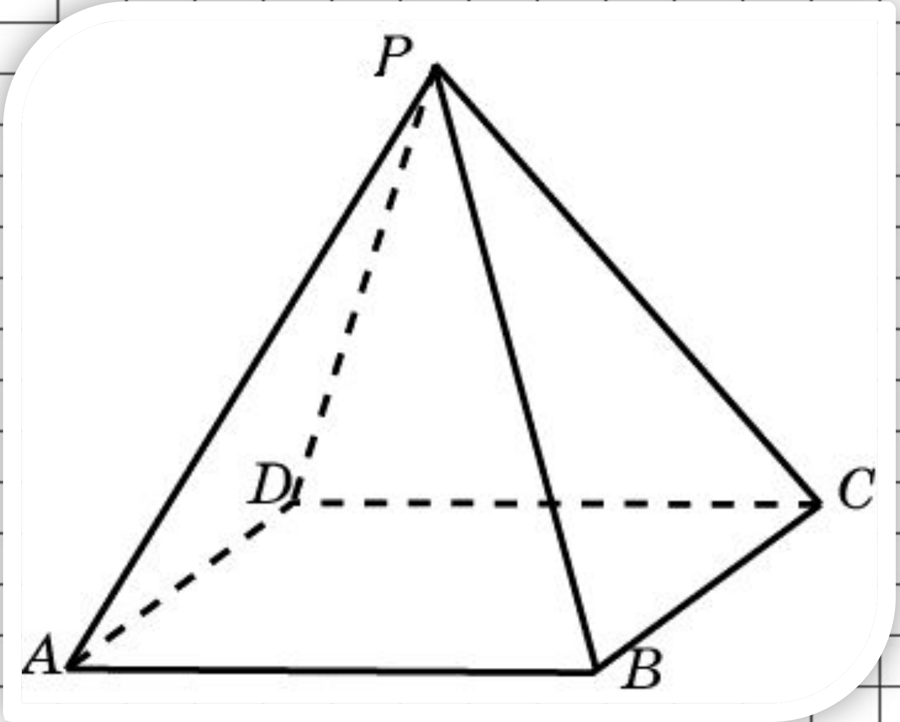
Свойства правильной пирамиды



1. Все боковые ребра правильной пирамиды равны;

2. Боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

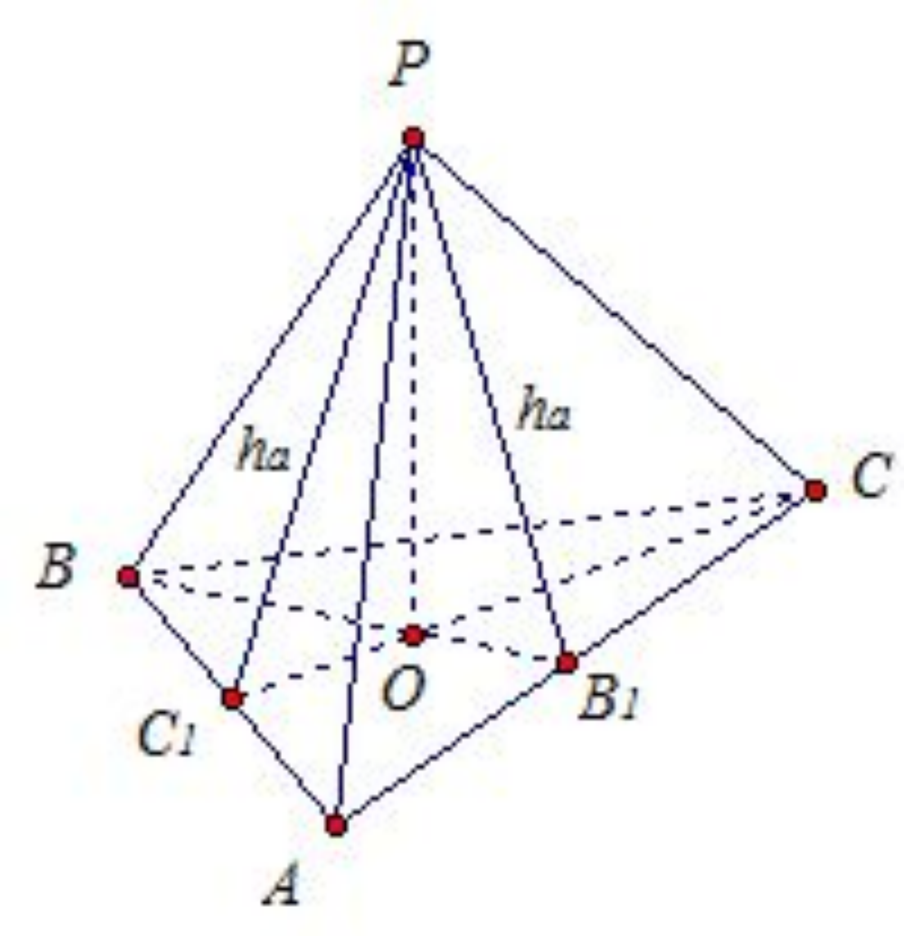
Площадь поверхности пирамиды



Полная поверхность пирамиды состоит из поверхности боковой, то есть площади всех боковых граней, и площади основания:

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$$

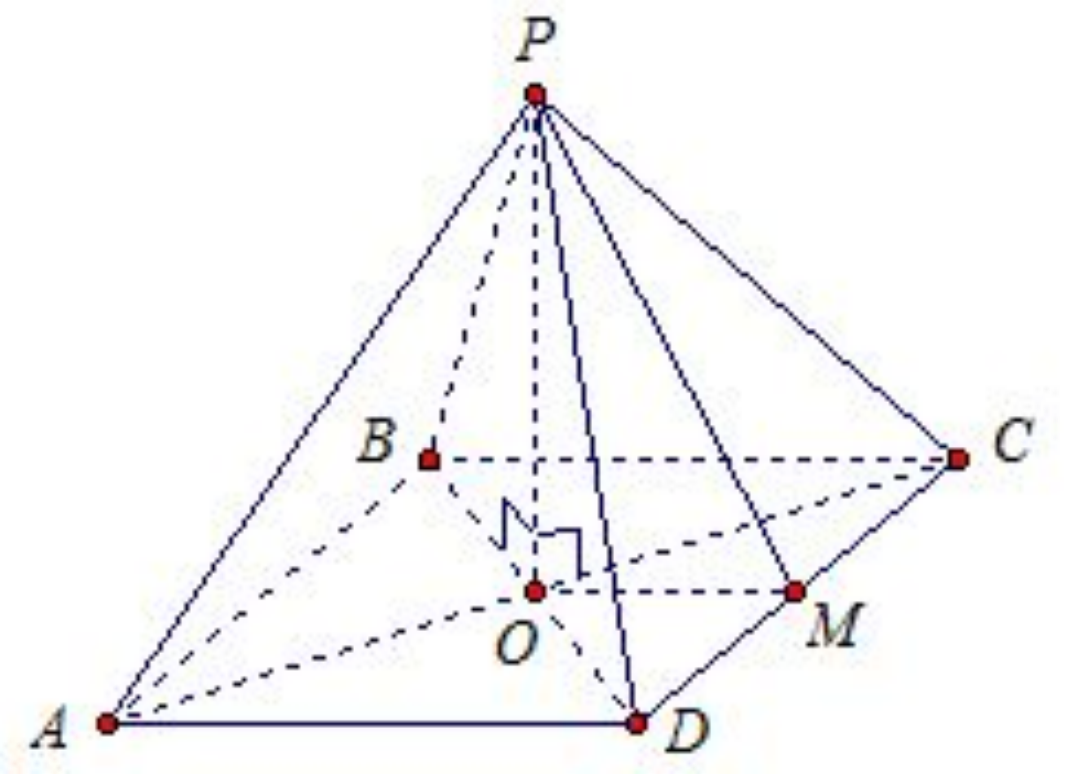
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды



Теорема:
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h_a$$

Задача №1. Радиус окружности, вписанной в основание правильной четырехугольной пирамиды, равен 3 м, высота пирамиды равна 4 м. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Дано: правильная четырехугольная пирамида *ABCD*,
ABCD – квадрат,
$r = 3$ м,
PO – высота пирамиды,
$PO = 4$ м.
Найти: $S_{бок}$

Решение:

По доказанной теореме, $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h_a$

Найдем сначала сторону основания *AB*.

Нам известно, что радиус окружности, вписанной в основание правильной четырехугольной пирамиды, равен 3 м. Тогда AB=2r=6 м. Найдем периметр квадрата *ABCD* со стороной 6 м: $P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 6 = 24$ (м)

Рассмотрим треугольник *BCD*. Пусть *M* – середина стороны *DC*. Так как *O* – середина *BD*,

То $OM = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (м).

Треугольник *DPC* – равнобедренный. *M* – середина *DC*. То есть, *PM* – медиана, а значит, и высота в треугольнике *DPC*. Тогда *PM* – апофема пирамиды.

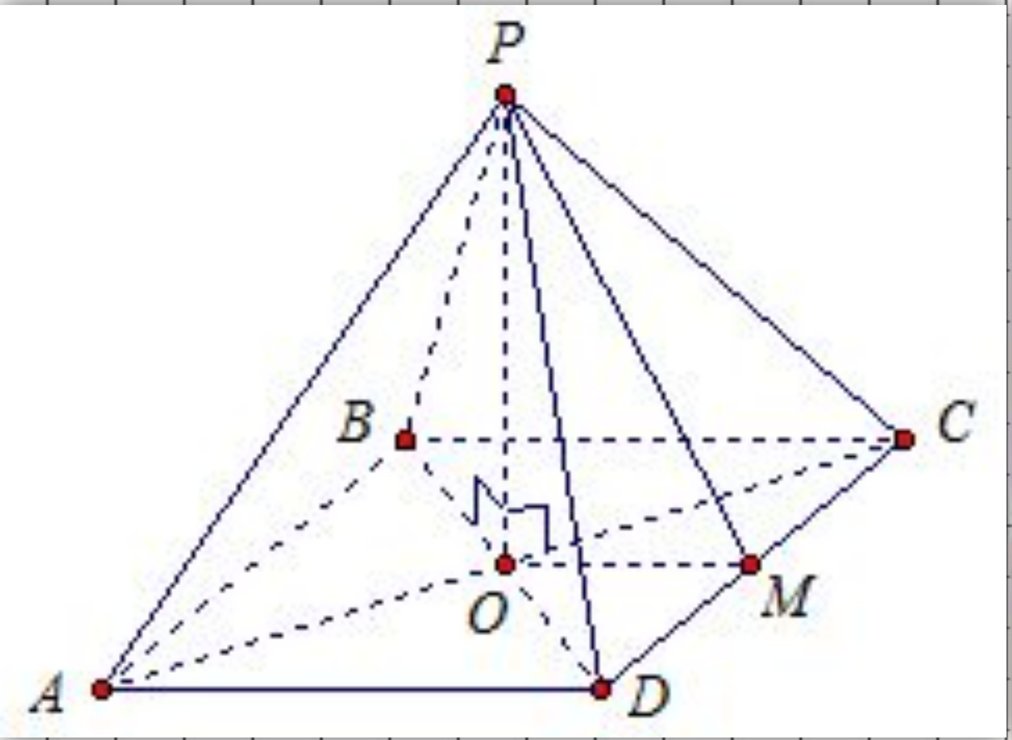
PO – высота пирамиды. Тогда,

прямая *PO* перпендикулярна плоскости *ABC*, а значит, и прямой *OM*, лежащей в ней. Найдем апофему *PM* из прямоугольного треугольника *POM*.

$PM = \sqrt{OM^2 + PO^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (м)

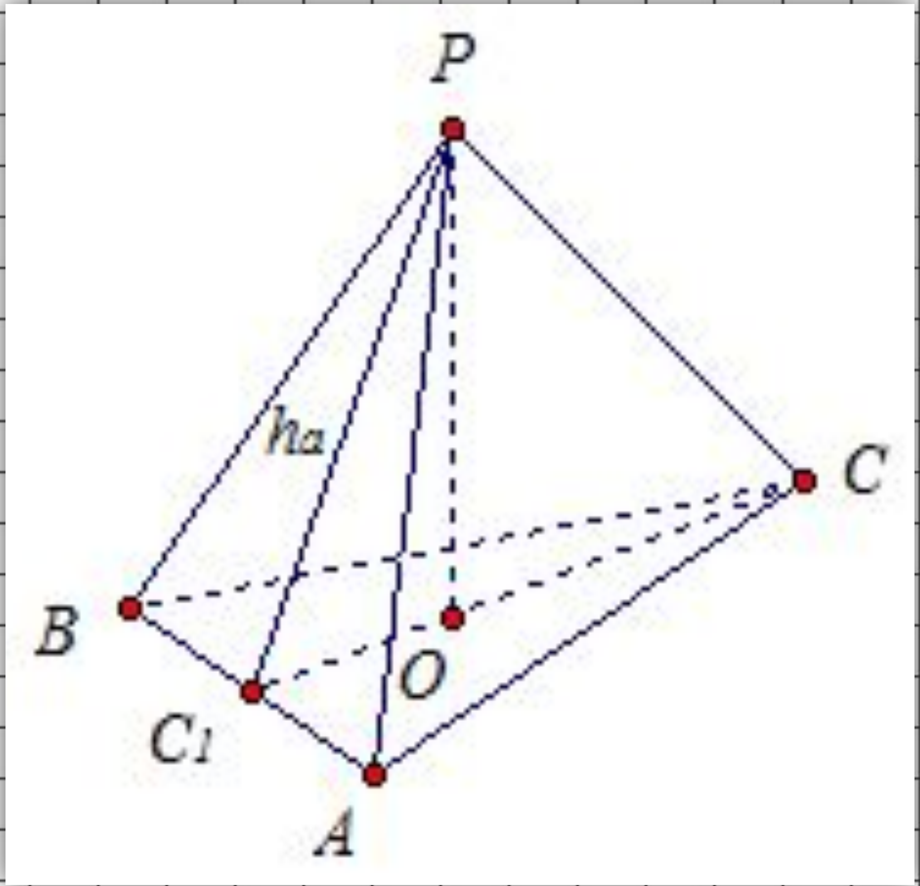
Теперь можем найти боковую поверхность пирамиды:

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h_a = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60\ (м^2).$$



Ответ: 60 $м^2$

Задача №2. Радиус окружности, описанной около основания правильной треугольной пирамиды, равен $\sqrt{3}$ м. Площадь боковой поверхности равна 18 м^2. Найдите длину апофемы.



Дано: *ABCP* – правильная треугольная пирамиды,
AB = BC = CA,
R= $\sqrt{3}$ м,
$S_{бок.}$= 18 м^2
Найти: PC_1

Решение:

В правильном треугольнике *ABC* дан радиус описанной окружности. Найдем сторону *AB* этого треугольника с помощью теоремы синусов.

$$\frac{AB}{\sin \angle BCA} = 2R$$

$$\frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

AB=3 м.

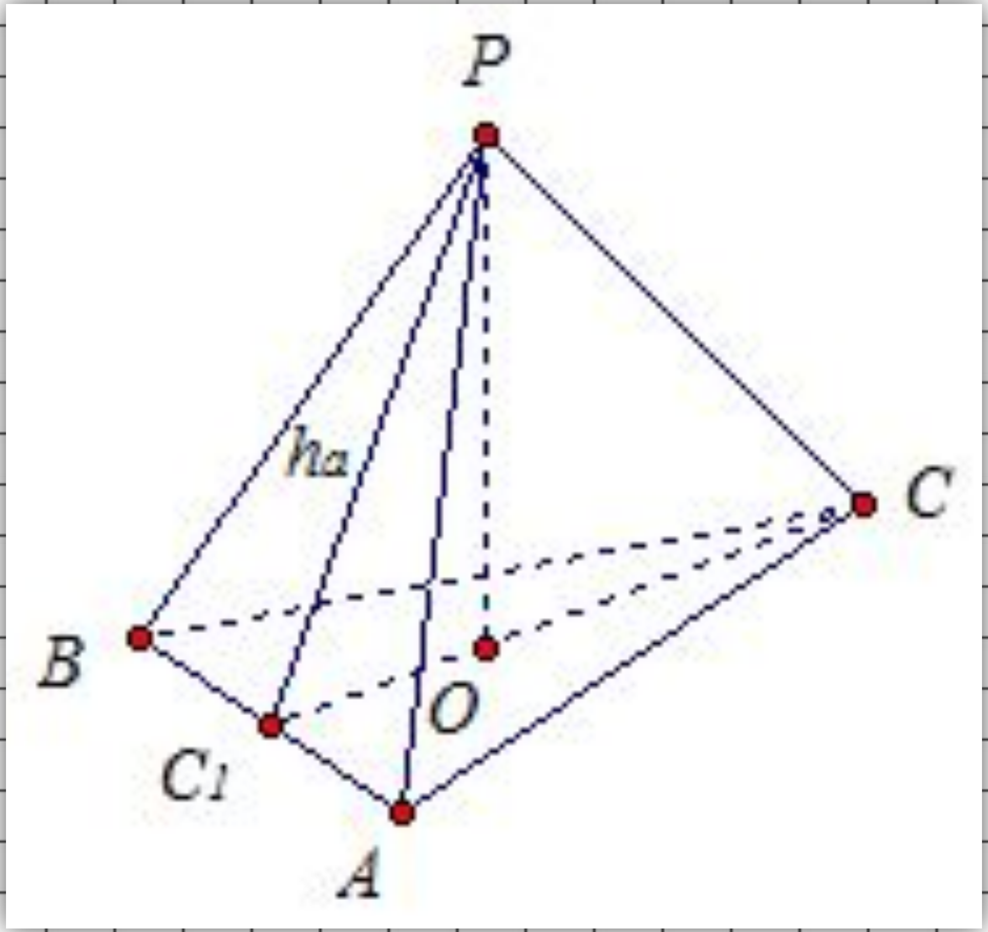
Зная сторону правильного треугольника (AB=3 м), найдем его периметр:

$P_{ABC} = 3 \cdot AB = 3 \cdot 3 = 9$ (м)

По теореме о площади боковой поверхности правильной пирамиды

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h_a$$

$$h_a = \frac{2S_{бок}}{P_{осн}} = \frac{2S_{бок}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot 18}{9} = 4\ (м).$$



Ответ: 4 м

Историческая справка

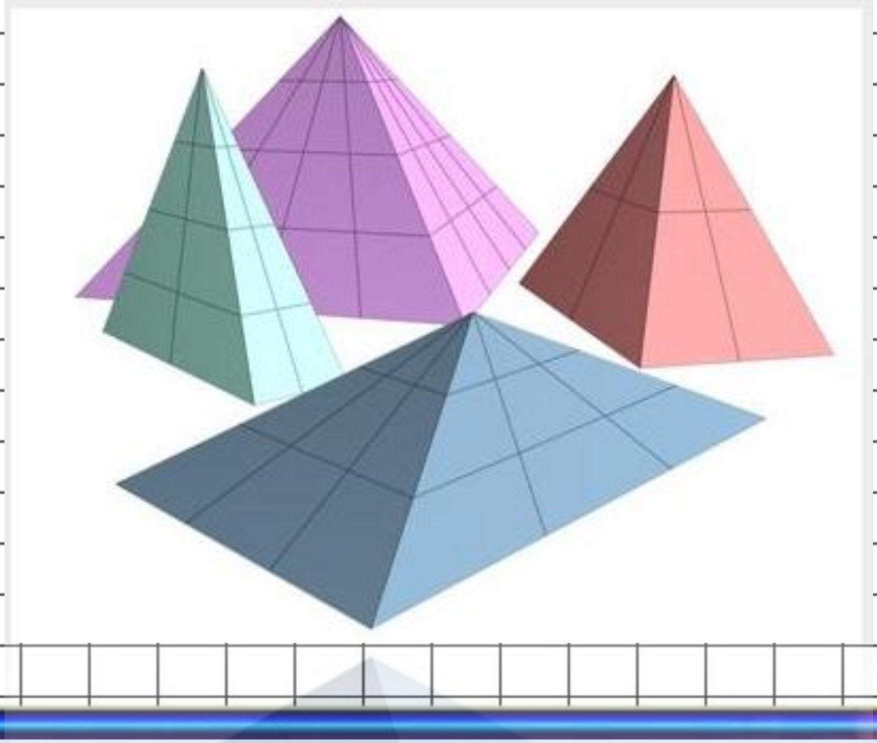
Самой большой из трех Великих пирамид является **пирамида Хеопса**. Ее приблизительная **высота** составляет **138,8 метра**, хотя, по данным ученых, раньше она была выше. **Сторона** ее **основания** составляет **227,5 метров**. Для сооружения этой громадины древние египтяне не использовали связующего раствора, блоки подогнаны друг к другу с поразительной геометрической точностью.

Вторая по величине **пирамида Хефрена** настолько незначительно отличается от пирамиды Хеопса, что под некоторым углом зрения иногда она даже кажется больше, хотя это впечатление обманчиво. **Высота** ее составляет **136 метров**, **сторона – 215 метров**.

Пирамида Миккерина является самой южной и самой низкой из из трех пирамид в Гизе. Внешне она немного отличается од двух своих предшественниц. Ее **высота** в настоящее время около **62 метров**, а **сторона** её **основания — 108,4 метра.**

Итоги урока

Это многогранник, состоящий из многоугольника, называемого основанием, точки, не лежащей в плоскости этого многоугольника, называемой вершиной, и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания



**Пирамид
а**

Восстановите запись

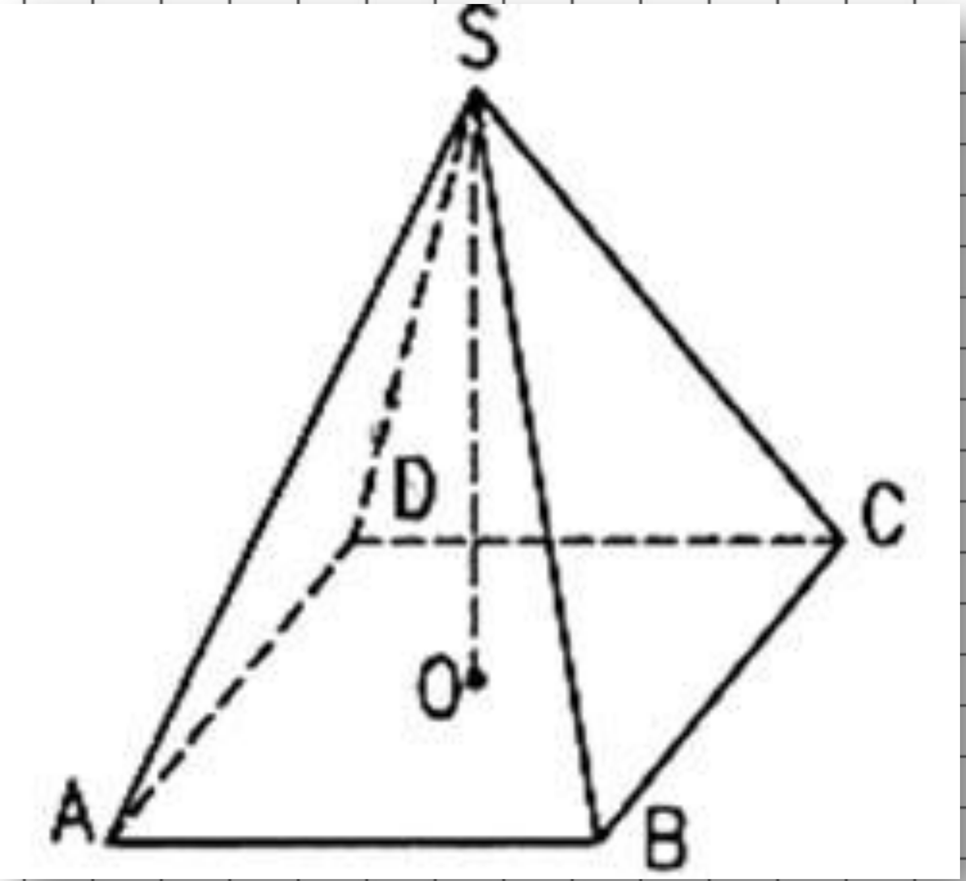
ABCD -

S -

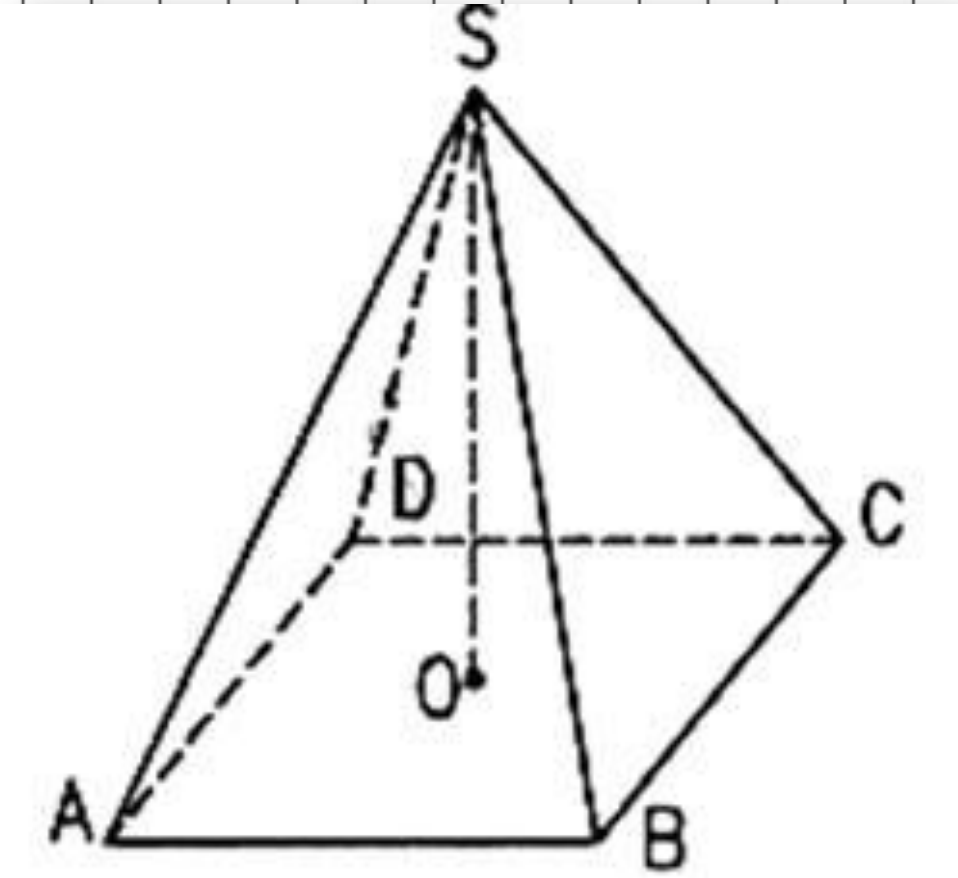
AS,BS,CS,DS-

ASB,BSC,CSD,DSA -

SO -

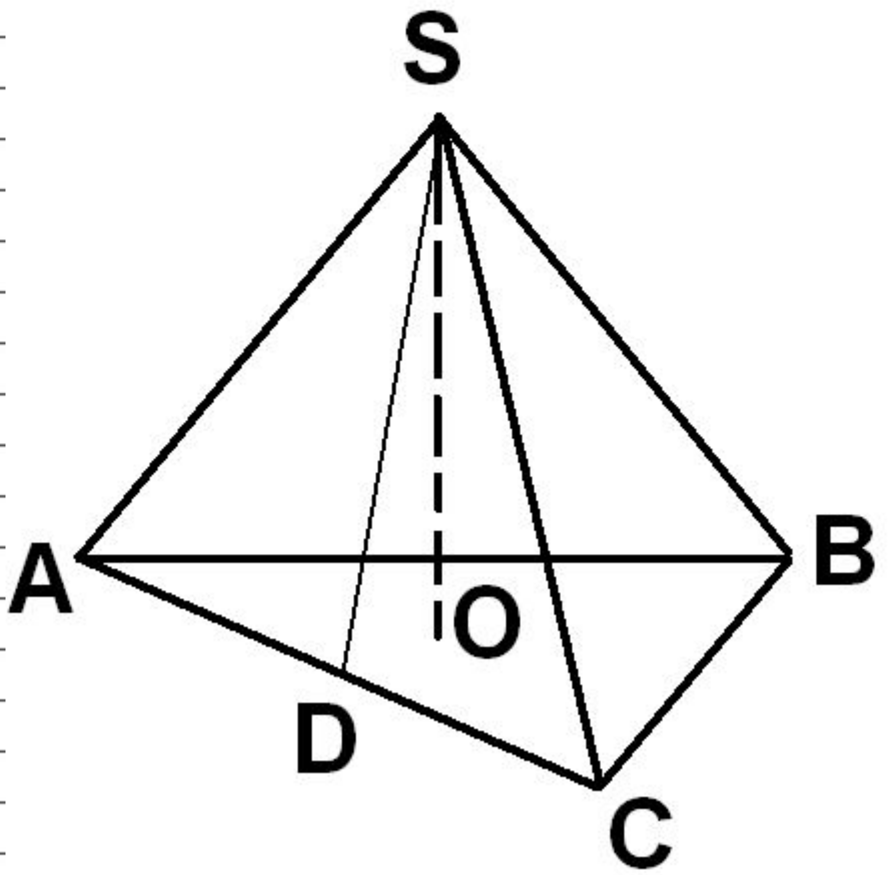


ABCD-основание;
S - вершина пирамиды;
AS,BS,CS,DS- боковые рёбра;
ASB,BSC,CSD,DSA - боковые грани
SO - высота.



Восстановите запись

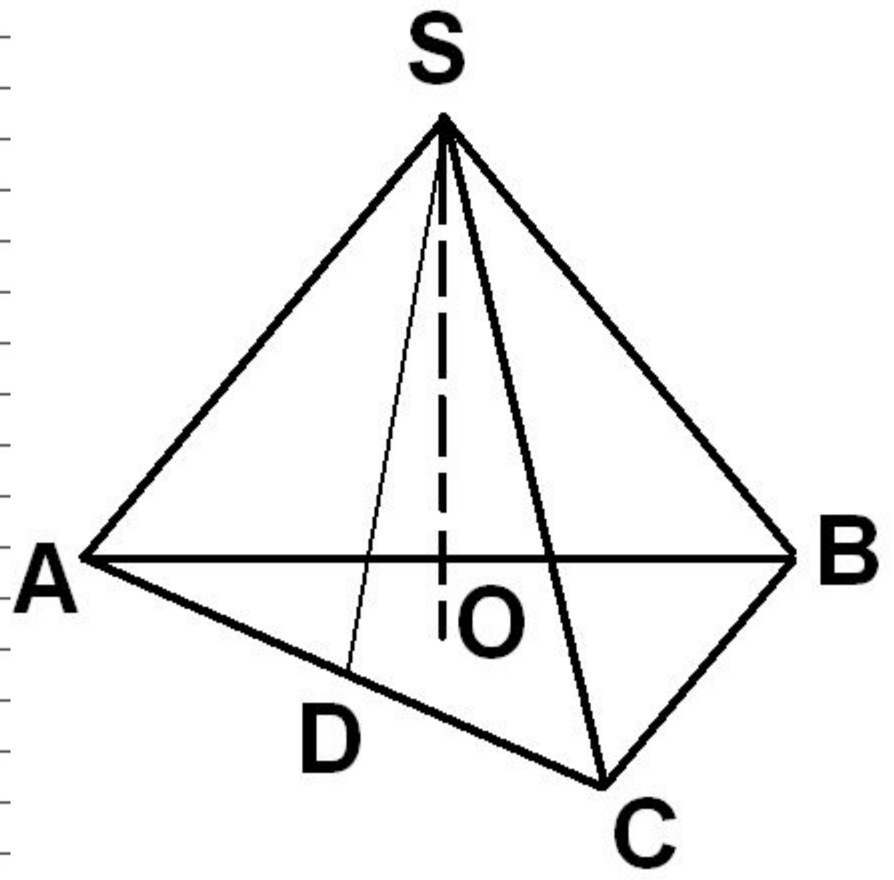
Я - пирамида треугольная, потому что в основании у меня ……
А если моя высота будет соединять вершину с центром правильного треугольника, то я буду ……...
Высота боковой грани правильной пирамиды называется ……...



Я - пирамида треугольная, потому что в основании у меня лежит треугольник.

А если моя высота будет соединять вершину с центром правильного треугольника, то я буду правильной треугольной пирамидой.

Высота боковой грани правильной пирамиды называется апофемой.



Итоги урока

По какой формуле можно найти площадь боковой поверхности правильной пирамиды?

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h_a$$

Список источников содержания и иллюстраций

- Геометрия. 10-11 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни) / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2008. – 288 с.: ил.
- Геометрия. 10-11 класс: Учебник для общеобразовательных учебных заведений / Шарыгин И. Ф. – М.: Дрофа, 1999. – 208 с.: ил.
- Геометрия. 10 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики /Е. В. Потоскуев, Л. И. Звалич. – 6-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2008. – 233 с.: ил.
- http://igri-uma.ru/forum/index.php?showtopic=3936 – стих про пирамиду
- http://life-trip.ru/piramidy-drevnego-egipta/

Иллюстрации:

- http://bestmaps.ru/files/images/egipetskie-piramidy_35.jpg
- http://d3mlntcv38ck9k.cloudfront.net/content/konspekt_image/125596/363ef970_a847_0131_670c_12313c0dade2.png
- http://900igr.net/datai/geometrija/Objom-piramidy/0019-021-Uprazhnenie-17.png
- http://math.all-tests.ru/sites/math.all-tests.ru/files/images/367-resolve.png
- http://d3mlntcv38ck9k.cloudfront.net/content/konspekt_image/125597/37d4a110_a847_0131_670d_12313c0dade2.png
- http://2mb.ru/wp-content/uploads/2014/02/treugolnaja-piramida1.jpg

Иллюстрации:

- http://www.calc.ru/imgs/articles/270-12390d7a8675ab0a7b328d97048dd0e2.jpg
- http://www.uznateshe.ru/wp-content/uploads/2013/01/pravilnayapiramida61.png
- http://d3mlntcv38ck9k.cloudfront.net/content/konspekt_image/125598/39235a20_a847_0131_670e_12313c0dade2.png
- http://shkolo.ru/i/piramida.gif
- http://matematikalegko.ru/wp-content/uploads/2013/01/31.gif
- http://otvet.imgsmail.ru/download/5299838a193da5731b536b78d44b8cab_i-35.jpg
- http://d3mlntcv38ck9k.cloudfront.net/content/konspekt_image/125599/3a9f26c0_a847_0131_670f_12313c0dade2.png
- http://d3mlntcv38ck9k.cloudfront.net/content/konspekt_image/125602/3e9c5860_a847_0131_6712_12313c0dade2.png
- http://www.ice-nut.ru/egypt/egypt0340201.jpg
- http://s2.afisha-mir.ru/StaticContent/Photos/110205091400/110207200150/p-1024x1024-piramida-hefrena.jpg
- http://www.voyage.org.ua/wp-content/uploads/2014/02/34.jpg
- http://photostock.su/48398.jpeg
- http://savepic.su/422861.png
- http://vova1001.narod.ru/Site/piramid1.jpg
- http://nienhuis.ru/upload_files/catalog/477_1.jpg