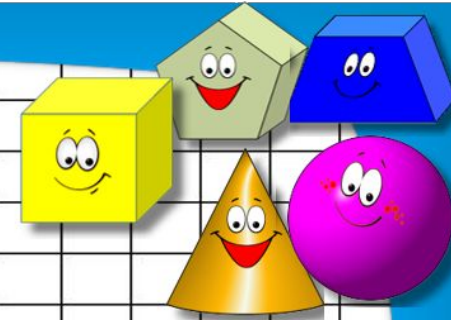


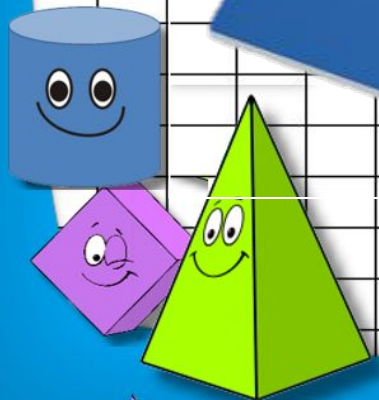
Урок геометрии
11 класс



Пирамида. Правильная пирамида

Предметная область: геометрия

Автор: Бобылева Елена Александровна
Учитель математики и информатики
Муниципальное бюджетное
общеобразовательное учреждение средняя
общеобразовательная школа №146
г. Челябинске



Повторение

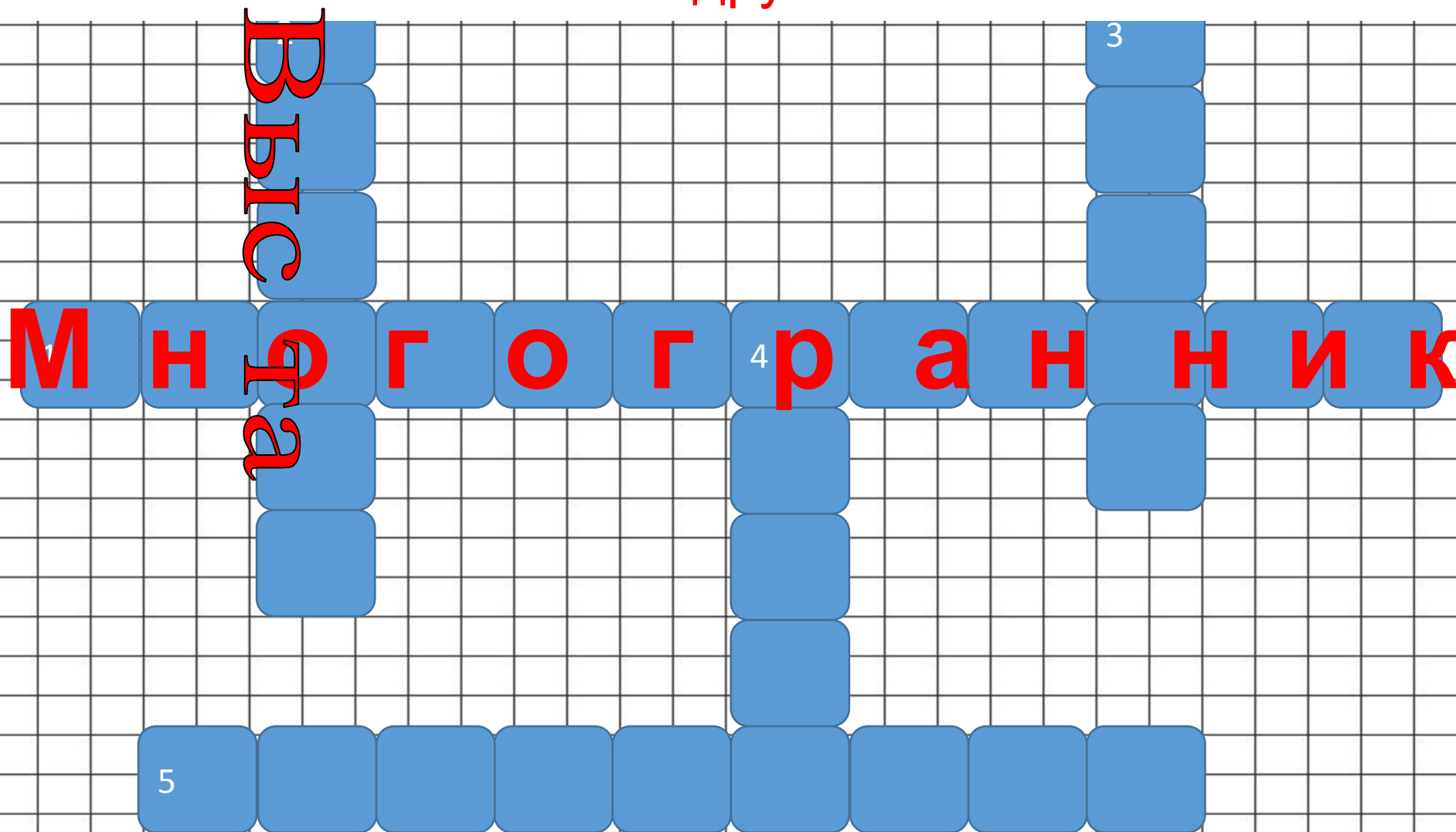
1. Поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело

М Н О Г О Г ⁴ р а н н и к

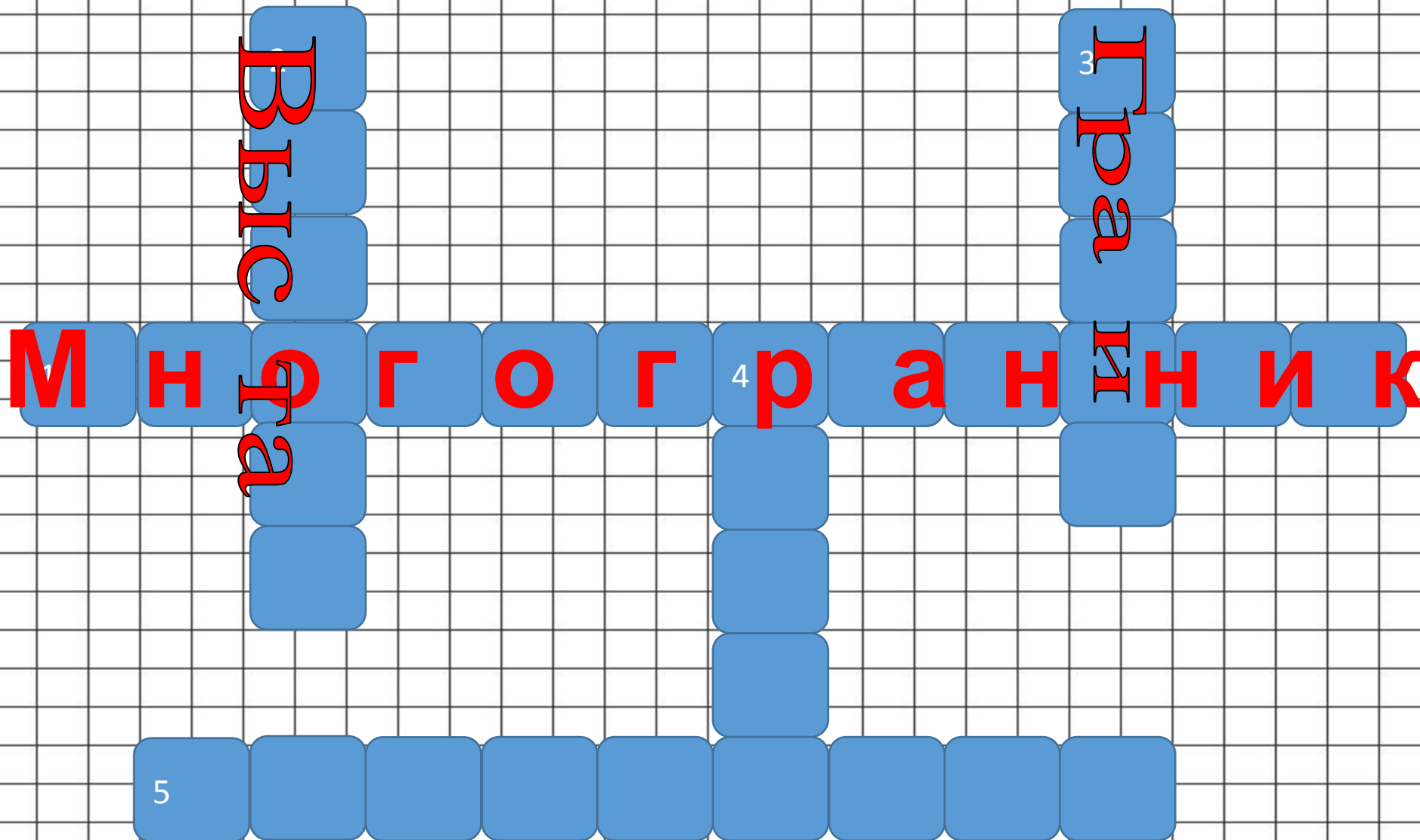
2

5

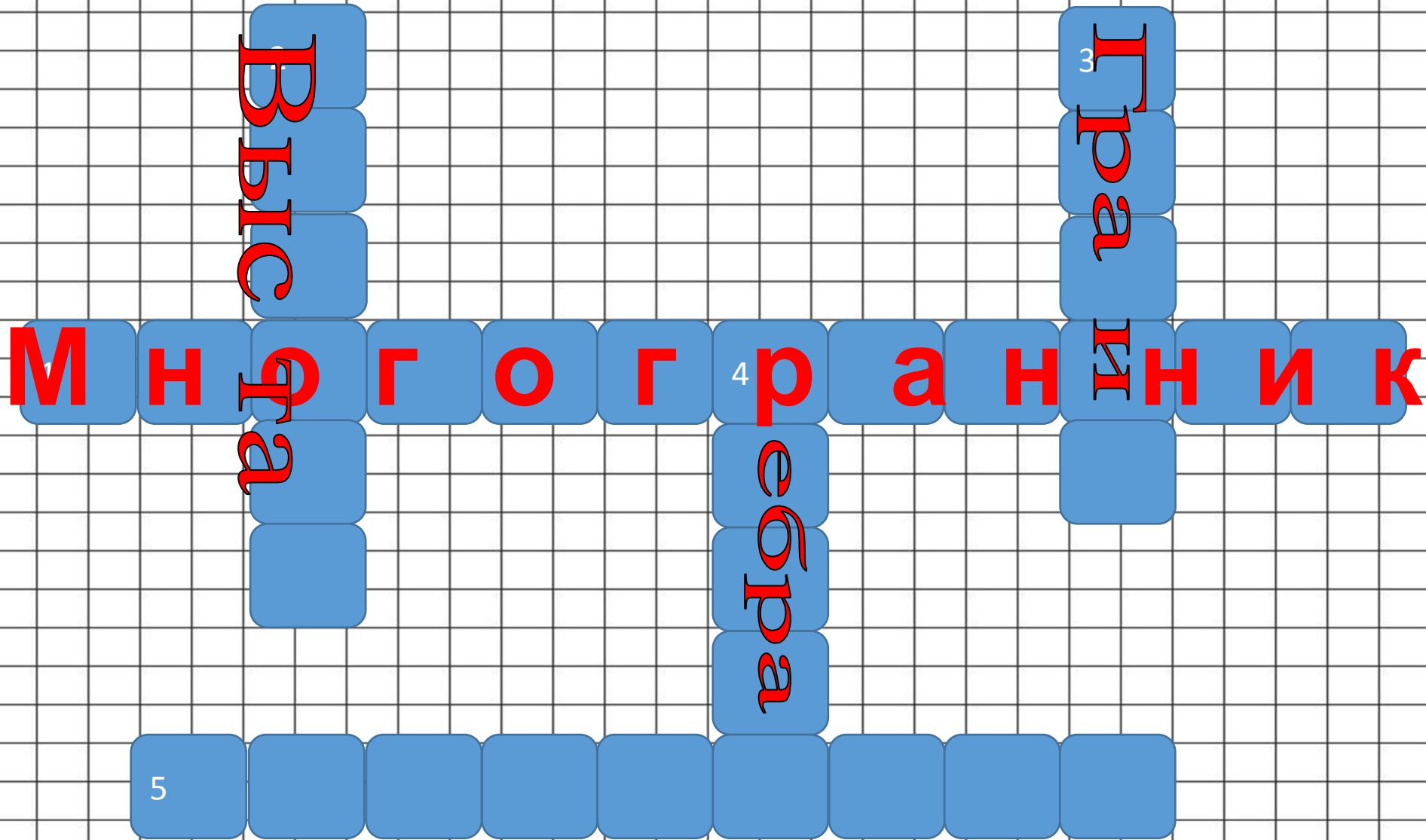
2. Перпендикуляр, опущенный из любой точки основания на плоскость другого основания.



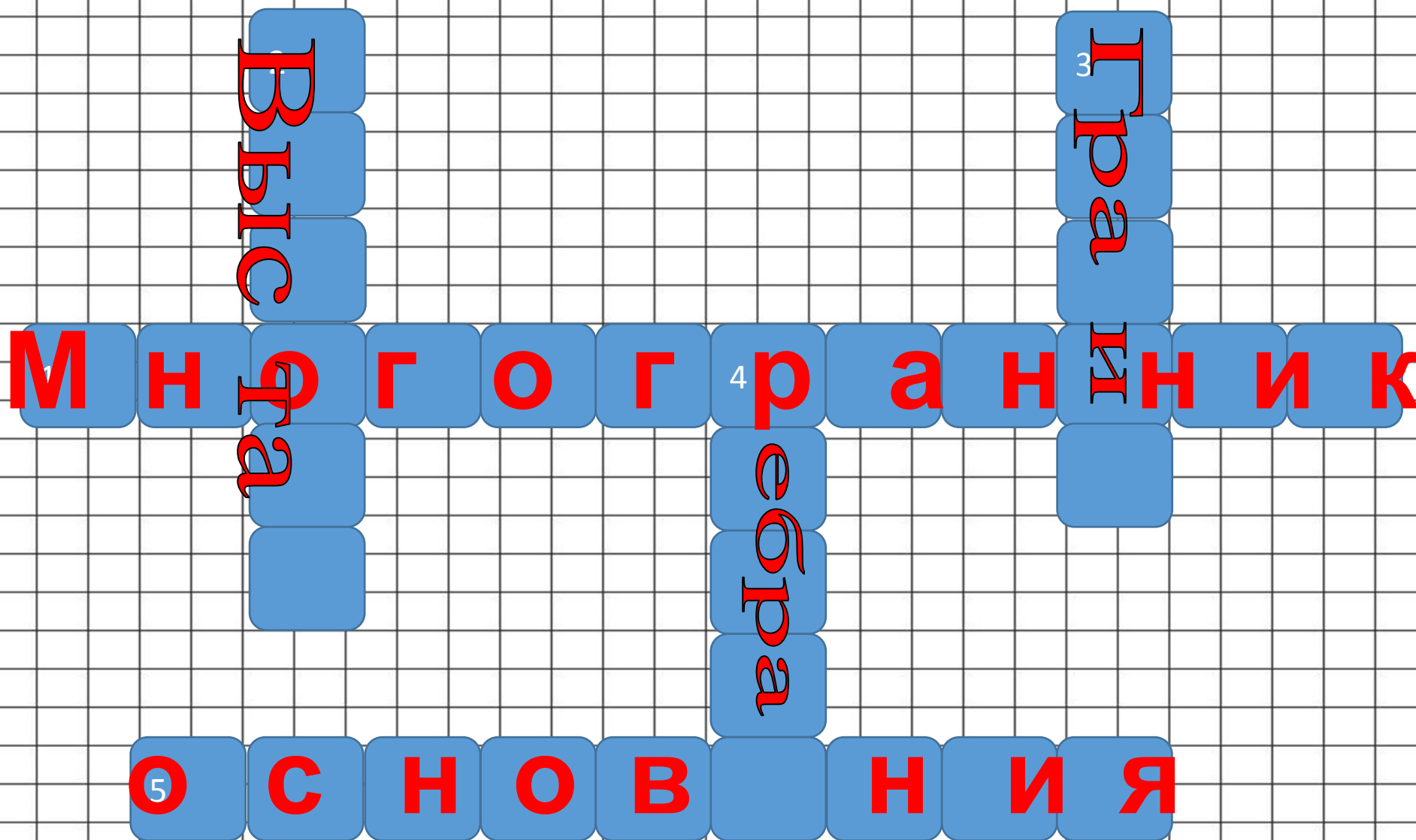
3. Это многоугольники, составляющие многогранник



4. Стороны граней



5. призмы равны и лежат в параллельных плоскостях



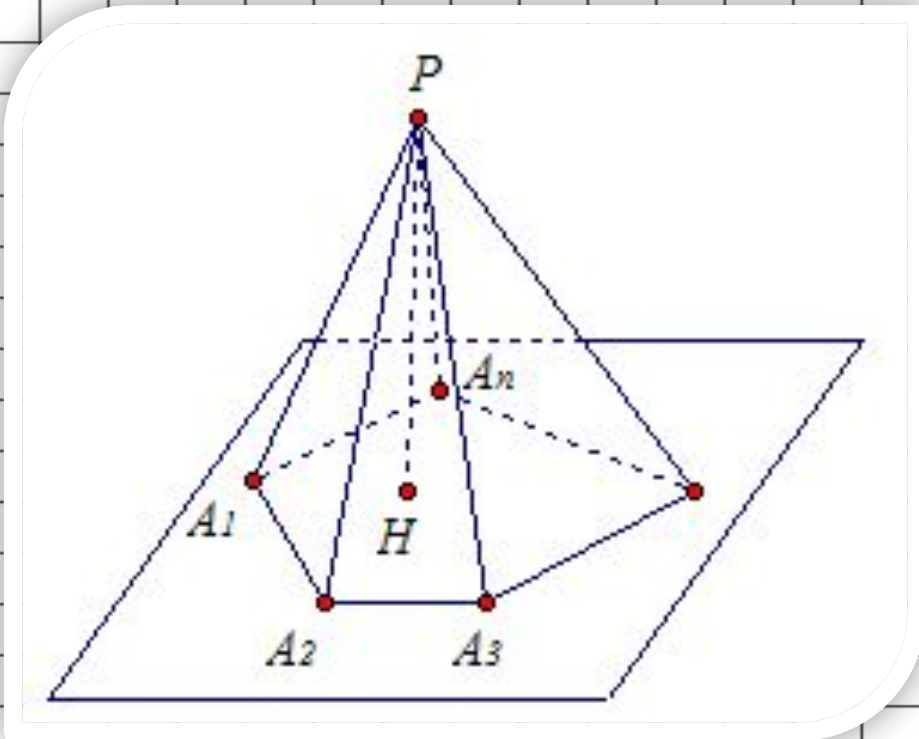
Определите тему нашего урока

Египтяне их сложили
И так ловко смастерили,
Что стоят они веками.
Догадайтесь, дети, сами
Что же это за тела,
Где вершина всем
видна?
Догадались? Из-за вида
Всеми и

Пирамида

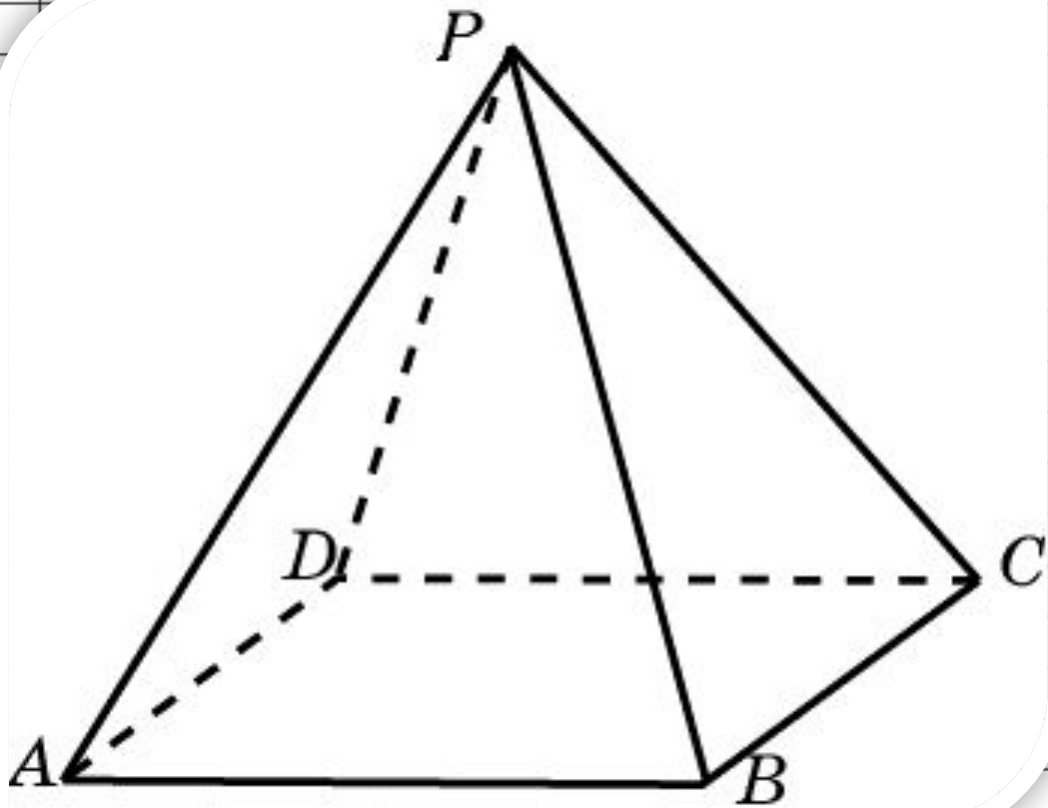


Рассмотрим пирамиду с математической точки зрения



Многогранник $PA_1A_2\dots A_n$,
составленный из
 n -угольника
 $A_1A_2\dots A_n$ и
 n треугольников
 $PA_1A_2, PA_2A_3 \dots PA_nA_{n-1}$,
называется n -угольной
пирамидой

Примеры пирамид



Рассмотрим
четырёхугольную
пирамиду $PABCD$

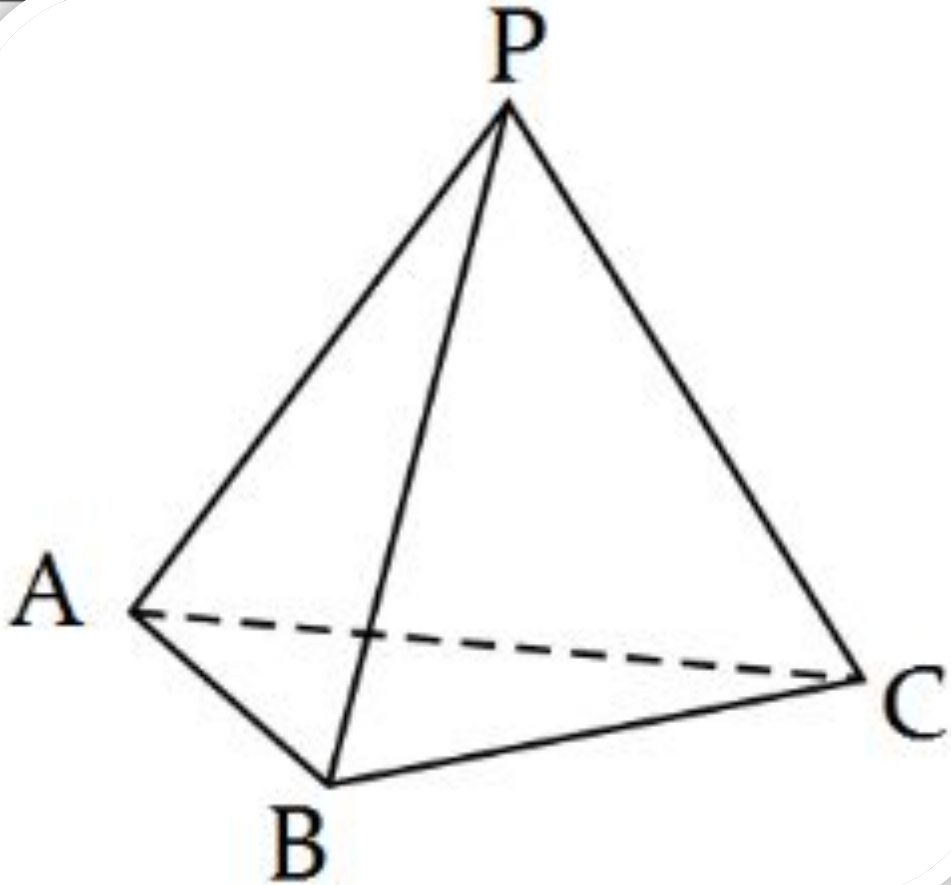
P – вершина пирамиды.

$ABCD$ – основание пирамиды.

PA – боковое ребро.

AB – ребро основания.

Тетраэдр



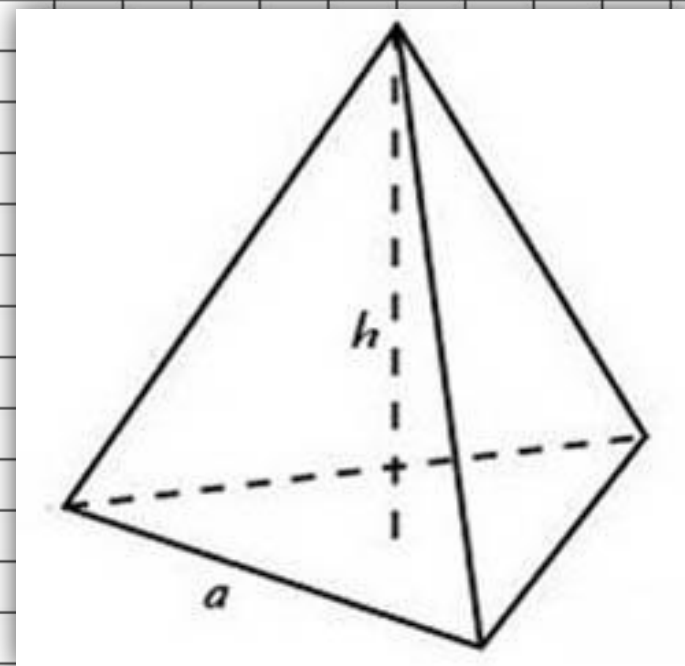
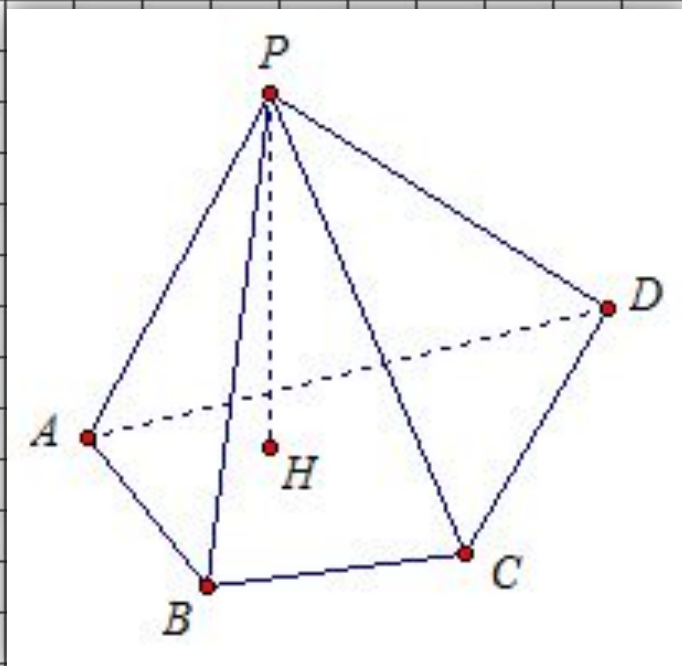
$PABC$ – треугольная пирамида или **тетраэдр**.

Тетраэдр - простейший многогранник, гранями которого являются четыре треугольника.

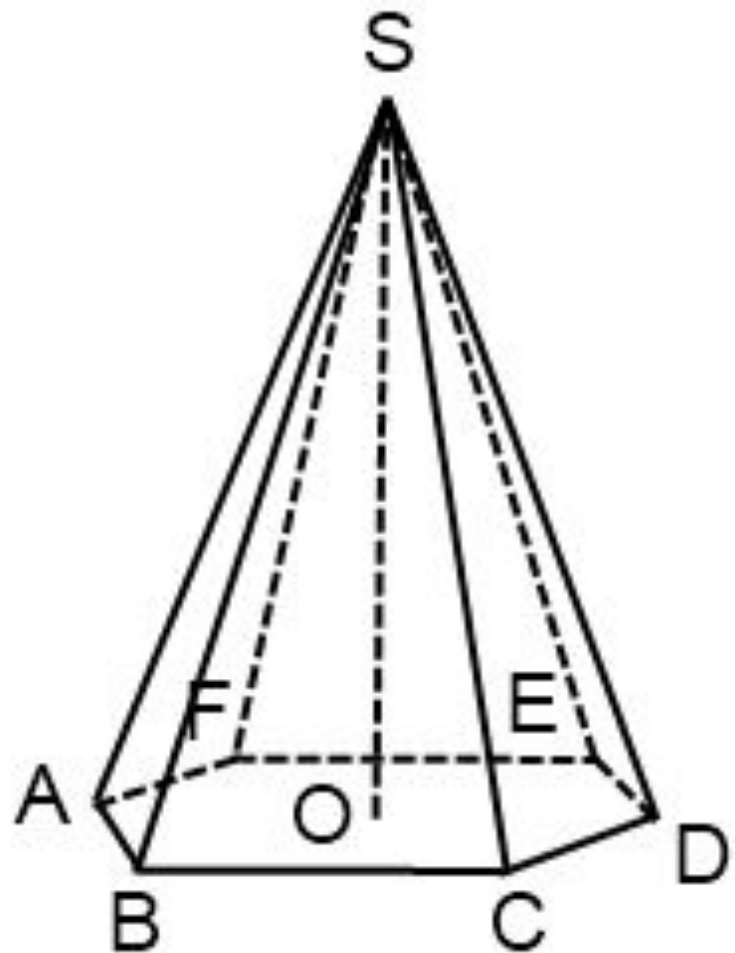
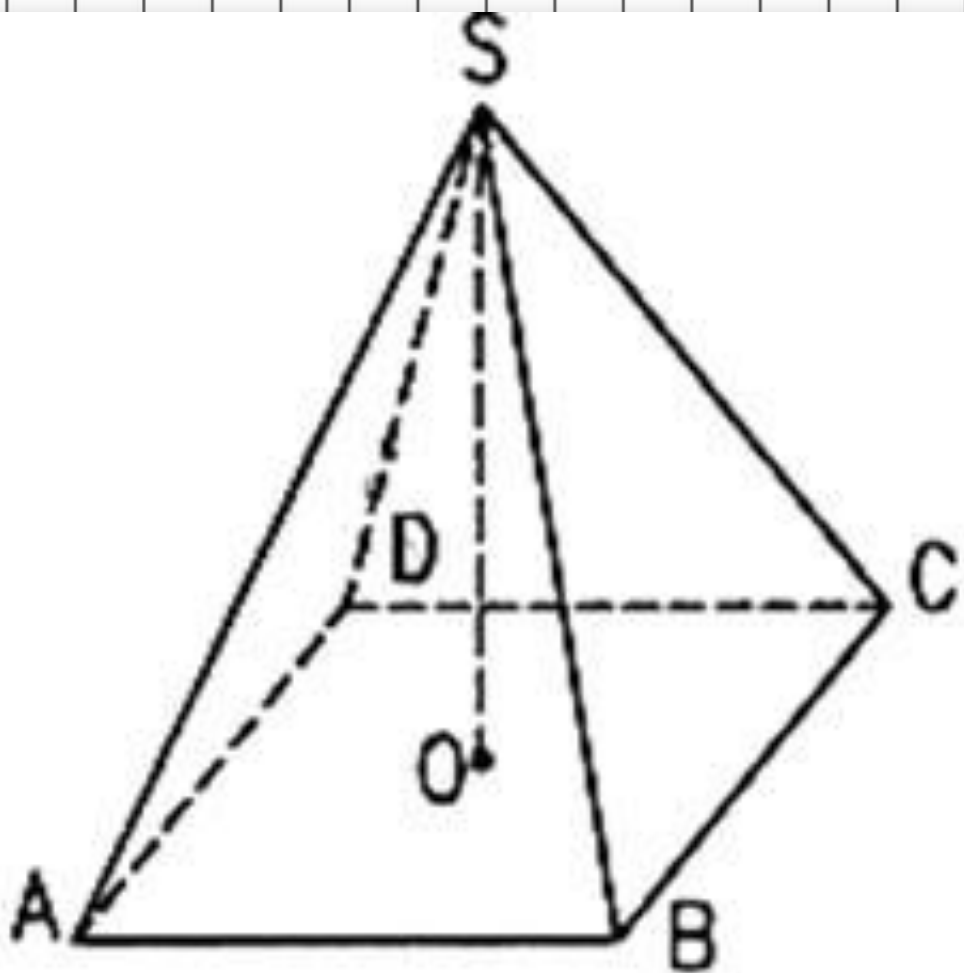
У **тетраэдра** 4 грани, 4 вершины и 6 рёбер.

Высота пирамиды

Из точки P опустим перпендикуляр PH на плоскость основания $ABCD$. Проведенный перпендикуляр является высотой пирамиды.



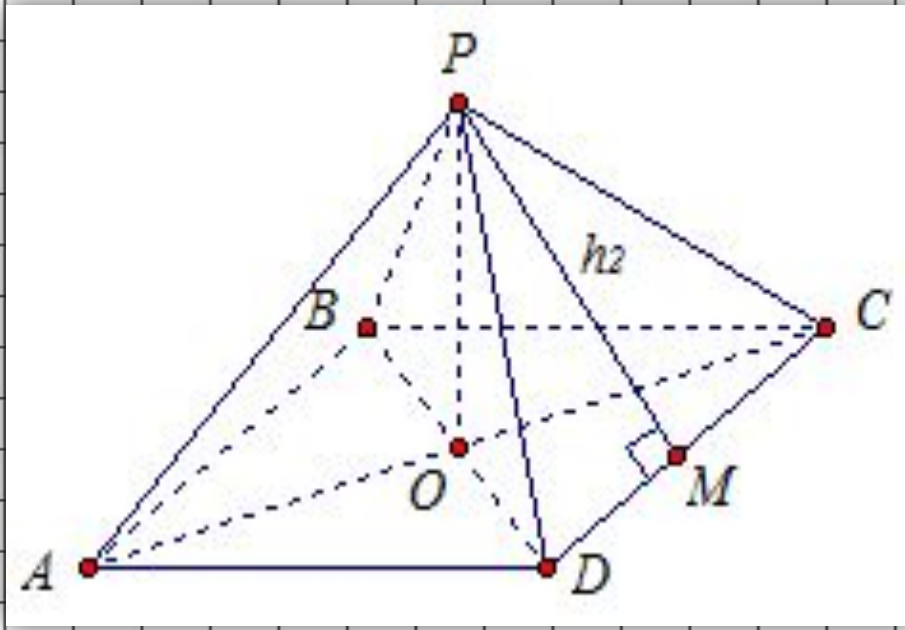
Назовите все элементы пирамиды



Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если:

- ее основание – правильный многоугольник;
- отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.

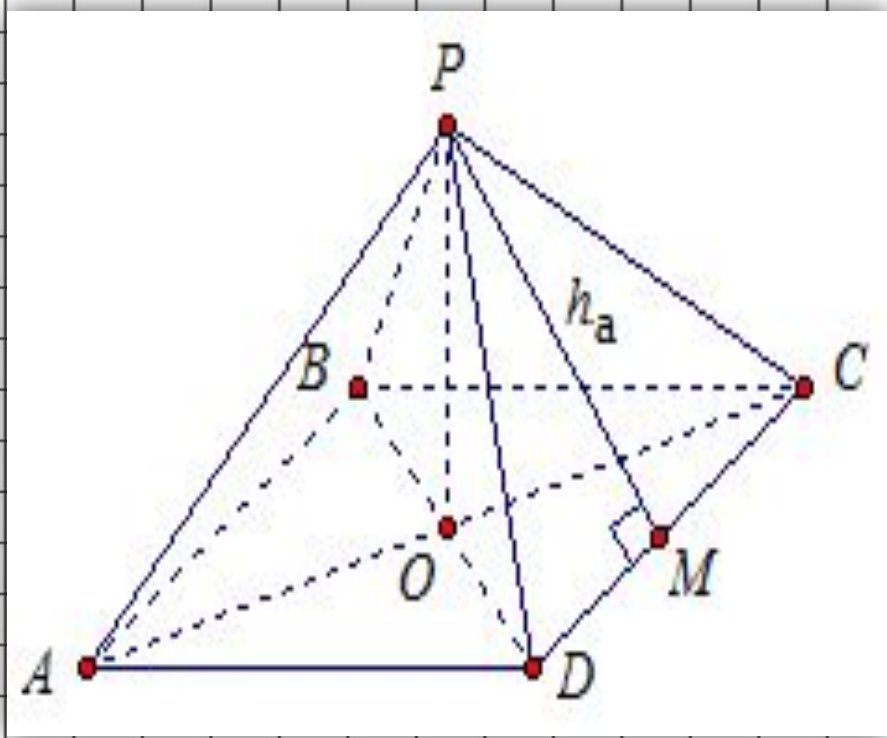


Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$.

P – вершина пирамиды.

Основание пирамиды $ABCD$ – правильный четырехугольник, то есть квадрат. Точка O , точка пересечения диагоналей, является центром квадрата.

Значит, PO – это высота пирамиды.

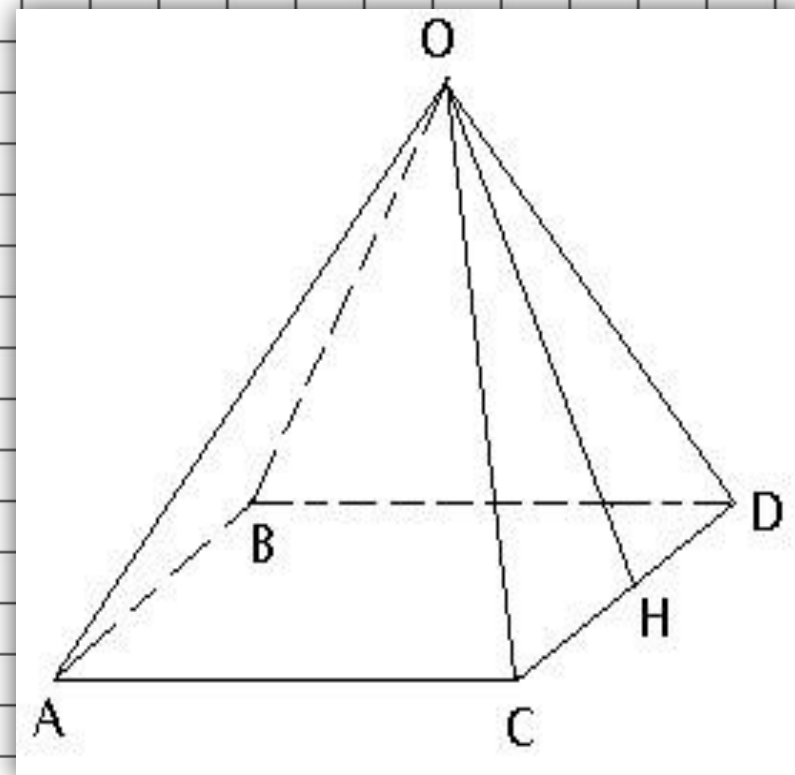
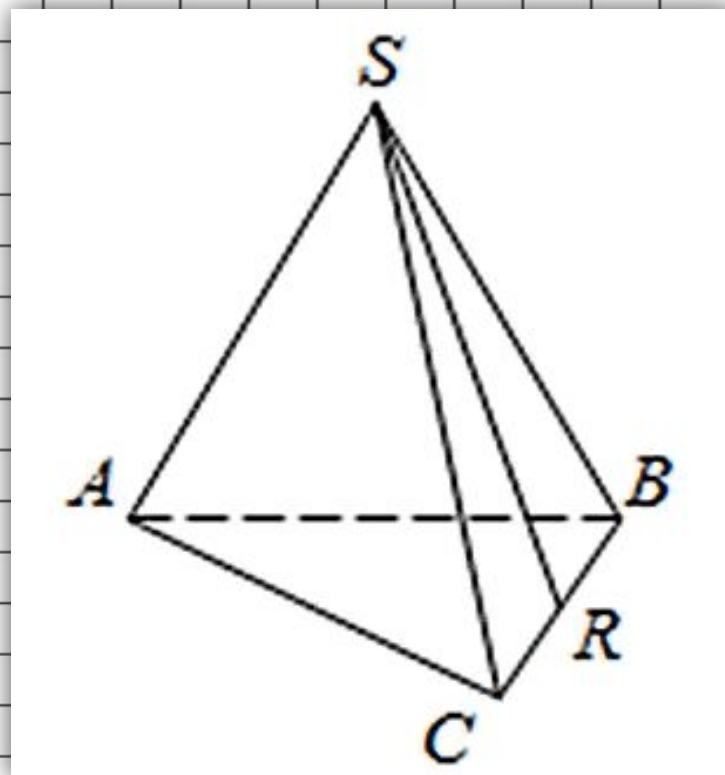
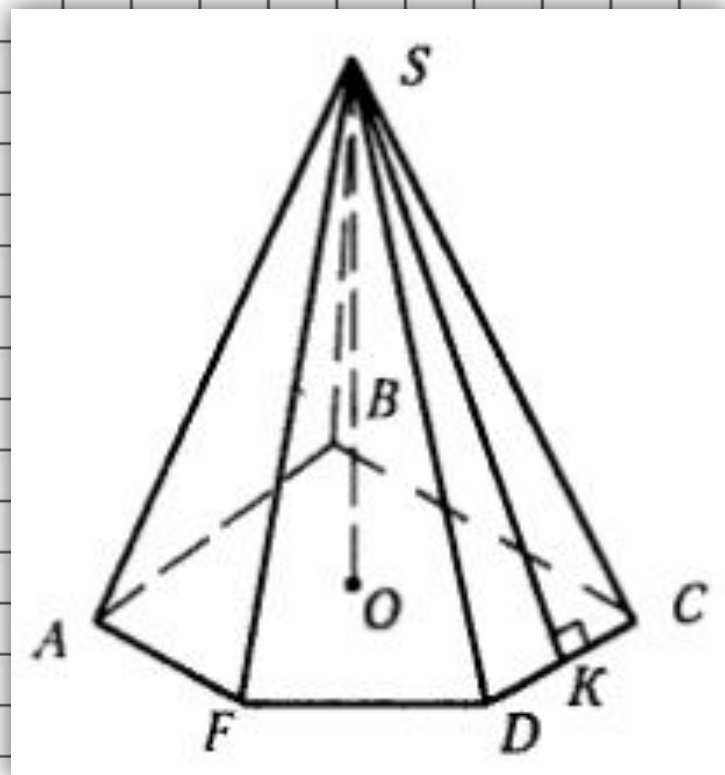


PM - апофема

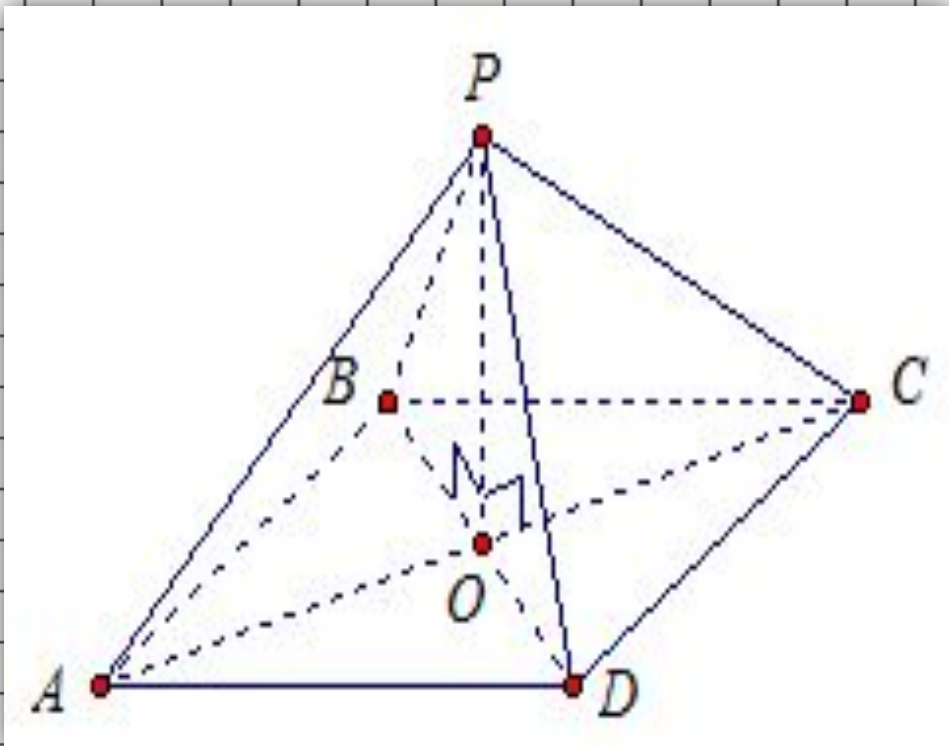
В правильном n -угольнике центр вписанной и центр описанной окружности совпадает. Этот центр и называется центром многоугольника.

Иногда говорят, что вершина проектируется в центр. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой* и обозначается h_a .

Назовите апофему

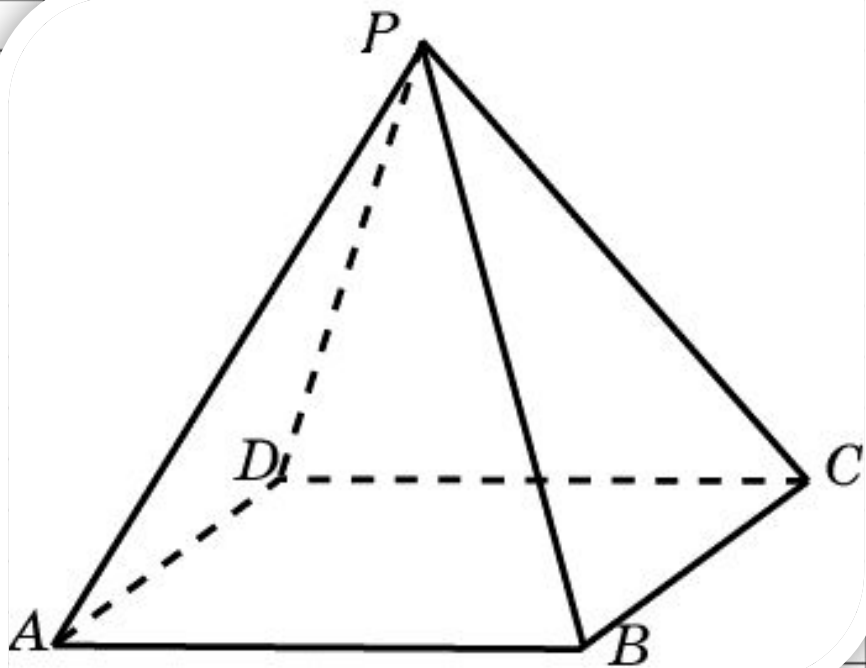


Свойства правильной пирамиды



1. Все боковые ребра правильной пирамиды равны;
2. Боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

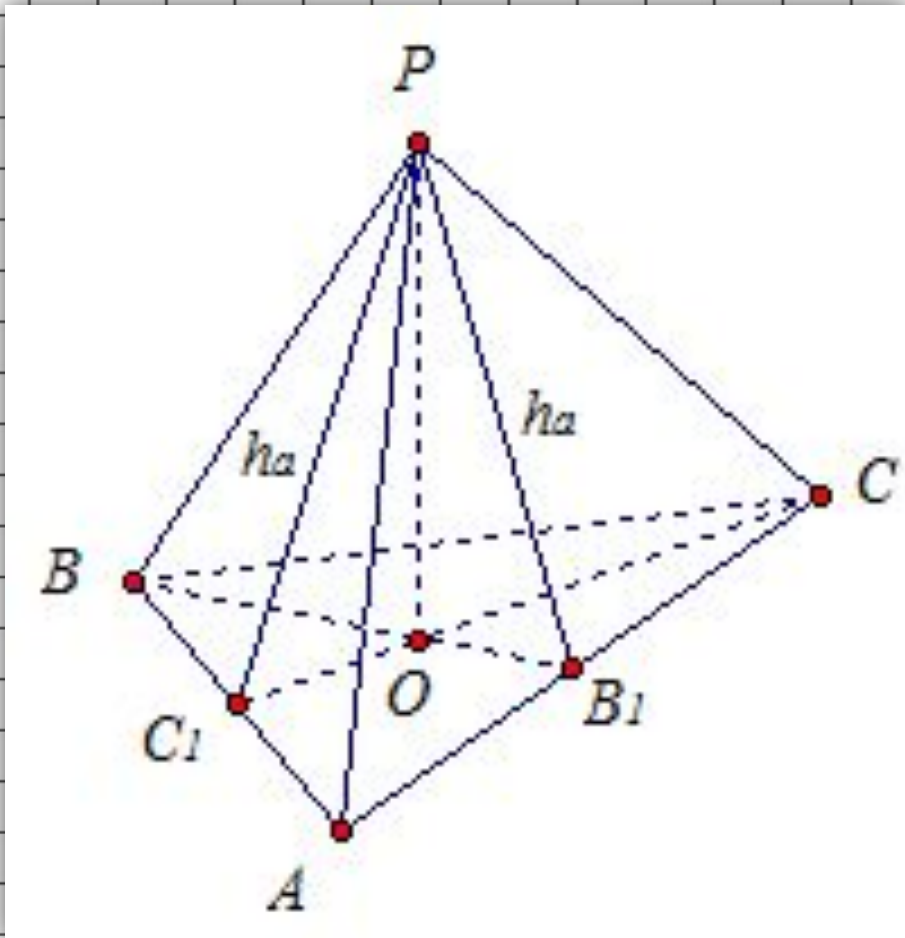
Площадь поверхности пирамиды



Полная поверхность пирамиды состоит из поверхности боковой, то есть площади всех боковых граней, и площади основания:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

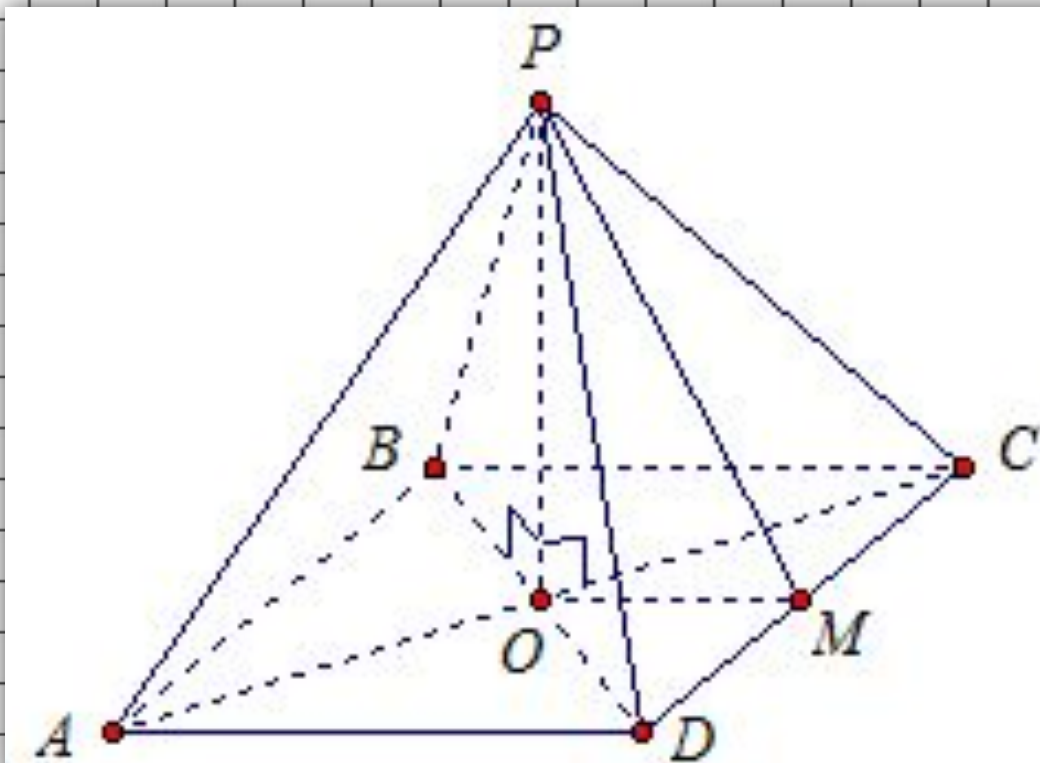
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды



Теорема:
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot h_a$$

Задача №1. Радиус окружности, вписанной в основание правильной четырехугольной пирамиды, равен 3 м, высота пирамиды равна 4 м. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Дано: правильная
четырёхугольная пирамида $ABCD$,
 $ABCD$ – квадрат,
 $r = 3$ м,
 PO – высота пирамиды,
 $PO = 4$ м.
Найти: $S_{\text{бок}}$

Решение:

По доказанной теореме $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h_a$

Найдем сначала сторону основания AB .

Нам известно, что радиус окружности, вписанной в основание правильной четырехугольной пирамиды, равен 3 м. Тогда $AB=2r=6$ м. Найдем периметр квадрата $ABCD$ со стороной 6 м: $6 \cdot 4 = 24$ (м)

Рассмотрим треугольник BOD . Пусть M – середина стороны DC . Так как O – середина BD ,

то $OM = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (м).

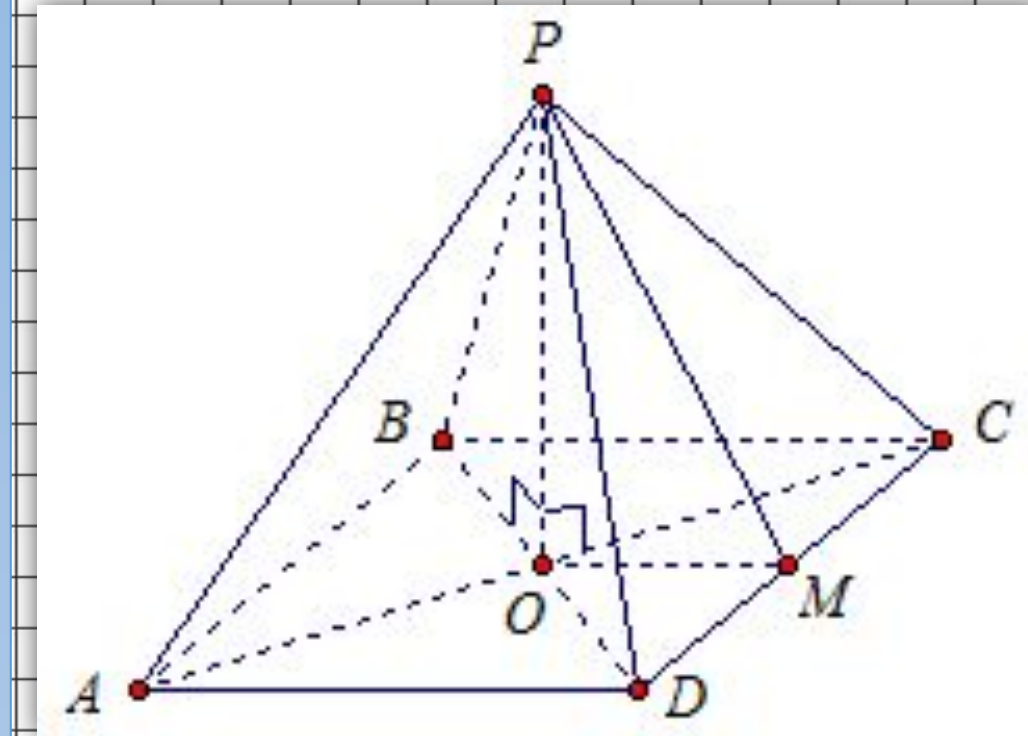
Треугольник DPC – равнобедренный. M – середина DC . То есть, PM – медиана, а значит, и высота в треугольнике DPC . Тогда PM – апофема пирамиды.

PO – высота пирамиды. Тогда, прямая PO перпендикулярна плоскости ABC , а значит, и прямой OM , лежащей в ней. Найдем апофему PM из прямоугольного треугольника POM .

$PM = \sqrt{OM^2 + PO^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (м)

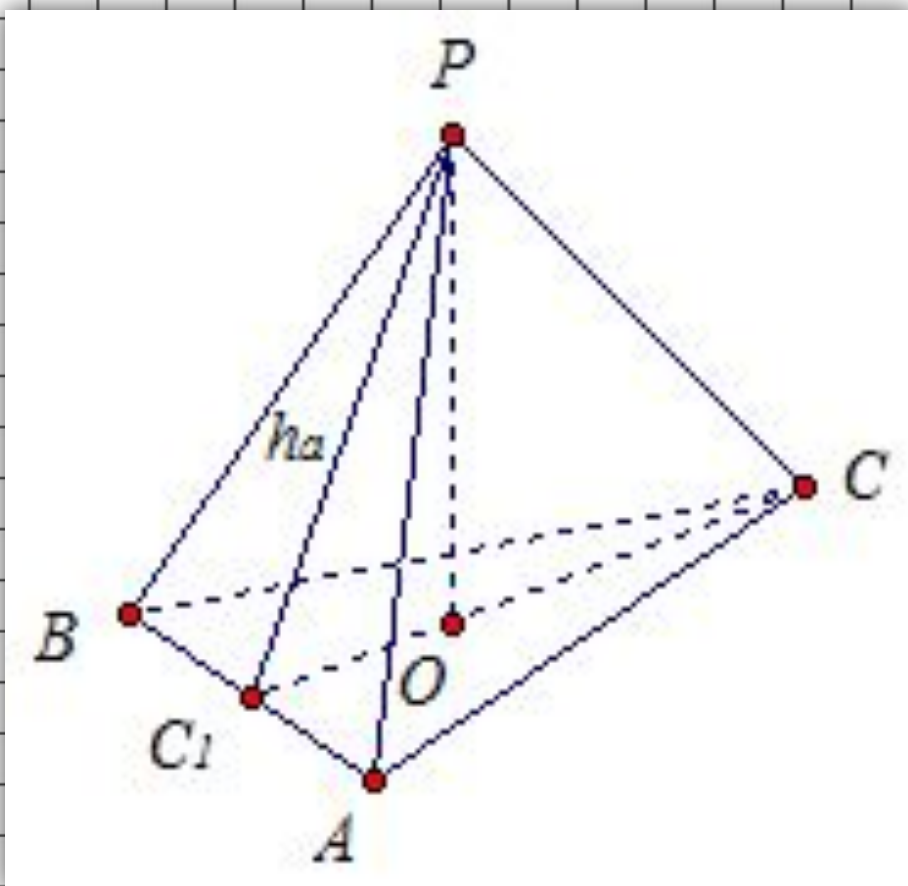
Теперь можем найти боковую поверхность пирамиды:

$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h_a = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60$ (м²).



Ответ: 60 м²

Задача №2. Радиус окружности, описанной около основания правильной треугольной пирамиды, равен $\sqrt{3}$ м. Площадь боковой поверхности равна 18 м^2 . Найдите длину апофемы.



Дано: $ABCP$ – правильная
треугольная пирамиды,
 $AB = BC = CA$,
 $R = \sqrt{3}$ м,
 $S_{\text{бок.}} = 18 \text{ м}^2$
Найти: PC_1

Решение:

В правильном треугольнике ABC дан радиус описанной окружности. Найдем сторону AB этого треугольника с помощью теоремы синусов.

$$\frac{AB}{\sin \angle BCA} = 2R$$

$$\frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$AB=3$ м.

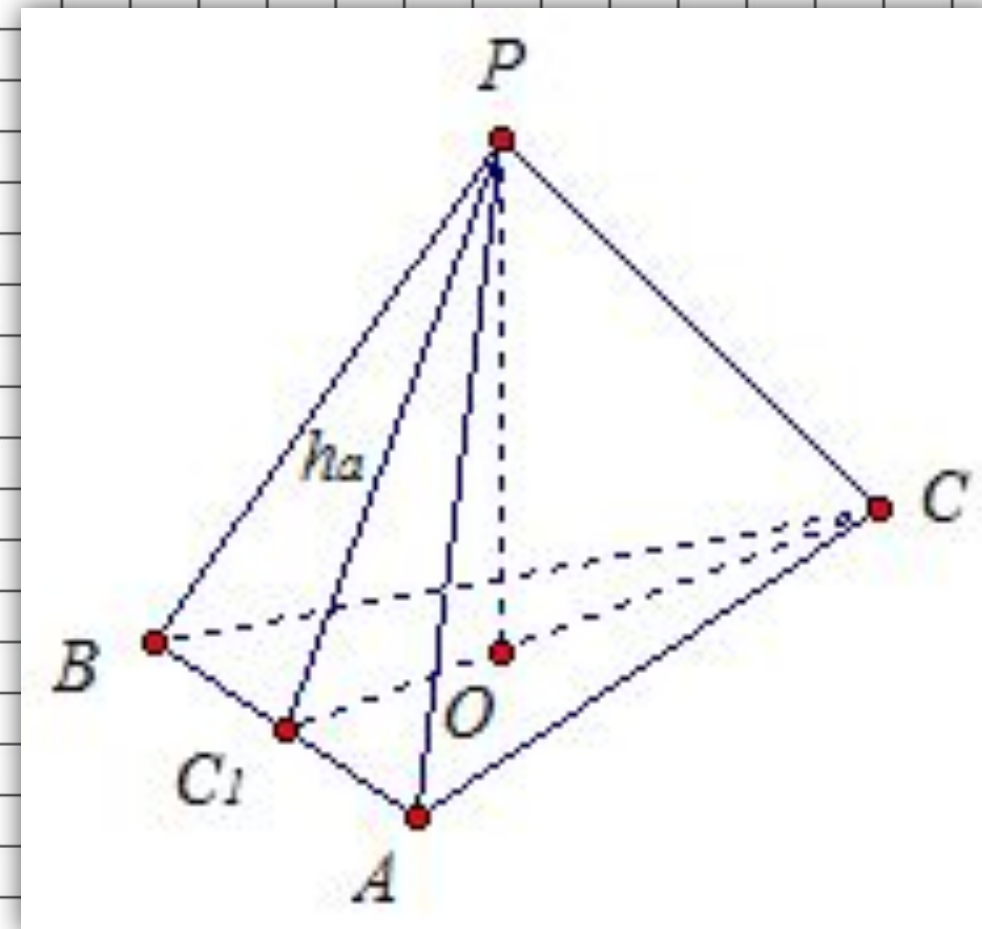
Зная сторону правильного треугольника ($AB=3$ м), найдем его периметр:

$$P_{ABC} = 3 \cdot AB = 3 \cdot 3 = 9 \text{ (м)}$$

По теореме о площади боковой поверхности правильной пирамиды

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h_a$$

$$h_a = \frac{2S_{бок}}{P_{осн}} = \frac{2S_{бок}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot 18}{9} = 4 \text{ (м)}.$$



Ответ: 4 м

Историческая справка



Самой большой из трех Великих пирамид является **пирамида Хеопса**. Ее приблизительная **высота составляет 138,8 метра**, хотя, по данным ученых, раньше она была выше. **Сторона ее основания составляет 227,5 метров**. Для сооружения этой громадины древние египтяне не использовали связующего раствора, блоки подогнаны друг к другу с поразительной геометрической точностью.



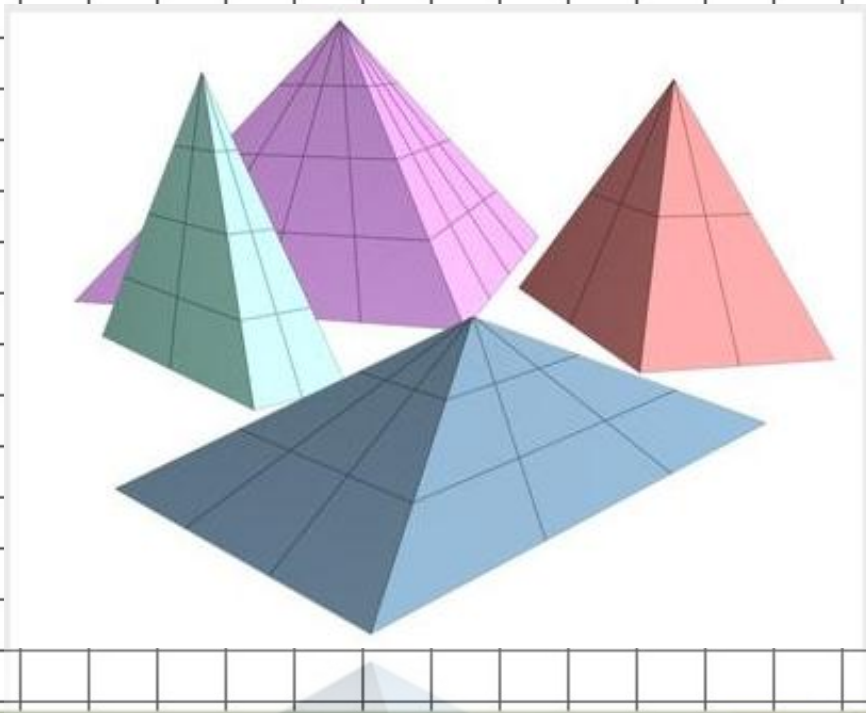
Вторая по величине пирамида Хефрена настолько незначительно отличается от пирамиды Хеопса, что под некоторым углом зрения иногда она даже кажется больше, хотя это впечатление обманчиво. **Высота** ее составляет **136 метров, сторона – 215 метров.**



Пирамида Миккерины является самой южной и самой низкой из из трех пирамид в Гизе. Внешне она немного отличается од двух своих предшественниц. Ее **высота** в настоящее время около **62 метров**, а **сторона её основания — 108,4 метра**.

Итоги урока

Это многогранник, состоящий из многоугольника, называемого основанием, точки, не лежащей в плоскости этого многоугольника, называемой вершиной, и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания



Пирамид а

Восстановите запись

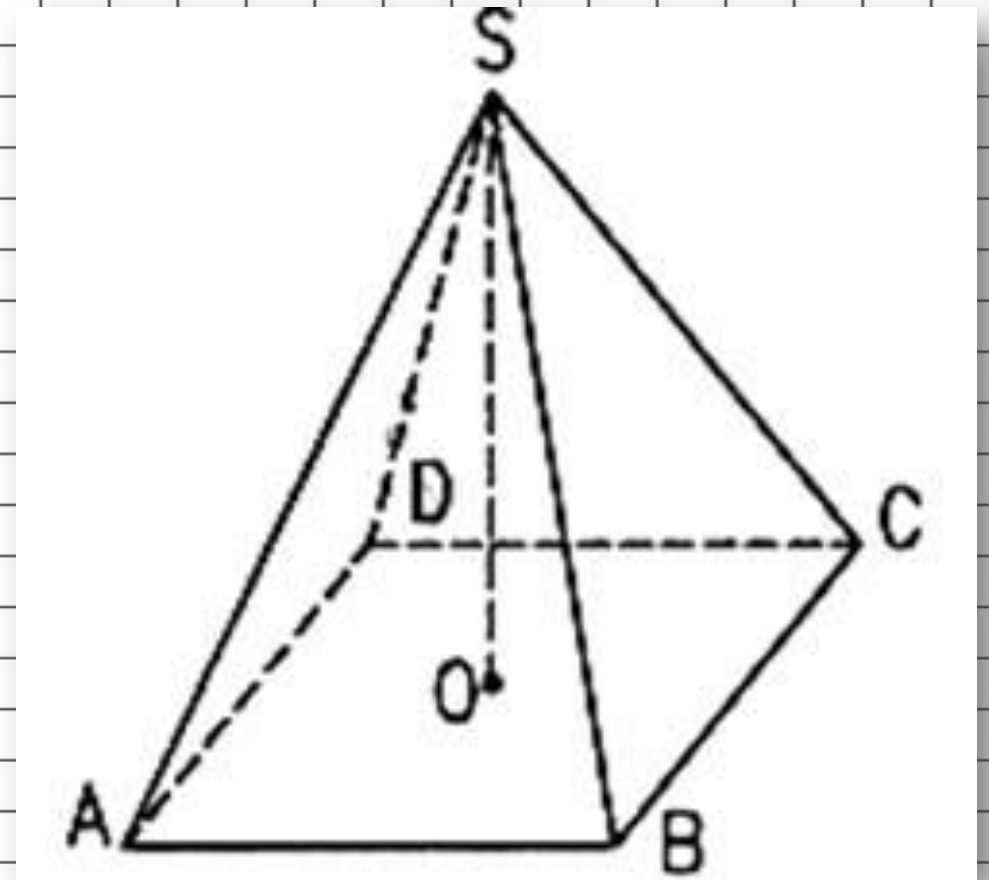
ABCD -

S -

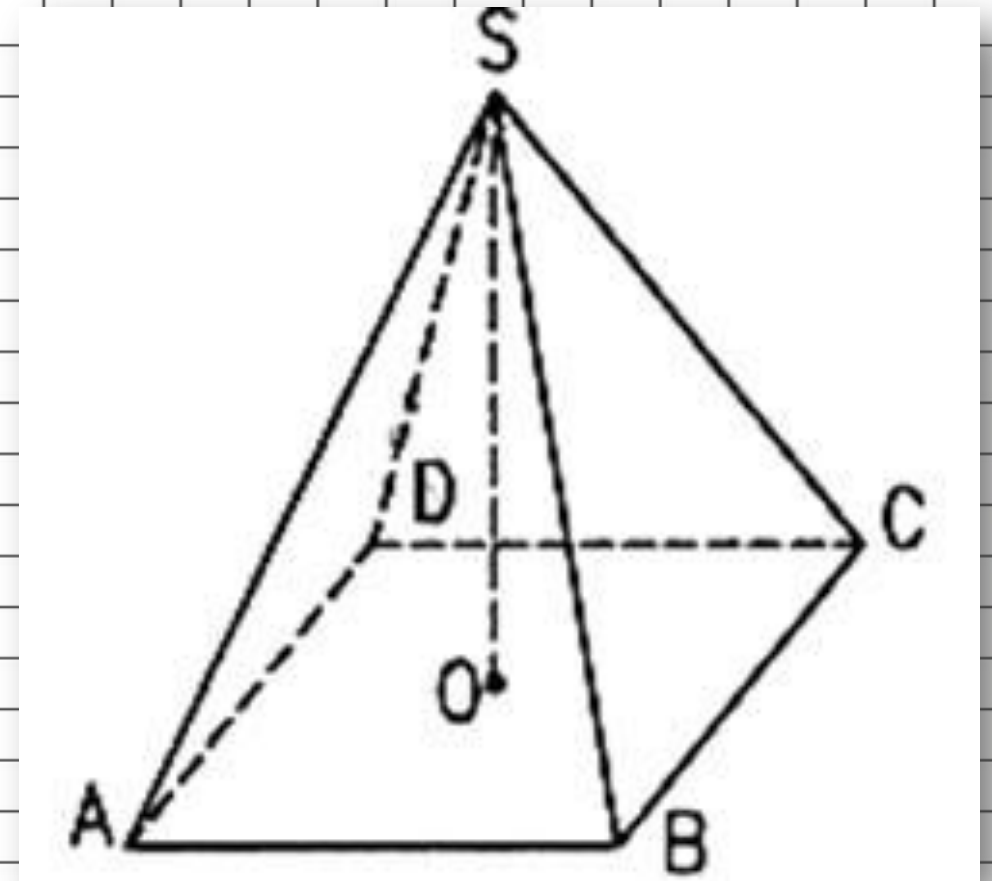
AS,BS,CS,DS-

ASB,BSC,CSD,DSA -

SO -



ABCD-основание;
S - вершина пирамиды;
AS,BS,CS,DS- боковые рёбра;
ASB,BSC,CSD,DSA - боковые грани
SO - высота.

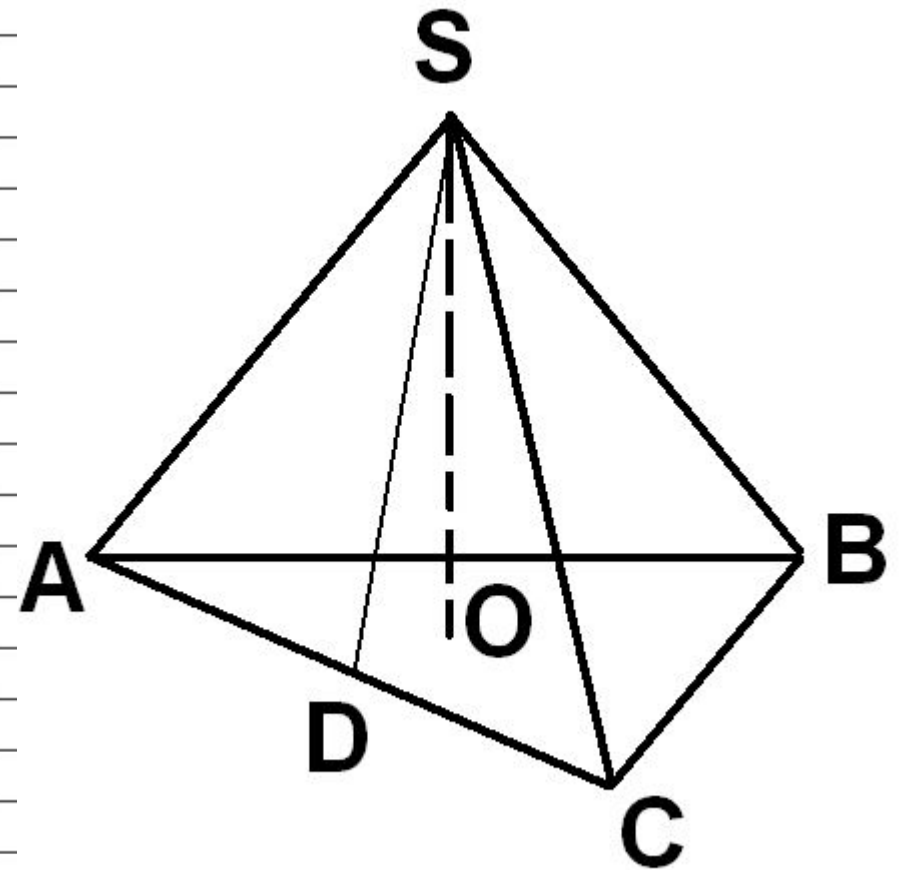


Восстановите запись

Я - пирамида треугольная, потому что в основании у меня

А если моя высота будет соединять вершину с центром правильного треугольника, то я буду

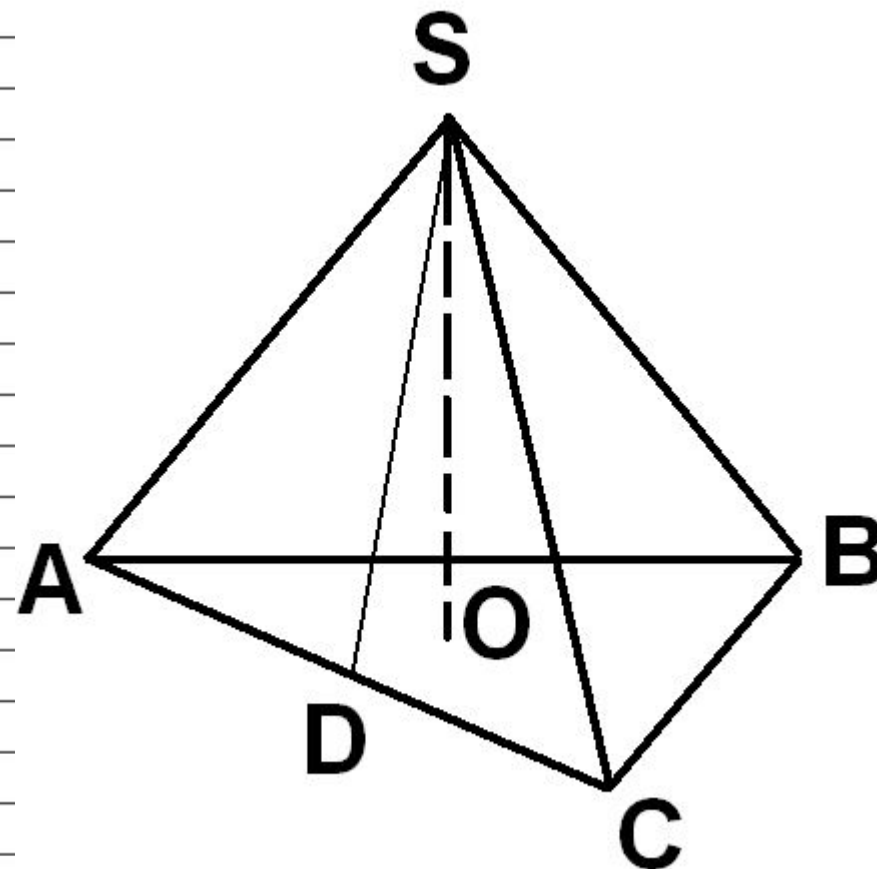
Высота боковой грани правильной пирамиды называется



Я - пирамида треугольная, потому что в основании у меня лежит треугольник.

А если моя высота будет соединять вершину с центром правильного треугольника, то я буду правильной треугольной пирамидой.

Высота боковой грани правильной пирамиды называется апофемой.

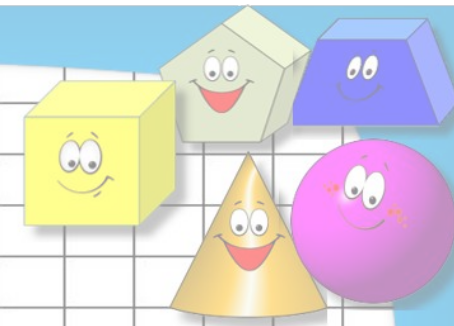


Итоги урока

По какой формуле можно найти площадь боковой поверхности правильной пирамиды?

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot h_{\text{а}}$$

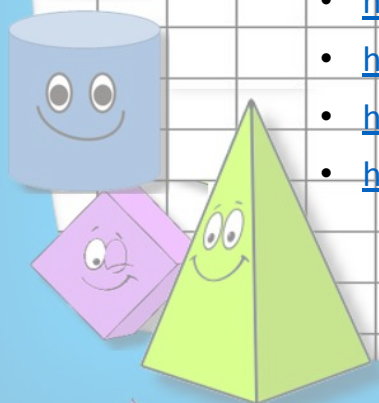
Список источников содержания и иллюстраций



- Геометрия. 10-11 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни) / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2008. – 288 с.: ил.
- Геометрия. 10-11 класс: Учебник для общеобразовательных учебных заведений / Шарыгин И. Ф. – М.: Дрофа, 1999. – 208 с.: ил.
- Геометрия. 10 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звалич. – 6-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2008. – 233 с.: ил.
- <http://igri-uma.ru/forum/index.php?showtopic=3936> – стих про пирамиду
- <http://life-trip.ru/piramidy-drevnego-egipta/>

Иллюстрации:

- http://bestmaps.ru/files/images/egipetskie-piramidy_35.jpg
- http://d3mlntcv38ck9k.cloudfront.net/content/konspekt_image/125596/363ef970_a847_0131_670c_12313c0dade2.png
- <http://900igr.net/datai/geometrija/Objom-piramidy/0019-021-Uprazhnenie-17.png>
- <http://math.all-tests.ru/sites/math.all-tests.ru/files/images/367-resolve.png>
- http://d3mlntcv38ck9k.cloudfront.net/content/konspekt_image/125597/37d4a110_a847_0131_670d_12313c0dade2.png
- <http://2mb.ru/wp-content/uploads/2014/02/treugolnaja-piramida1.jpg>



Иллюстрации:

- <http://www.calc.ru/imgs/articles/270-12390d7a8675ab0a7b328d97048dd0e2.jpg>
- <http://www.uznateshe.ru/wp-content/uploads/2013/01/pravilnayapiramida61.png>
- http://d3mlntcv38ck9k.cloudfront.net/content/konspekt_image/125598/39235a20_a847_0131_670e_12313c0dade2.png
- <http://shkolo.ru/i/piramida.gif>
- <http://matematikalegko.ru/wp-content/uploads/2013/01/31.gif>
- http://otvet.imgsmail.ru/download/5299838a193da5731b536b78d44b8cab_i-35.jpg
- http://d3mlntcv38ck9k.cloudfront.net/content/konspekt_image/125599/3a9f26c0_a847_0131_670f_12313c0dade2.png
- http://d3mlntcv38ck9k.cloudfront.net/content/konspekt_image/125602/3e9c5860_a847_0131_6712_12313c0dade2.png
- <http://www.ice-nut.ru/egypt/egypt0340201.jpg>
- <http://s2.afisha-mir.ru/StaticContent/Photos/110205091400/110207200150/p-1024x1024-piramida-hefrena.jpg>
- <http://www.voyage.org.ua/wp-content/uploads/2014/02/34.jpg>
- <http://photostock.su/48398.jpeg>
- <http://savepic.su/422861.png>
- <http://vova1001.narod.ru/Site/piramid1.jpg>
- http://nienhuis.ru/upload_files/catalog/477_1.jpg

