Углы и расстояния в пространстве

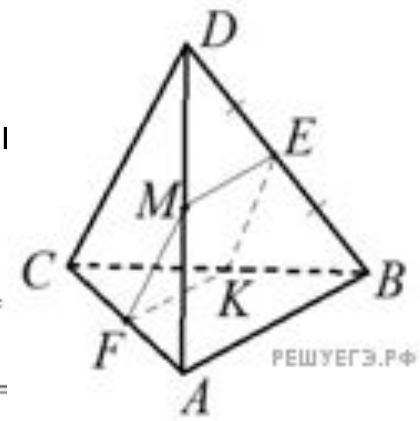
Задание № 16

Маршеня М.Е., МАОУ СОШ № 77, г.Екатеринбург

В ПИРАМИДЕ *DABC* ПРЯМЫЕ, СОДЕРЖАЩИЕ РЕБРА *DC* И *AB*, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ. А) ПОСТРОЙТЕ СЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЬЮ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ *O* — СЕРЕДИНУ РЕБРА *DB*, И ПАРАЛЛЕЛЬНО *DC* И *AB*. ДОКАЖИТЕ, ЧТО ПОЛУЧИВШЕЕСЯ СЕЧЕНИЕ ЯВЛЯЕТСЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОМ. Б) НАЙДИТЕ УГОЛ МЕЖДУ ДИАГОНАЛЯМИ ЭТОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ЕСЛИ *DC* =24, *AB* =10.

Решение:а) Построим прямые *EK*, *EM*, *KF*, такие что: *EK* // *DC*; *EM* // *AB*; *KF* // *AB*; *EKFM* — искомое сечение, причём *EKFM* — параллелограмм. Покажем, что *EKFM* прямоугольник:

$DC \perp AB \Rightarrow EK \perp AB \Rightarrow EM \perp EK,$ $EK \parallel DC\ EM \parallel AB.$



Поскольку *EK* // *DC*; *EM* // *AB*; получаем, что *EKMF* — прямоугол

б) *EK* // *DC* и *E* — середина *DB*, тогда *EK* — средняя линия треугольника значит $EK = \frac{1}{2}DC = 12,$ **аналогично** $ME = \frac{1}{2}AB = 5.$ **Так как *EKMF* прямоугольник, получаем:** $MK^2 = ME^2 + EK^2 \Leftrightarrow MK^2 = 12^2 + 5^2 \Leftrightarrow MK =$

Пусть прямая *MK* пересекает прямую *EF* в точке *O*, тогда: $MO = OK = EO =$

Заметим, что $ME < EK.$ **Применим теорему косинусов в треугольнике** EOM :

$$EM^2 = MO^2 + OE^2 - 2MO \cdot OE \cdot \cos\angle EOM.$$

$$\cos\angle EOM = \frac{2 \cdot \frac{169}{4} - 25}{2 \cdot \frac{169}{4}} = \frac{119}{169}.$$

Откуда

$\arccos\frac{119}{169}.$

Ответ:

Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{4}{5}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

Решение.

Пусть $SO = 4x$ и $SM = 5x$.

Тогда

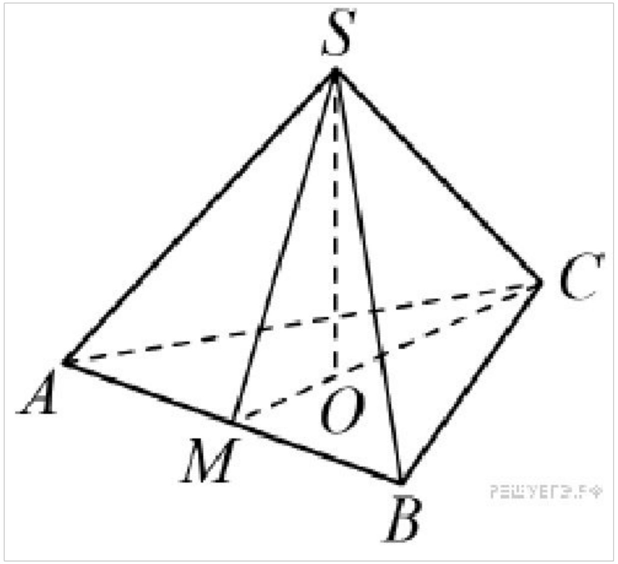
$$OM = x\sqrt{25-16} = 3x,$$

$$OC = 2 \cdot OM = 6x.$$

Из треугольника COS находим:

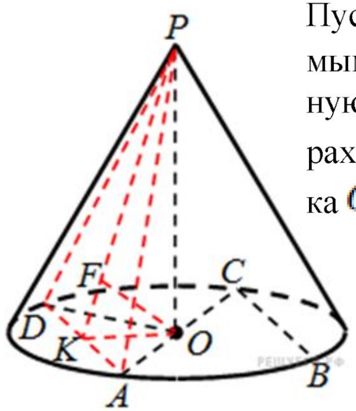
$$\operatorname{tg}\angle SCO = \frac{OS}{OC} = \frac{4x}{6x} = \frac{2}{3}.$$

Тогда искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.



Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

Отрезок AC — диаметр основания конуса, отрезок AP — образующая этого конуса и $AP = AC$. Хорда основания BC составляет с прямой AC угол $60°$. Через AP проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой BC. Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.



Пусть отрезок AD — хорда основания, параллельная BC. Тогда треугольник ADP является искомым сечением, так как плоскость ADP содержит прямую AP и прямую AD, параллельную BC. Опустим перпендикуляр PK на прямую AD. Согласно теореме о трех перпендикулярах OK также является перпендикуляром к AD, значит, $AD \perp (OPK)$. Высота OF треугольника OPK лежит в плоскости OPK, следовательно, $OF \perp AD$ и $OF \perp PK$, значит, $OF \perp (ADP)$.

Далее находим:

1) из условия $AD || BC : \angle DAC = \angle BCA = 60°$;

2) из правильного треугольника AOD: $OK = \frac{AO\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) из прямоугольного треугольника APO: $PO^2 = AP^2 - AO^2 = 4R^2 - R^2 = 3$;

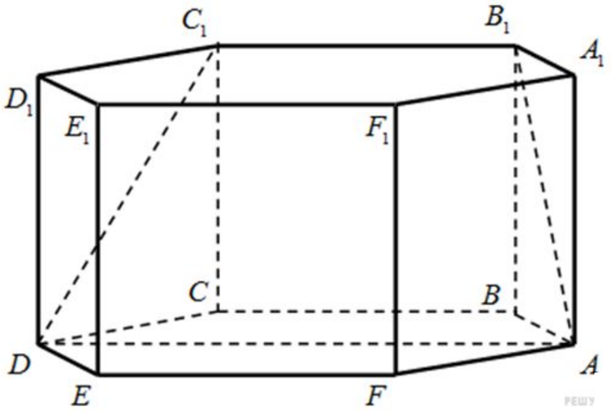
4) из прямоугольного треугольника KPO:

а) $KP = \sqrt{PO^2 + KO^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$;

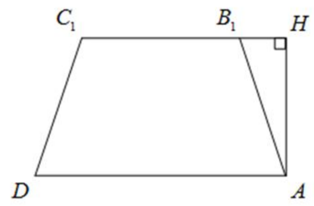
б) $OF = \frac{OK \cdot OP}{PK} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}}$.

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{15}}$.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F$, все рёбра которой равны 4, найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1.



Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то прямые AD и BC параллельны



Параллельны также прямые BC и B_1C_1, и следовательно, прямые AD и B_1C_1 параллельны. Расстояние от точки A до прямой B_1C_1 равно расстоянию между прямыми AD и B_1C_1.

В трапеции DC_1B_1A имеем $B_1C_1 = 4,\ DA = 8,\ DC_1 = B_1A = 4\sqrt{2}$.

Значит, $B_1H = \dfrac{DA - C_1B_1}{2} = \dfrac{8-4}{2} = 2$, тогда $AH = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2\sqrt{7}$.

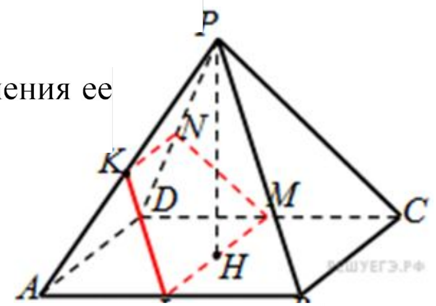
Ответ: $2\sqrt{7}$.

В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 4, точка K — середина бокового ребра AP.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC.

б) Найдите площадь сечения.

В плоскости ABP через точку K проведем прямую, параллельную прямой PB до пересечения ее с прямой AB в точке L,



а в плоскости ABC через точку L проведем прямую, параллельную прямой BC до пересечения ее с прямой CD в точке M.

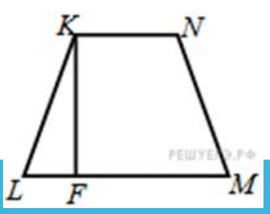
По признаку параллельности прямой и плоскости плоскость KLM параллельна прямым PB и BC.

Прямая LM параллельна прямой AD, следовательно, она параллельна плоскости APD, а, значит, плоскость KLM пересекает плоскость APD по прямой, параллельной LM.

Обозначим через N точку пересечения этой прямой с ребром PD.

Таким образом, искомое сечение — трапеция $KLMN$.

Отрезки KL и MN равны, как средние линии равных правильных треугольников ABP и DCP, а отрезок LM — средняя линия квадрата $ABCD$, следовательно, построенное сечение — равнобедренная трапеция, в которой $LM = 4,\ KL = KN = MN = 2$.

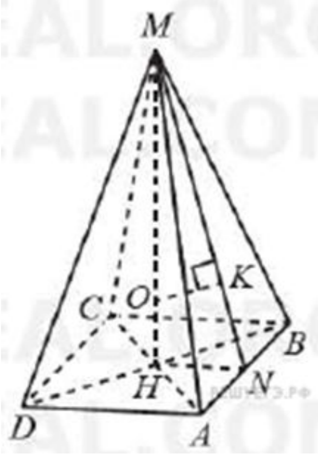


Проведем высоту KF этой трапеции. Тогда $LF = \dfrac{LM - KN}{2} = 1,$ и из прямоугольного треугольника KLF находим $KF = \sqrt{KL^2 - LF^2} = \sqrt{3}.$

Окончательно получаем $S_{KLMN} = \dfrac{LM + KN}{2} \cdot KF = 3\sqrt{3}.$

Ответ: $3\sqrt{3}.$

В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 17, а высота равна 7, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.



Пусть MH — высота правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с вершиной M, тогда треугольник AMH — прямоугольный, $MA = 17$, $MH = 7$, откуда $AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 4\sqrt{15}$.

Треугольник ABH — прямоугольный равнобедренный, следовательно, $AB = AH\sqrt{2} = 4\sqrt{30}$. В треугольнике AMB высота

$$MN = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 13.$$

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABH высота $HN = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{30}$.

Центр O сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, лежит на её высоте MH, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

$$MO : OK = MN : HN \Leftrightarrow \frac{7-r}{r} = \frac{13}{2\sqrt{30}} \Leftrightarrow (7-r)\cdot 2\sqrt{30} = 13\cdot r \Leftrightarrow r = \frac{26\sqrt{30}-120}{7},$$

где r — радиус сферы.

Площадь сферы

$$S = 4\pi r^2 = \frac{480(289-52\sqrt{30})\pi}{49}.$$

Ответ: $\frac{480(289-52\sqrt{30})\pi}{49}$.

МАРШЕНЯ М.Е., МАОУ СОШ № 77, Г.ЕКАТЕРИНБУРГ