

Объемы тел

(блочная подача материала)

Свойства объемов

1⁰. Равные тела имеют равные объемы.

2⁰. Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.

Объем прямоугольного параллелепипеда

Теорема

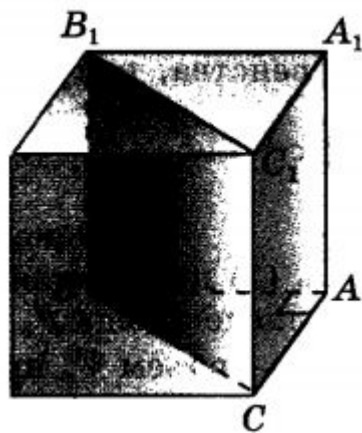
Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

Следствие 1

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Следствие 2

Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

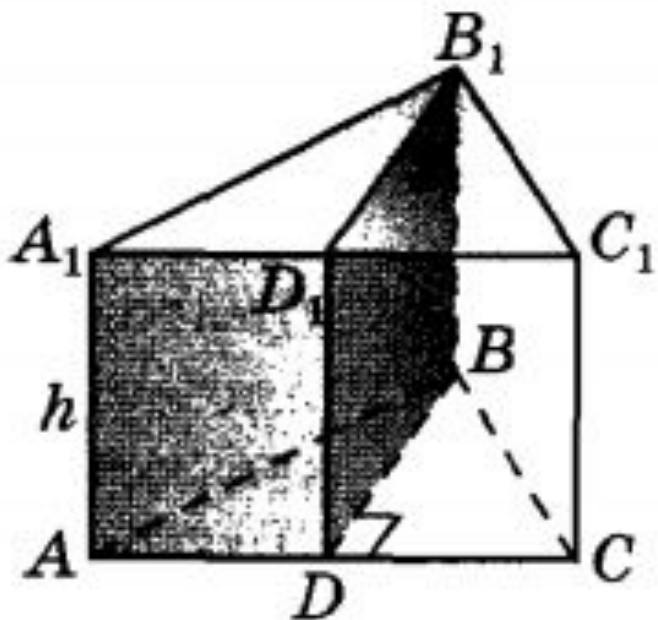


$$V = abc = Sh.$$

Объем прямой призмы

Теорема

Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.

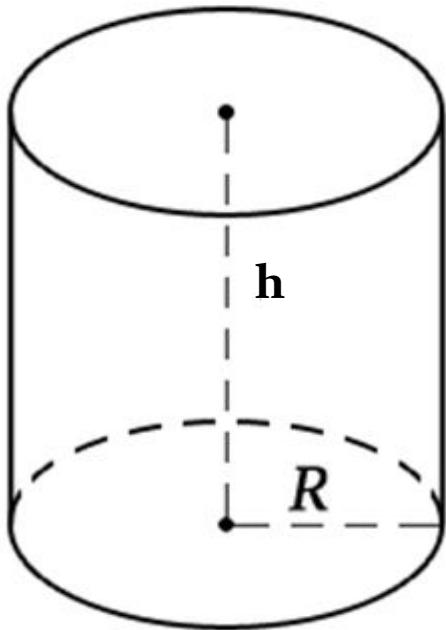


$$V = S_{ABC} \cdot h.$$

Объем цилиндра

Теорема

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.



$$V = \pi r^2 h.$$

$$V = S \cdot h.$$

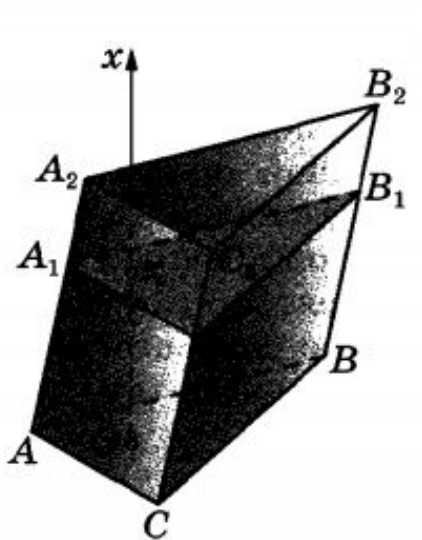
Основная формула для вычисления объемов тел

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

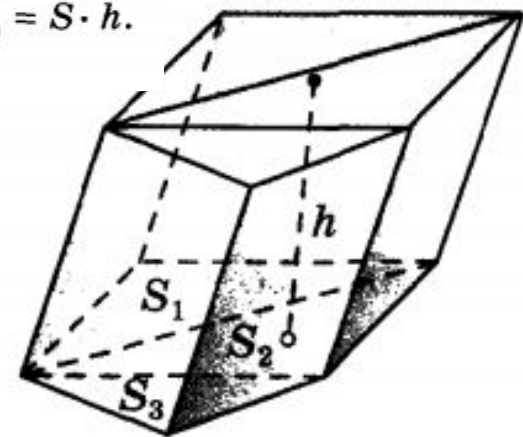
Объем наклонной призмы

Теорема

Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.



$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h S dx = S \int_0^h dx = S \cdot x \Big|_0^h = S \cdot h.$$

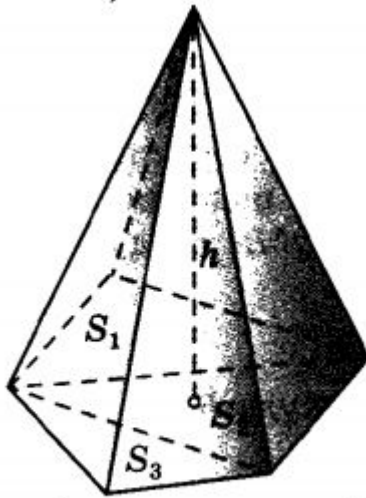


$$V = (S_1 + S_2 + S_3)h = Sh$$

Объем пирамиды

Теорема

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.



Следствие

Объем V усеченной пирамиды, высота которой равна h , а площади оснований равны S и S_1 , вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}).$$

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3)h = \frac{1}{3}Sh$$

Объем конуса

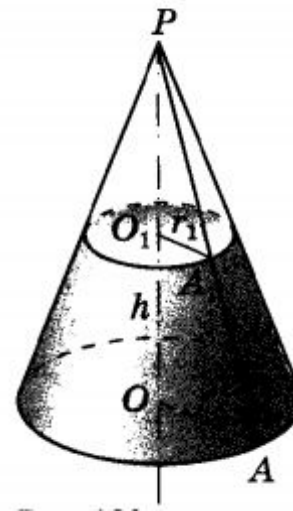
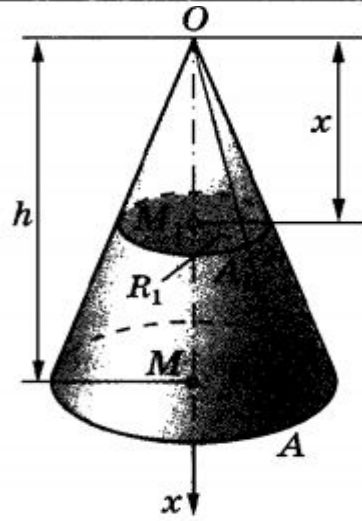
Теорема

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Следствие

Объем V усеченного конуса, высота которого равна h , а площади оснований равны S и S_1 , вычисляется по формуле

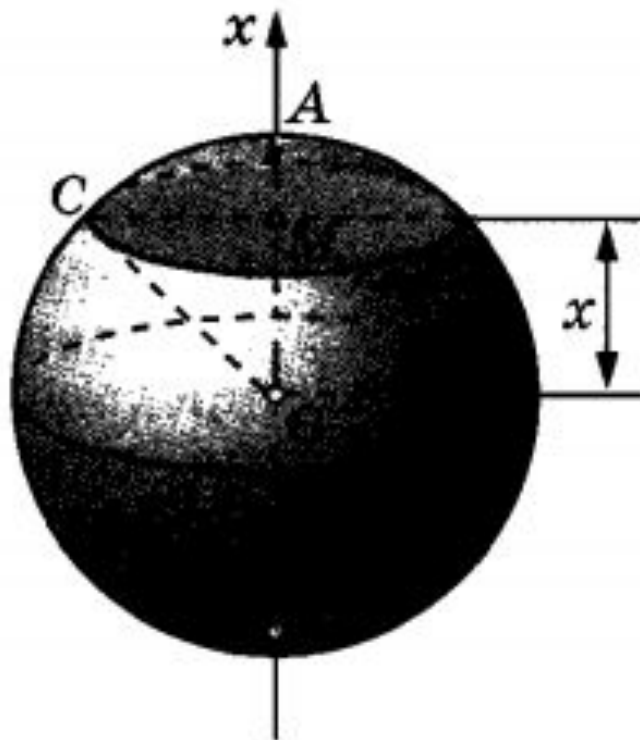
$$V = \frac{1}{3} h (S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}).$$



Объем шара

Теорема

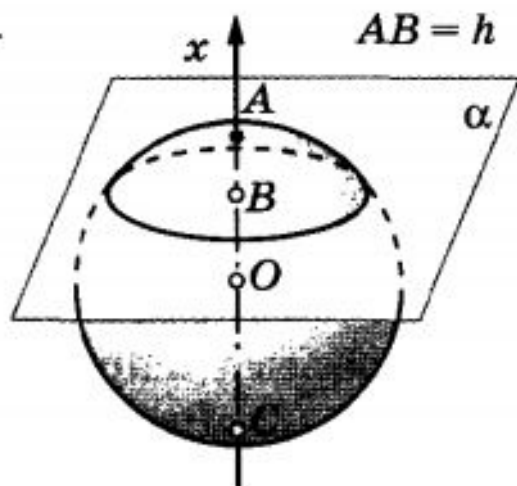
Объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3} \pi R^3$.



Объем шарового сегмента

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью.

Круги, получившиеся в сечении шара этими плоскостями, называются **основаниями шарового слоя**, а расстояние между плоскостями — **высотой шарового слоя**.



Шаровой сегмент

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right).$$

Объем шарового слоя

Шаровым слоем называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями (рис. 194). Круги, получившиеся в сечении шара этими плоскостями, называются **основаниями шарового слоя**, а расстояние между плоскостями — **высотой шарового слоя**.

Объем шарового слоя можно вычислить как разность объемов двух шаровых сегментов.

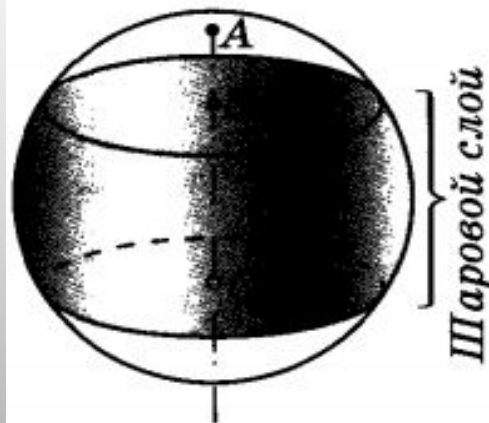
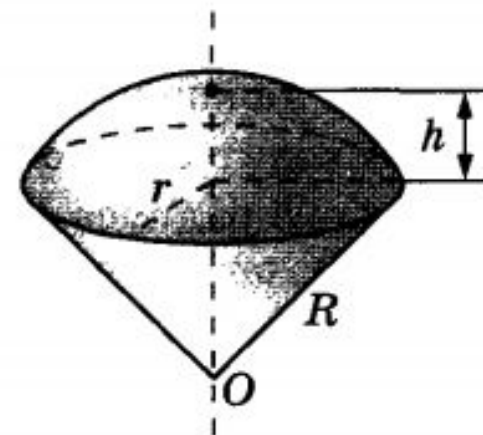


Рис. 194

Объем шарового сектора

Шаровым сектором называется тело, полученное вращением кругового сектора с углом, меньшим 90° , вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов (рис. 195). Шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса. Если радиус шара равен R , а высота шарового сегмента равна h , то объем V шарового сектора вычисляется по формуле

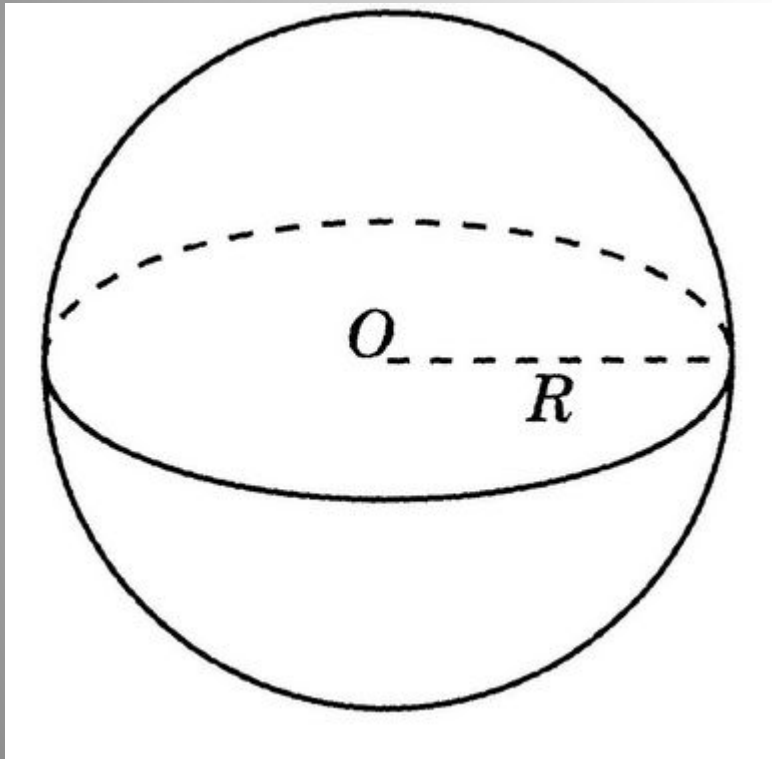
$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$



Шаровой сектор

Рис. 195

Площадь сферы



$$S = 4\pi R^2.$$

Решим задачи:

- 648** Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a и b , а высота равна h , если:
- а) $a = 11$, $b = 12$, $h = 15$; б) $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 10\sqrt{10}$;
в) $a = 18$, $b = 5\sqrt{3}$, $h = 13$; г) $a = 3\frac{1}{2}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 0,96$.
- 666** Пусть V , r и h соответственно объем, радиус и высота цилиндра. Найдите: а) V , если $r = 2\sqrt{2}$ см, $h = 3$ см; б) r , если $V = 120$ см³, $h = 3,6$ см; в) h , если $r = h$, $V = 8\pi$ см³.
- 701** Пусть h , r и V соответственно высота, радиус основания и объем конуса. Найдите:
- а) V , если $h = 3$ см, $r = 1,5$ см;
б) h , если $r = 4$ см, $V = 48\pi$ см³;
в) r , если $h = r$, $V = p$.
- 710** Пусть V — объем шара радиуса R , а S — площадь его поверхности. Найдите: а) S и V , если $R = 4$ см; б) R и S , если $V = 113,04$ см³; в) R и V , если $S = 64\pi$ см².
- 720** Найдите объем шарового сектора, если радиус окружности основания соответствующего шарового сегмента равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.