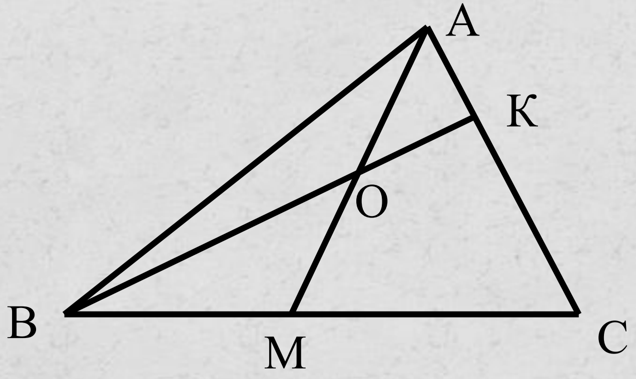
Теоремы Чевы
и
Менелая

Учитель математики
МБОУ лицея №2
г. Южно – Сахалинска
Бокова Т.Н.

Напоминание.

<u>Теорема о пропорциональных отрезках в треугольнике.</u>

На сторонах АС и ВС треугольника АВС отмечены точки К и М так, что АК: КС=$m:n$, ВМ:МС=$p:q$. Отрезки АМ и ВК пересекаются в точке О. Тогда



$$AO:OM=\frac{m}{n}\left(\frac{q}{p}+1\right), BO:OK=\frac{p}{q}\left(\frac{n}{m}+1\right).$$

Рассмотрим треугольник ABC и отметим на его сторонах AB, AC и CA точки C_1, A_1, B_1.

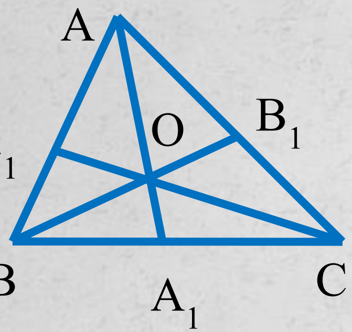
При каком расположении этих точек отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке?

Теорема Чевы

Итальянский инженер и математик (1648 – 1734)

Теорема. **Если на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда**

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$



Пусть отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O.

По теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике имеем

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{AB_1}{B_1C_1}\cdot\left(\frac{CA_1}{A_1B}+1\right),$$

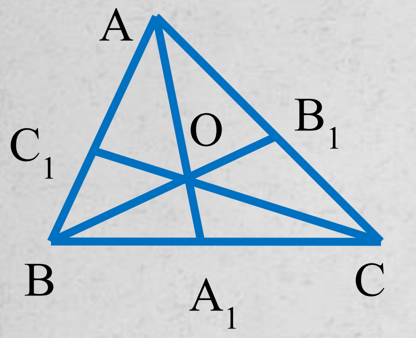
$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\left(\frac{BA_1}{A_1C}+1\right).$$

$$\frac{AB_1}{B_1C_1}\cdot\left(\frac{CA_1}{A_1B}+1\right)=\frac{AC_1}{C_1B}\left(\frac{BA_1}{A_1C}+1\right),\quad \frac{AB_1\cdot(CA_1+A_1B)}{B_1C_1\cdot A_1B}=\frac{AC_1\cdot(BA_1+A_1C)}{C_1B\cdot A_1C}$$

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{BC}{A_1B}=\frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BC}{A_1C}.\qquad \frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

Докажем обратное утверждение. Пусть точки C_1, A_1, B_1 взяты на сторонах AB, BC, CA так, что выполнено равенство $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1(1).$

Докажем, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.



Обозначим буквой O точку пересечения отрезков AA_1 и BB_1 и проведем прямую CO. Она пересечет сторону AB в некоторой точке, которую обозначим C_2.

Так как отрезки AA_1, BB_1, CC_2 пересекаются в одной точке, то по доказанному ранее

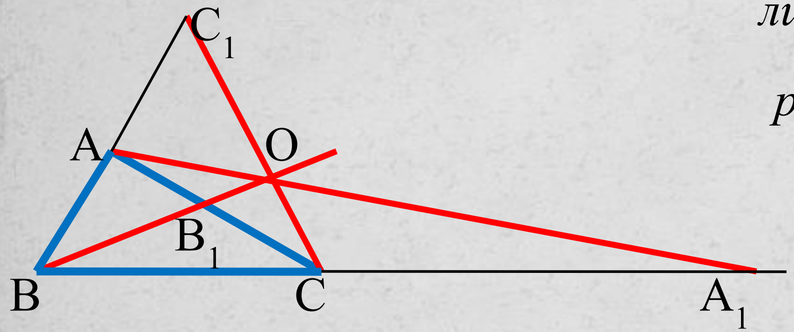
$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_2}{C_2A}=1(2)$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), приходим к равенству $\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BC_2}{C_2A}$,

которое показывает, что точки C_1 и C_2 делят сторону AB в одном и том же отношении. Следовательно, точки C_1 и C_2 совпадают, и, значит, отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Теорема доказан.а

Замечание. Мы брали точки A_1, B_1и C_1 на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC. Если же только одна из этих точек берется на соответствующей стороне, а две другие – на продолжении сторон, то справедливо следующее утверждение.

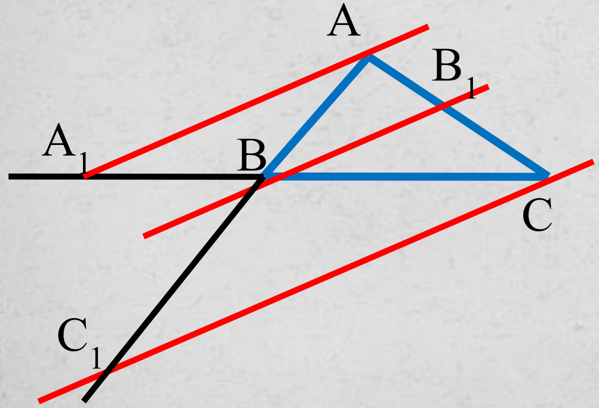
Если прямые AA_1, BB_1 и CC пересекаются в одной точке



либо параллельны, то выполняется

равенство $$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1,(1)$$

и, обратно, если выполняется равенство (1), то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

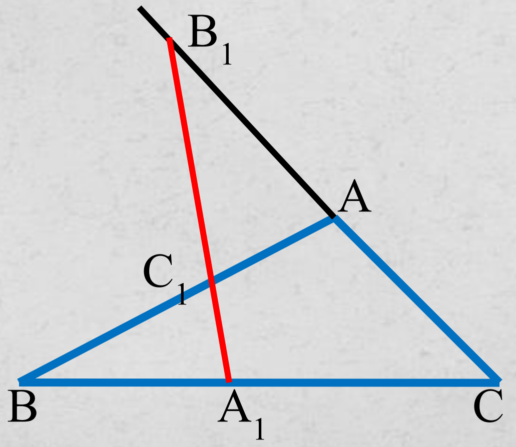


Теорема Менелая.

Менелай Александрийский – древнегреческий математик и астроном, живший в 1 в. н. э

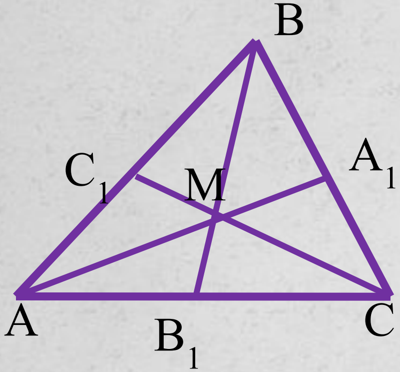
Если на сторонах AB и BC и продолжении стороны AC (либо на продолжениях сторон AB , BC и AC) взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$



Решите задачи.

1. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2:1,считая от вершины.



Дано: Δ ABC, AA_1, BB_1, CC_1 – медианы.
Док-ть: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = M$, $AM:MA_1=CM:MC_1=BM:MB_1$

Так как медиана делит сторону треугольника пополам, то $AB_1=B_1C$, $CA_1=A_1B$, $BC_1=C_1A$, тогда

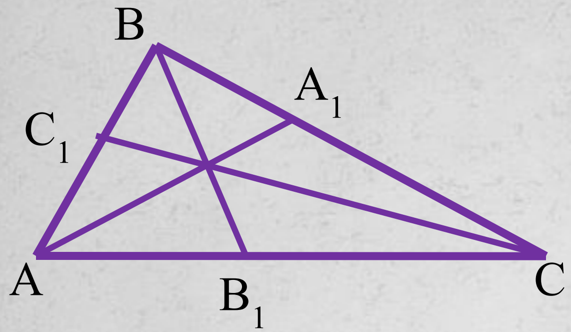
$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1,$$

следовательно, по теореме Чевы медианы пересекаются в одной точке.
По теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике имеем

$$\frac{AM}{MA_1}=\frac{AB_1}{B_1C}\left(\frac{CA_1}{A_1B}+1\right)=\frac{2}{1},\qquad \frac{CM}{MC_1}=\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\left(\frac{AC_1}{C_1B}+1\right)=\frac{2}{1},$$

$$\frac{BM}{MB_1}=\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\left(\frac{CB_1}{B_1A}+1\right)=\frac{2}{1}$$

2. Доказать, что в треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке.



Дано: Δ ABC, AA_1, BB_1 CC_1 – биссектрисы.
Док-ть: биссектрисы пересекаются а одной точке.

Так как биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то:

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AB}{BC},\qquad \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{AC}{AB},\qquad \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BC}{AC}.$$

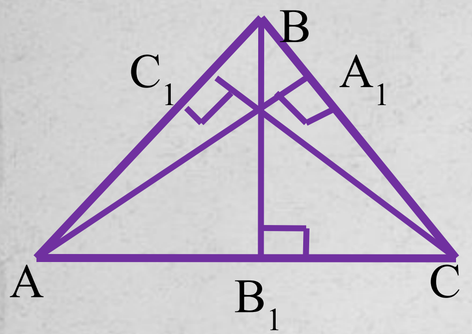
Перемножим равенства:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1,$$

следовательно, по теоремы Чевы биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

3. Доказать, что в треугольнике высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

ΔABC -остроугольный



Дано: Δ ABC, AA_1, BB_1, CC_1 – высоты.
Доказать: высоты треугольника пересекаются в одной точке

Прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C подобны по двум углам, поэтому
$$\frac{CA_1}{B_1C} = \frac{CA}{BC} \quad (1).$$

Из подобия треугольников AA_1B и CC_1B имеем:
$$\frac{BC_1}{A_1B} = \frac{BC}{AB} \quad (2)$$

Из подобия треугольников BB_1A и CC_1A имеем:
$$\frac{AB_1}{C_1A} = \frac{AB}{CA} \quad (3)$$

Перемножим равенства:
$$\frac{CA_1}{B_1C} \cdot \frac{BC_1}{A_1B} \cdot \frac{AB_1}{C_1A} = \frac{CA}{BC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{CA},$$

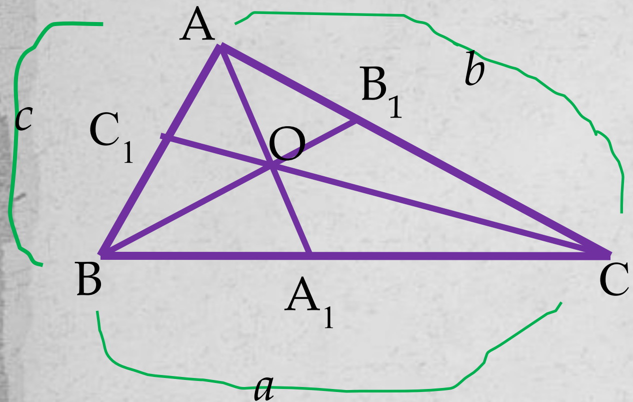
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1,$$

следовательно, по теореме Чевы высоты треугольника пересекаются водной точке.

Для тупоугольного треугольника доказательство аналогично.

4. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O, AB=c, BC=*a*, CA=*b*. Доказать, что

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{b+c}{a},\ \frac{BO}{OB_1}=\frac{a+c}{b},\ \frac{CO}{OC_1}=\frac{a+b}{c}$$



По теореме о биссектрисе угла треугольника имеем:

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a},\qquad \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}.$$

По теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике:

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{AB_1}{B_1C}\left(\frac{CA_1}{A_1B}+1\right)=\frac{c}{a}\left(\frac{b}{c}+1\right)=\frac{b+c}{a}.$$

Аналогично доказываются остальные равенства