

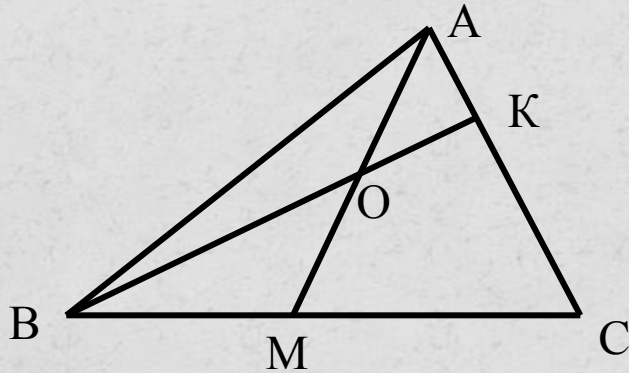
Теоремы Чебы и Менелая

Учитель математики
МБОУ лицея №2
г. Южно – Сахалинска
Бокова Т.Н.

Напоминание.

Теорема о пропорциональных отрезках в треугольнике.

На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки K и M так, что $AK:KC=m:n$, $BM:MC=p:q$. Отрезки AM и BK пересекаются в точке O. Тогда



$$AO : OM = \frac{m}{n} \left(\frac{q}{p} + 1 \right), BO : OK = \frac{p}{q} \left(\frac{n}{m} + 1 \right).$$

Рассмотрим треугольник ABC и отметим на его сторонах AB , AC и CA точки C_1 , A_1 , B_1 .

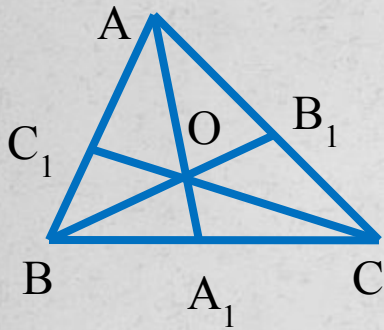
При каком расположении этих точек отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке?

Теорема Чевы

Итальянский инженер и математик (1648 – 1734)

Теорема. Если на сторонах AB , BC , CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 , то отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$



Пусть отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке O .

По теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике имеем

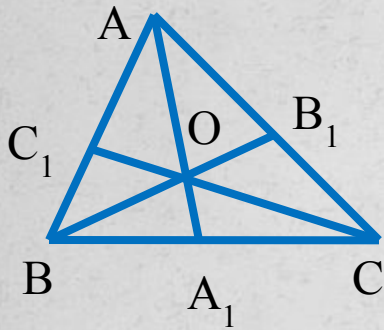
$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB_1}{B_1C_1} \cdot \left(\frac{CA_1}{A_1B} + 1 \right),$$
$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \left(\frac{BA_1}{A_1C} + 1 \right).$$

$$\frac{AB_1}{B_1C_1} \cdot \left(\frac{CA_1}{A_1B} + 1 \right) = \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \left(\frac{BA_1}{A_1C} + 1 \right), \quad \frac{AB_1 \cdot (CA_1 + A_1B)}{B_1C_1 \cdot A_1B} = \frac{AC_1 \cdot (BA_1 + A_1C)}{C_1B \cdot A_1C}$$

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{BC}{A_1B} = \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BC}{A_1C}, \quad \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

Докажем обратное утверждение. Пусть точки C_1, A_1, B_1 взяты на сторонах AB, BC, CA так, что выполнено равенство $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1(1)$.

Докажем, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.



Обозначим буквой O точку пересечения отрезков AA_1 и BB_1 и проведем прямую CO . Она пересечет сторону AB в некоторой точке, которую обозначим C_2 .

Так как отрезки AA_1, BB_1, CC_2 пересекаются в одной точке, то по доказанному ранее

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_2}{C_2A} = 1(2)$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), приходим к равенству $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC_2}{C_2A}$,

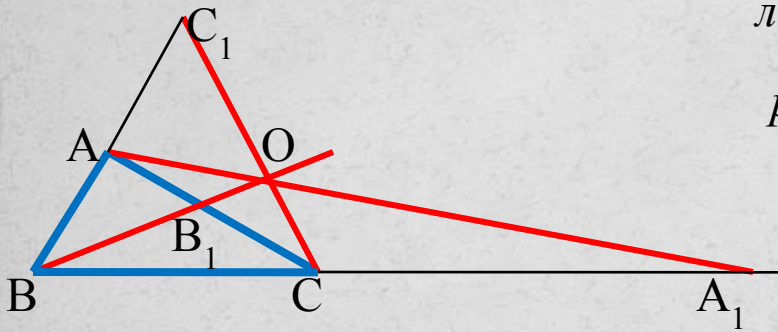
которое показывает, что точки C_1 и C_2 делят сторону AB в одном и том же отношении. Следовательно, точки C_1 и C_2 совпадают, и, значит, отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O . Теорема доказана.

Замечание. Мы брали точки A_1 , B_1 и C_1 на сторонах BC , CA и AB треугольника ABC . Если же только одна из этих точек берется на соответствующей стороне, а две другие – на продолжении сторон, то справедливо следующее утверждение.

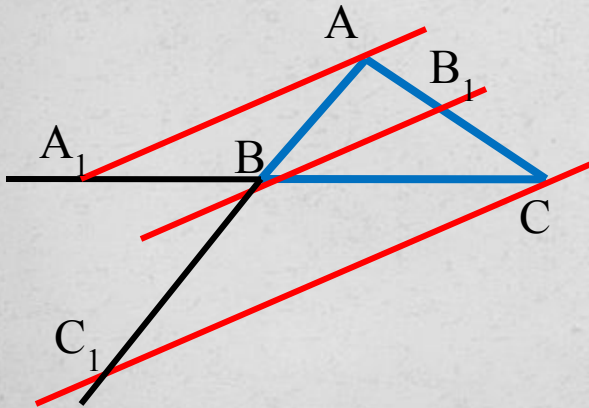
Если прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке

либо параллельны, то выполняется

равенство
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1, (1)$$



и, обратно, если выполняется равенство (1), то прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

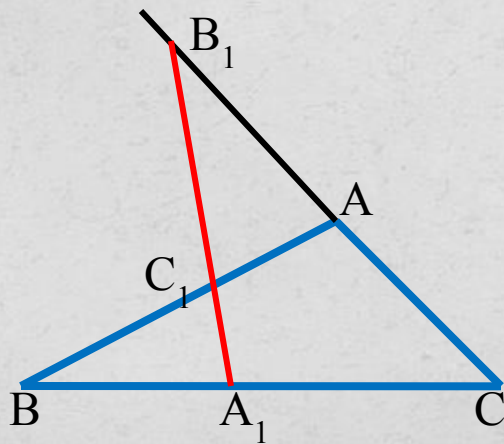


Теорема Менелая.

Менелай Александрийский – древнегреческий математик и астроном, живший в 1 в. н. э

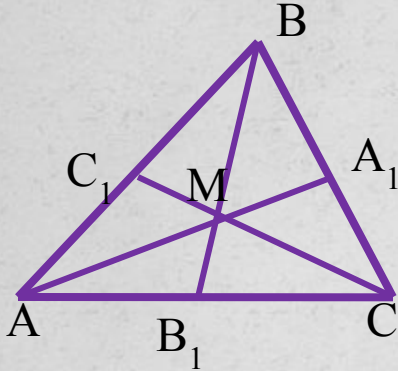
Если на сторонах AB и BC и продолжении стороны AC (либо на продолжениях сторон AB , BC и AC) взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 , то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$



Решите задачи.

1. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.



Дано: $\triangle ABC$, AA_1 , BB_1 , CC_1 – медианы.

Док-ть: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = M$, $AM:MA_1 = CM:MC_1 = BM:MB_1$

Так как медиана делит сторону треугольника пополам, то $AB_1 = B_1C$, $CA_1 = A_1B$, $BC_1 = C_1A$, тогда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1,$$

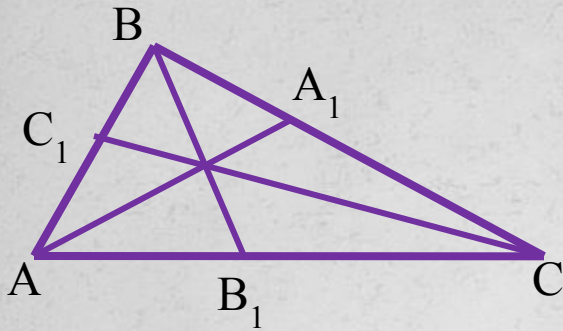
следовательно, по теореме Чебы медианы пересекаются в одной точке.

По теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике имеем

$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} \left(\frac{CA_1}{A_1B} + 1 \right) = \frac{2}{1}, \quad \frac{CM}{MC_1} = \frac{CB_1}{B_1A} \left(\frac{AC_1}{C_1B} + 1 \right) = \frac{2}{1},$$

$$\frac{BM}{MB_1} = \frac{BA_1}{A_1C} \left(\frac{CB_1}{B_1A} + 1 \right) = \frac{2}{1}$$

2. Доказать, что в треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке.



Дано: $\triangle ABC$, AA_1 , BB_1 , CC_1 – биссектрисы.

Док-ть: биссектрисы пересекаются в одной точке.

Так как биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC},$$

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{AC}{AB},$$

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC}{AC}.$$

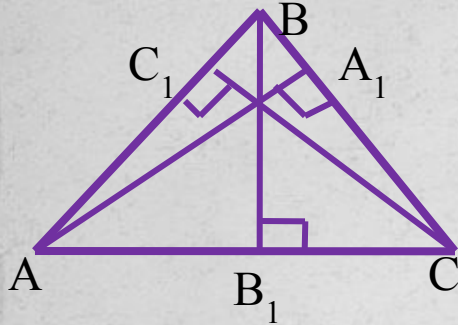
Перемножим равенства:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1,$$

следовательно, по теоремы Чебы биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

3. Доказать, что в треугольнике высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

$\triangle ABC$ - остроугольный



Дано: $\triangle ABC$, AA_1 , BB_1 , CC_1 – высоты.

Доказать: высоты треугольника пересекаются в одной точке

Прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C подобны по

двум углам, поэтому $\frac{CA_1}{B_1C} = \frac{CA}{BC}$ (1).

Из подобия треугольников AA_1B и CC_1B имеем: $\frac{BC_1}{A_1B} = \frac{BC}{AB}$ (2)

Из подобия треугольников BB_1A и CC_1A имеем: $\frac{AB_1}{C_1A} = \frac{AB}{CA}$ (3)

Перемножим равенства: $\frac{CA_1}{B_1C} \cdot \frac{BC_1}{A_1B} \cdot \frac{AB_1}{C_1A} = \frac{CA}{BC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{CA}$,

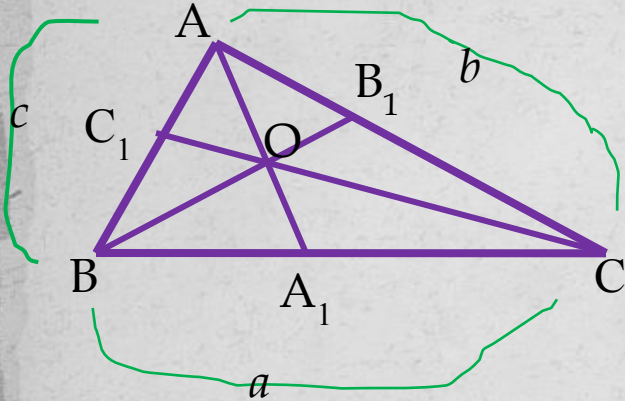
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1,$$

следовательно, по теореме Чебы высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Для тупоугольного треугольника доказательство аналогично.

4. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке O , $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Доказать, что

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}, \quad \frac{BO}{OB_1} = \frac{a+c}{b}, \quad \frac{CO}{OC_1} = \frac{a+b}{c}$$



По теореме о биссектрисе угла треугольника имеем:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}, \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$

По теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} \left(\frac{CA_1}{A_1B} + 1 \right) = \frac{c}{a} \left(\frac{b}{c} + 1 \right) = \frac{b+c}{a}.$$

Аналогично доказываются остальные равенства