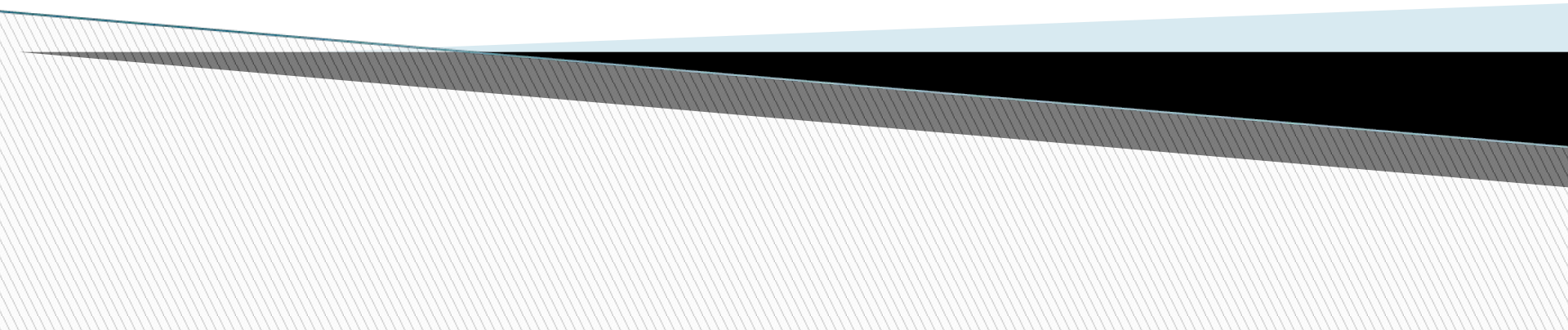


**РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ
ТИПА С2
(КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ И
ТРЕНИРОВОЧНЫЕ
ЗАДАНИЯ)**



ТИПЫ ЗАДАЧ:

□ Угол между двумя
прямыми

Задача 1. Задача 2.

□ Угол между прямой
и плоскостью

Задача 1. Задача 2.

□ Угол между двумя
плоскостями

Задача 1. Задача 2.

□ Расстояние от точки
до прямой

Задача 1. Задача 2.

□ Расстояние от точки
до плоскости

Задача 1. Задача 2.

□ Расстояние между
скрещивающимися

прямыми

Задача 1. Задача 2.



УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

1. Определение: Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы.

Углом между двумя прямыми

называется меньший из них.

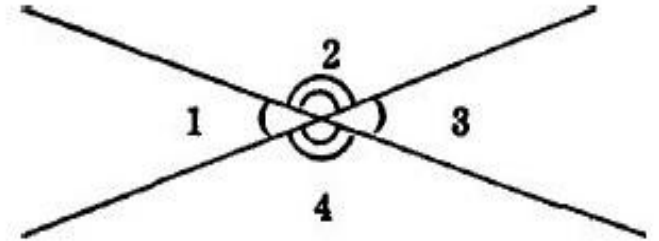
Угол между

перпендикулярными прямыми

равен 90° . Угол между

параллельными прямыми равен

0° .



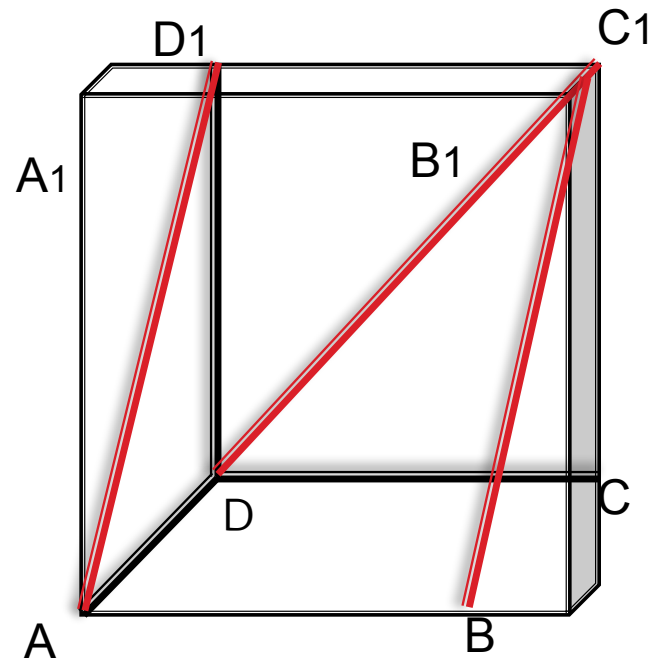
Смежные :

$\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$;

Вертикальные :

$\angle 1$ и $\angle 3$, $\angle 2$ и $\angle 4$

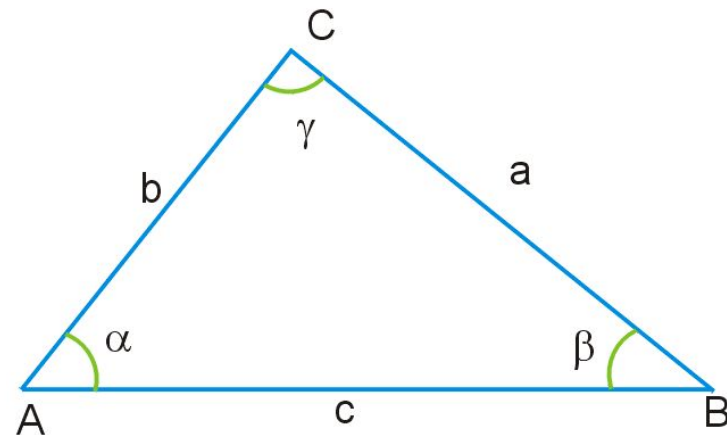
2.Скрещивающиеся
прямые
Углом между
скрещивающимися
прямыми называется
угол между
пересекающимися
прямыми, которые
параллельны
данным
скрещивающимся
прямым.



В кубе $A\dots C_1$ прямые AD_1 и DC_1 –скрещивающиеся (т.к. лежат в разных плоскостях и не пересекаются). Пользуясь определением угла между скрещивающимися прямыми, получаем: $AD_1 \parallel BC_1 \Rightarrow$ заменим одну прямую другой.
 $\angle DC_1B$ – искомый.

Для решения задач С2 первого типа, практически всегда приходится применять формулы и теоремы.

1) Теорема косинусов: Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

2) При решении векторным способом: скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha, \text{ где } \alpha \text{ — искомый}$$

$$\text{угол: } \vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2) \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$



Ключевая задача

В единичном кубе $A...D1$ найдите угол между прямыми $AB1$ и $BC1$.

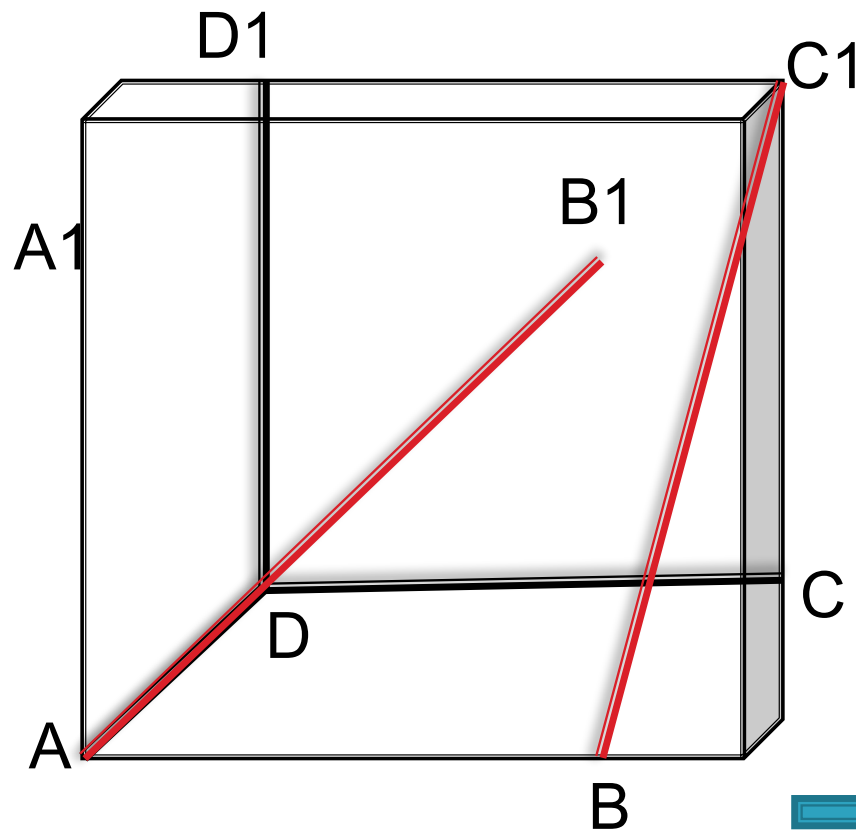
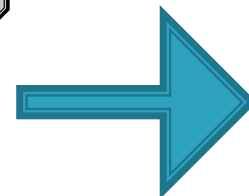
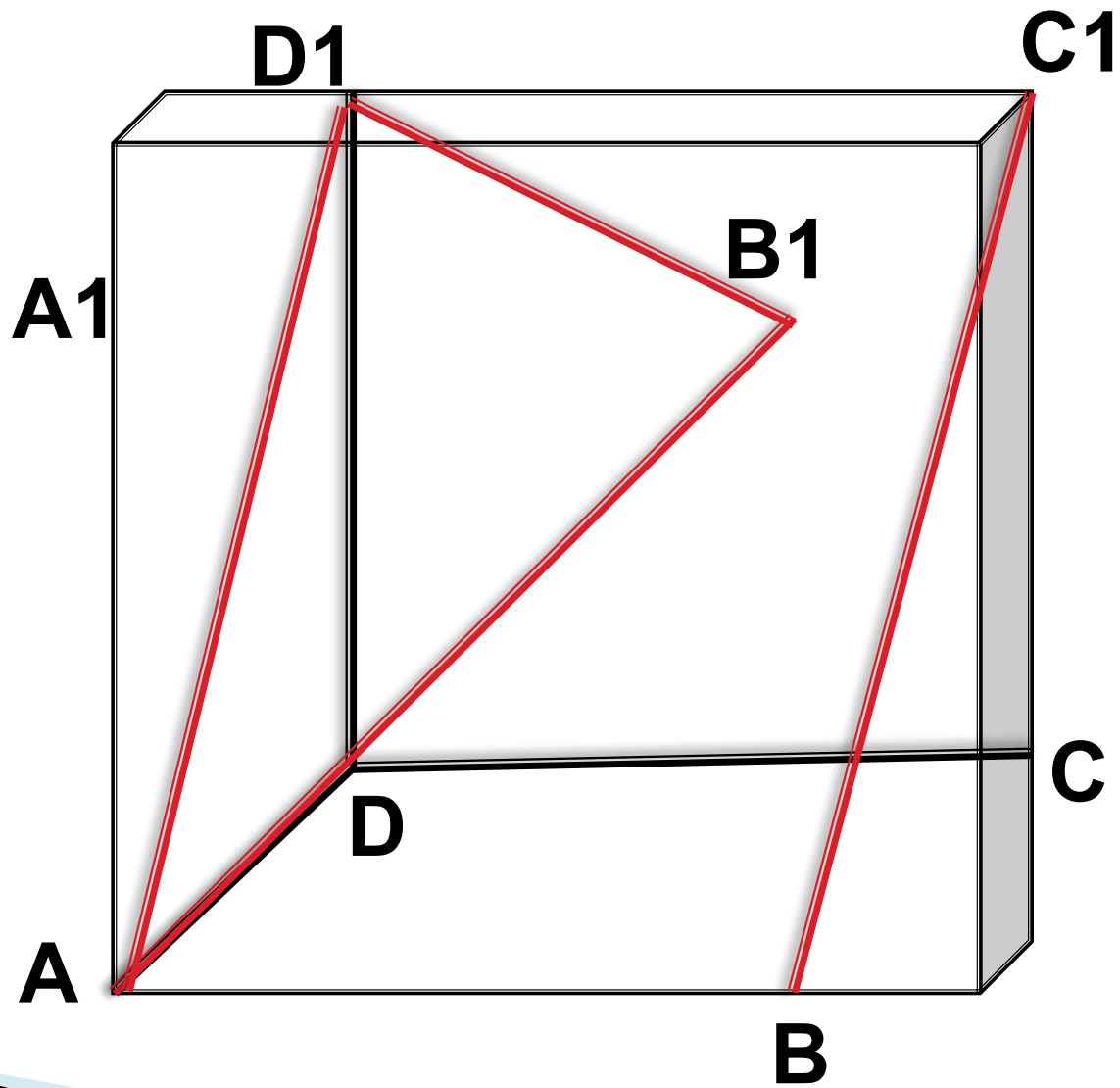
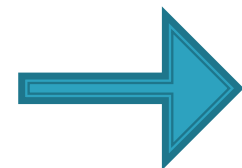
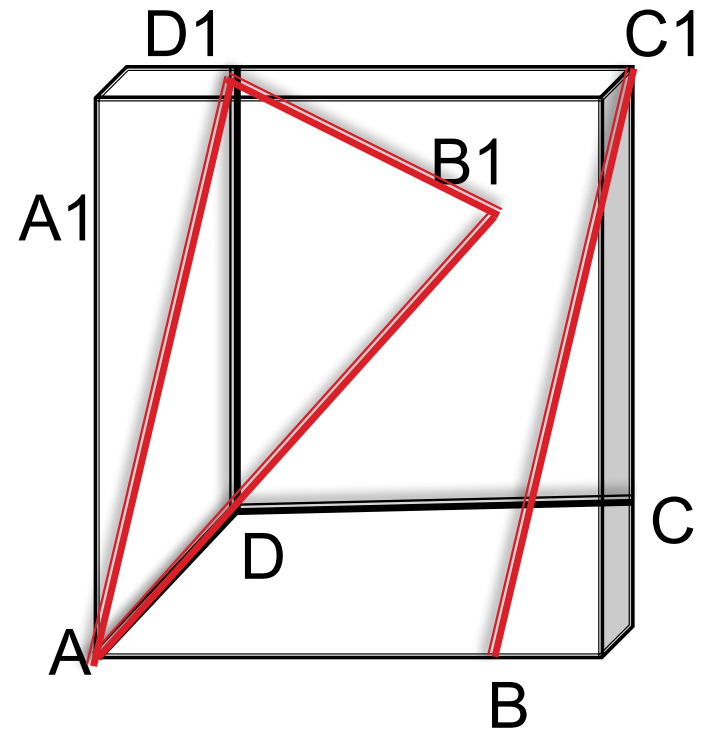


Рисунок
РЕШЕНИЕ





1. Прямые AB_1 и BC_1 - скрещивающиеся. Прямая $AD_1 \parallel BC_1$
 2. Заменяем прямую BC_1 прямой AD_1
 3. Следовательно искомый $\angle D_1AB_1$
 4. Рассмотрим $\triangle D_1AB_1$ - равносторонний. Так как $AD_1 = D_1B_1 = B_1A$ (куб единичный, данные стороны являются диагоналями соответствующих квадратов). Исходя из этого, по свойству углов в равностороннем треугольнике (все углы равны).
 5. Искомый $\angle D_1AB_1 = 60^\circ$
- Ответ: 60°



Тренировочное задание

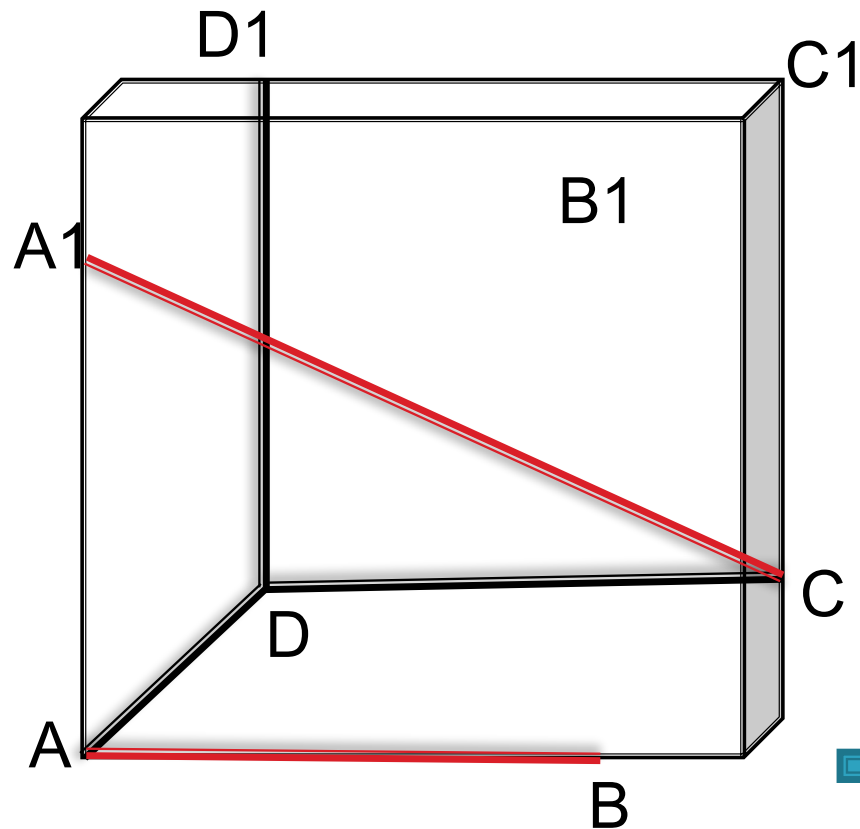
В кубе $A\dots D_1$ найдите косинус угла между прямыми AB и CA_1 .

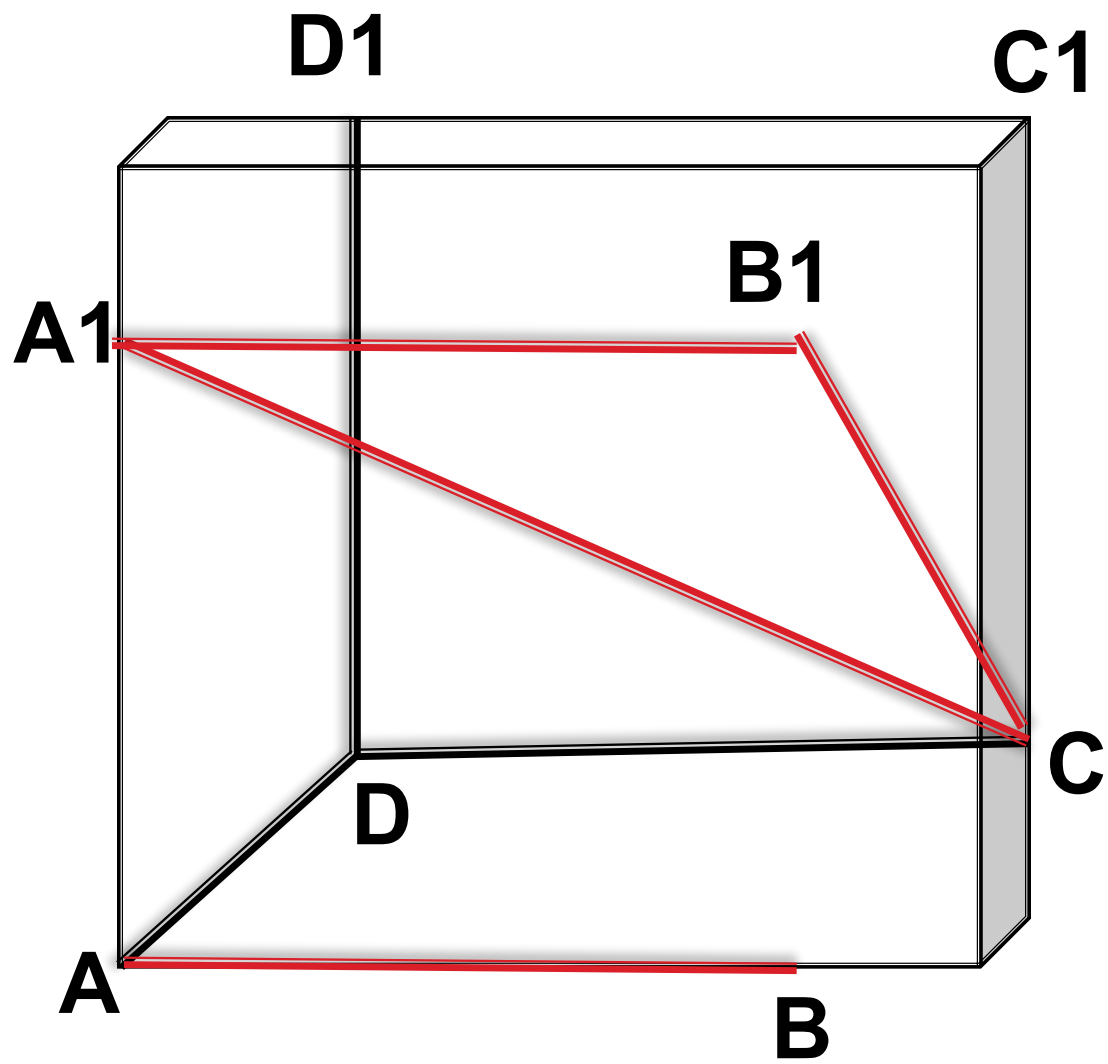
Рисунок 1

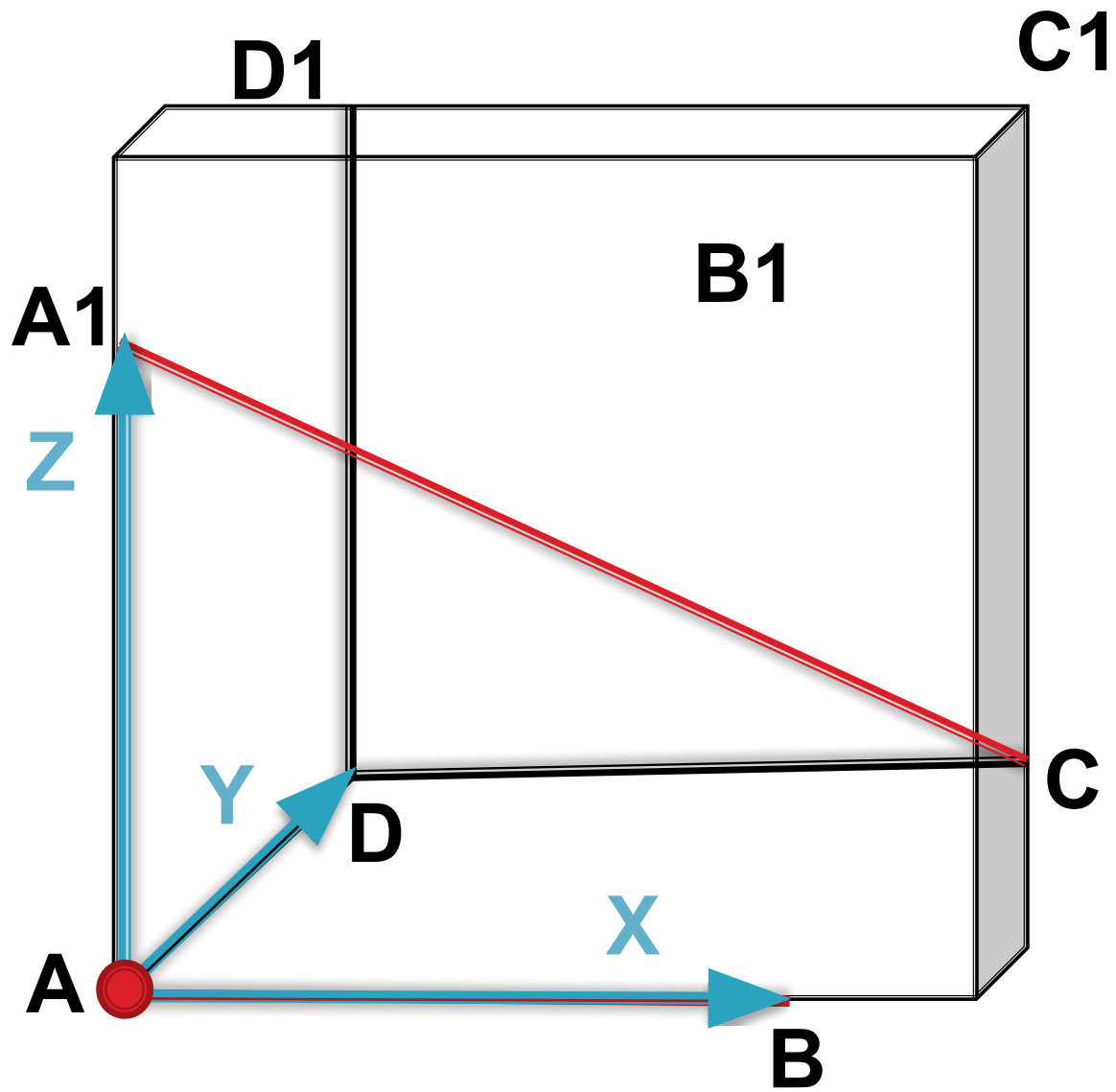
Рисунок 2

РЕШЕНИЕ 1

РЕШЕНИЕ 2

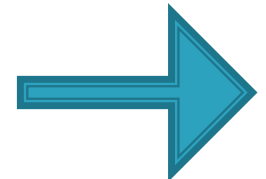
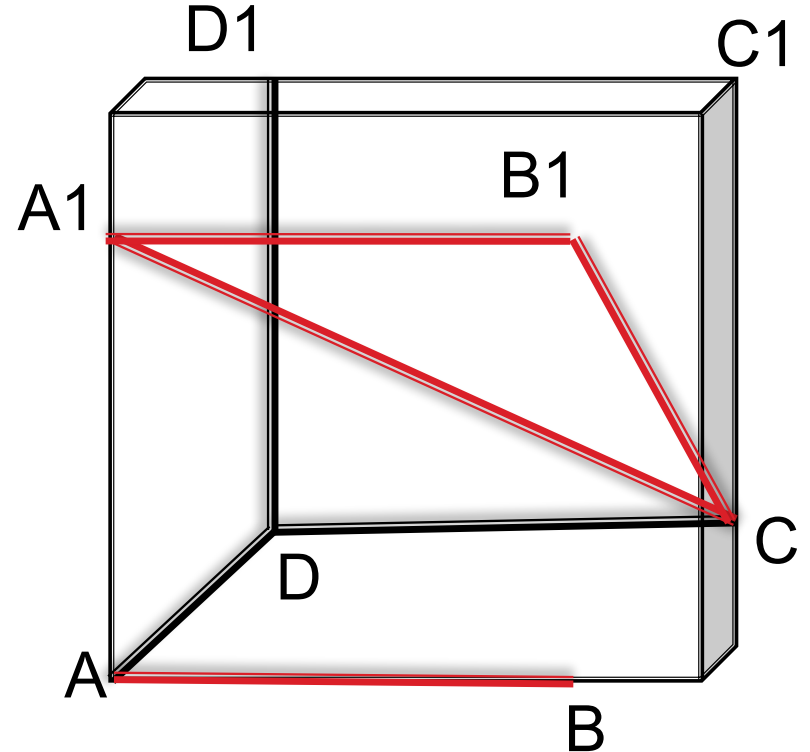






1 СПОСОБ

1. АВ и А₁С скрещивающиеся.
 2. АВ ∥ А₁В₁ ⇒ искомый угол В₁А₁С
 3. В ΔА₁В₁С, так как ∠А₁В₁С = 90° (т.к. А₁В₁ ⊥ (ВВ₁С₁С), а значит по определению и любой прямой лежащей в этой плоскости А₁В₁ ⊥ В₁С)
 4. По определению косинуса:
 $\cos \angle В_1А_1С = \frac{A_1B_1}{A_1C}$
 5. А₁В₁ = 1
 6. А₁С² = 1² + (√2)² = 3, ⇒ А₁С = √3
 7. $\cos \angle В_1А_1С = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$
- Ответ: $\sqrt{3}/3$



2 СПОСОБ

1. Введем систему координат с началом в точке A и осями AB(Ox);

AD(Oy); AA1(Oz);

2. Рассмотрим в данной системе координат векторы \vec{AB} и $\vec{A_1C}$

3. Найдем координаты вектора \vec{AB} (1;0;0)

4. A1 (0;0;1); C (1;1;0) $\Rightarrow \vec{A_1C}$ (1;1;-1)

5. Пусть α угол между AB и A1C,

$$\text{тогда } \cos \alpha = \frac{\vec{A_1C} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{A_1C}|}$$

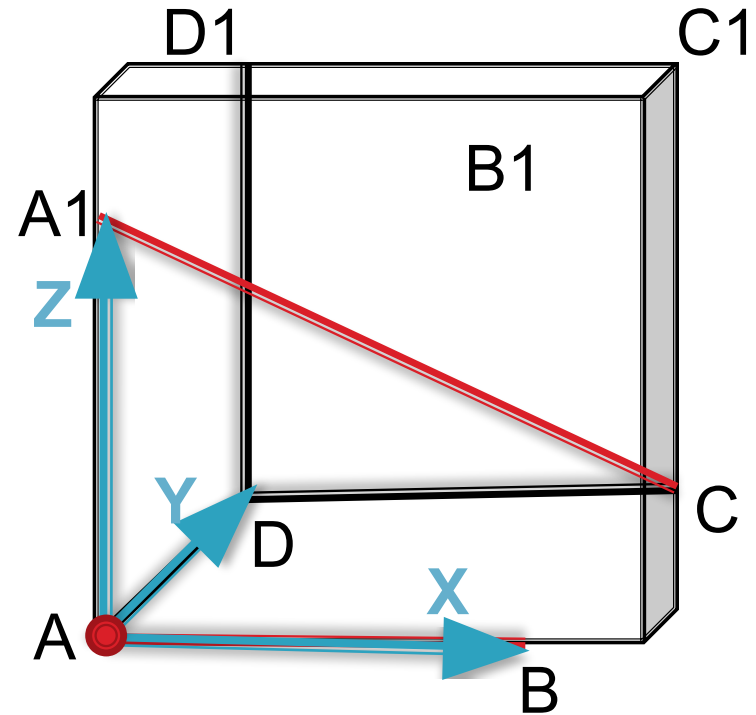
$$\vec{AB} \cdot \vec{A_1C} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

$$|\vec{A_1C}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

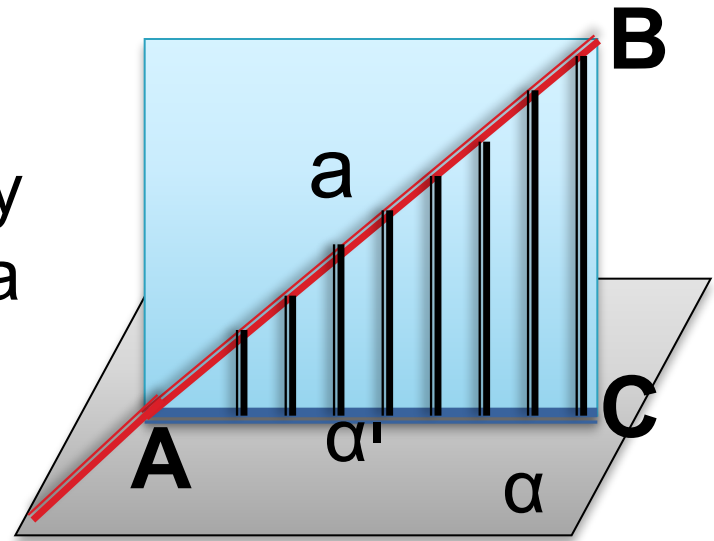
$$6. \cos \alpha = 1 / (1 \cdot \sqrt{3}) = 1 / \sqrt{3} = \sqrt{3} / 3$$

Ответ: $\sqrt{3}/3$



УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

1. Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.
2. Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90° .
3. Если прямая параллельна плоскости (или лежит в ней), то угол между ними считается равным 0° .



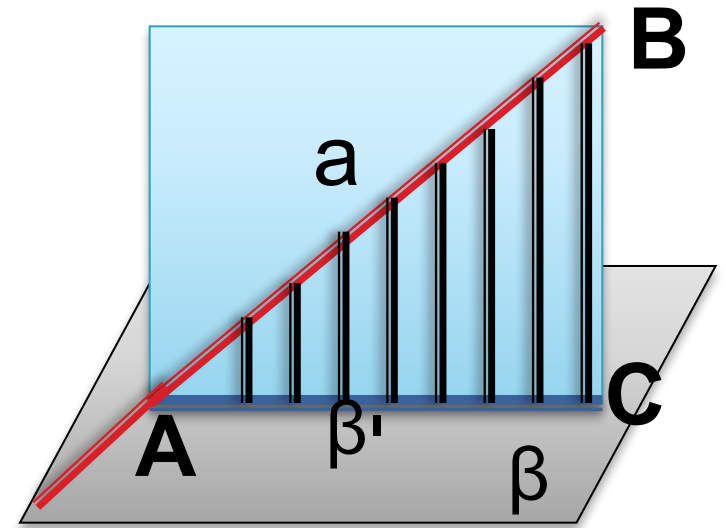
$$a \cap \alpha = A$$

$$BC \perp \alpha$$

$\angle BAC$ – искомый
угол

Замечания:

Если находить угол между данной прямой и перпендикуляром к данной плоскости, обозначив его α' , тогда искомый угол α равен $(90^\circ - \alpha')$



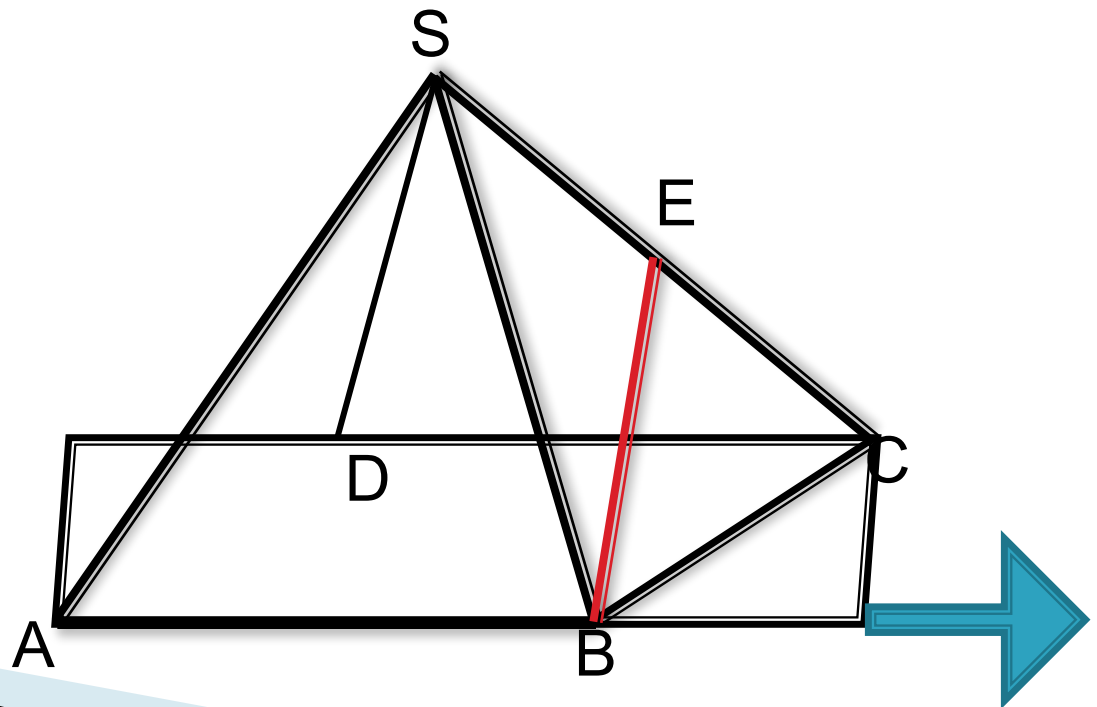
Находят $\angle ABC = \alpha'$, тогда искомый $\angle BAC = (90^\circ - \alpha')$, т.к. $\triangle ABC$ – прямоугольный; а сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°

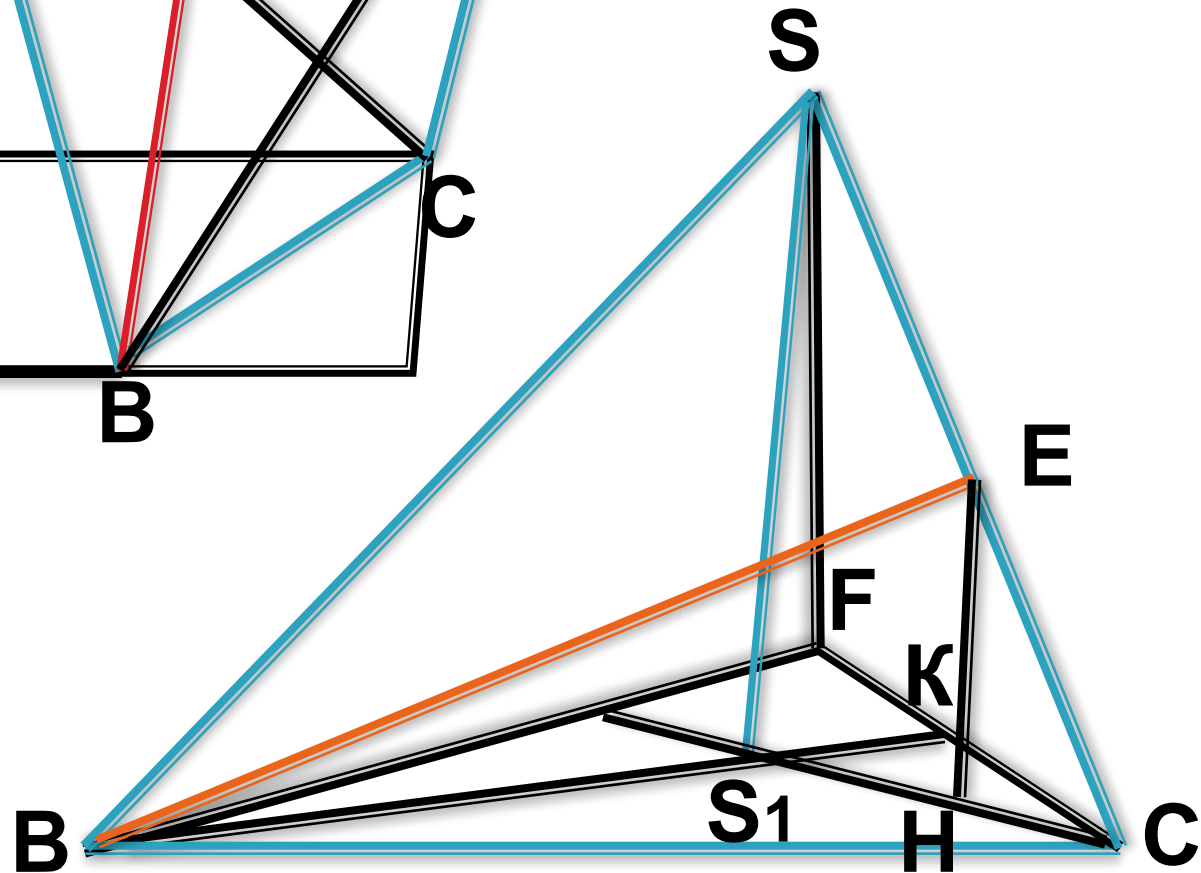
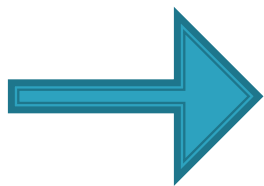
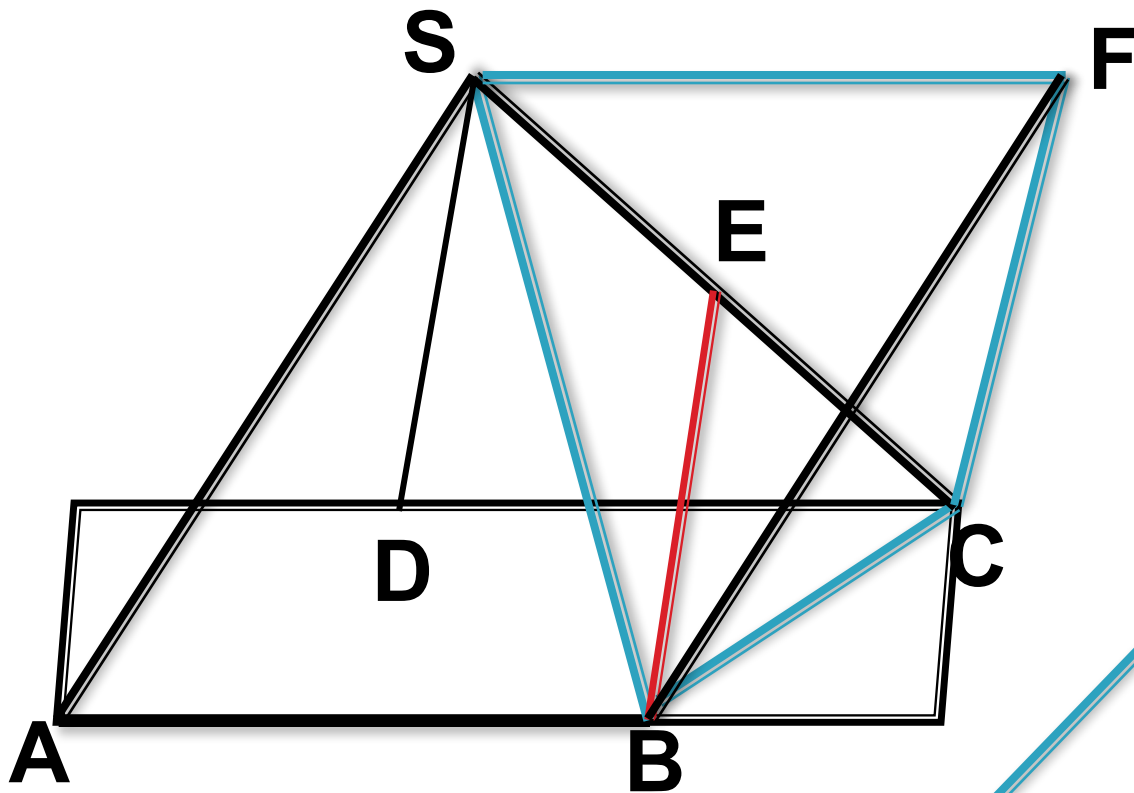


Ключевая задача

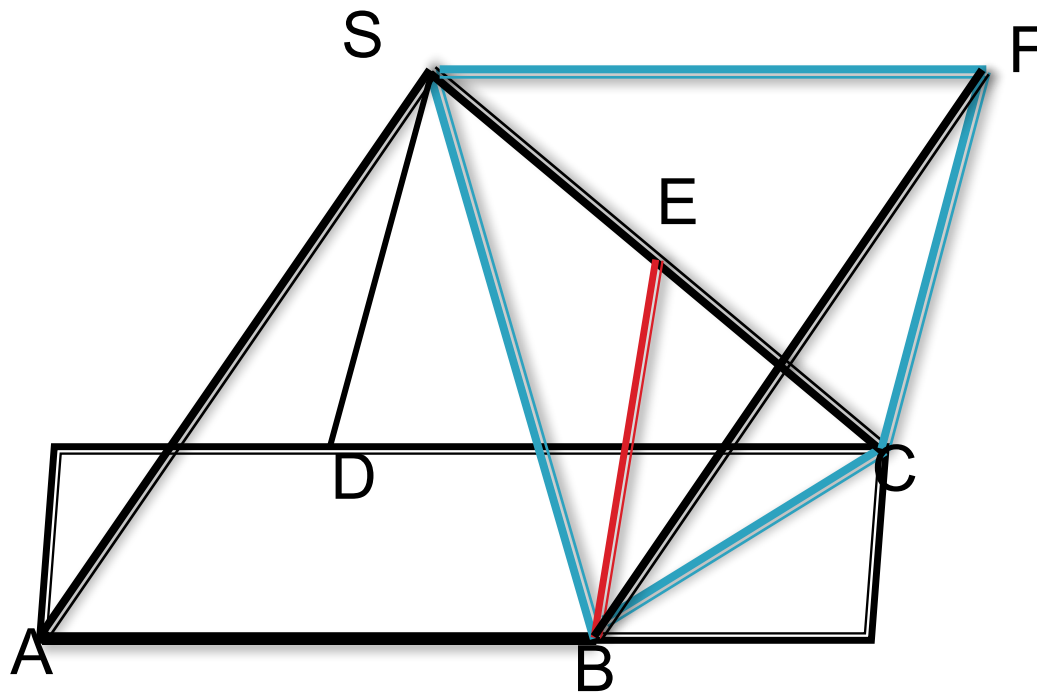
В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BE и плоскостью SAD , где E – середина ребра SC .

Рисунок
РЕШЕНИЕ





1. Проведем $SF \parallel AB$, $SF=AB=1$
2. В тетраэдре $SBCF$ все ребра равны 1 и $(BCF) \parallel (SAD)$



3. Перпендикуляр EH опущенный из E на плоскость (BCF) равен половине высоты тетраэдра

4. Из $\triangle SBS_1$ $\angle S_1=90^\circ$, $SB=1$

5. BS_1 - радиус описанной окружности $R_1 = 2/3 \cdot BK$

BK – высота равностороннего треугольника, \Rightarrow

$$BK = (a \cdot \sqrt{3})/2, \text{ т.е. } BK = \sqrt{3}/2, \Rightarrow R_1 = \sqrt{3}/3$$

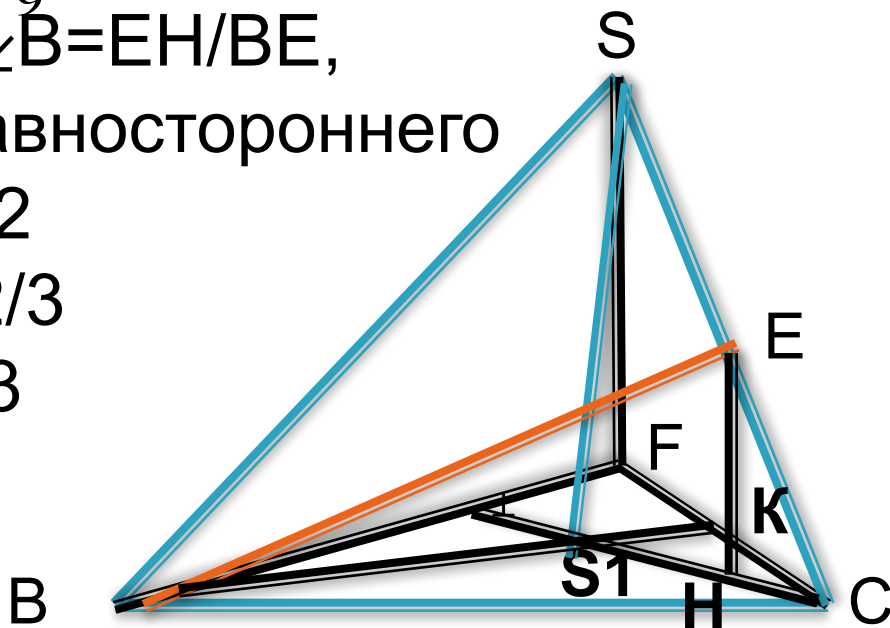
6. $SS_1 = \sqrt{SB^2 - BS_1^2}$ $SS_1 = \sqrt{1 - \frac{3}{9}}$; $SS_1 = \sqrt{6}/3$; $EH = \sqrt{6}/6$

7. $\angle EBH$ – искомый, $\sin \angle B = EH/BE$,

BE – медиана, высота равностороннего треугольника, $\Rightarrow BE = \sqrt{3}/2$

8. $\sin \angle B = (\sqrt{6} \cdot 2)/(6 \cdot \sqrt{3}) = \sqrt{2}/3$

Ответ: $\sqrt{2}/3$

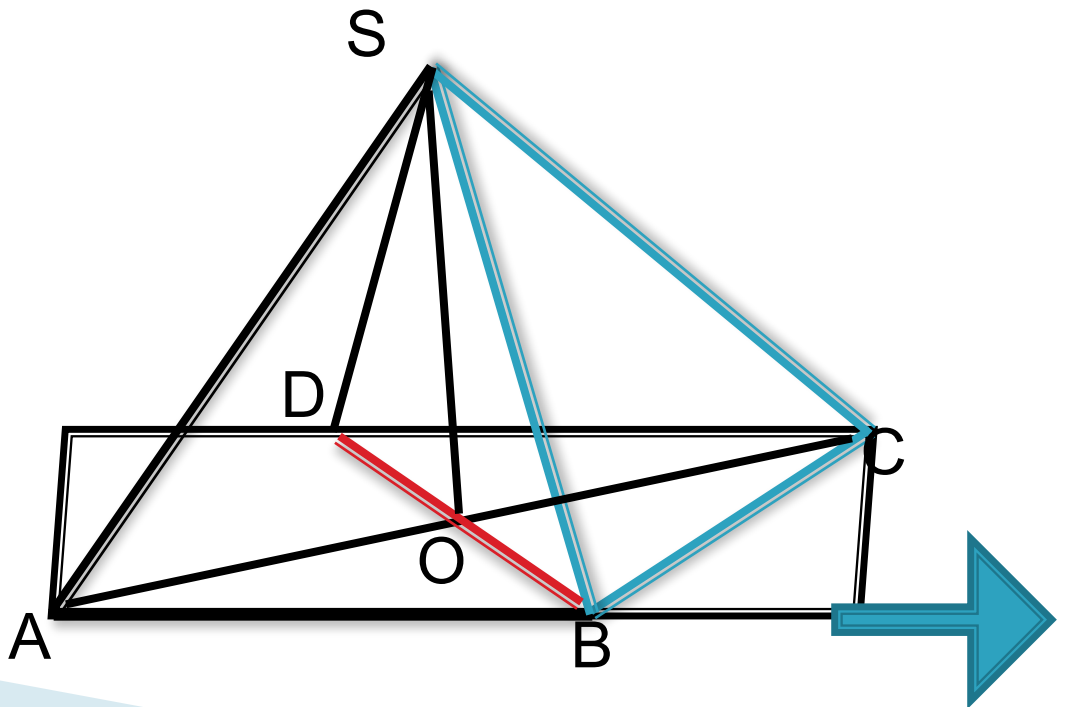


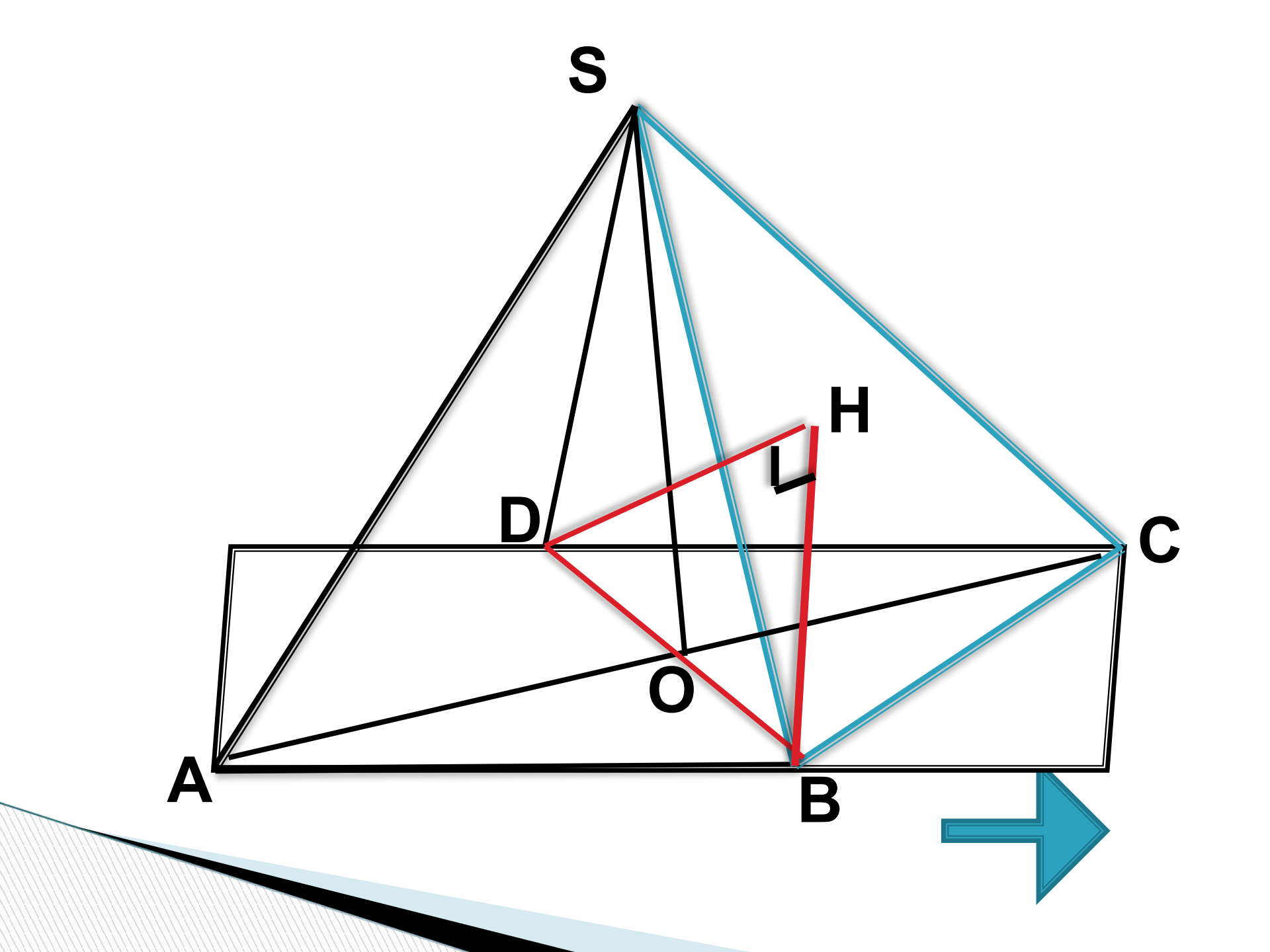
Тренировочная задача

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1. Найдите синус угла между прямой BD и плоскостью (SBC) .

Рисунок

РЕШЕНИЕ





1. Проведем $DH \perp (SBC)$, тогда $\angle HBD$ -искомый угол между прямой BD и плоскостью (BSC) ;

2. $\sin \angle HBD = DH/BD$; $BD = \sqrt{2}$

3. Для нахождения DH воспользуемся формулой объема пирамиды: $V = 1/3 \cdot S_{\text{осн}} \cdot H$, где H -высота

4. Найдем объем пирамиды $SCBD$ двумя способами:

1). $V_1 = 1/3 \cdot S_{\Delta SBC} \cdot DH$; 2). $V_2 = 1/3 \cdot S_{\Delta DBC} \cdot SO$;

$V_1 = 1/3 \cdot (a^2 \sqrt{3} / 4) \cdot DH = \sqrt{3}/12 \cdot DH$

$V_2 = 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot SO = 1/6 \cdot SO$

5. Найдем SO из ΔSOA –прямоугольный ($\angle SOA = 90^\circ$) по т.Пифагора

$SO = \sqrt{AS^2 - OA^2}$; $SO = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

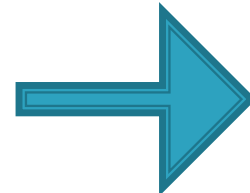
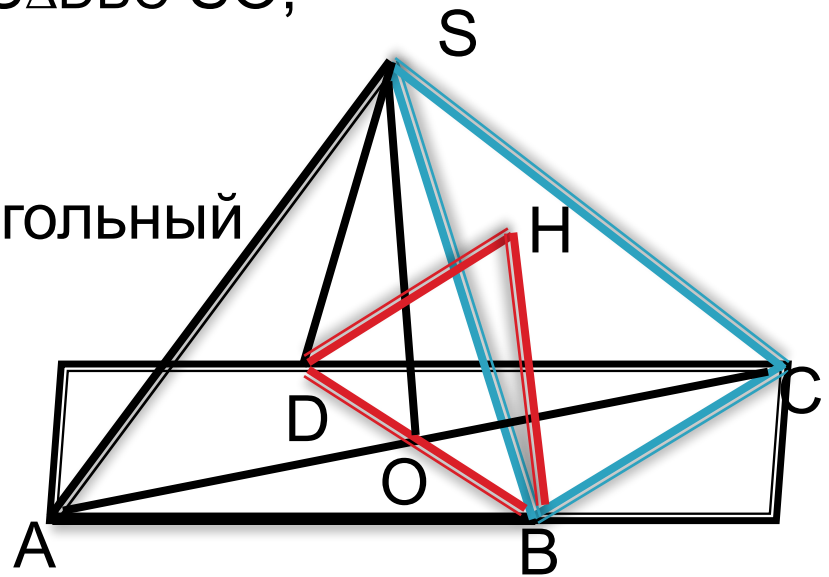
6. $V_2 = 1/6 \cdot \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}/12$

$V_1 = V_2 = \sqrt{3}/12 \cdot DH = \sqrt{2}/12$

7. $DH = \sqrt{2}/12 \cdot 12/\sqrt{3} = \sqrt{2}/\sqrt{3} = \sqrt{6}/3$

8. $\sin \angle HBD = \sqrt{6}/3 \cdot 1/\sqrt{2} = \sqrt{6}/3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3}/3$

Ответ: $\sqrt{3}/3$



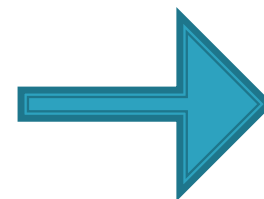
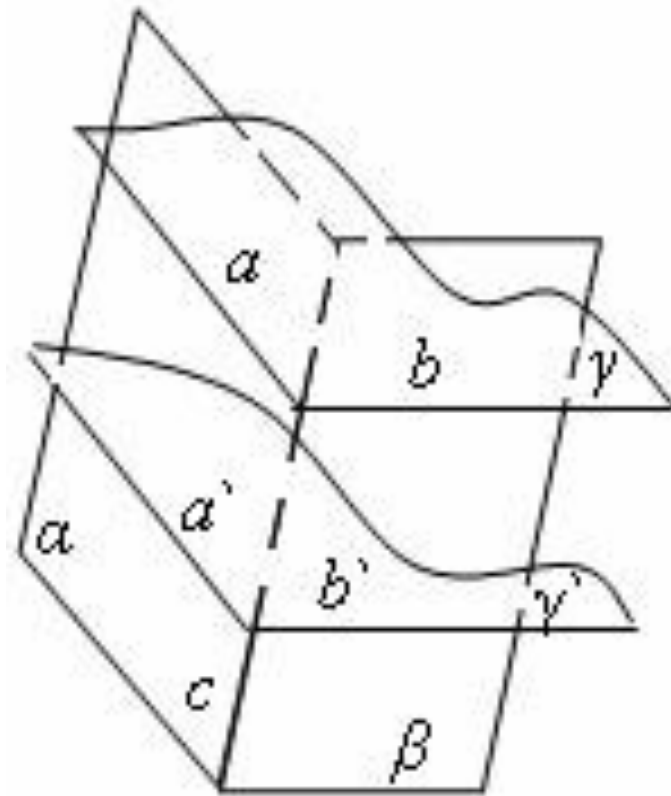
УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

Величина двугранного угла принадлежит промежутку $(0^\circ; 180^\circ)$.

Величина угла между пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку $(0^\circ; 90^\circ]$.

Угол между двумя параллельными плоскостями равен 0° .



Ключевая задача

В единичном кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями (AA_1D) и (BDC_1)

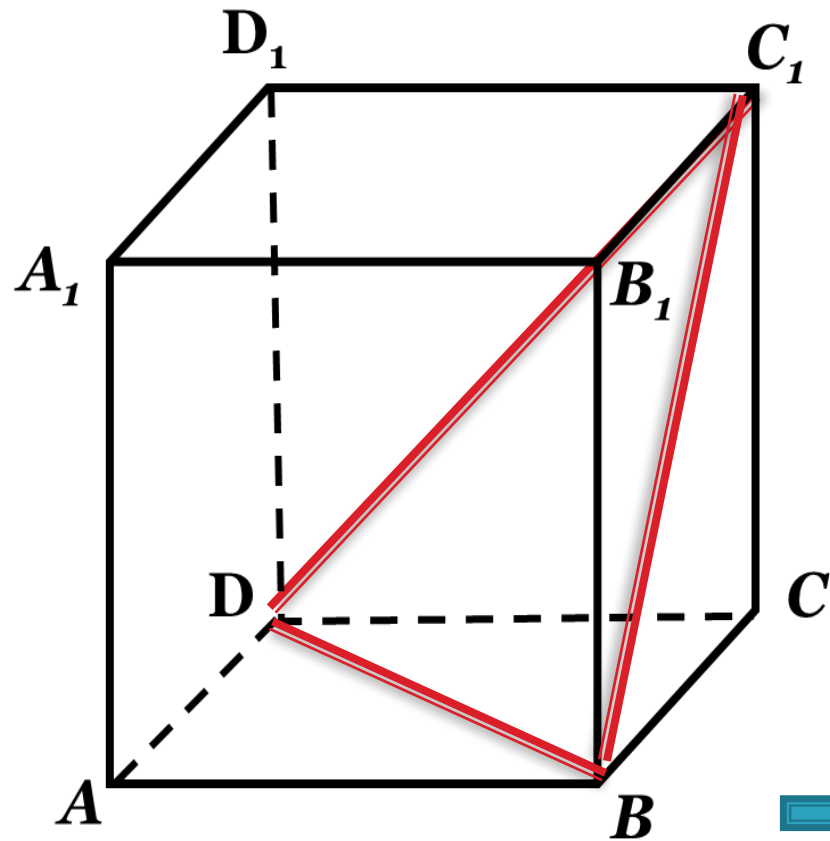
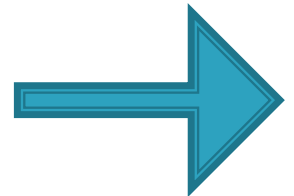
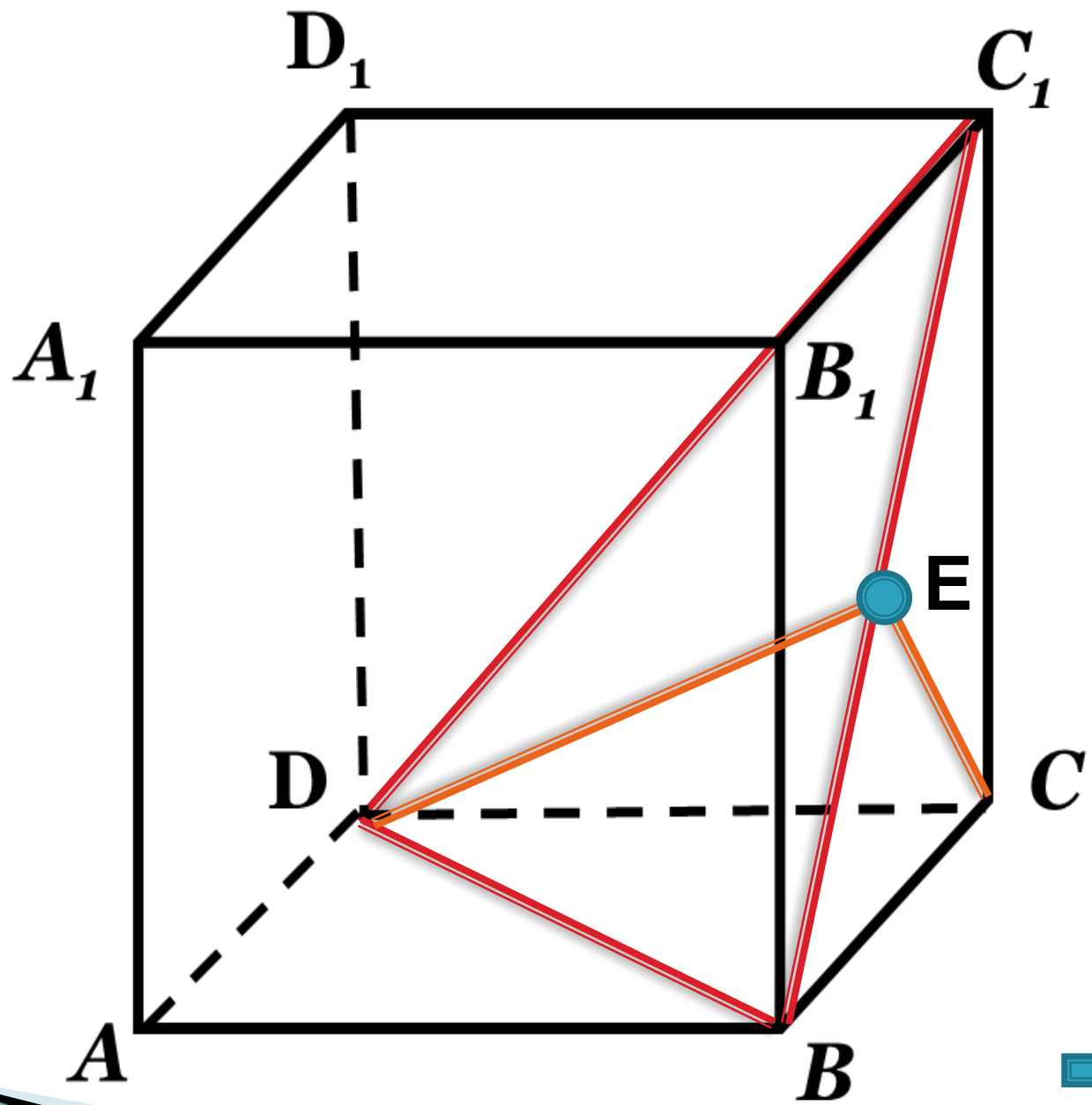


Рисунок
РЕШЕНИЕ





1. Так как $(AA_1D_1D) \parallel (BB_1C_1C)$

$$(BDC_1) \cap (BB_1CC_1) = BC_1$$

2. Пусть E - середина BC_1 , (т.к. $\triangle BC_1C$ - прямоугольный, равнобедренный);

$$3. BC = CC_1$$

$$4. CE \perp BC_1 \Rightarrow DE \perp BC_1;$$

5. т.е. $\angle DEC$ - линейный угол двугранного угла.

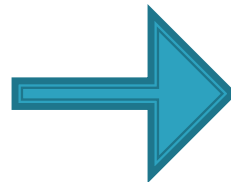
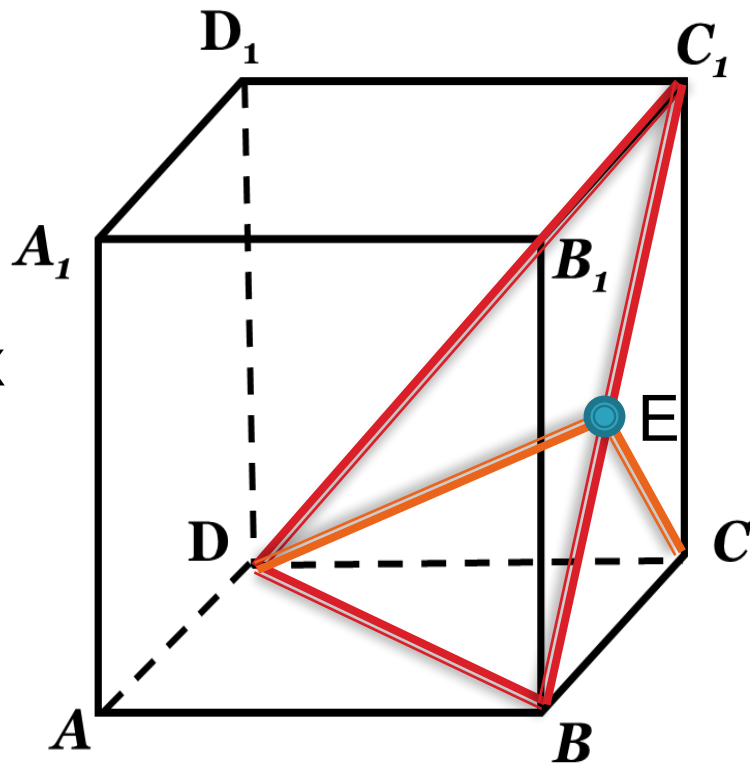
6. $\angle ECD = 90^\circ$ (по теореме о трех перпендикулярах);

$$7. \operatorname{tg} \angle DEC = DC/EC; DC = 1$$

8. Найдем $EC = \sqrt{2}/2$

$$\operatorname{tg} \angle DEC = \frac{DC}{CE} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

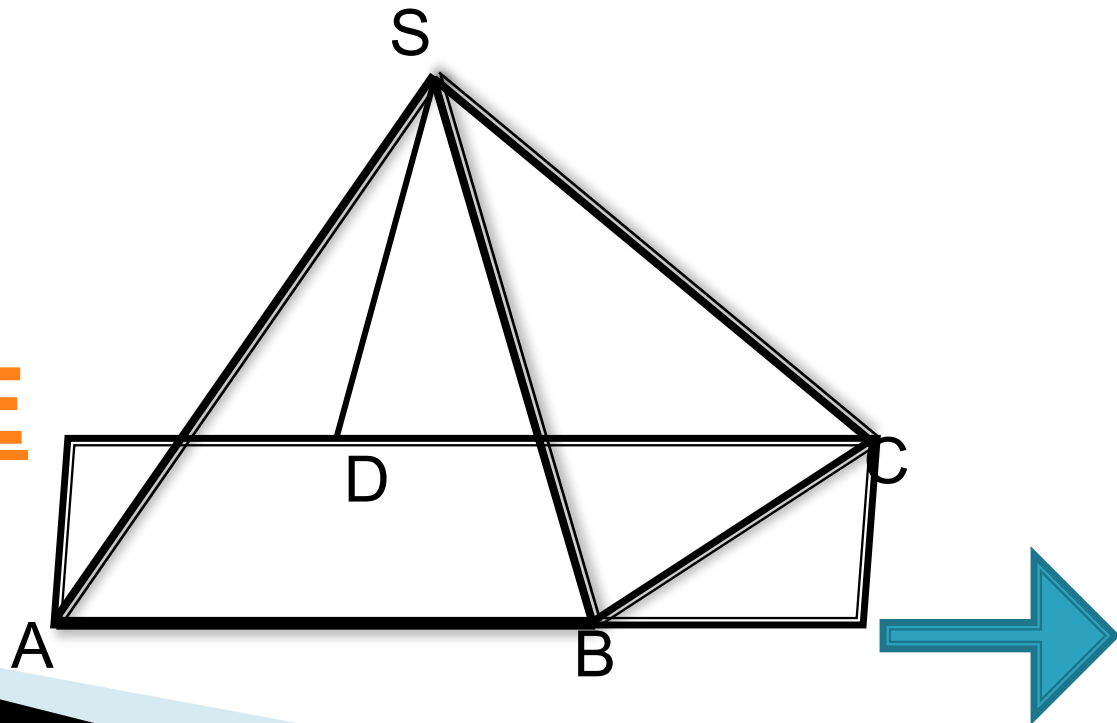
Ответ: $\sqrt{2}$

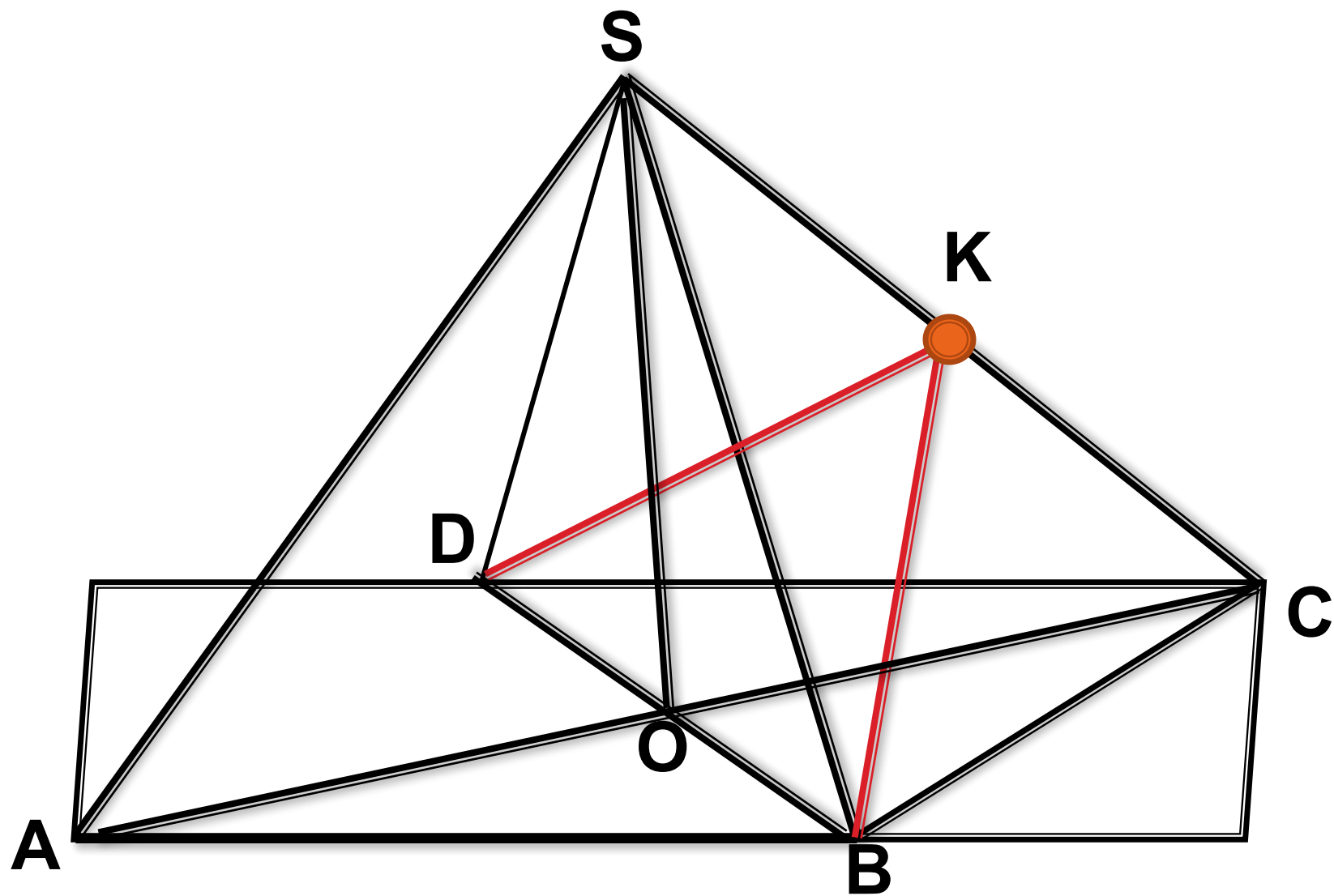


Тренировочная задача

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1. Найдите косинус двугранного угла, образованного гранями (SBC) и (SCD)

Рисунок
РЕШЕНИЕ





$$1. (SCB) \cap (SDC) = SC$$

2. Построим линейный угол двугранного угла.

3. Пусть К – середина ребра SC;

4. Т.к. $\triangle BSC$ и $\triangle DSC$ – равносторонние, то медианы BK и DK являются высотами соответствующих треугольников;

5. Т.к. $BK \perp SC$ и $DK \perp SC$, то $\angle DKB$ – линейный угол искомого двугранного угла

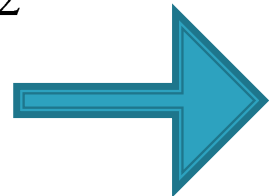
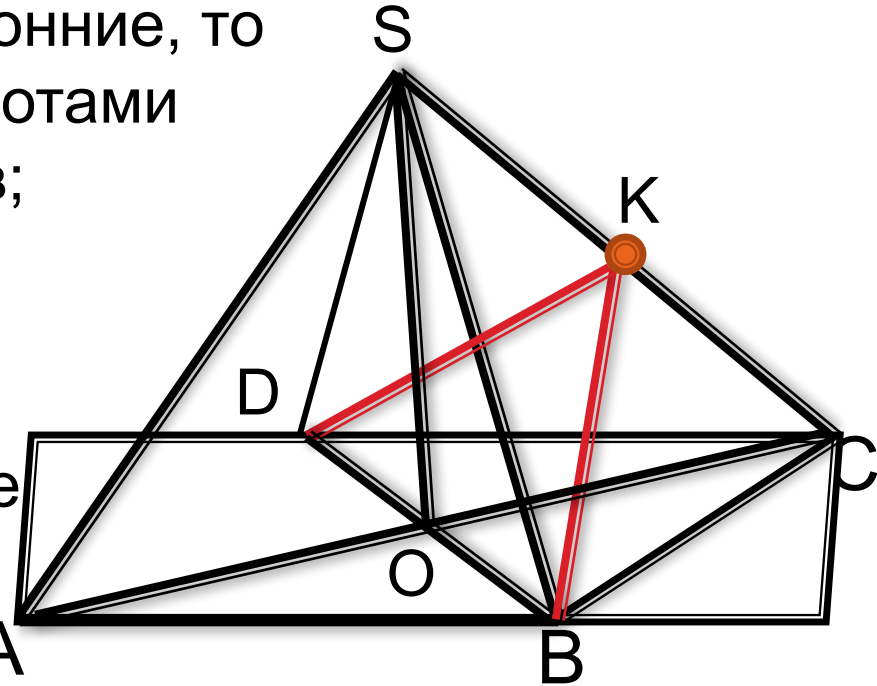
6. $\angle DK = KB = (a^2 \cdot \sqrt{3})/2$, где $a=1$, т.е. $DK = KB = \sqrt{3}/2$

7. $DB = \sqrt{2}$ (диагонали квадрата) A

8. Из $\triangle DKB$ по теореме косинусов найдем угол.

$$\cos \angle DKB = \frac{KB^2 + DK^2 - BD^2}{2 \cdot BK \cdot DK}; \quad \cos \angle DKB = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

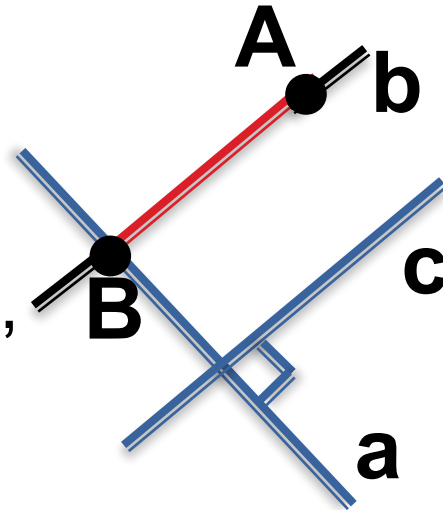
Ответ: $(-1)/3$



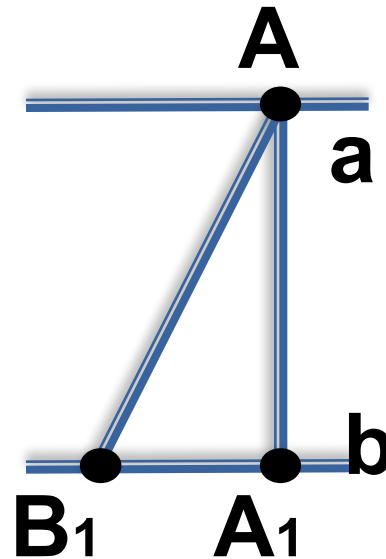
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту точку, есть длина отрезка – перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.



$A \notin a$;
проводим $c \perp a$;
через A прямую $b \parallel c$;
 $\Rightarrow b \perp a$,
 $AB \perp a$.
 AB – искомое расстояние.



$a \parallel b$, $A \in a$, \Rightarrow
 AA_1 или AB_1 –
искомые расстояния



Ключевая задача

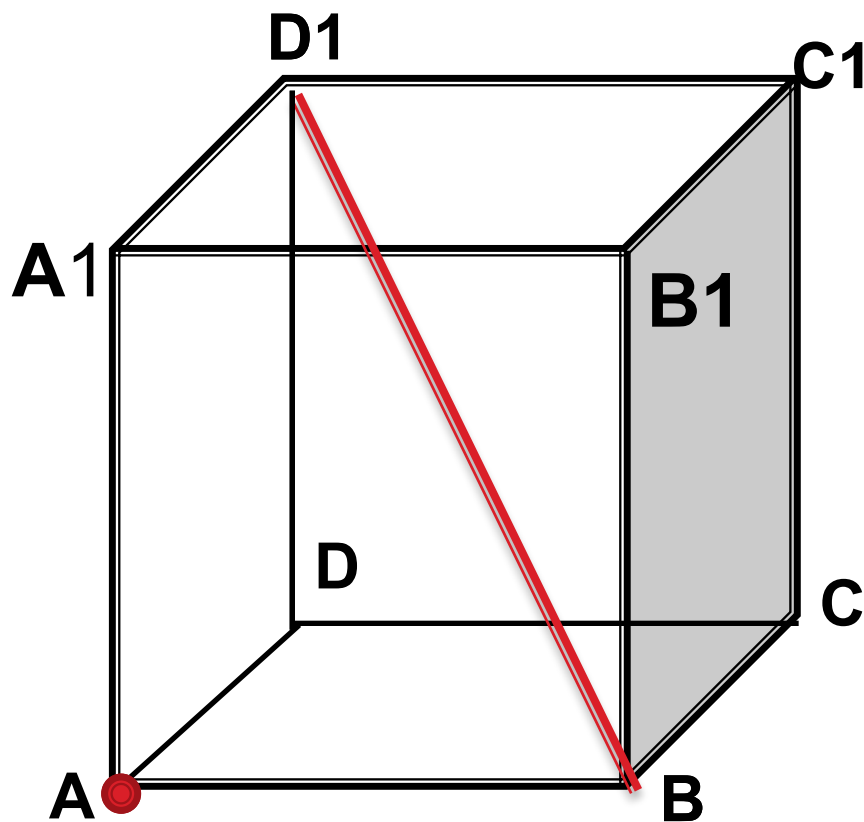
В единичном кубе $A\dots D1$ найдите расстояние от точки A до прямой $BD1$.

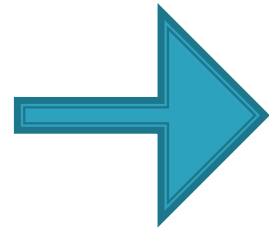
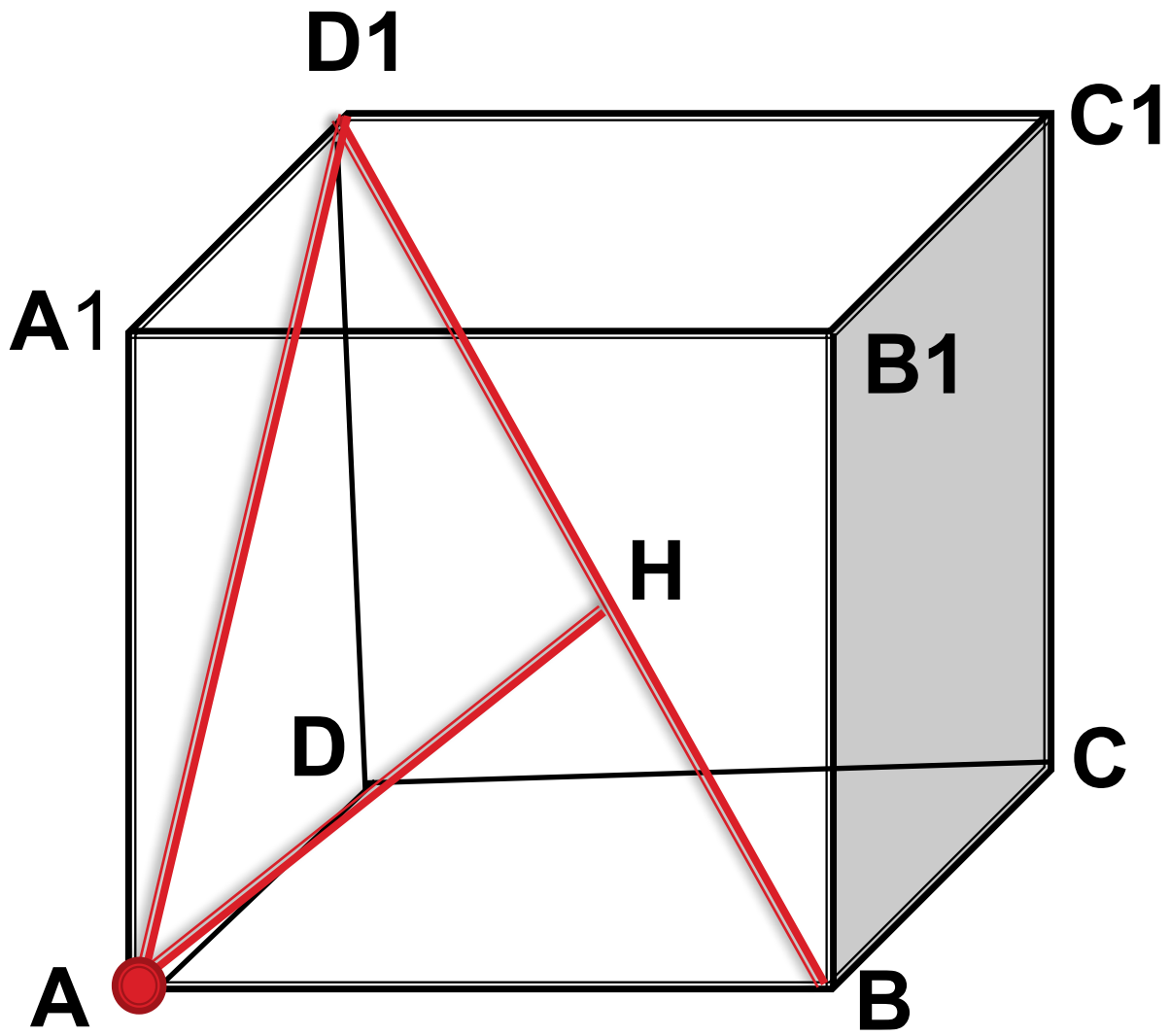
Рисунок

РЕШЕНИЕ 1

РЕШЕНИЕ 2

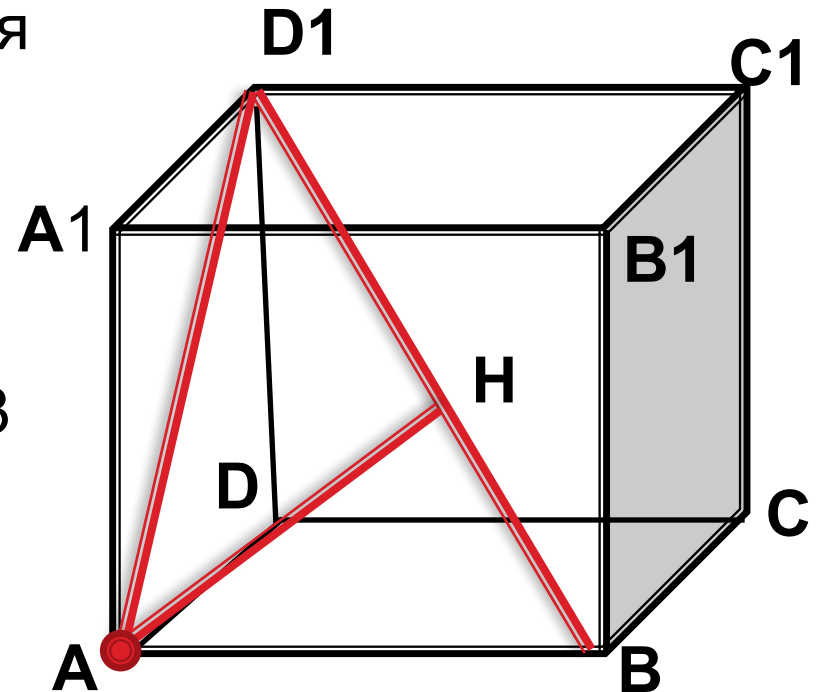
РЕШЕНИЕ 3





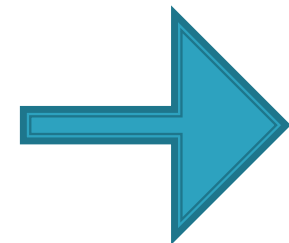
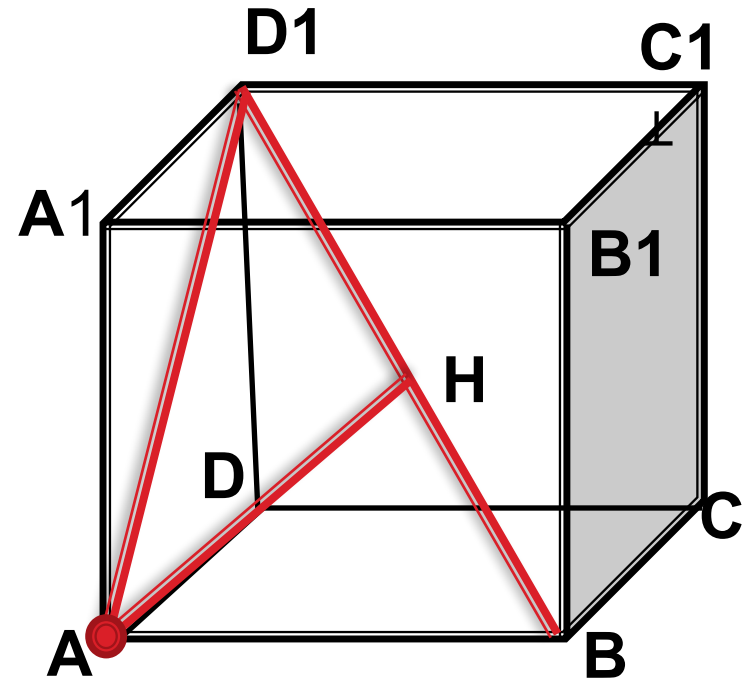
1 СПОСОБ

1. Из точки A опустим перпендикуляр на прямую BD_1
 2. AH – искомое расстояние
 3. Рассмотрим $\triangle ABD_1$ – прямоугольный ($\angle D_1AB=90^\circ$)
 4. Из $\triangle ABD_1$: $AB=1$, $AD_1=\sqrt{2}$ (по т.Пифагора), $BD_1=\sqrt{3}$ (как диагональ единичного куба)
 5. Найдем AH используя способ площадей.
Найдем площадь $\triangle ABD_1$ двумя способами:
 6. $S_1=1/2 \cdot AD_1 \cdot AB$
 $S_2=1/2 \cdot AH \cdot BD_1$
 7. $S_1=1/2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}/2$,
так как $S_1 \Leftrightarrow S_2$, то $\sqrt{2}/2 = 1/2 \cdot AH \cdot \sqrt{3}$
 8. Отсюда, $AH = \sqrt{6}/3$
- Ответ: $\sqrt{6}/3$



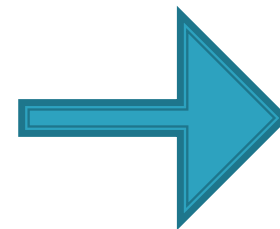
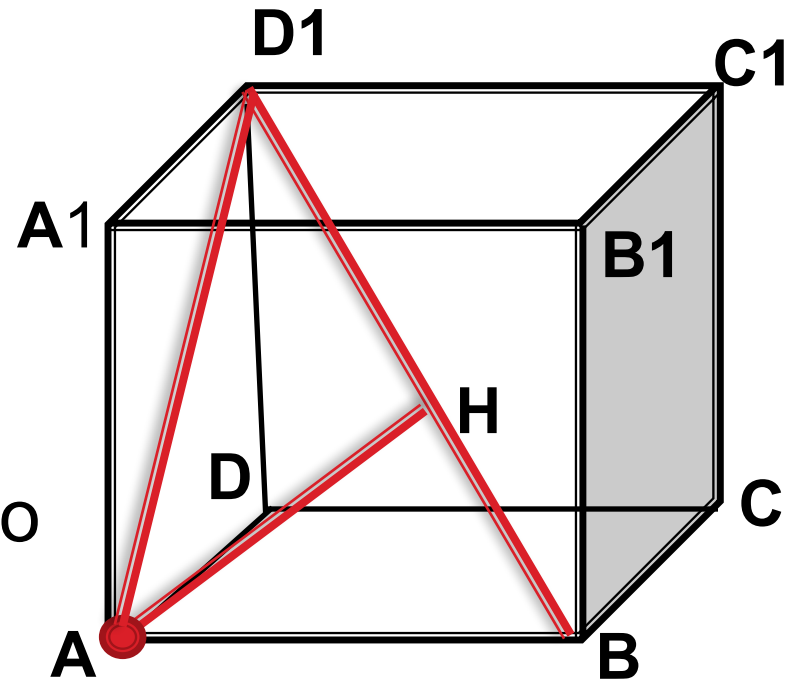
2 СПОСОБ

1. Из точки A опустим перпендикуляр на прямую BD_1
2. AH – искомое расстояние
3. Рассмотрим $\triangle ABD_1$ – прямоугольный ($\angle D_1AB=90^\circ$)
4. Из $\triangle ABD_1$: $AB=1$, $AD_1=\sqrt{2}$ (по т. Пифагора), $BD_1=\sqrt{3}$ (как диагональ единичного куба)
5. Рассмотрим $\triangle BAD_1$ и $\triangle BHA$.
6. $\triangle BAD_1 \sim \triangle BHA$ по трем углам:
 $\angle B$ – общий, $\angle BHA = \angle BAD_1 = 90^\circ$, \Rightarrow
 $\angle BAH = \angle AD_1H$
7. Из подобия треугольников следует и пропорциональность сторон: $AD_1/BD_1 = AH/AB$
8. $AH = (AD_1 \cdot AB) / BD_1$
9. $AH = (\sqrt{2} \cdot 1) / \sqrt{3} = \sqrt{2} / \sqrt{3} = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) / (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) = \sqrt{6} / 3$
Ответ: $\sqrt{6}/3$



3 СПОСОБ

1. Из точки A опустим перпендикуляр на прямую BD_1
 2. AH – искомое расстояние
 3. Рассмотрим $\triangle ABD_1$ – прямоугольный ($\angle D_1AB = 90^\circ$)
 4. Из $\triangle ABD_1$: $AB = 1$, $AD_1 = \sqrt{2}$ (по т.Пифагора), $BD_1 = \sqrt{3}$ (как диагональ единичного куба)
 5. Из $\triangle ABD_1$: $\sin \angle ABD_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$
 6. $\Rightarrow AH = AB \cdot \sin \angle ABD_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$
- Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$



Тренировочное задание

В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние от точки B до прямой AD_1 .

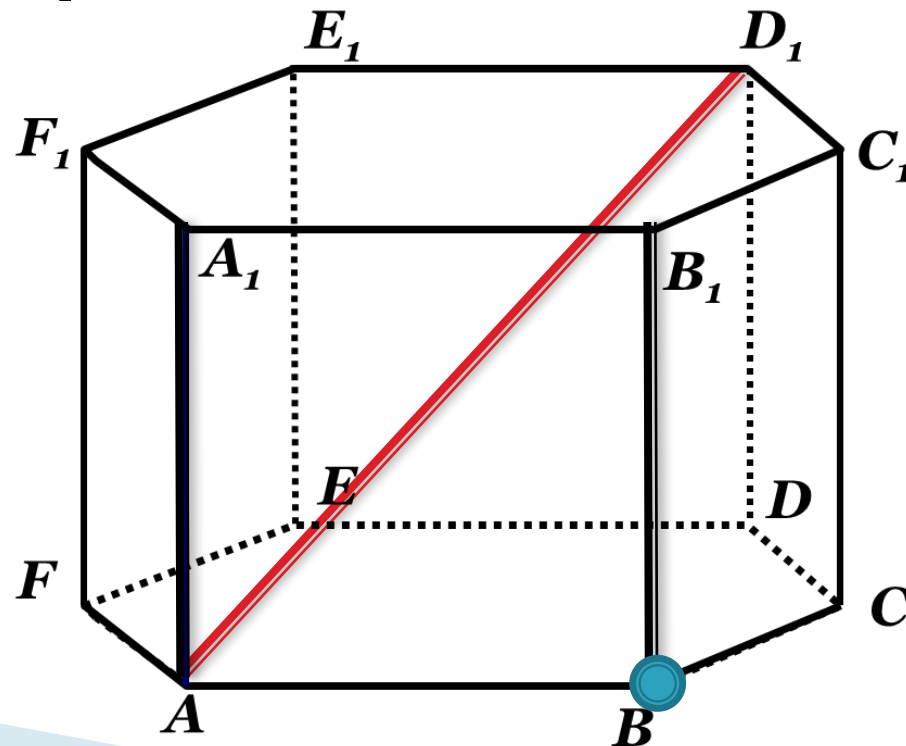
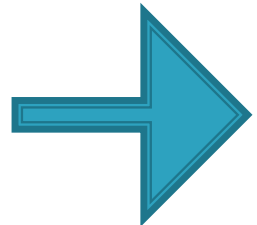
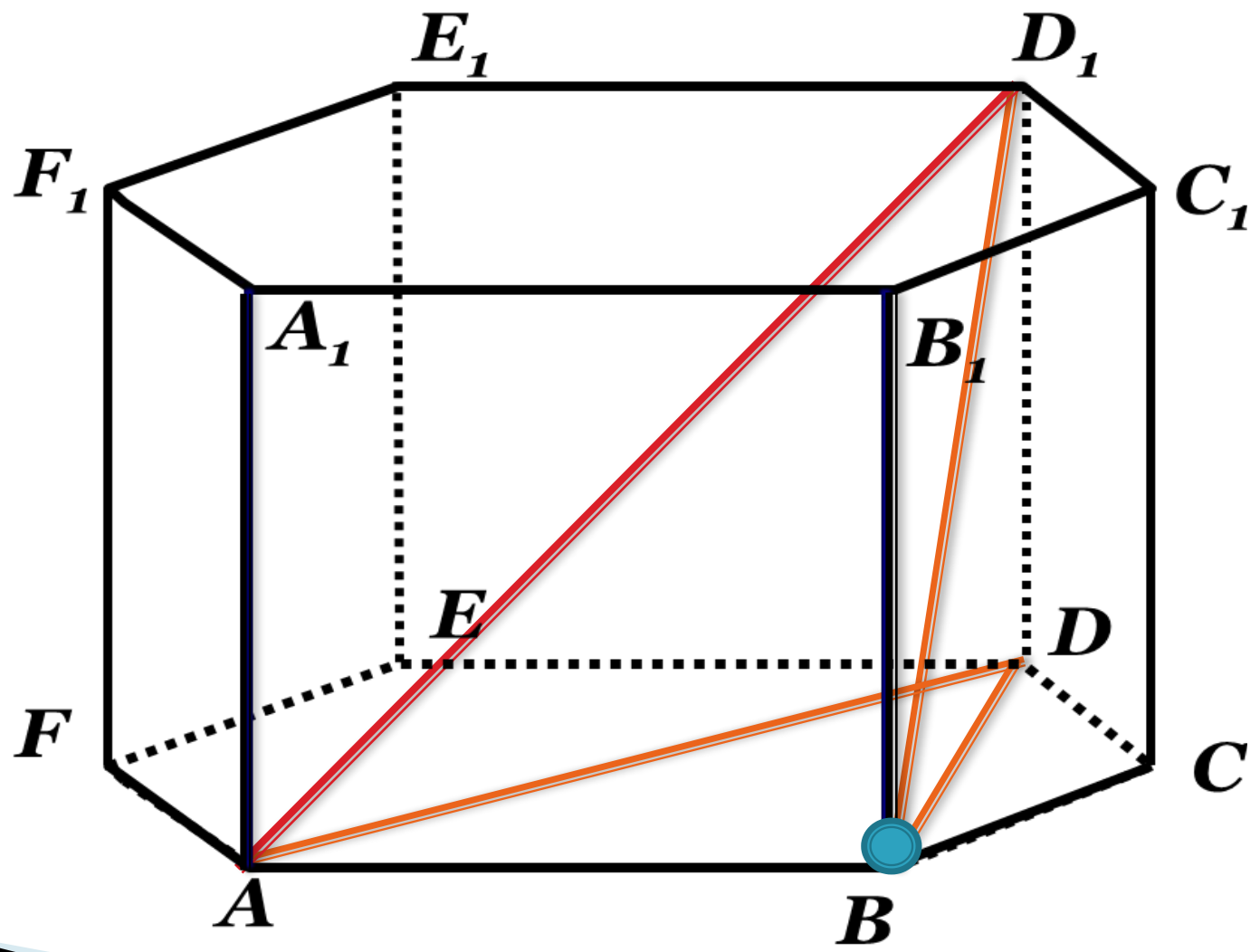


Рисунок
РЕШЕНИЕ





1. В $\triangle AD_1B$: $AB=1$, $AD_1=\sqrt{AD^2+DD_1^2}$

(Из $\triangle ADD_1$; $\angle D=90^\circ$)

2. $AD_1=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

3. $BD_1=\sqrt{BD^2+DD_1^2}$; (Из $\triangle BDD_1$; $\angle D=90^\circ$), $BD_1=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$

4. $\triangle ABD_1$ – прямоугольный ($\angle D_1BA=90^\circ$)

(По теореме о трех перпендикулярах $BD \perp AB$)

5. Для нахождения расстояния от точки В до прямой AD_1 : BH воспользуемся формулами площадей:

6. $S_{\triangle ABD_1}=1/2 \cdot AB \cdot BD_1$

$S_{\triangle ABD_1}=1/2 \cdot 1 \cdot 2=1$

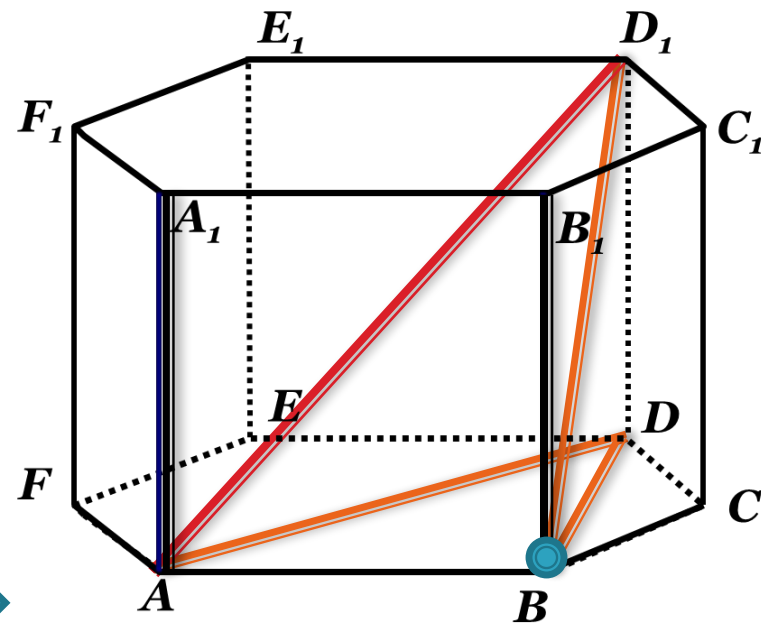
7. $S_{\triangle ABD_1}=1/2 \cdot AD_1 \cdot BH$,

где $BH \perp AD_1$

8. $BH=(2 \cdot S_{\triangle ABD_1})/AD_1$;

$BH=(2 \cdot 1)/\sqrt{5}=2/\sqrt{5}=2\sqrt{5}/5$

Ответ: $2\sqrt{5}/5$

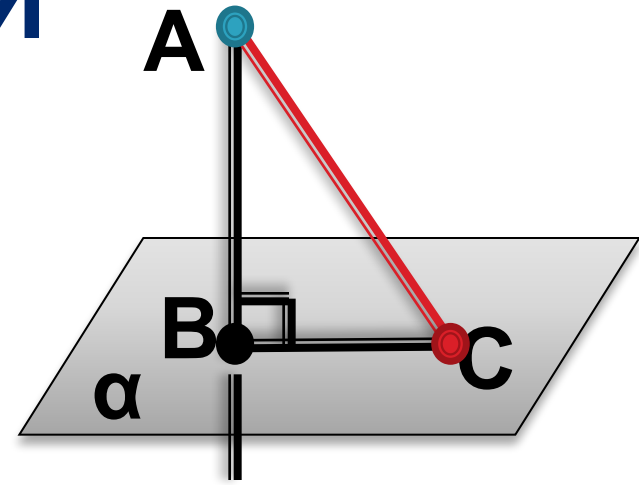


РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно длине их общего перпендикуляра.

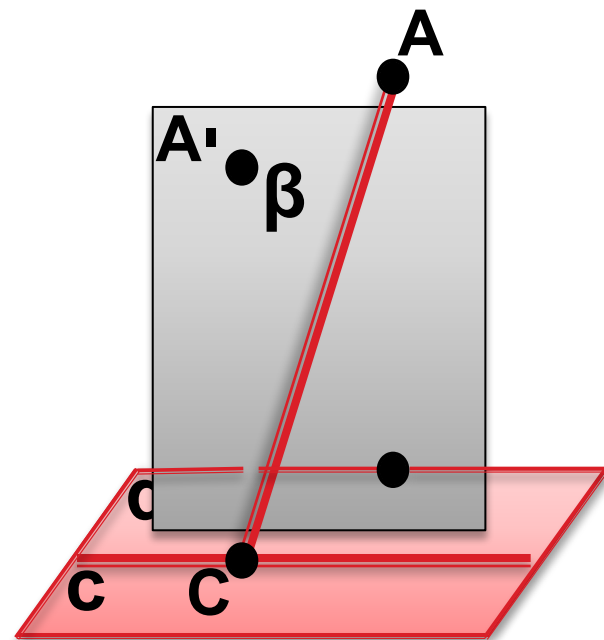
Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости.



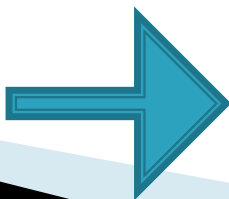
Из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AB и наклонная AC . Точка B – основание перпендикуляра, точка C – основание наклонной, BC – проекция наклонной AC на плоскость α .

Для решения задач такого типа приходится применять теорему о трех перпендикулярах:

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна наклонной. И обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.



$AB \perp \alpha$; AC – наклонная; c – прямая, проходящая через основание C наклонной, $c \in \alpha$; Проведем $CA' \parallel AB$; $CA' \perp \alpha$; Через AB и $A'C$ проведем β ; $c \perp CA'$; если $c \perp CB$, то $c \perp \beta \Rightarrow c \perp AC$; Аналогично доказывается и обратное утверждение.



Ключевая задача

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1

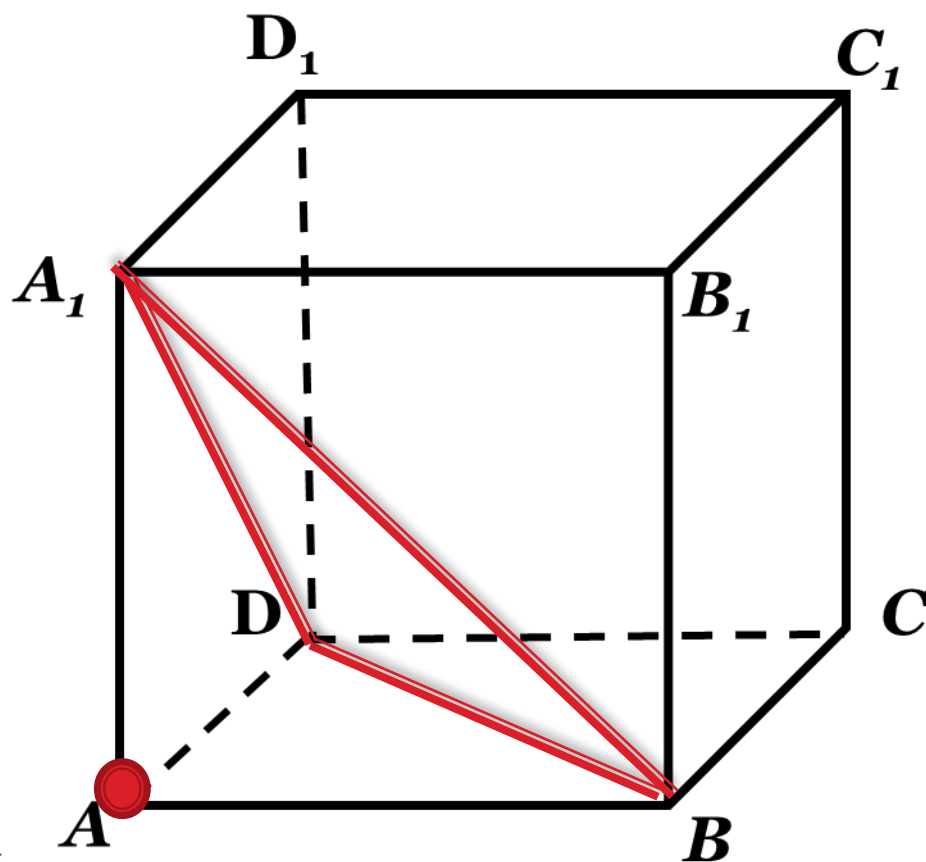
Рисунок

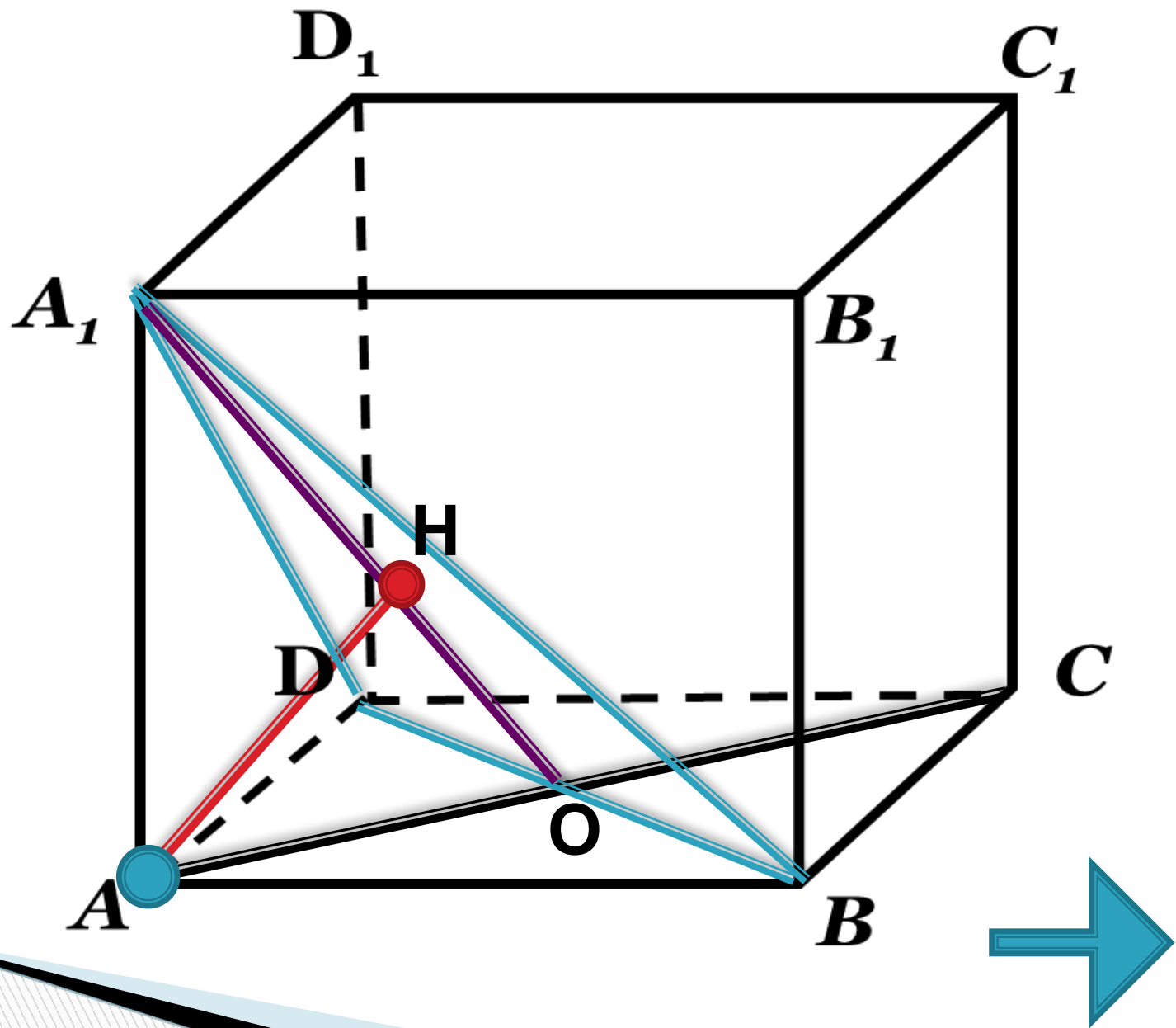
РЕШЕНИЕ 1

РЕШЕНИЕ 2

РЕШЕНИЕ 3

РЕШЕНИЕ 4





1 СПОСОБ

1. O – середина BD ,
2. Т.к. AC и BD – диагонали квадрата;
 $AC \perp BD$

3. Значит по теореме о трех перпендикулярах $BD \perp AA_1O$

$$4. (BDA_1) \cap (AA_1O) = A_1O$$

По признаку $BD \perp (AA_1O)$

5. Искомый перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость (BDA_1) является высота AH прямоугольного $\triangle AA_1O$

$$6. AA_1 = 1; AO = \sqrt{2}/2; A_1O = \sqrt{AO^2 + AA_1^2} = \sqrt{1 + \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

7. Найдем AH используя способ площадей.

Площадь $\triangle AA_1O$ найдем двумя способами.

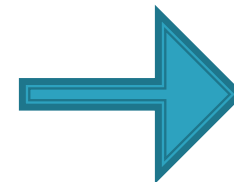
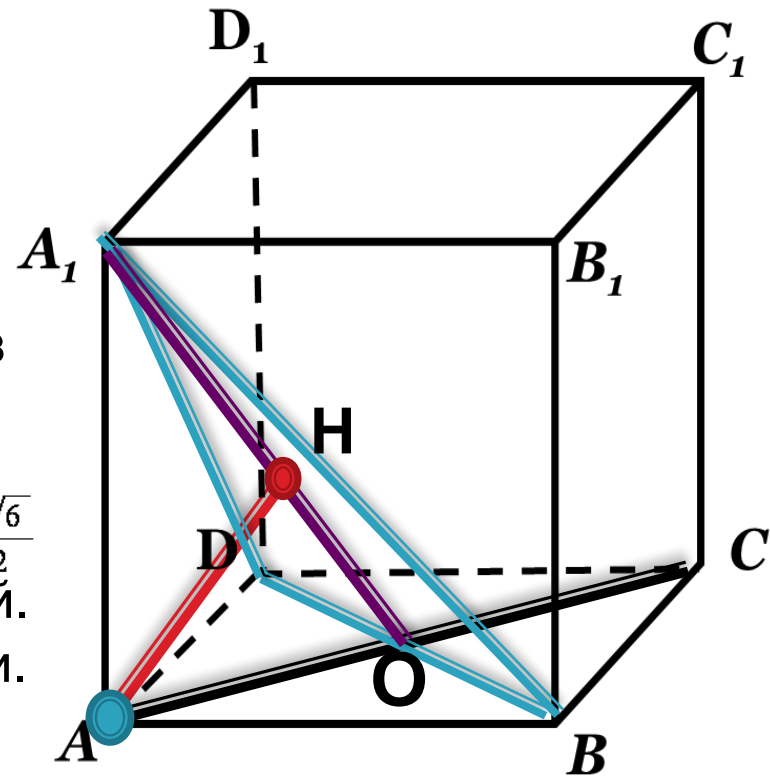
$$8. S_{\triangle AA_1O} = (1/2) \cdot AA_1 \cdot AO$$

$$S_{\triangle AA_1O} = (1/2) \cdot 1 \cdot (\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/4$$

$$9. S_{\triangle AA_1O} = (1/2) \cdot A_1O \cdot AH,$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}/3$



2 СПОСОБ

1. O – середина BD ,
2. Тогда AC и BD – диагонали квадрата; $AC \perp BD$
3. Значит по теореме о трех перпендикулярах $BD \perp A_1O$
4. $(BDA_1) \cap (AA_1O) = A_1O$

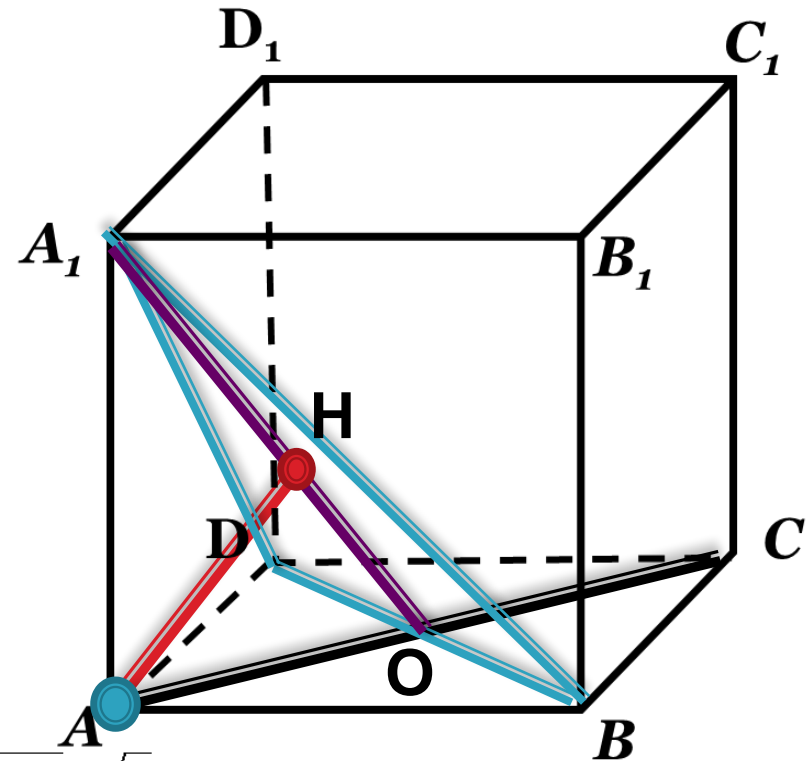
По признаку $BD \perp (AA_1O)$

5. Искомый перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость (BDA_1) является высота AH прямоугольного $\triangle AA_1O$

6. $AA_1=1$; $AO=\sqrt{2}/2$; $A_1O=\sqrt{AO^2+AA_1^2}=\sqrt{1+\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

7. Из $\triangle AA_1O$: $\sin \angle AOA_1 = \frac{AA_1}{A_1O} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,
 $\Rightarrow AH = AO \cdot \sin \angle AOH = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\sqrt{3}/3$



3 СПОСОБ

1. O – середина BD ,
2. Тогда AC и BD – диагонали квадрата;
 $AC \perp BD$
3. Значит по теореме о трех перпендикулярах
 $BD \perp A_1O$

$$4. (BDA_1) \cap (AA_1O) = A_1O$$

По признаку $BD \perp (AA_1O)$

5. Искомый перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость (BDA_1) является высота AH прямоугольного $\triangle AA_1O$

$$6. AA_1 = 1; AO = \sqrt{2}/2; A_1O = \sqrt{AO^2 + AA_1^2} = \sqrt{1 + \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

7. Рассмотрим $\triangle AOA_1$ и $\triangle HOA$.

6. $\triangle AOA_1 \sim \triangle HOA$ по трем углам:
 $\angle O$ – общий, $\angle OHA = \angle OAA_1 = 90^\circ$, \Rightarrow

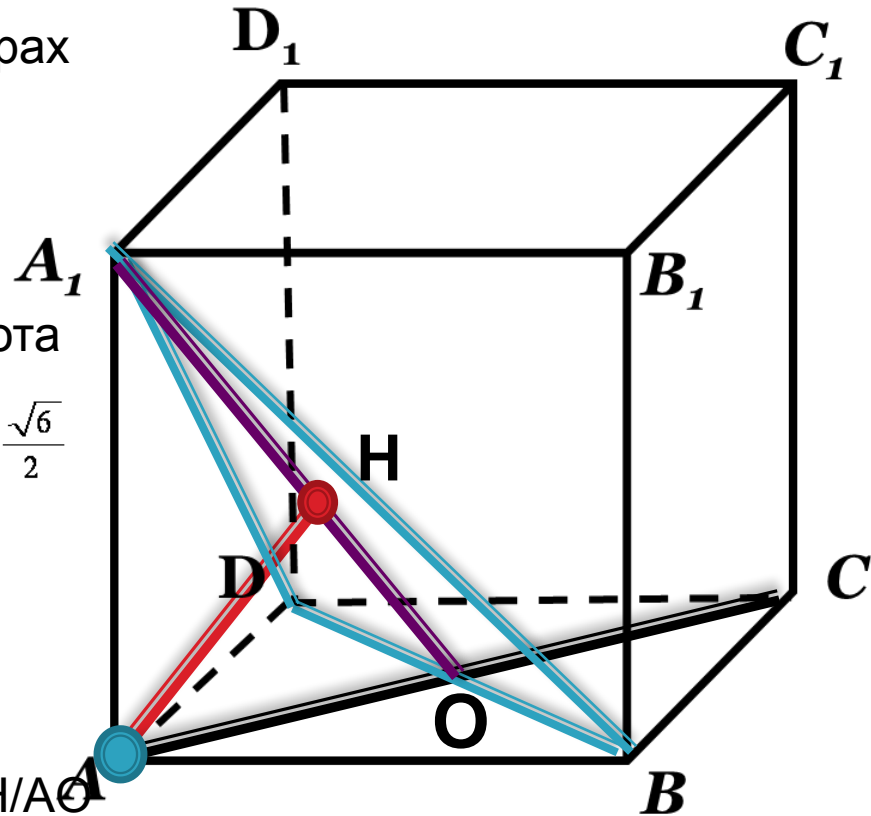
$$\angle HAO = \angle AA_1O$$

7. Из подобия треугольников следует и пропорциональность сторон: $AA_1/OA_1 = AH/AO$

$$8. AH = (AA_1 \cdot AO) / A_1O$$

$$9. AH = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}/3$



Рассмотрим пирамиду AA_1BD
и найдем объем двумя
способами.

Пусть AH -искомый
перпендикуляр

$V = 1/3 \cdot S_{\text{осн}} \cdot H$, где H -высота

$$1). V_1 = 1/3 \cdot S_{\Delta ABD} \cdot AA_1;$$

$$2). V_2 = 1/3 \cdot S_{\Delta A_1BD} \cdot AH;$$

$$V_1 = 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1 = 1/6$$

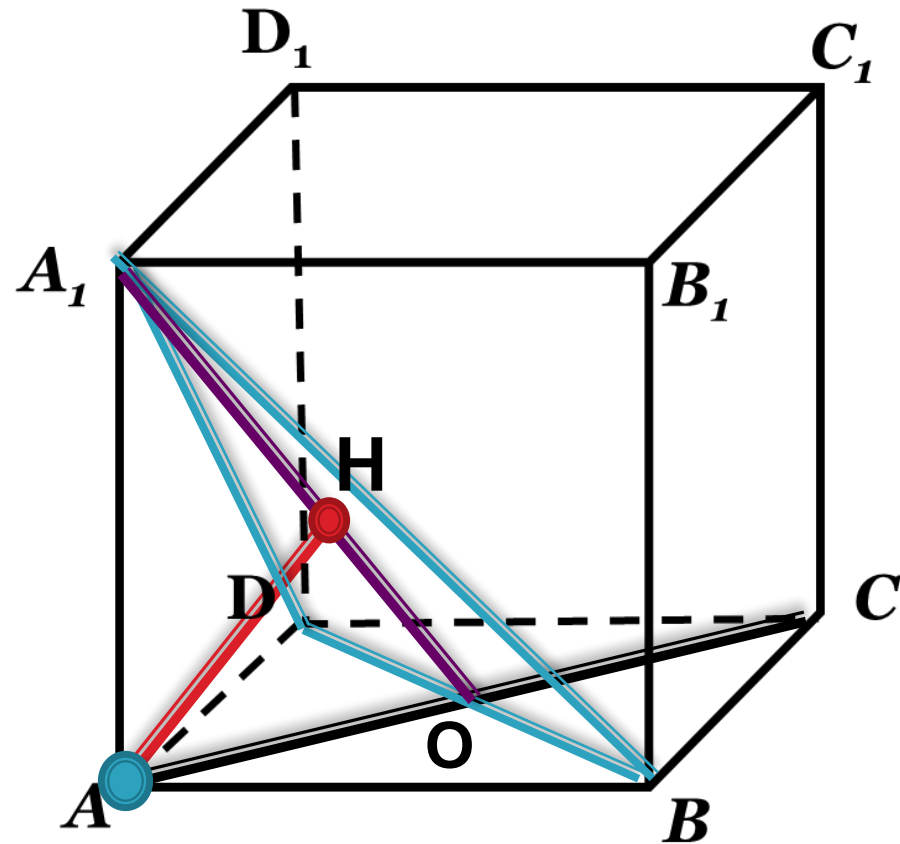
$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot AH, \text{ где } a = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot AH$$

$$AH = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}/3$

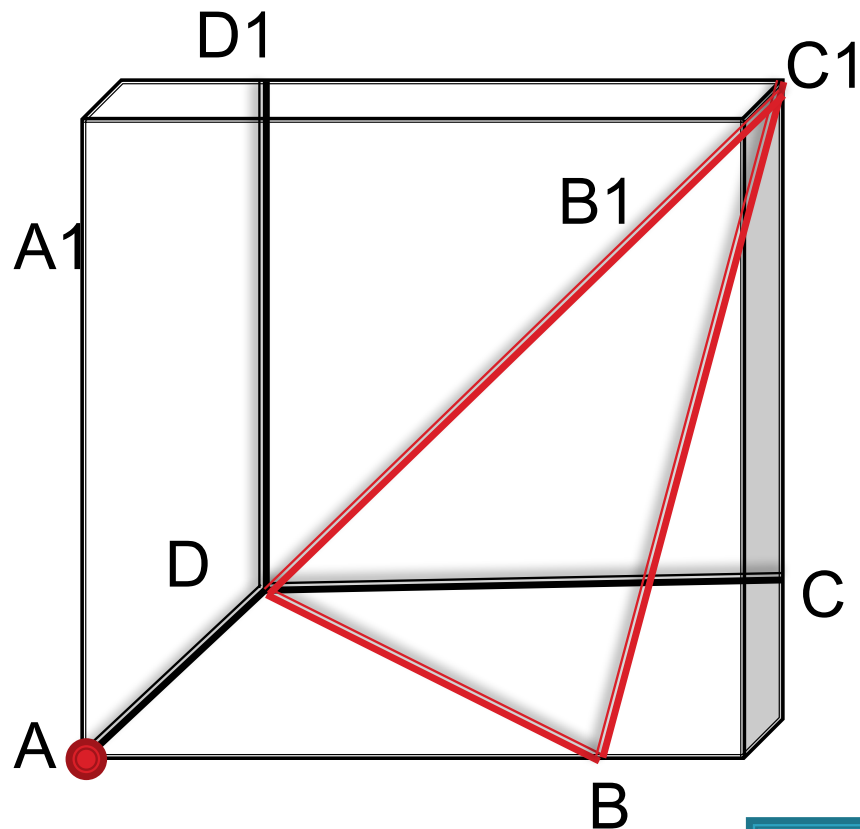
4 СПОСОБ

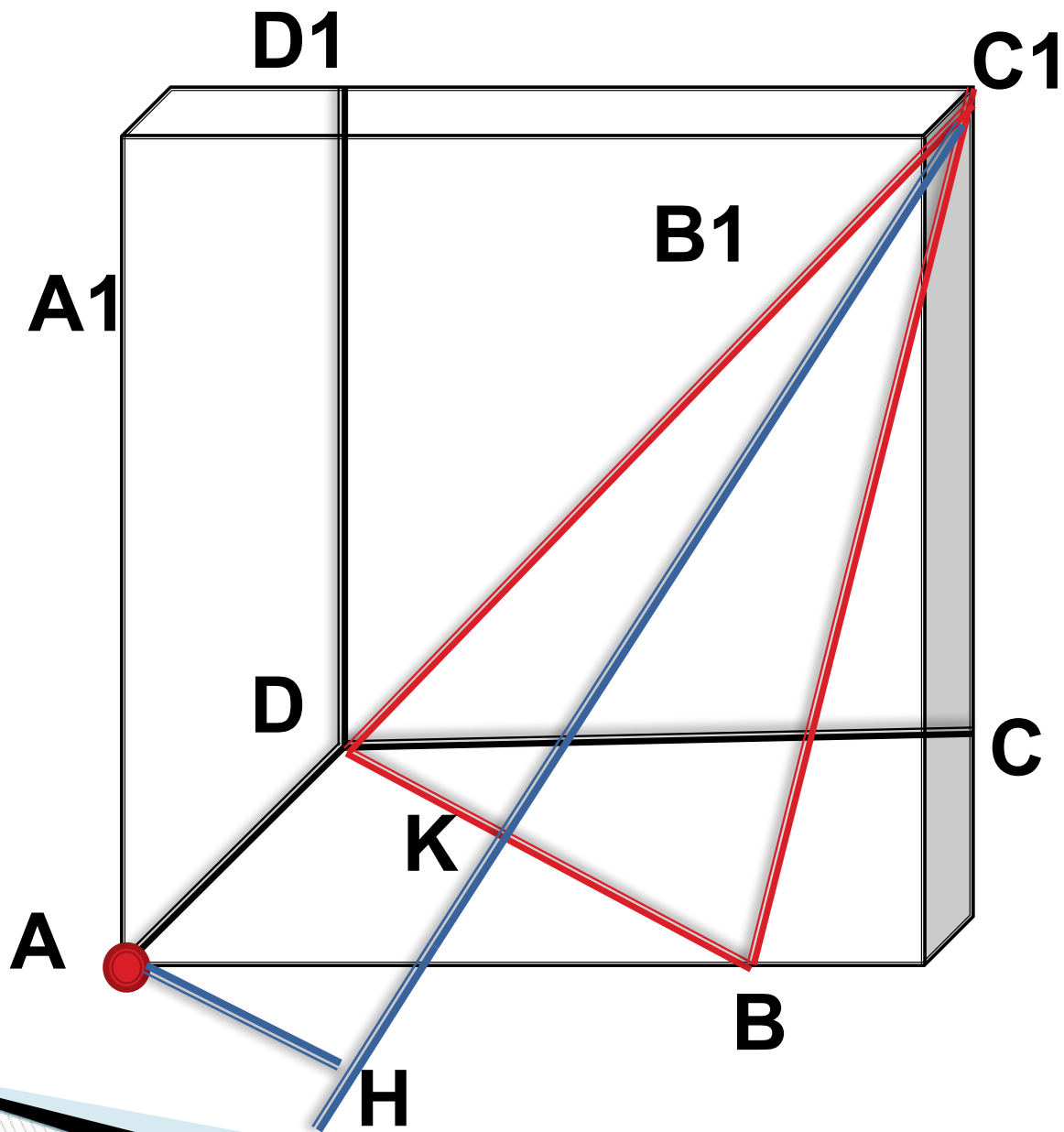


Тренировочная задача

В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости (BDC_1) .

Рисунок
РЕШЕНИЕ





Воспользуемся формулами объемов для пирамиды C_1BAD .

Пусть AH -искомое расстояние
 $V = 1/3 \cdot S_{\text{осн}} \cdot H$, где H -высота

1). $V_1 = 1/3 \cdot S_{\Delta ABD} \cdot CC_1$;

$CC_1 = 1$; $S_{\Delta ABD} = 1/2 \cdot 1 \cdot 1 = 1/2$

$V_1 = 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1 = 1/6$

2). $V_2 = 1/3 \cdot S_{\Delta C_1BD} \cdot AH$;

$S_{\Delta C_1BD} = (a^2 \cdot \sqrt{3} / 4)$, где $a = \sqrt{2}$

$S_{\Delta C_1BD} = (2 \cdot \sqrt{3} / 4) = \sqrt{3} / 2$

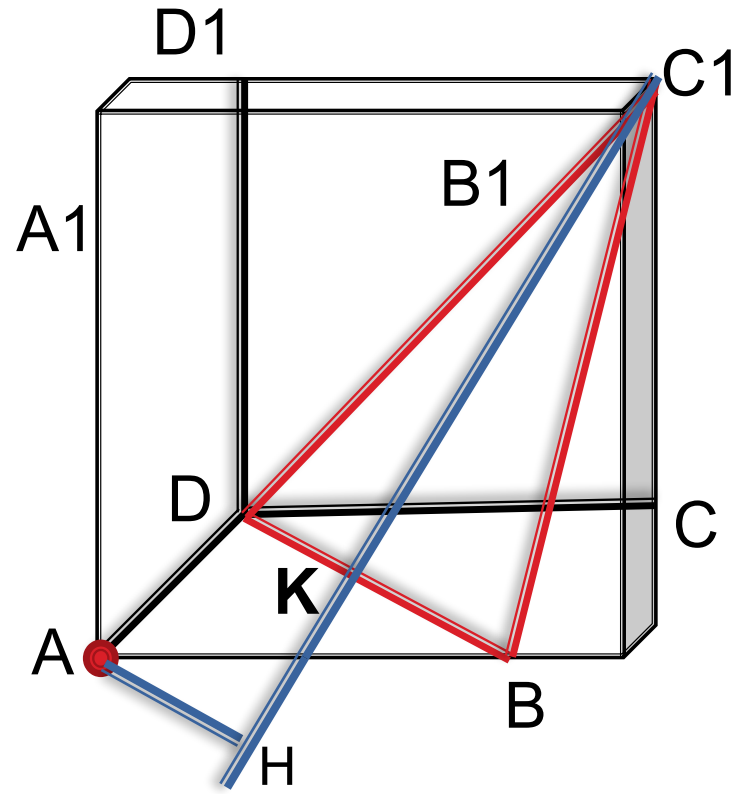
$V_2 = 1/3 \cdot \sqrt{3} / 2 \cdot AH = \sqrt{3} / 6 \cdot AH$

Из 1) и 2)

$1/6 = \sqrt{3} / 6 \cdot AH$

$AH = (1/6) \cdot (6 / \sqrt{3}) = 1 / \sqrt{3} = \sqrt{3} / 3$

Ответ: $\sqrt{3} / 3$

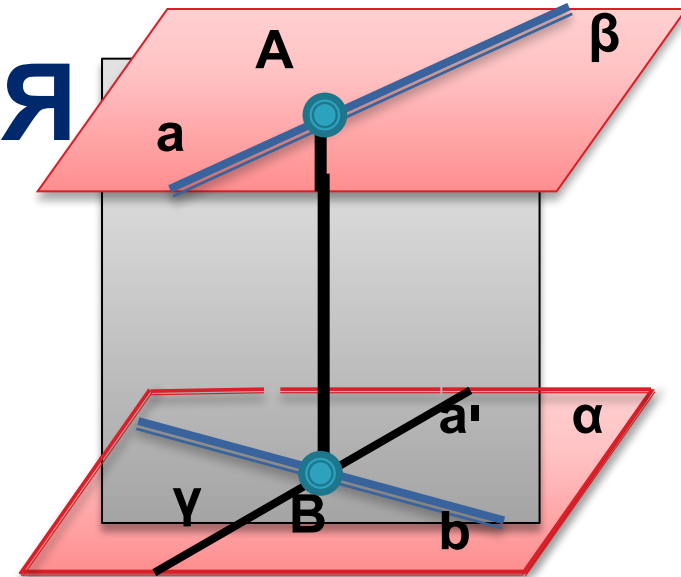


РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

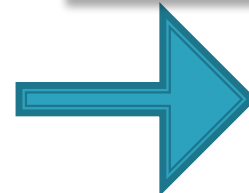
Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр и притом только один.

Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.



a и b – скрещивающиеся прямые;
 $a \parallel a'$; $a' \cap b = B$;
 $a' \in \alpha$, $b \in \alpha$, $a \in \beta$, $\beta \parallel \alpha$,
 AB – искомое расстояние

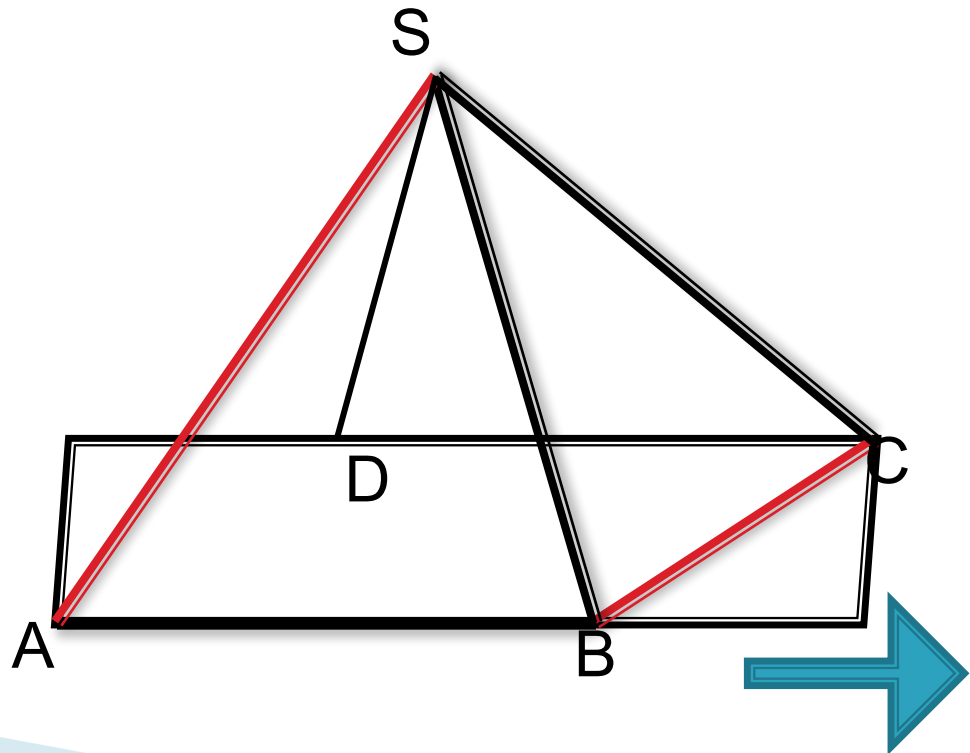


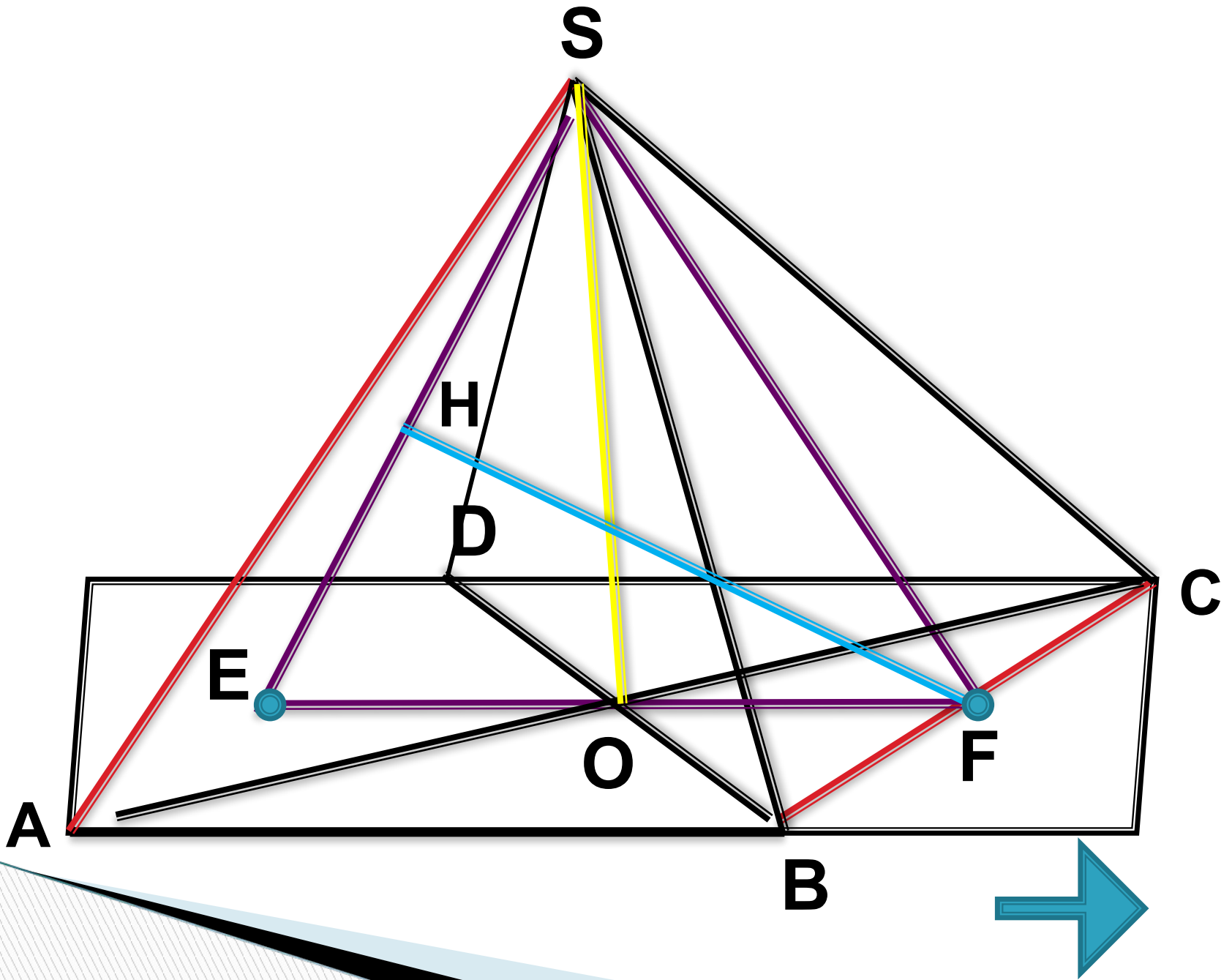
Ключевая задача

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние между прямыми SA и BC .

Рисунок

РЕШЕНИЕ





1. Прямые BC и SA - скрещивающиеся
 2. Прямая $BC \subset (SBC)$; Прямая $SA \subset (SAD)$;
 3. $BC \parallel (SAD) \Rightarrow$ расстояние между скрещивающимися прямыми SA и BC равно расстоянию от прямой BC до плоскости (SAD) ;
 4. Пусть E и F соответственно середины ребер AD и BC . Тогда искомым перпендикуляром будет высота $FH \triangle SEF$.
 5. В $\triangle SEF$: $EF=AB=1$; $SE=SF$ -высоты равнобедренных $\triangle SAD$ и $\triangle SBC$ соответственно, $\Rightarrow SE=SF=\sqrt{3}/2$
- SO – высота четырехугольной пирамиды из прямоугольного $\triangle SOF$ по теореме Пифагора: $SO=\sqrt{2}/2$.

6. Найдем FH используя способ площадей.
Площадь $\triangle SEF$ найдем двумя способами.

$$S \triangle SEF = (1/2) \cdot EF \cdot SO$$

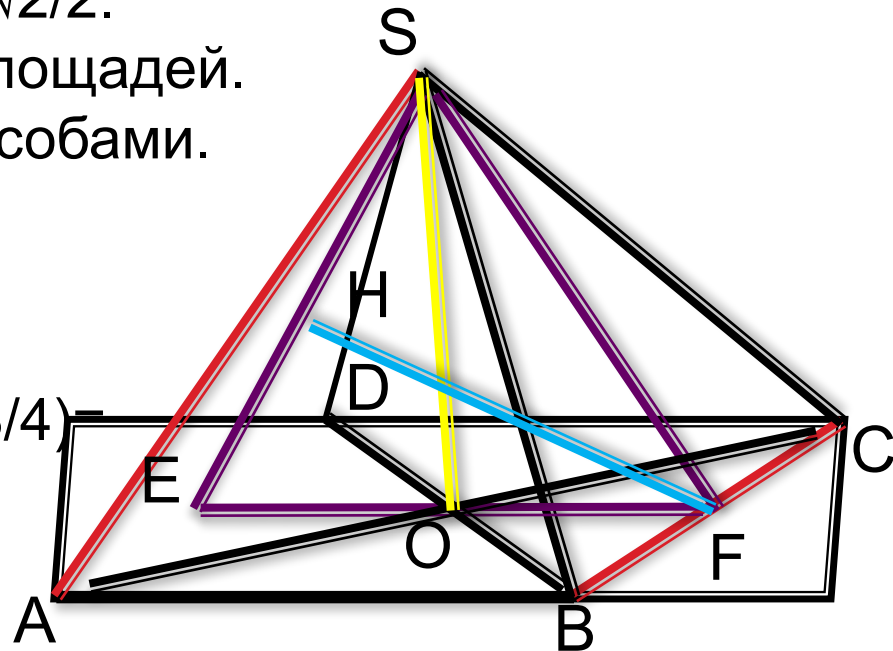
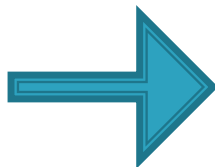
$$S \triangle SEF = (1/2) \cdot 1 \cdot (\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/4$$

$$S \triangle SEF = (1/2) \cdot SE \cdot HF,$$

$$\Rightarrow HF = (\sqrt{2}/4) / ((1/2) \cdot \sqrt{3}/2) = (\sqrt{2}/4) / (\sqrt{3}/4)$$

$$= \sqrt{2}/\sqrt{3} = \sqrt{6}/3.$$

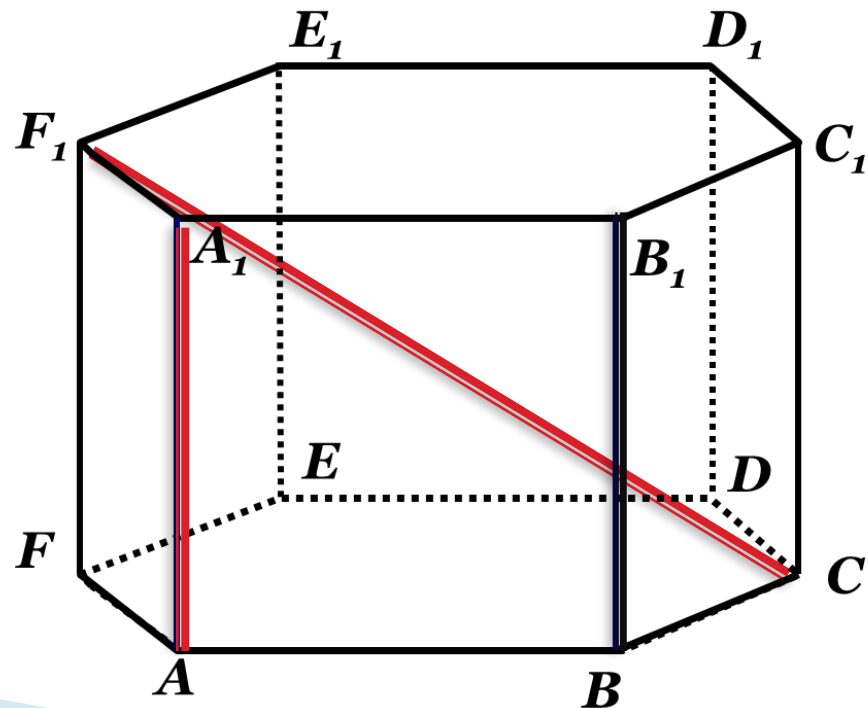
Ответ: $\sqrt{6}/3$

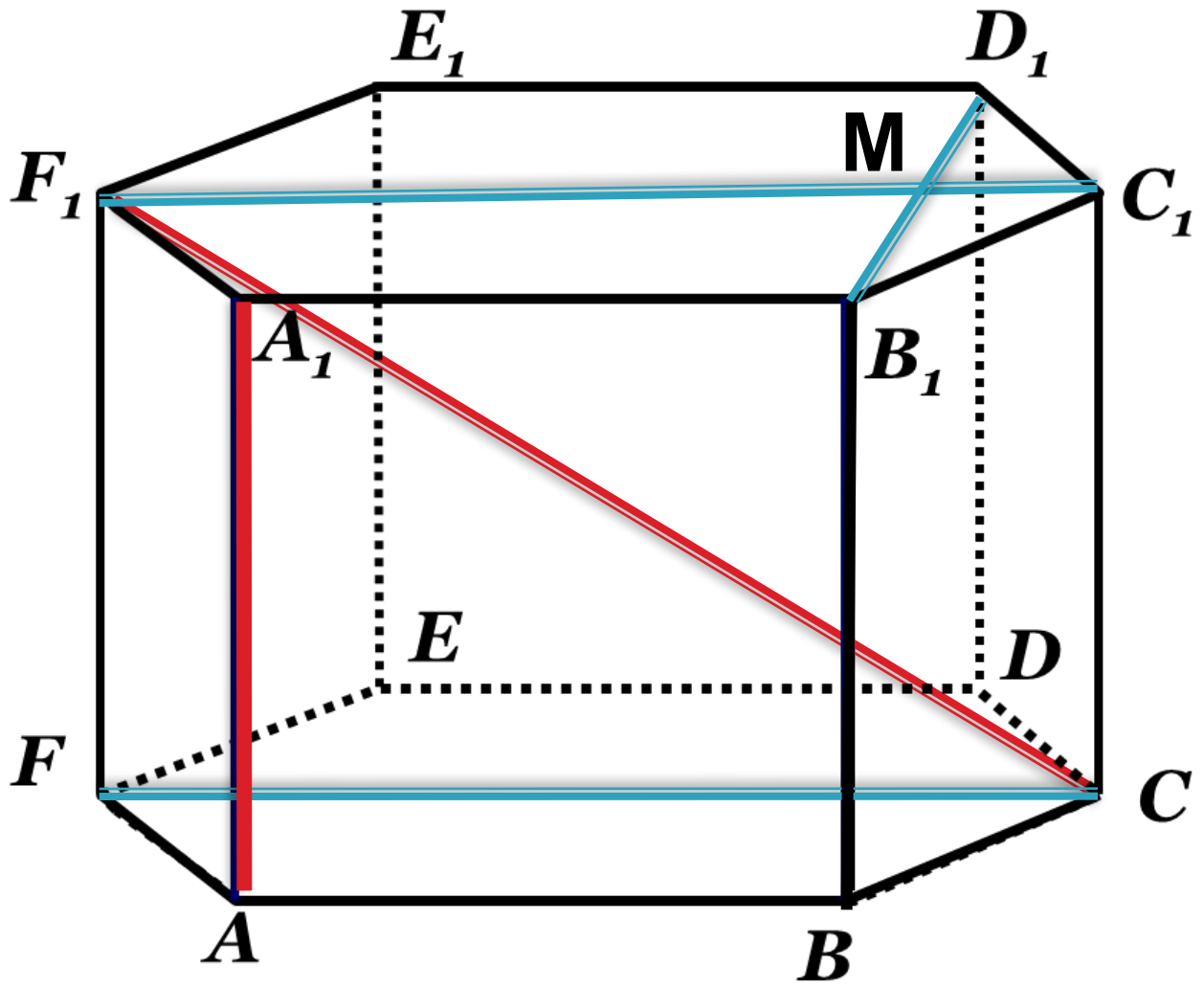


Тренировочная задача

В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и CF_1 .

Рисунок
РЕШЕНИЕ





Прямые AA_1 и CF_1 -
 скрещивающиеся
 Расстояние между
 прямыми AA_1 и CF_1 равно
 расстоянию между
 параллельными плоскостями
 (ABB_1A_1) и (FCC_1F_1) , в которых
 лежат эти прямые.

$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ - правильный
 шестиугольник; $A_1B_1 \parallel F_1C_1$; $B_1D_1 \perp$
 F_1C_1 ; $B_1M \cap F_1C_1 = M$

B_1M – искомое расстояние

Из $\triangle B_1C_1D_1$ по теореме

косинусов $B_1D_1 = \sqrt{3}$,

$B_1M = 1/2 \cdot B_1D_1 = \sqrt{3}/2$

Ответ: $\sqrt{3}/2$

