

СТЕРЕОМЕТРИЯ. ВЕКТОРНО- КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учитель математики МБОУ СОШ №77

Комоликова Г.П.

Векторно-координатный метод

Векторно-координатный метод – это математический приём решения задач и доказательства теорем, при котором геометрические отношения формулируются в векторно-координатных терминах, и дальнейшие рассуждения проводятся с использованием векторно-координатных понятий и их свойств.

Для решения задач элементарной геометрии с помощью векторов необходимо, прежде всего, научиться «переводить» условие геометрической задачи на «векторный» язык. После такого перевода осуществляются алгебраические вычисления с векторами, а затем полученное снова «переводится» на «геометрический» язык. В этом и состоит сущность векторного метода решения геометрических задач.

Что требуется доказать (на геометрическом языке)	Что достаточно доказать (на векторном языке)
$a \parallel b$	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, где $[AB] \subset a, [CD] \subset b, k$ – число.
<p>$A \in a, B \in a, C \in a$</p> <p>(три точки принадлежат одной прямой)</p>	<p>Установить справедливость одного из следующих равенств: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$, или $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}$, или $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, где $k \neq 0$ или доказать равенство: $\overrightarrow{QC} = p\overrightarrow{QA} + q\overrightarrow{QB}$, где $p + q = 1$ и Q – произвольная точка, или доказать равенство $\alpha \cdot \overrightarrow{QA} + \beta \cdot \overrightarrow{QB} + \gamma \cdot \overrightarrow{QC} = \vec{0}$, где $\alpha + \beta + \gamma = 0$, Q – произвольная точка.</p>
<p>$C \in [AB], AC : CB = m : n$</p> <p>(деление отрезка в данном отношении)</p>	<p>$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n} \overrightarrow{CB}$ или $\overrightarrow{QC} = \frac{n}{n+m} \overrightarrow{QA} + \frac{m}{n+m} \overrightarrow{QB}$ для некоторой точки Q.</p>
$a \perp b$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, где $A, B \in a, C, D \in b$

<p>Лучи AB и CD одинаково направлены</p>	$\vec{AB} = \lambda \cdot \vec{CD}, \quad \lambda > 0, \text{ или}$ $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{CD} , \text{ или}$ $ \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{CD} $
<p>Четырёхугольник $ABCD$ параллелограмм</p>	$\vec{AB} = \vec{DC} \text{ или } \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$
<p>Вычислить длину отрезка</p>	<ul style="list-style-type: none"> – выбрать два неколлинеарных базисных вектора (или три некопланарных), у которых известны длины и величина угла между ними; – разложить по ним вектор, длина которого вычисляется; – найти скалярный квадрат этого вектора, используя формулу $\vec{a}^2 = a^2$.
<p>Вычислить величину угла</p>	<ul style="list-style-type: none"> – выбрать два неколлинеарных базисных вектора, для которых известны отношение длин и углы между ними; – выбрать векторы, задающие искомый угол, и разложить их по базисным векторам; – вычислить $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }.$

I. Угол между прямыми

1 способ.

– выбрать три некопланарных базисных вектора, для которых известны отношение длин и углы между ними;

– выбрать векторы, задающие искомый угол, и разложить их по базисным векторам;

– вычислить $\cos \varphi = \left| \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ (искомый угол должен быть острым).

2 способ.

– определить координатные оси;

– найти координаты векторов, задающие искомый угол;

– вычислить $\cos \varphi = \left| \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ (искомый угол должен быть острым).

I. Угол между прямыми. Задача №

1

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите косинус угла между прямыми AB и CA_1 .

1. Определим систему координат и координаты точек A, B, C, A_1 в этой системе координат:

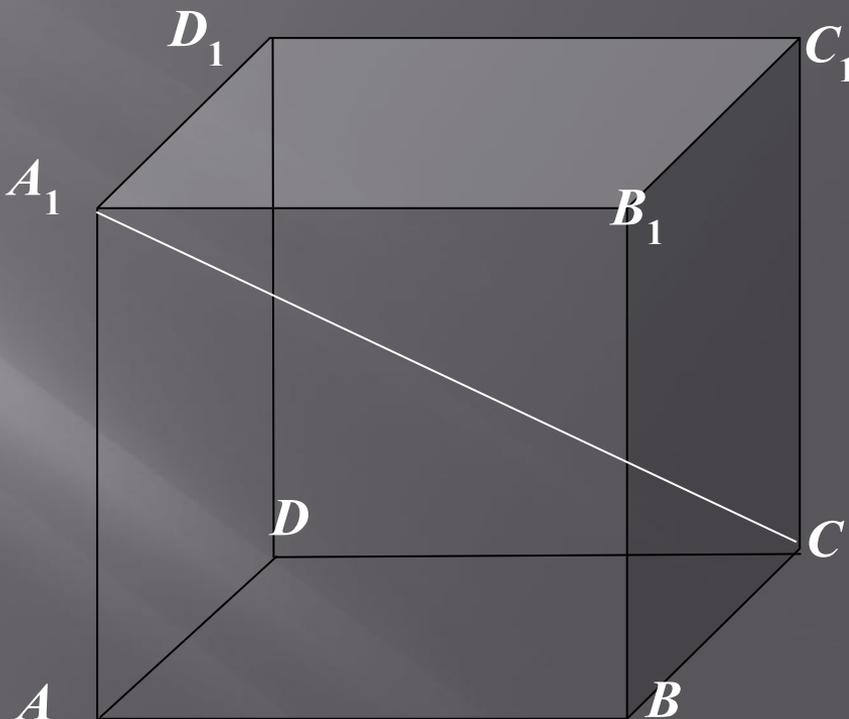
$A (0; 0; 0); B (a; 0; 0); C (a; a; 0); A_1 (0; 0; a).$

2. Найдем координаты векторов

$$\vec{AB} (a; 0; 0) \quad \vec{CA_1} (-a; -a; a)$$

$$\cos(\vec{AB}, \vec{CA_1}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{CA_1}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CA_1}|} = \frac{a^2}{a \cdot \sqrt{3} \cdot a} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$



II. Угол между прямой и плоскостью

1 способ.

– выбрать три некопланарных базисных вектора, для которых известны отношение длин и углы между ними;

– выбрать вектор, параллельный данной прямой;

– разложить выбранный вектор и вектор нормали к данной плоскости по базисным векторам;

– вычислить $\cos \varphi = \left| \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$;

– искомый угол равен $90^\circ - \varphi$.

2 способ.

– определить координатные оси;

– найти координаты вектора, параллельного данной прямой и вектора нормали к плоскости;

– вычислить $\cos \varphi = \left| \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$;

– искомый угол равен $90^\circ - \varphi$.

II. Угол между прямой и плоскостью. Задача № 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1 .

3. Определим уравнение плоскости AB_1C_1 .

$$ax + by + cz + d = 0.$$

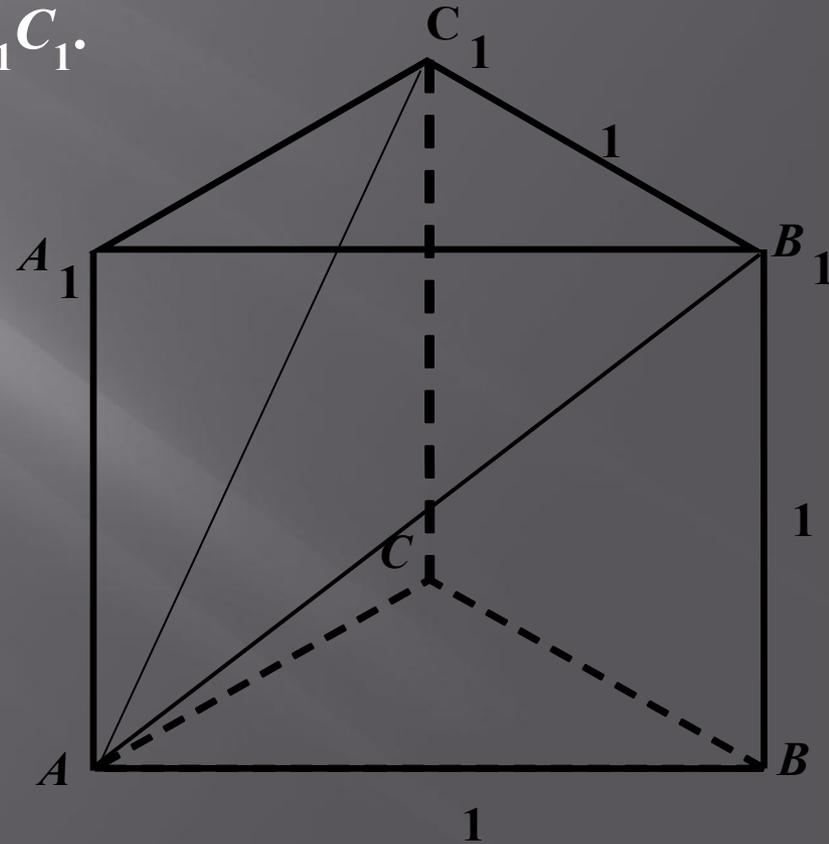
$$\begin{cases} d = 0, \\ a + c + d = 0, \\ 0,5a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + c = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} d = 0, \\ c = -\sqrt{3}b, \\ a = \sqrt{3}b. \end{cases}$$

Уравнение плоскости AB_1C_1 :

$$\sqrt{3}x + y - \sqrt{3}z = 0$$

Вектор нормали к плоскости

$$\vec{n}(\sqrt{3}; 1; -\sqrt{3}).$$



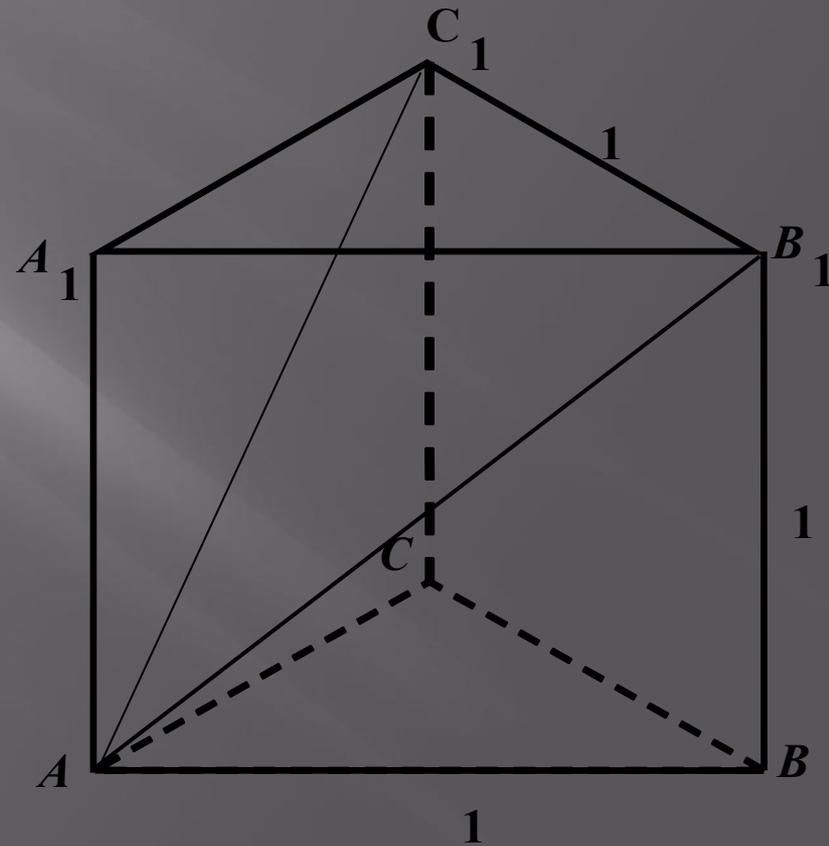
II. Угол между прямой и плоскостью. Задача № 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1 .

$$\cos(\overrightarrow{BB_1}; \vec{n}) = \frac{-\sqrt{3}}{1 \cdot \sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$



III. Угол между плоскостями

- выберите координатные оси;
- написать уравнения плоскостей, угол между которыми требуется определить;
- найти координаты векторов нормали к данным плоскостям;
- вычислить угол между векторами нормали

$$\cos \varphi = \left| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

III. Угол между плоскостями. Задача № 1

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите косинус угла между плоскостями $BA_1 C_1$ и $AB_1 D_1$.

1. Определим систему координат и координаты точек B, A_1, C_1, A, B_1, D_1 в этой системе координат:

$A(0; 0; 0); B(a; 0; 0); A_1(0; 0; a); C_1(a; a; a);$
 $B_1(a; 0; a); D_1(0; a; a).$

2. Составим уравнения плоскостей

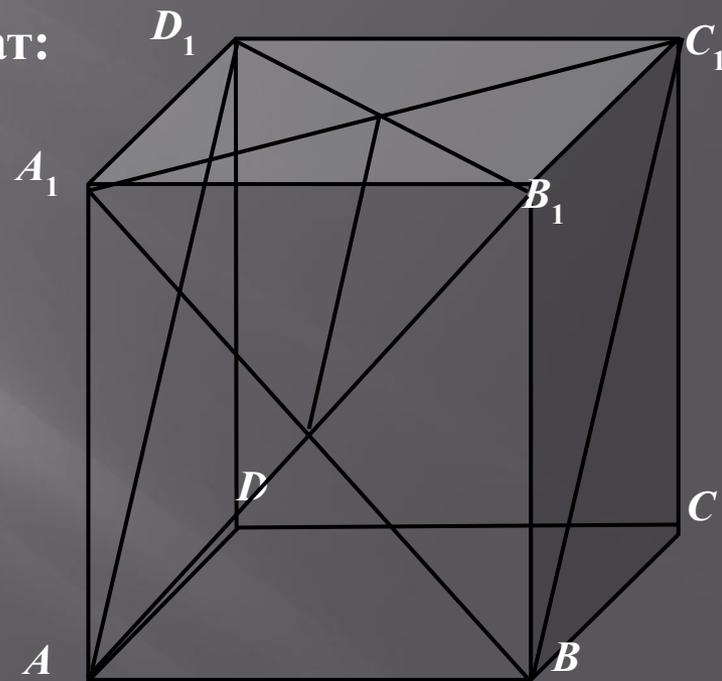
Плоскость $BA_1 C_1$:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0.$$

$$\begin{cases} a_1 a + d = 0, \\ c_1 a + d = 0, \\ a_1 a + b_1 a + c_1 a + d = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} d = -a_1 a, \\ c_1 = -a_1, \\ b_1 = -a_1. \end{cases}$$

$$x - y - z - a = 0.$$

Вектор нормали $\vec{n}_1(1; -1; -1).$



III. Угол между плоскостями. Задача № 1

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите косинус угла между плоскостями $BA_1 C_1$ и $AB_1 D_1$.

$$A(0; 0; 0); B(a; 0; 0); A_1(0; 0; a); C_1(a; a; a);$$

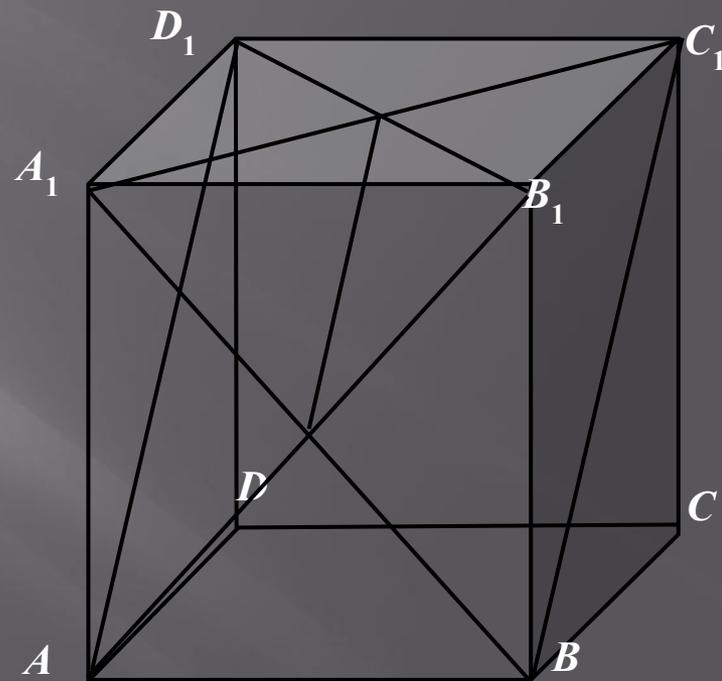
$$B_1(a; 0; a); D_1(0; a; a).$$

$$\text{Плоскость } AB_1 D_1: a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0.$$

$$\begin{cases} d = 0, \\ a_2 a + c_2 a = 0, \\ b_2 a + c_2 a = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} d = 0, \\ a_2 = -c_2, \\ b_2 = -c_2. \end{cases}$$

$$x + y - z = 0. \quad \text{Вектор нормали } \vec{n}_2(1; 1; -1).$$

$$\text{Вектор нормали } \vec{n}_1(1; -1; -1).$$



$$\cos \left(\vec{n}_1; \vec{n}_2 \right) = \frac{1 - 1 + 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3}.$$

III. Угол между плоскостями. Задача № 2

(ЕГЭ-2012) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

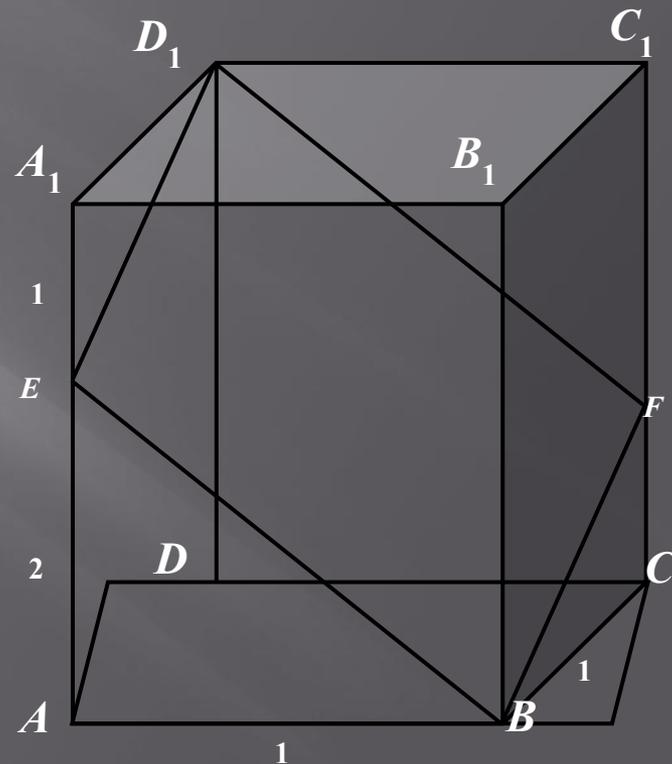
1. $AE : EA_1 = 2 : 1$, $AE = 2$, $EA_1 = 1$.
2. Введём систему координат: $A(0; 0; 0)$;
 $B(1; 0; 0)$; $D(0; 1; 0)$; $A_1(0; 0; 3)$; $E(0; 0; 2)$;
 $D_1(0; 1; 3)$.
3. Составим уравнение плоскости BED_1 :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

$$\begin{cases} a + d = 0, \\ 2c + d = 0, \\ b + 3c + d = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} a = -d, \\ c = -\frac{d}{2}, \\ b = \frac{d}{2}. \end{cases}$$

Уравнение плоскости BED_1 : $2x - y + z - 2 = 0$.

Вектор нормали к плоскости BED_1 : $\vec{n}(2; -1; 1)$.



III. Угол между плоскостями. Задача № 2

(ЕГЭ-2012) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE = 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

$$A(0; 0; 0); B(1; 0; 0); D(0; 1; 0); A_1(0; 0; 3);$$
$$E(0; 0; 2); D_1(0; 1; 3).$$

4. Вектор нормали к плоскости ABC :

$$\vec{AA_1}(0; 0; 3).$$

$$\cos(\vec{AA_1}; \vec{n}) = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{6}}{6}$

