СТЕРЕОМЕТРИЯ. ВЕКТОРНО-КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учитель математики МБОУ СОШ №77

Комоликова Г.П.

Векторно-координатный метод

<u>Векторно-координатный метод</u> – это математический приём решения задач и доказательства теорем, при котором геометрические отношения формулируются в векторно-координатных терминах, и дальнейшие рассуждения проводятся с использованием векторно-координатных понятий и их свойств.

Для решения задач элементарной геометрии с помощью векторов необходимо, прежде всего, научиться «переводить» условие геометрической задачи на «векторный» язык. После такого перевода осуществляются алгебраические вычисления с векторами, а затем полученное снова «переводится» на «геометрический» язык. В этом и состоит сущность векторного метода решения геометрических задач.

Что требуется доказать (на геометрическом языке)	Что достаточно доказать (на векторном языке)
$a \parallel b$	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, где $[AB] \subset a, [CD] \subset b, k$ – число.
$A \in a,\ B \in a,\ C \in a$ (три точки принадлежат одной прямой)	Установить справедливость одного из следующих равенств: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$, или $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}$, или $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, где $k \neq 0$ или доказать равенство: $\overrightarrow{QC} = p\overrightarrow{QA} + q\overrightarrow{QB}$, где $p + q = 1$ и Q – произвольная точка, или доказать равенство $\alpha \cdot \overrightarrow{QA} + \beta \cdot \overrightarrow{QB} + \gamma \cdot \overrightarrow{QC} = \vec{0}$, где $\alpha + \beta + \gamma = 0$, Q – произвольная точка.
$C \in [AB]$, $\lvert AC \rvert : \lvert CB \rvert = m : n$ (деление отрезка в данном отношении)	$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$ или $\overrightarrow{QC} = \frac{n}{n+m}\overrightarrow{QA} + \frac{m}{n+m}\overrightarrow{QB}$ для некоторой точки Q.
$a \perp b$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, где $A,\ B \in a;\ C,\ D \in b$

Лучи AB и CD одинаково направлены	$\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CD}$, $\lambda > 0$, или $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{CD}\rvert$, или $\lvert\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\rvert = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert + \lvert\overrightarrow{CD}\rvert$
Четырёхугольник $ABCD$ параллелограмм	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ или $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
Вычислить длину отрезка	– выбрать два неколлинеарных базисных вектора (или три некомпланарных), у которых известны длины и величина угла между ними; – разложить по ним вектор, длина которого вычисляется; – найти скалярный квадрат этого вектора, используя формулу $\vec{a}^{\,2} = a^2$.
Вычислить величину угла	– выбрать два неколлинеарных базисных вектора, для которых известны отношение длин и углы между ними; – выбрать векторы, задающие искомый угол, и разложить их по базисным векторам; – вычислить $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$.

I. Угол между прямыми

1 способ.

– выбрать три некомпланарных базисных вектора, для которых известны отношение длин и углы между ними;

– выбрать векторы, задающие искомый угол, и разложить их по базисным векторам;

– вычислить $\cos\varphi = \left|\cos\angle\left(\vec{a};\ \vec{b}\right)\right| = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\right|$ (искомый угол должен быть острым).

2 способ.

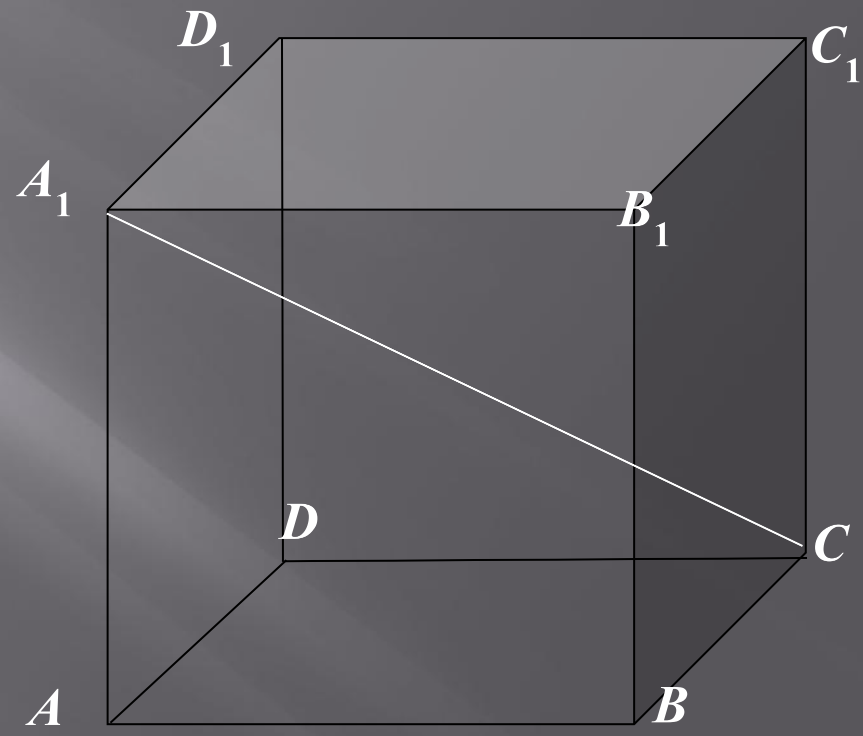
– определить координатные оси;

– найти координаты векторов, задающие искомый угол;

– вычислить $\cos\varphi = \left|\cos\angle\left(\vec{a};\ \vec{b}\right)\right| = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\right|$ (искомый угол должен быть острым).

I. Угол между прямыми. Задача № 1

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между прямыми AB и CA_1.



1. Определим систему координат и координаты точек A, B, C, A_1 в этой системе координат:

$A\ (0;\ 0;\ 0)$; $B\ (a;\ 0;\ 0)$; $C\ (a;\ a;\ 0)$; $A_1\ (0;\ 0;\ a)$.

2. Найдем координаты векторов

$$\overrightarrow{AB}(a;\ 0;\ 0)\quad \overrightarrow{CA_1}(-a;\ -a;\ a)$$

$$\cos(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CA_1})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA_1}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CA_1}|}=-\frac{a^2}{a\cdot\sqrt{3}\cdot a}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

II. Угол между прямой и плоскостью

1 способ.

– выбрать три некомпланарных базисных вектора, для которых известны отношение длин и углы между ними;

– выбрать вектор, параллельный данной прямой;

– разложить выбранный вектор и вектор нормали к данной плоскости по базисным векторам;

– вычислить $\cos\varphi = \left|\cos\angle\left(\vec{a};\ \vec{b}\right)\right| = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\right|;$

– искомый угол равен $90^0 - \varphi.$

2 способ.

– определить координатные оси;

– найти координаты вектора, параллельного данной прямой и вектора нормали к плоскости;

– вычислить $\cos\varphi = \left|\cos\angle\left(\vec{a};\ \vec{b}\right)\right| = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\right|;$

– искомый угол равен $90^0 - \varphi.$

II. Угол между прямой и плоскостью. Задача № 1

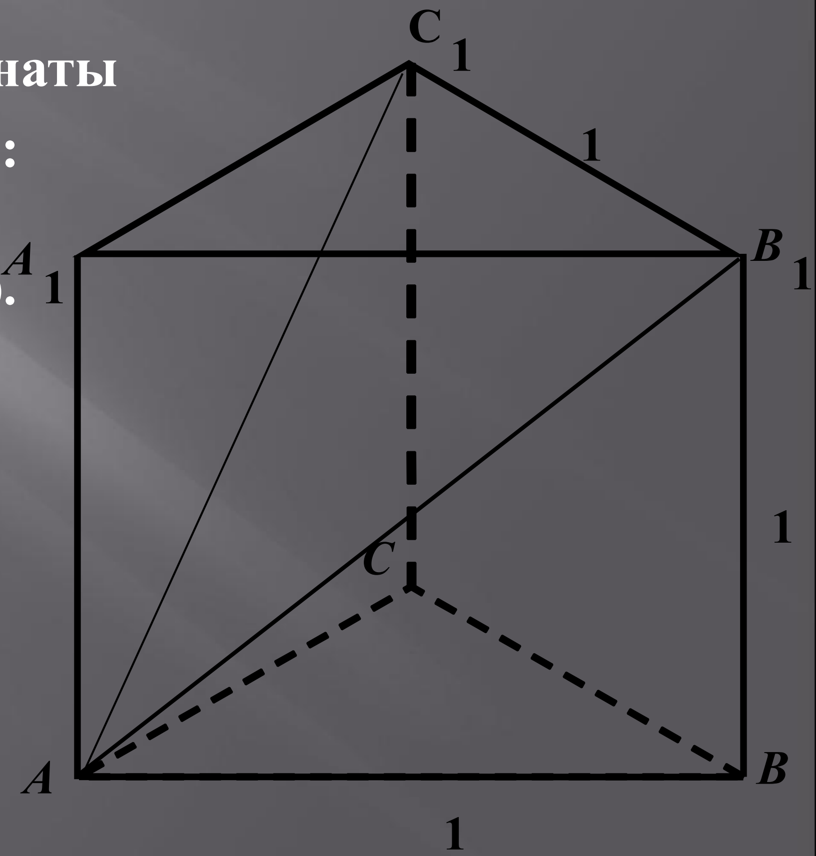
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1.

1. Определим систему координат и координаты точек A, B, B_1, C_1 в этой системе координат:

A(0; 0; 0); B(1; 0; 0); B_1(1; 0; 1); C_1(0,5; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 1).

2. Найдем координаты вектора

$$\overrightarrow{BB_1}(0;\ \ 0;\ \ 1).$$



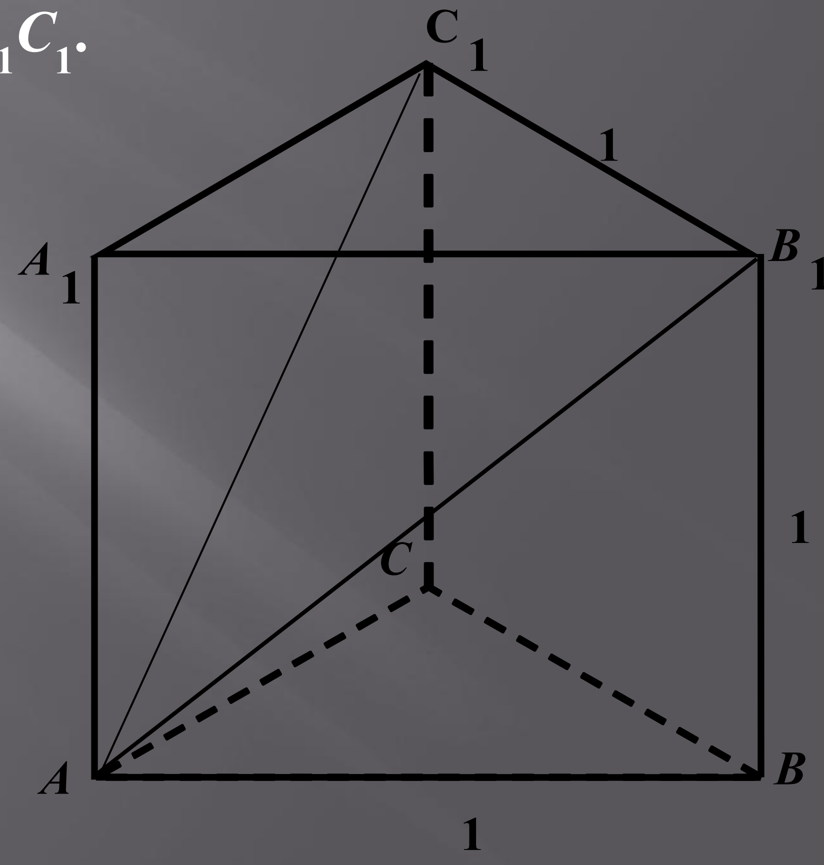
II. Угол между прямой и плоскостью. Задача № 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1.

3. Определим уравнение плоскости AB_1C_1.

$$ax + by + cz + d = 0.$$

$$\begin{cases} d = 0, \\ a + c + d = 0, \\ 0{,}5a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}b + c = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 0, \\ c = -\sqrt{3}b, \\ a = \sqrt{3}b. \end{cases}$$



Уравнение плоскости AB_1C_1:

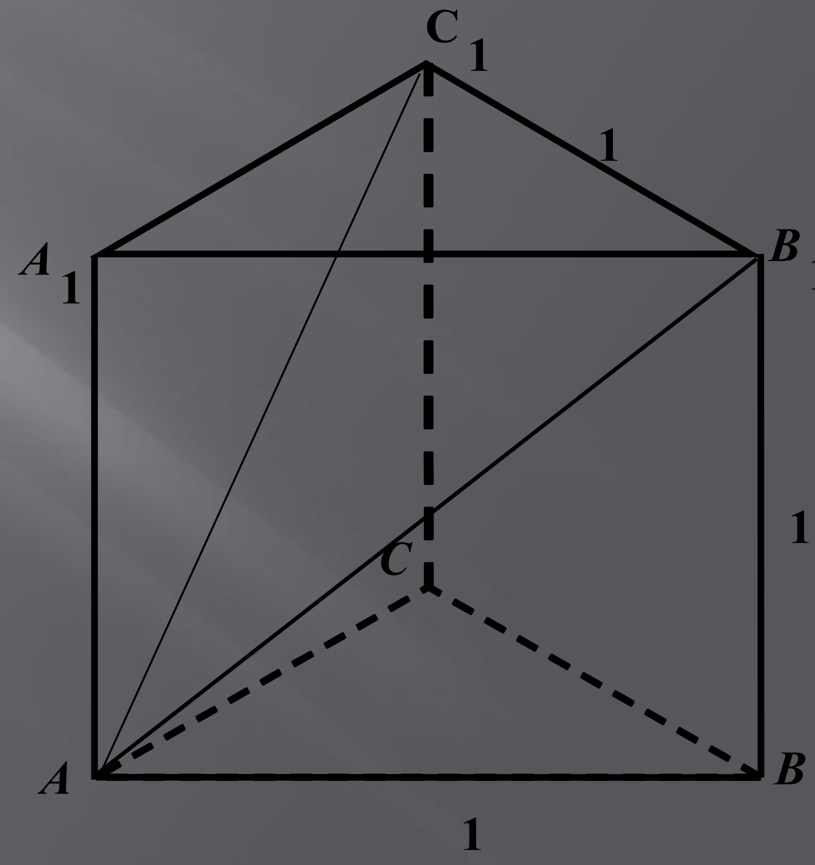
$$\sqrt{3}x + y - \sqrt{3}z = 0$$

Вектор нормали к плоскости

$$\vec{n}(\sqrt{3};\ \ 1;\ \ -\sqrt{3}).$$

II. Угол между прямой и плоскостью. Задача № 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1.



$$\cos\left(\overrightarrow{BB_1};\ \vec{n}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{1\cdot\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$tg\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

III. Угол между плоскостями

– выберите координатные оси;

– написать уравнения плоскостей, угол между которыми требуется определить;

– найти координаты векторов нормали к данным плоскостям;

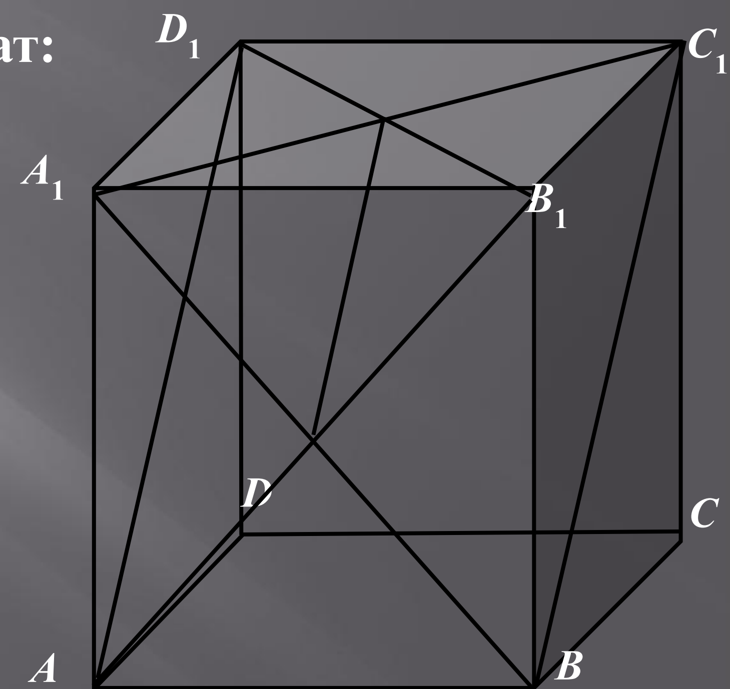
$$\cos\varphi = \left|\cos\angle\left(\vec{a};\ \vec{b}\right)\right| = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\right|$$

– вычислить угол между векторами нормали

III. Угол между плоскостями. Задача № 1

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и AB_1D_1.

1. Определим систему координат и координаты точек B, A_1, C_1, A, B_1, D_1 в этой системе координат:



A (0; 0; 0); B (a; 0; 0); A_1 (0; 0; a); C_1 (a; a; a);
B_1 (a; 0; a); D_1 (0; a; a).

2. Составим уравнения плоскостей

Плоскость BA_1C_1:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0.$$

$$\begin{cases} a_1a + d = 0, \\ c_1a + d = 0, \\ a_1a + b_1a + c_1a + d = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} d = -a_1a, \\ c_1 = -a_1, \\ b_1 = -a_1. \end{cases}$$

$$x - y - z - a = 0.$$

Вектор нормали $\vec{n}_1(1;\ -1;\ -1).$

III. Угол между плоскостями. Задача № 1

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и AB_1D_1.

$A\ (0;\ 0;\ 0);\ B\ (a;\ 0;\ 0);\ A_1\ (0;\ 0;\ a);\ C_1\ (a;\ a;\ a);$

$B_1\ (a;\ 0;\ a);\ D_1\ (0;\ a;\ a).$

Плоскость AB_1D_1: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$

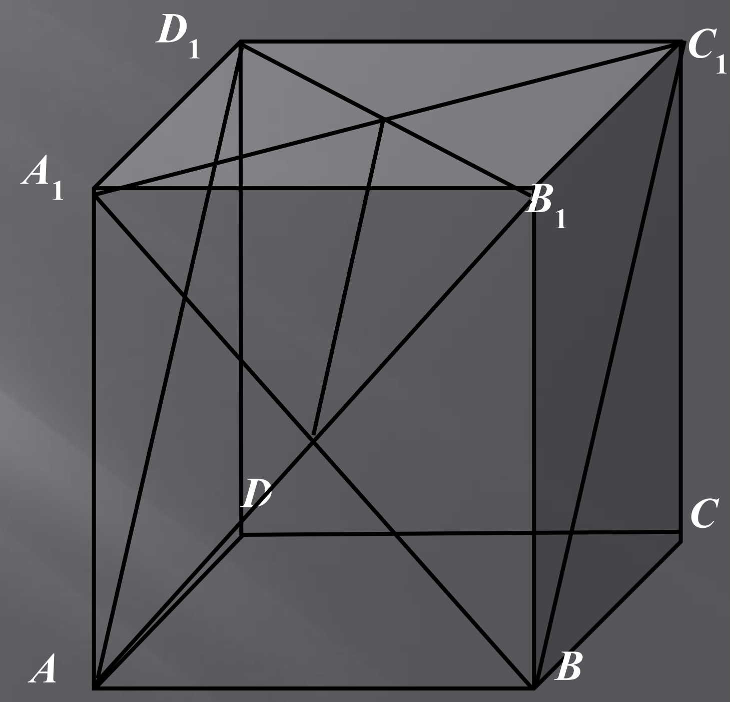
$$\begin{cases} d = 0, \\ a_2a + c_2a = 0, \\ b_2a + c_2a = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 0, \\ a_2 = -c_2, \\ b_2 = -c_2. \end{cases}$$

$x + y - z = 0.$ **Вектор нормали** $\vec{n}_2(1;\ \ 1;\ \ -1).$

Вектор нормали $\vec{n}_1(1;\ \ -1;\ \ -1).$

$$\cos\left(\vec{n}_1;\ \ \vec{n}_2\right) = \frac{1-1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

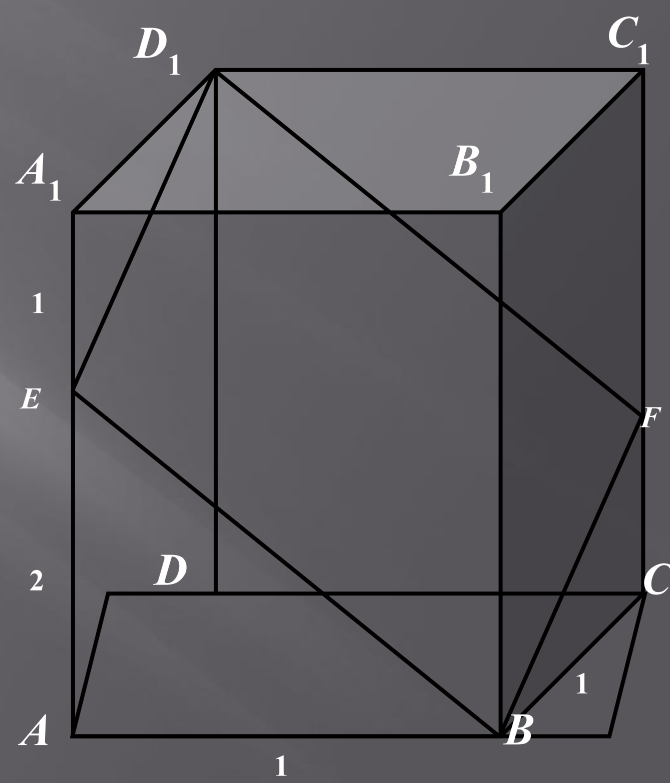
Ответ: $\dfrac{1}{3}.$



III. Угол между плоскостями. Задача № 2

(ЕГЭ-2012) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что . Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

1. $AE : EA_1 = 2:1,$ $AE = 2$, $EA_1 = 1$.



2. Введем систему координат: A (0; 0; 0); B (1; 0; 0); D (0; 1; 0); A_1 (0; 0; 3); E (0; 0; 2); D_1 (0; 1; 3).

3. Составим уравнение плоскости BED_1:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

$$\begin{cases} a + d = 0, \\ 2c + d = 0, \\ b + 3c + d = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -d, \\ c = -\dfrac{d}{2}, \\ b = \dfrac{d}{2}. \end{cases}$$

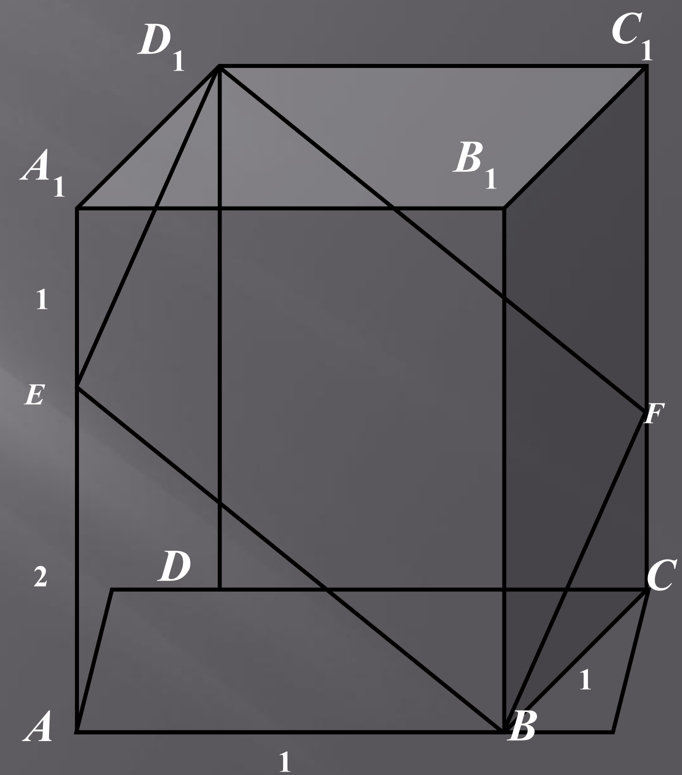
Уравнение плоскости BED_1: $2x - y + z - 2 = 0.$

Вектор нормали к плоскости BED_1: $\vec{n}(2;\ -1;\ 1).$

III. Угол между плоскостями. Задача № 2

(ЕГЭ-2012) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что . Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

A (0; 0; 0); B (1; 0; 0); D (0; 1; 0); A_1 (0; 0; 3);
E (0; 0; 2); D_1 (0; 1; 3).



4. Вектор нормали к плоскости ABC:

$$\overrightarrow{AA_1}(0;\ \ 0;\ \ 3).$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AA_1};\ \ \vec{n}\right) = \frac{3}{3\cdot\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{6}$