

Муниципальное бюджетное нетиповое общеобразовательное
учреждение

«Городской классический лицей»

Учебный проект

«Тысяча граней
геометрической красоты»
(часть 2)

Авторы проекта:
Ананева Мария;
Курилович Полина;
Орлова Валерия;
Устинова Полина;
Суханова Арина;
Филонова Ксения

Руководитель:
Иноземцева
Елена Ивановна

г. Кемерово, 2016

Звездчатые многогранники

Многогранник – это тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников

Звёздчатый многогранник — это невыпуклый многогранник, грани которого пересекаются между собой. Как и у незвёздчатых многогранников грани попарно соединяются в рёбрах

Звёздчатые многогранники

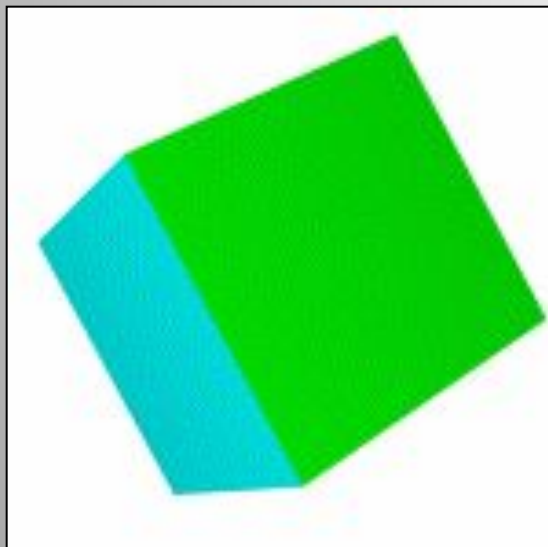


Правильные — это звёздчатые многогранники, гранями которых являются одинаковые правильные или звёздчатые многоугольники

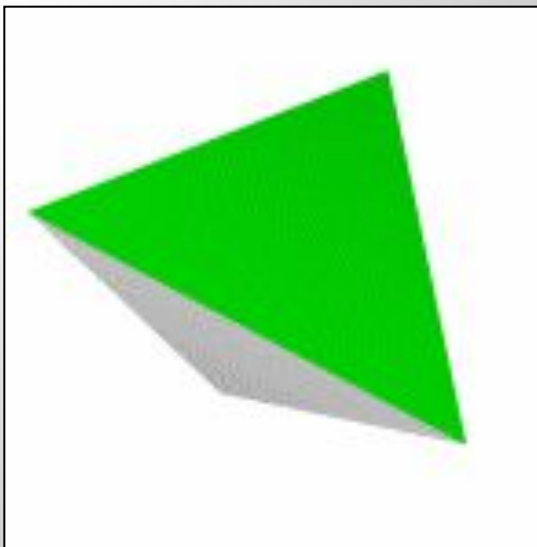
Звёздчатые многогранники



Правильные



Куб



Тетраэдр

Звёздчатые многогранники

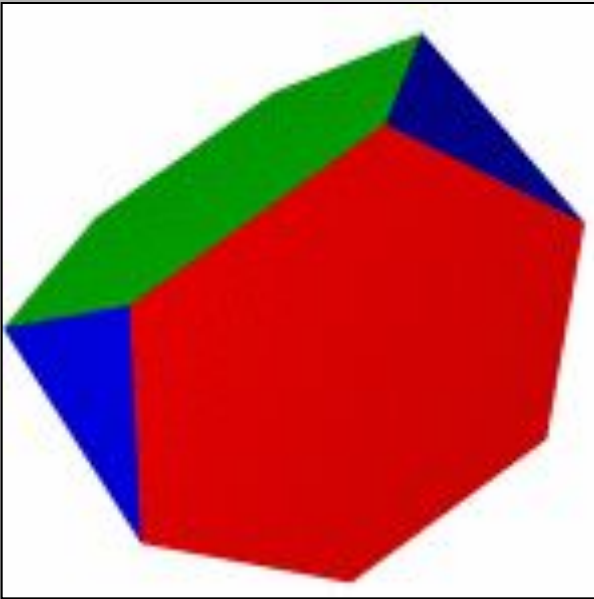


Полуправильные — многогранники, гранями которых являются правильные или звёздчатые многоугольники, но не обязательно одинаковые

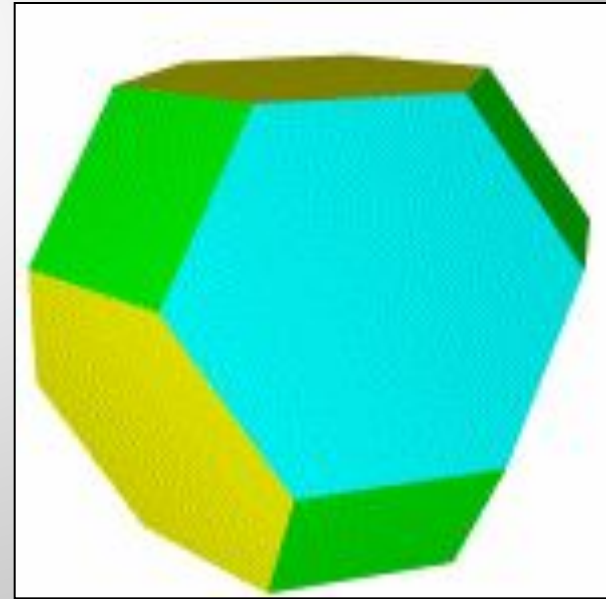
Звёздчатые многогранники



Полуправильные



Усеченный тетраэдр



Усеченный октаэдр

Звёздчатые многогранники



Однородные — правильные и полуправильные выпуклые многогранники. У этих тел все грани являются правильными многоугольниками, а все вершины одинаковы

Однородные многогранники



Платоновы тела



Пять уникальных форм.
Грани Платоновых тел -
правильные
многоугольники одного
типа



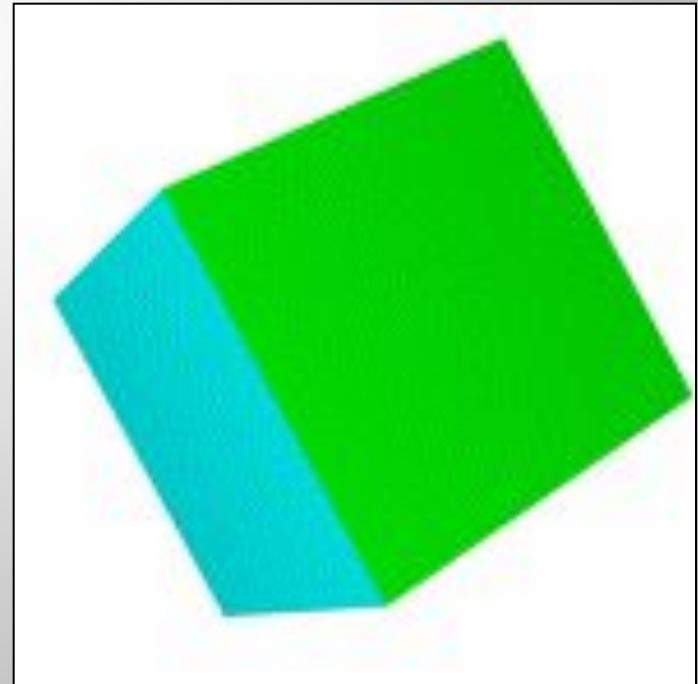
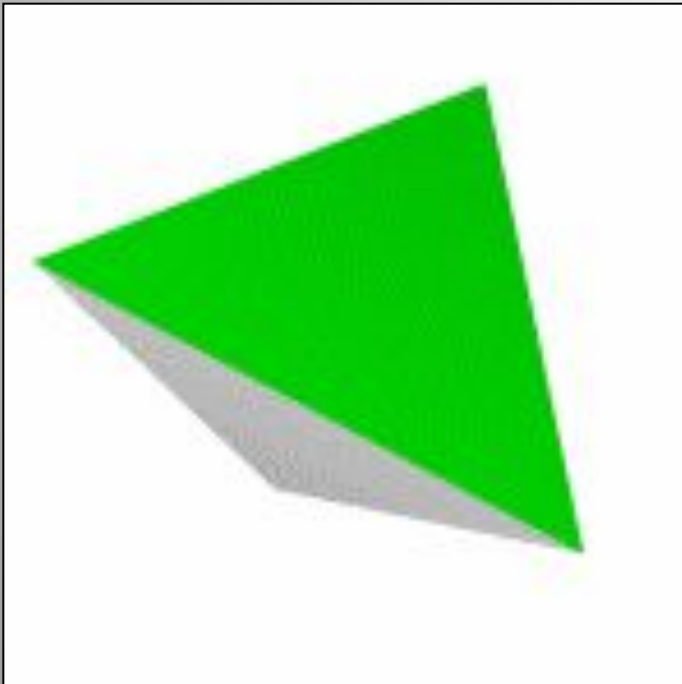
Архимедовы тела



Полуправильные
однородные выпуклые
многогранники

Тетраэдр и куб

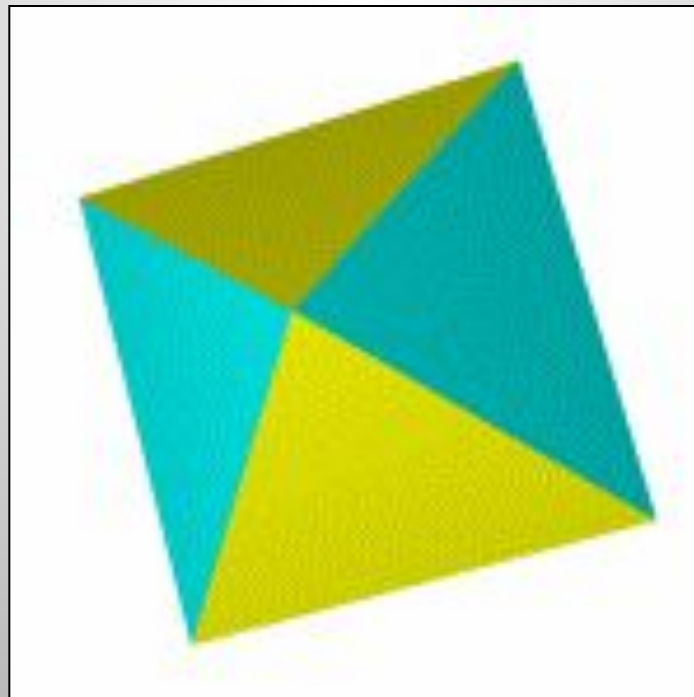
Не имеют звёздчатых форм, так как их грани при продлении через рёбра не пересекаются



Октаэдр

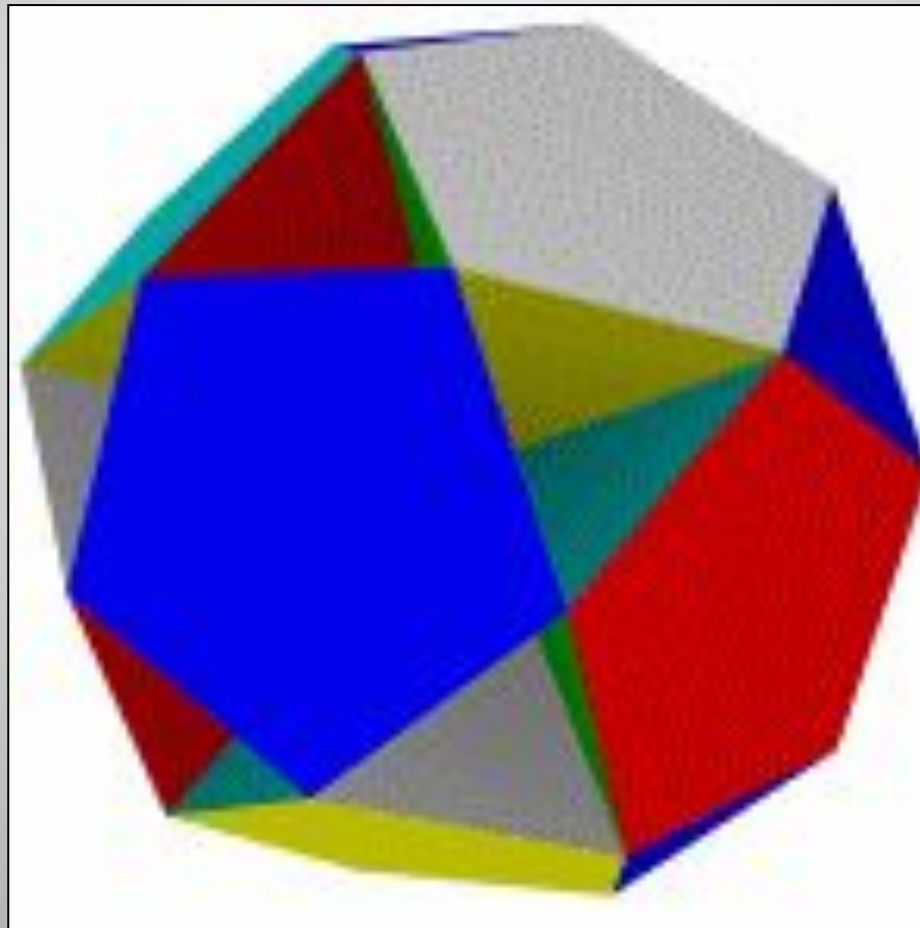
Существует только одна звёздчатая форма.

Stella octangula — звезда восьмиугольная



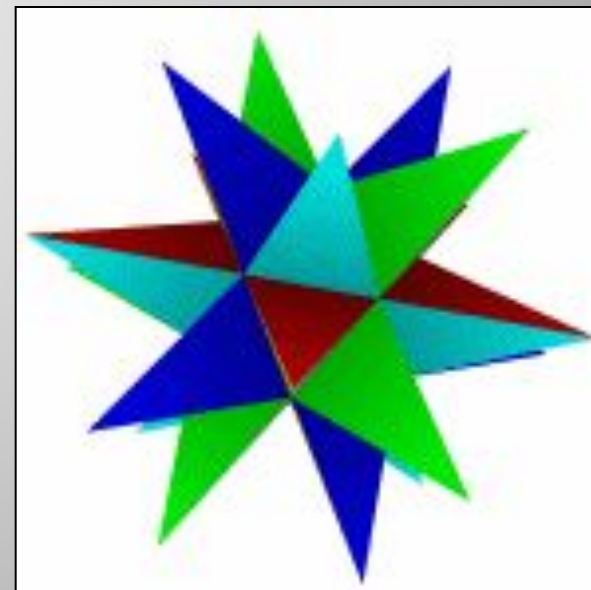
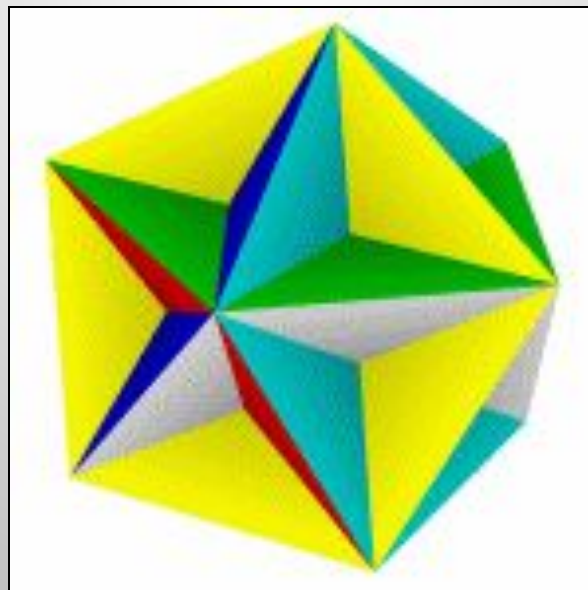
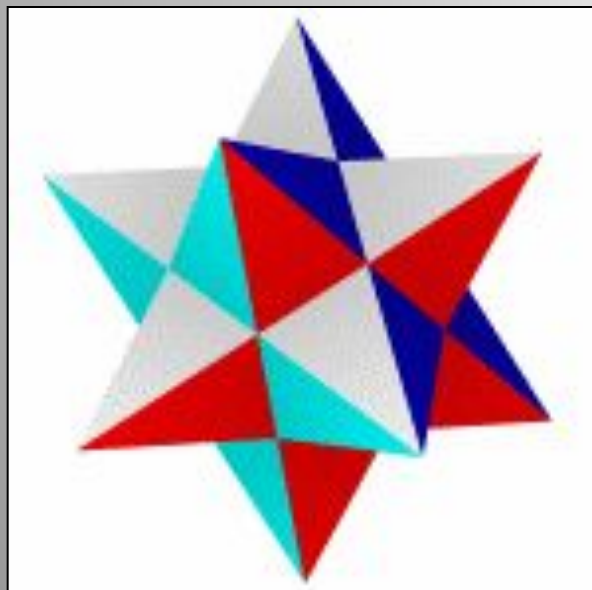
Додекаэдр

У большого додекаэдра гранями являются
ПЯТИУГОЛЬНИКИ



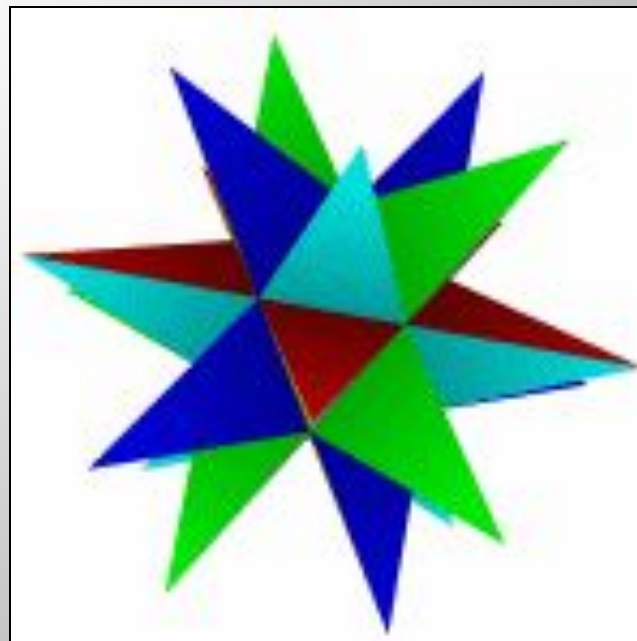
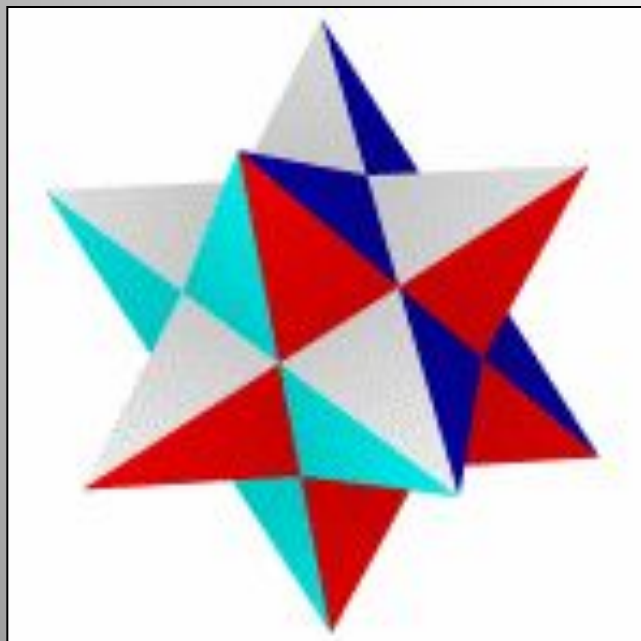
Имеет три звёздчатые формы

- малый звёздчатый додекаэдр;
- большой додекаэдр;
- большой звёздчатый додекаэдр.



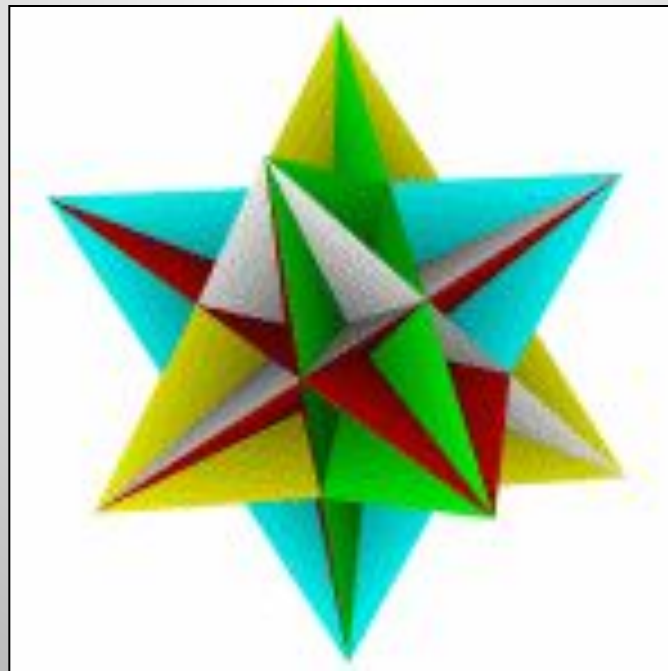
Любая из звёздчатых форм додекаэдра не является соединением платоновых тел, а образует новый многогранник.

У малого звёздчатого и большого звёздчатого додекаэдров гранями являются пятиконечные звёзды (пентаграммы)



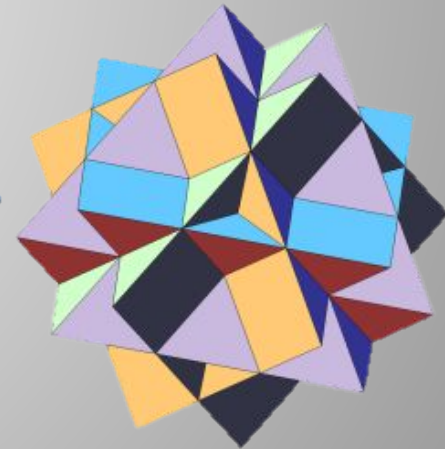
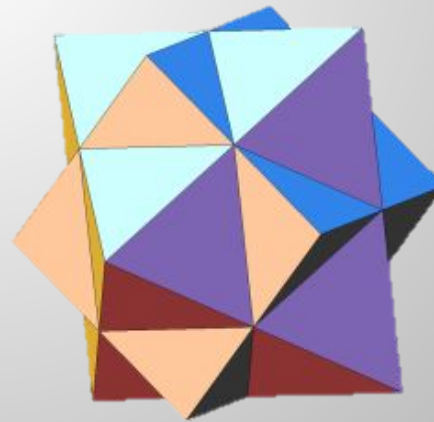
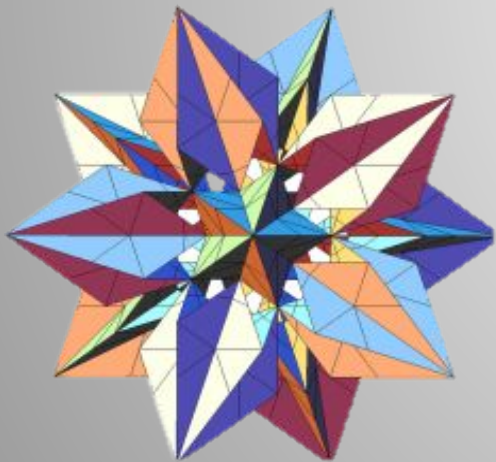
Икосаэдр

- соединение пяти октаэдров;
- соединение пяти тетраэдров;
- соединение десяти тетраэдров.



Кубооктаэдр

Имеет 4 звёздчатые формы

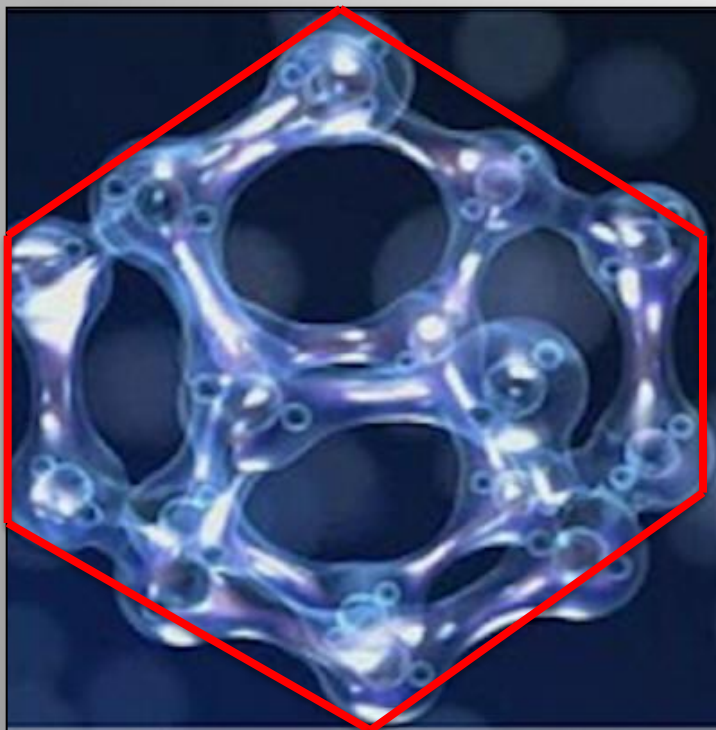


Многогранники в снежинках

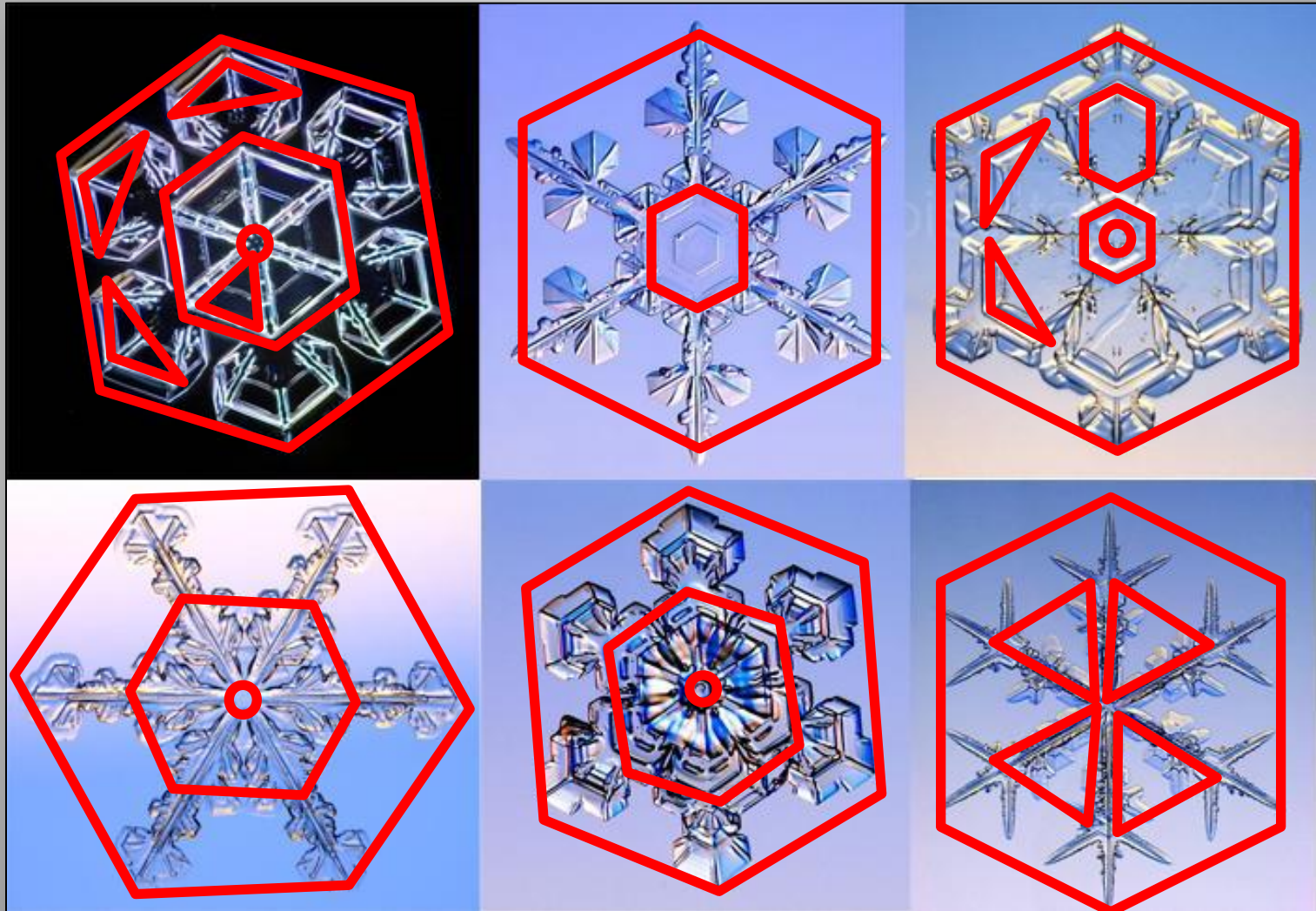
Снег возникает, когда микроскопические капли воды в облаках притягиваются к пылевым частицам и замерзают.

Появляющиеся при этом кристаллы льда падают вниз и растут в результате конденсации на них влаги из воздуха

Из-за особой структуры молекул воды
ВОЗМОЖНЫ УГЛЫ ЛИШЬ В 60° и 120°



Множество многогранников и Платоновых тел



Евграф Федоров



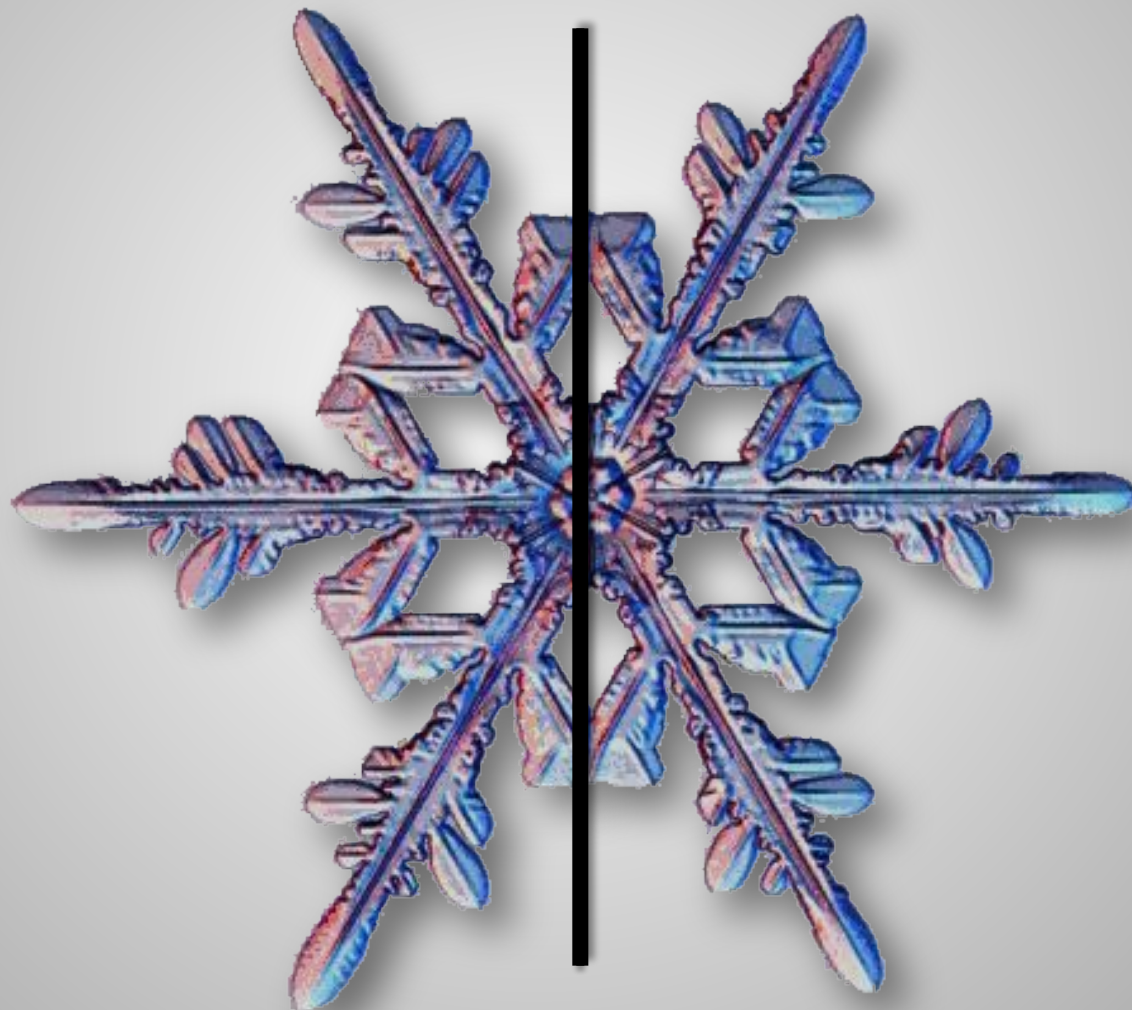
— русский академик
РАН, кристаллограф,
минералог и математик.
Народоволец.
Директор петербургского
Горного института

10.12.1853 – 21.05.1919 гг.

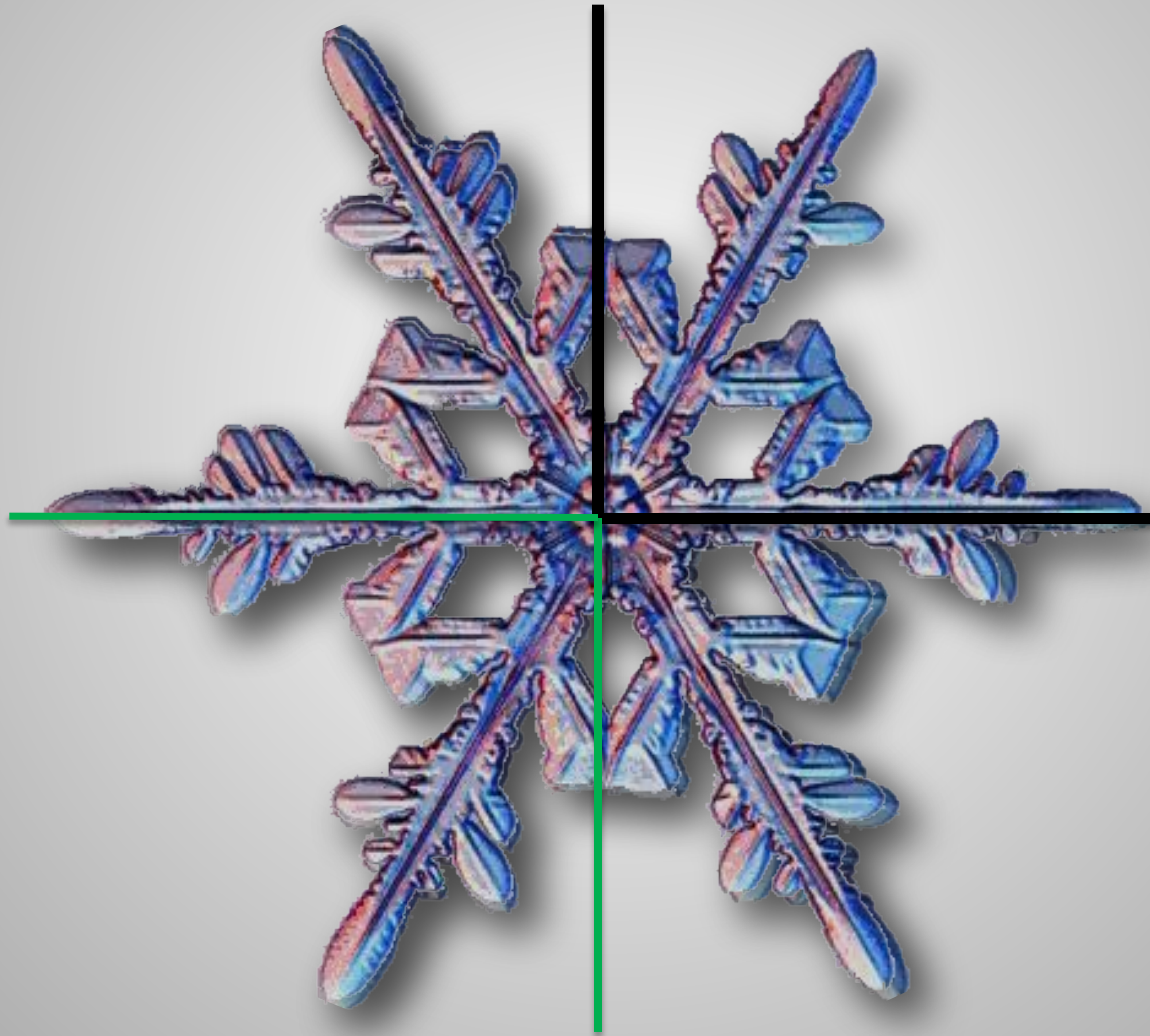
В 1890 году вывел все геометрические законы сочетания элементов симметрии в кристаллических структурах

Показал, что имеется 230 пространственных групп симметрии

Зеркальная симметрия



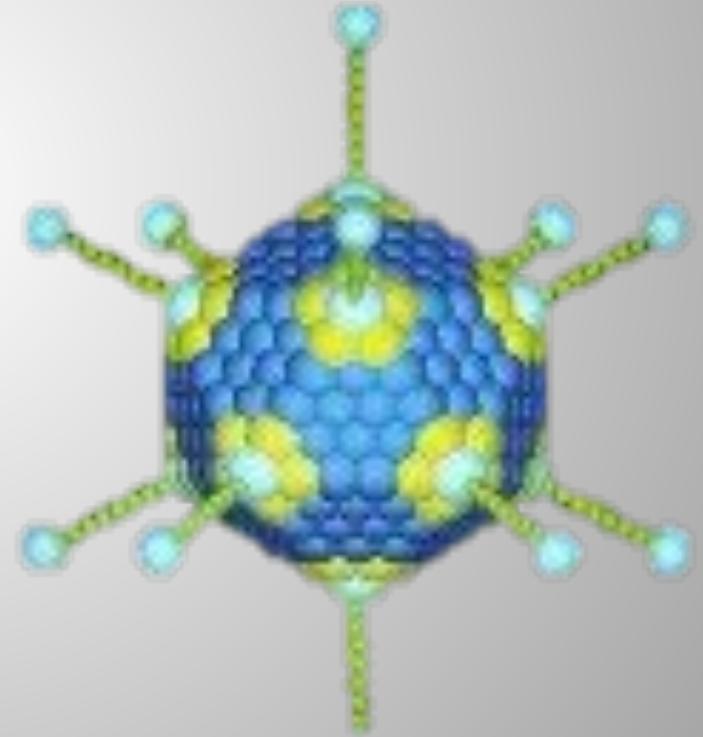
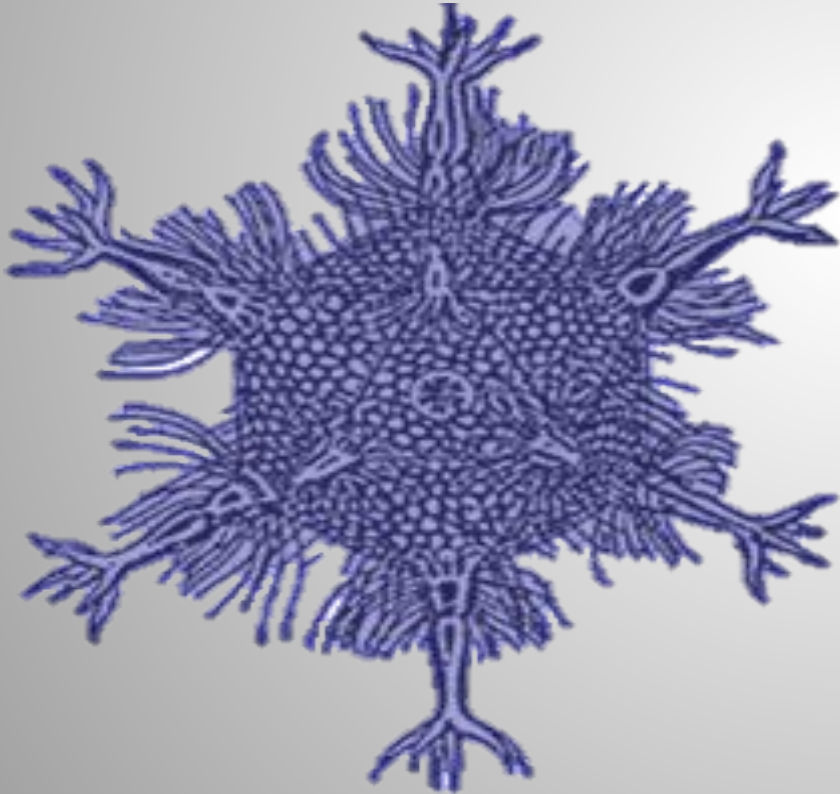
Поворотная симметрия



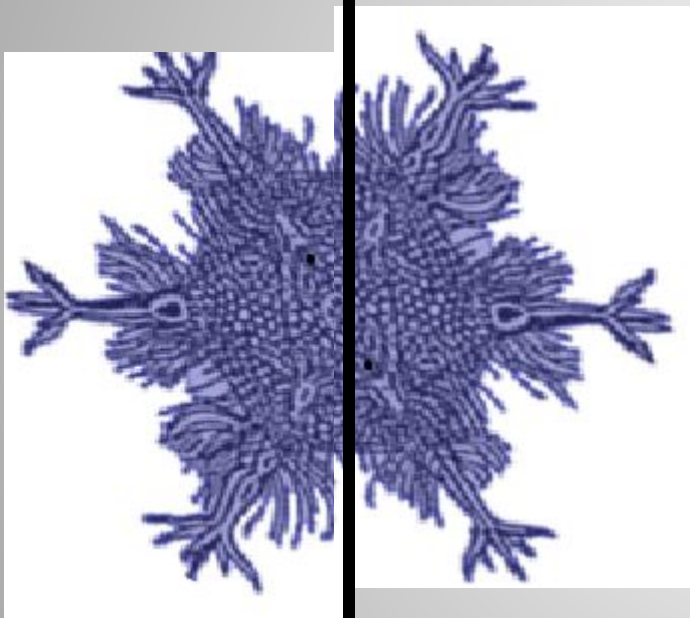
Многогранники в биологии

Феодария – одноклеточный организм, обитающий на морских глубинах, служит добычей коралловых рыб

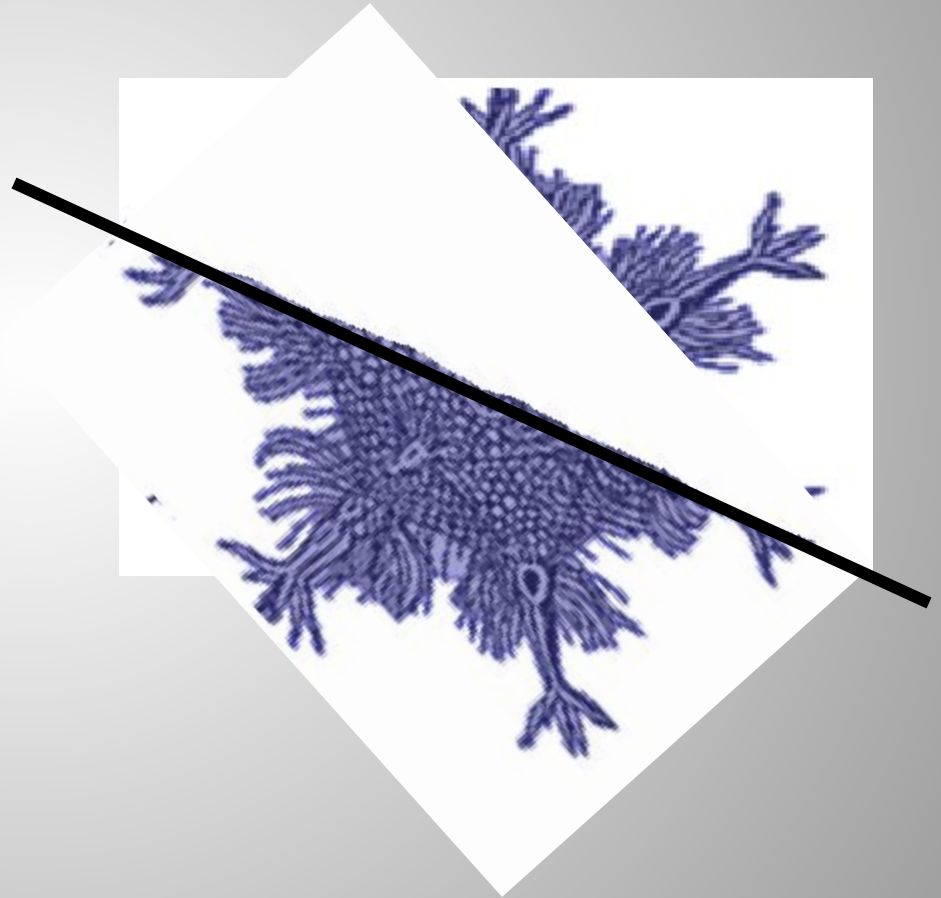
Из 12 вершин скелета выходят 12 полых игл. На концах игл находятся зубцы, делающие иглу еще более эффективной при защите



Осевая симметрия феодарии



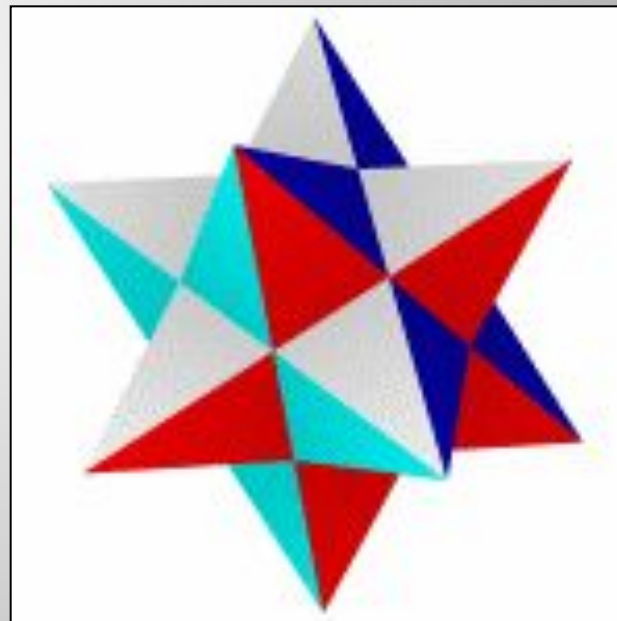
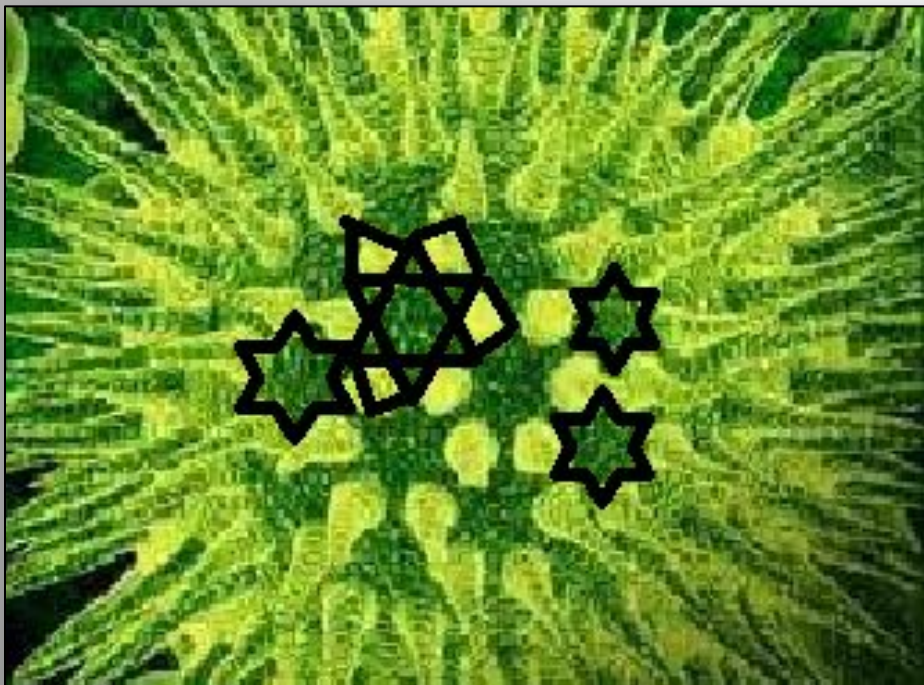
Зеркальная симметрия



Из всех многогранников с тем же числом граней именно икосаэдр имеет наименьший объем при наибольшей площади поверхности.

Это свойство помогает морскому организму преодолевать давление водной толщи

Бактерии можно представить в виде звездчатых многогранников. Такое строение говорит о плотном расположении тканей бактерии, что позволяет ей перемещаться внутри организмов

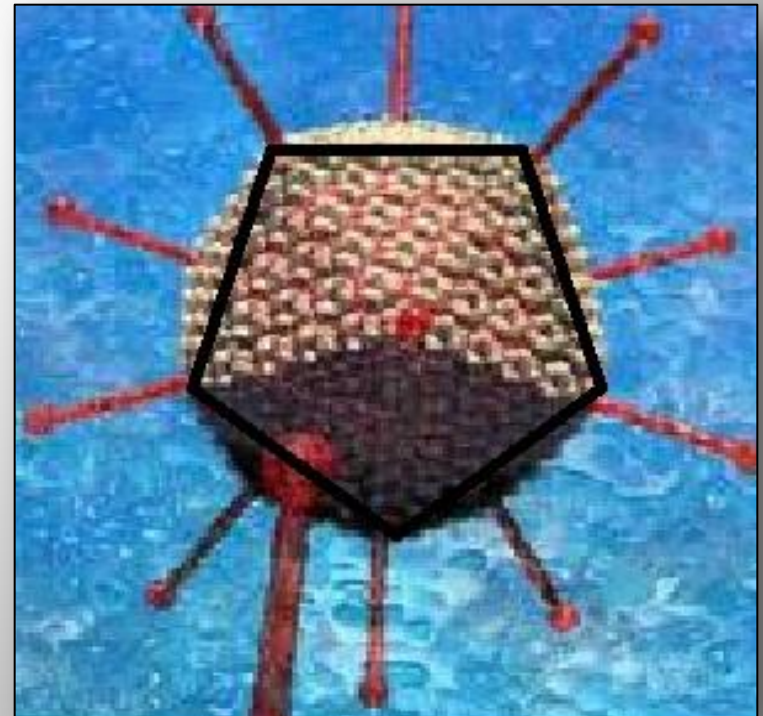


Звездчатая форма
додекаэдра

Аденовирусы – большая группа ДНК-содержащих вирусов, вызывающие простудные заболевания, являются перспективными объектами для разработки медицинских технологий и средств генной терапии

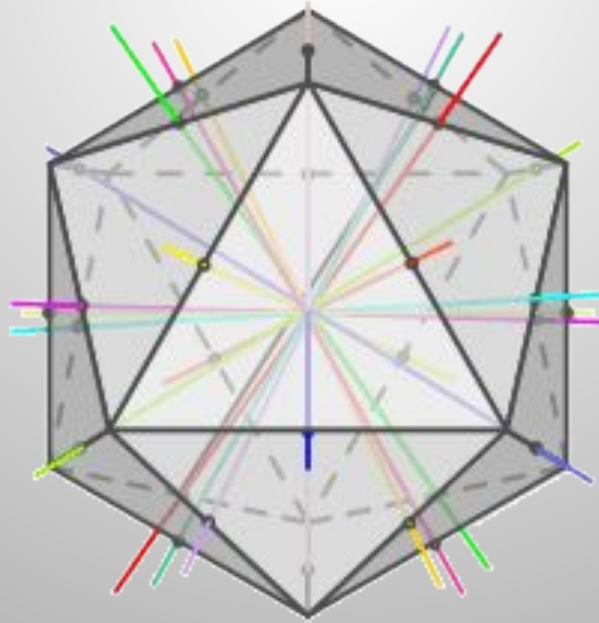
Внешняя оболочка аденовируса имеет форму икосаэдра со скругленными рёбрами.

В каждой вершине имеется выступающая белковая структура, необходимая для связывания с клеточными рецепторами

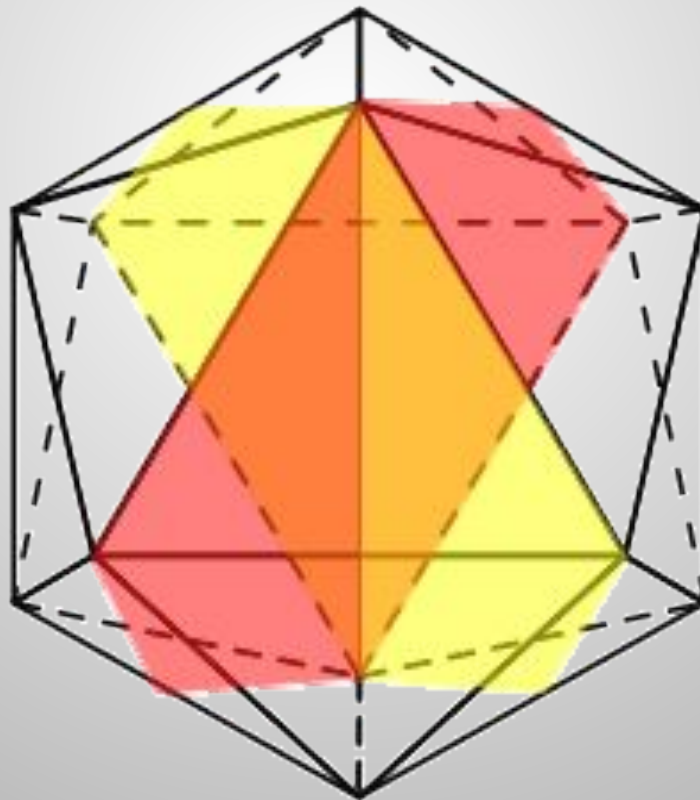


Аденовирус симметричен

Ось симметрии икосаэдра проходит через середины противоположащих параллельных ребер. Точка пересечения осей икосаэдра – это и есть его центр симметрии. У икосаэдра 15 осей симметрии

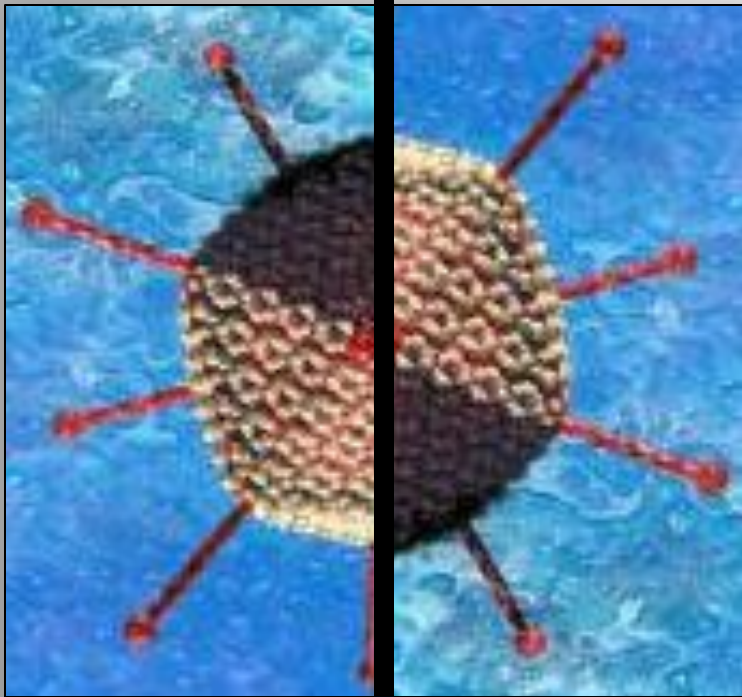


Плоскости симметрии проходят через четыре вершины, которые лежат в одной плоскости, и середины противоположных параллельных ребер. У икосаэдра 15 плоскостей симметрии

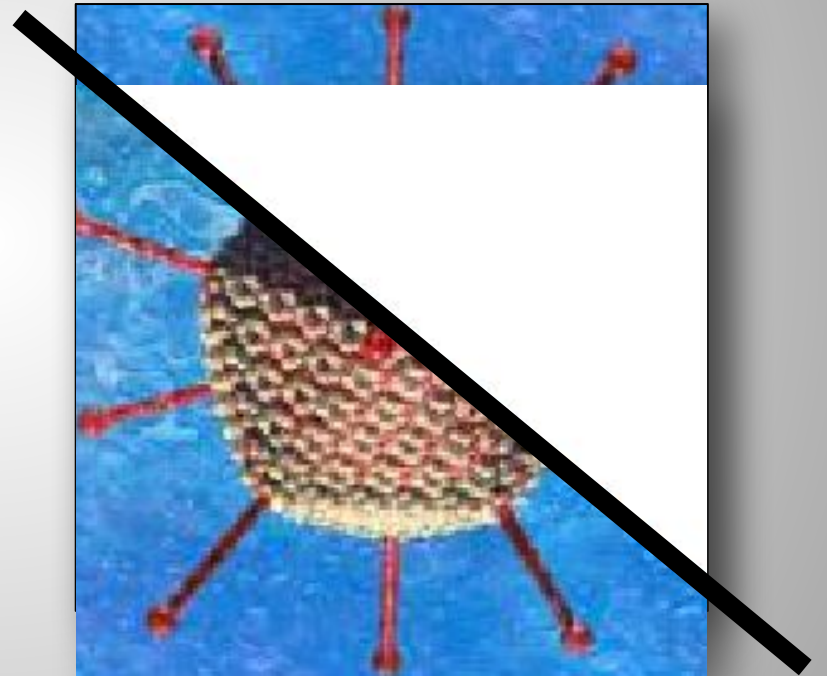


Аденовирус симметричен

Зеркальная
симметрия



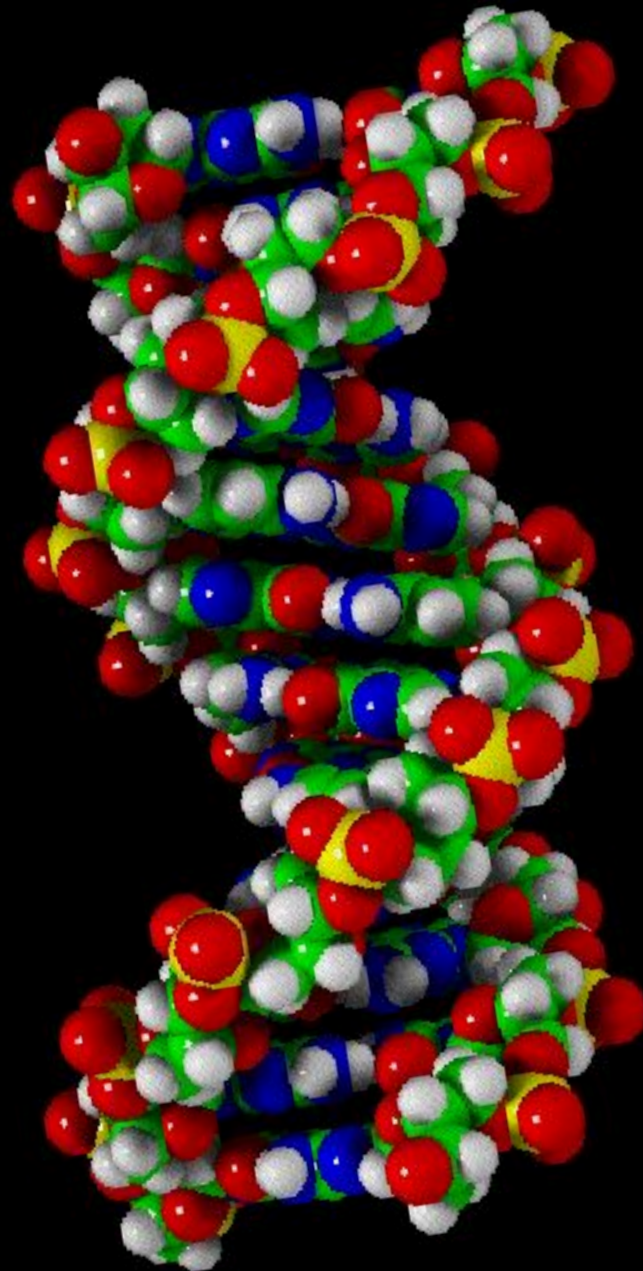
Осевая симметрия



Молекула ДНК представляет собой вращающийся куб. При повороте куба последовательно на 72° по определённой модели, получается икосаэдр.

Двойная нить спирали ДНК построена по принципу двухстороннего соответствия: за икосаэдром следует додекаэдр, затем опять икосаэдр. Это вращение через куб создаёт молекулу ДНК

Модель молекулы полигогранников



декаэдр

Вывод

В ходе нашего исследования мы выяснили, что с помощью многогранников можно научиться строить биологические модели, а также выяснили, что многогранники встречаются в окружающем нас мире чаще, чем мы думаем

Симметрия кристаллов

Симметрия кристаллов – свойство кристаллов совмещаться с собой при поворотах, отражениях, параллельных переносах, либо при части или комбинации этих операций. Симметрия внешней формы кристалла определяется симметрией его атомного строения, которая обуславливает также и симметрию физических свойств кристалла

Точечные группы симметрии кристаллов

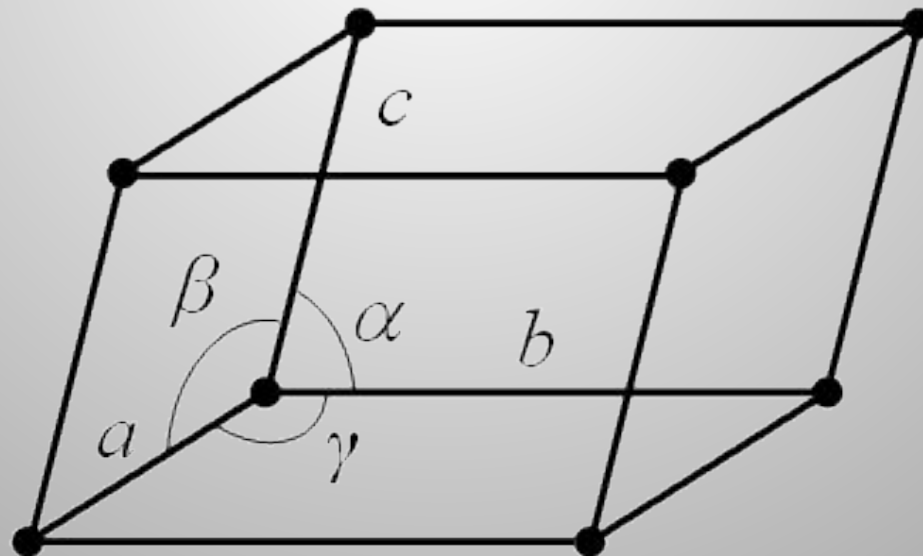
Точечные группы симметрии - группы симметрии, операции которых оставляют хотя бы одну точку пространства на месте

- группа линейных преобразований;
- группа вращений;
- зеркальная симметрия

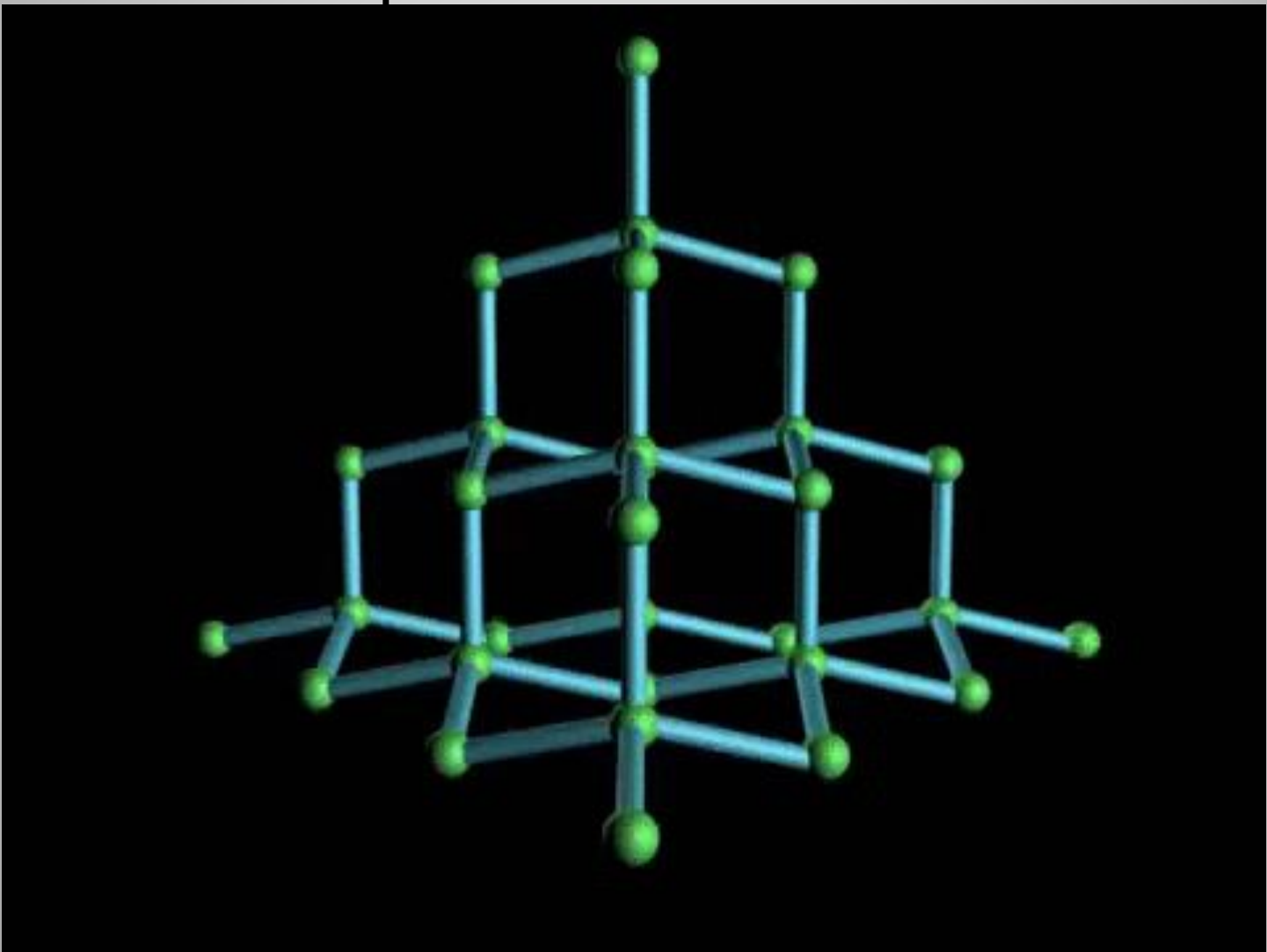
В элементарной ячейке может содержаться один атом (примитивная ячейка), или больше одного (сложная ячейка).

В общем случае элементарная ячейка имеет форму параллелепипеда и характеризуется параметрами:

- длина ребер **a**, **b**, **c**;
- углы между ребрами **α** , **β** , **γ**



При описании симметрии любого кристалла используется фундаментальное понятие его кристаллической решетки



Преобразования симметрии объекта —
пространственные перемещения, совмещающие
его самим собой.

Для кристаллических структур имеются 32
точечные группы и 230 пространственных групп

Идеальный кристалл

Идеальный кристалл — это математический объект, имеющий полную, свойственную ему симметрию, идеализированно ровные гладкие грани.

Идеальный кристалл можно построить путем бесконечного повторения в пространстве его структурной единицы (элементарной ячейки)

Исследование

Мы решили воссоздать идеальный кристалл на примере природного при помощи моделирования и проверить его свойства симметрии с использованием его объемной модели

Выращивание кристалла

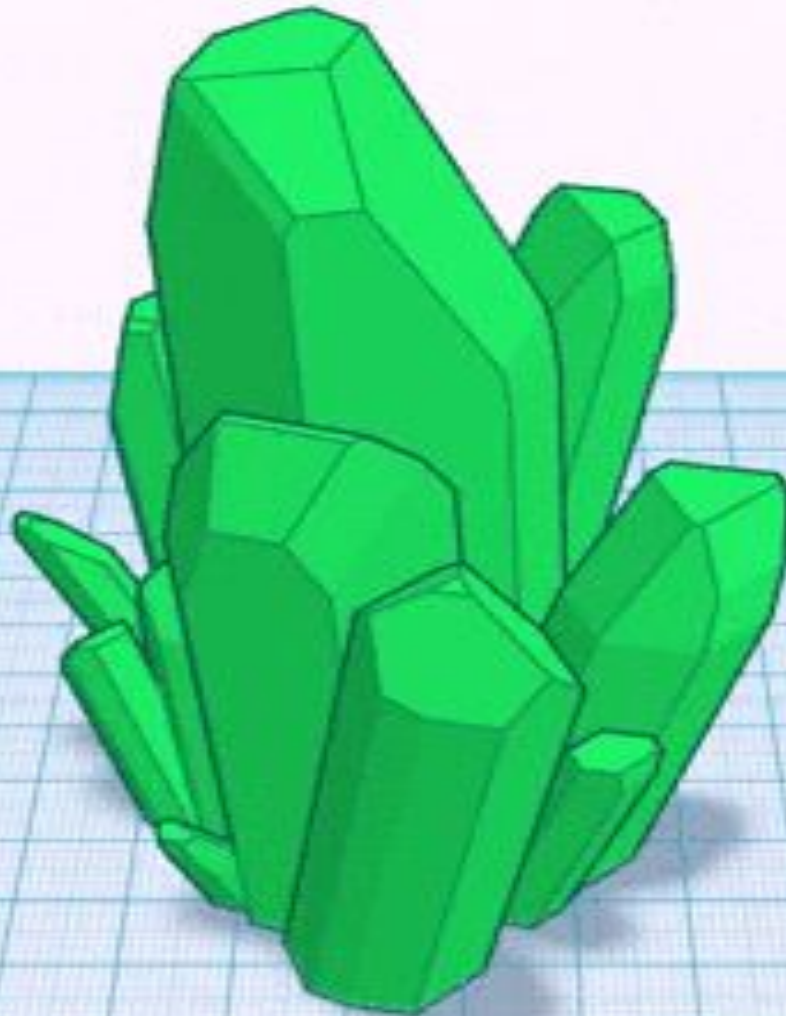


Моделирование кристалла

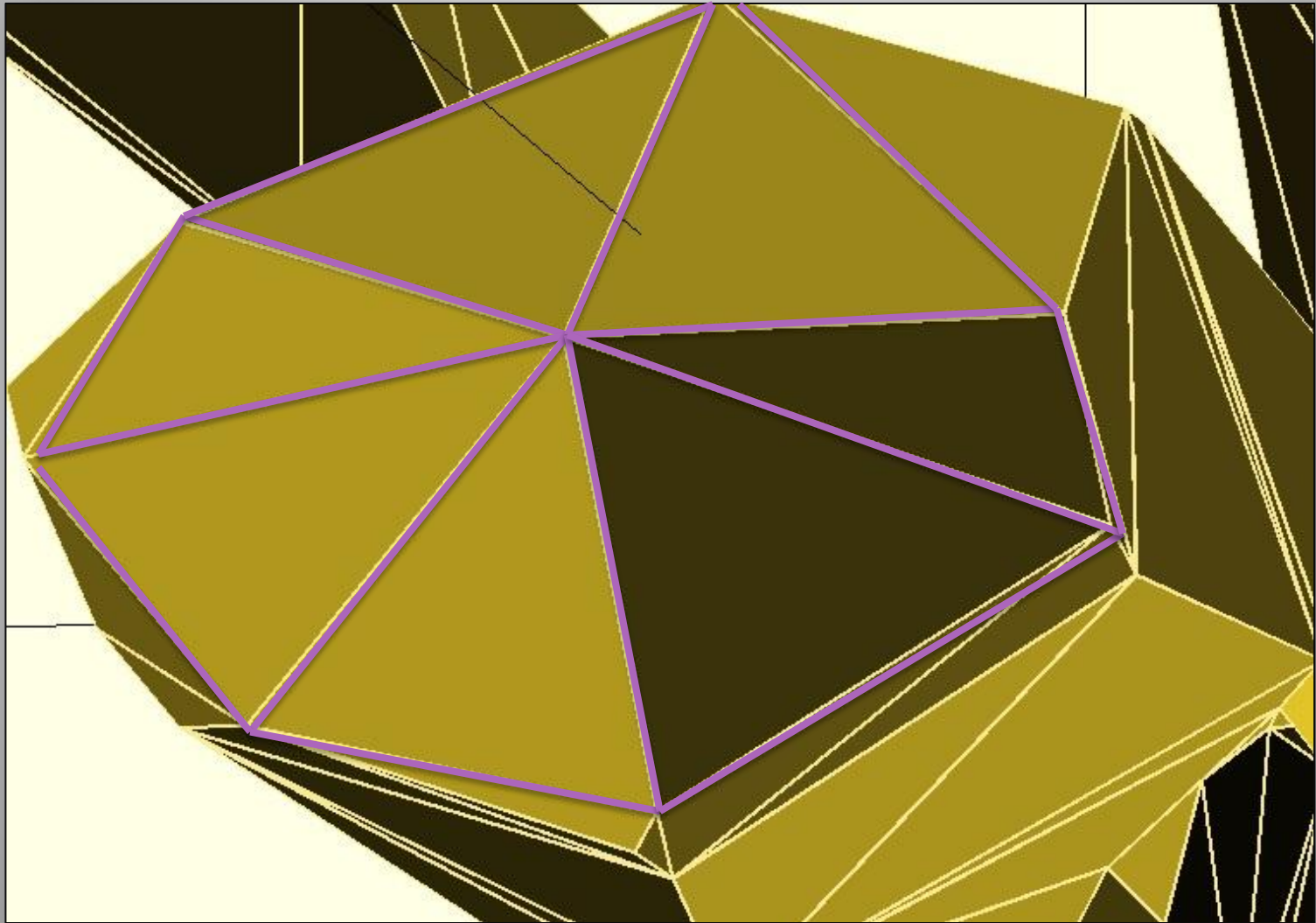
В процессе моделирования мы использовали:

- программу «3D Crafter»;
- теоретические основы кристаллографии;
- природный кристалл

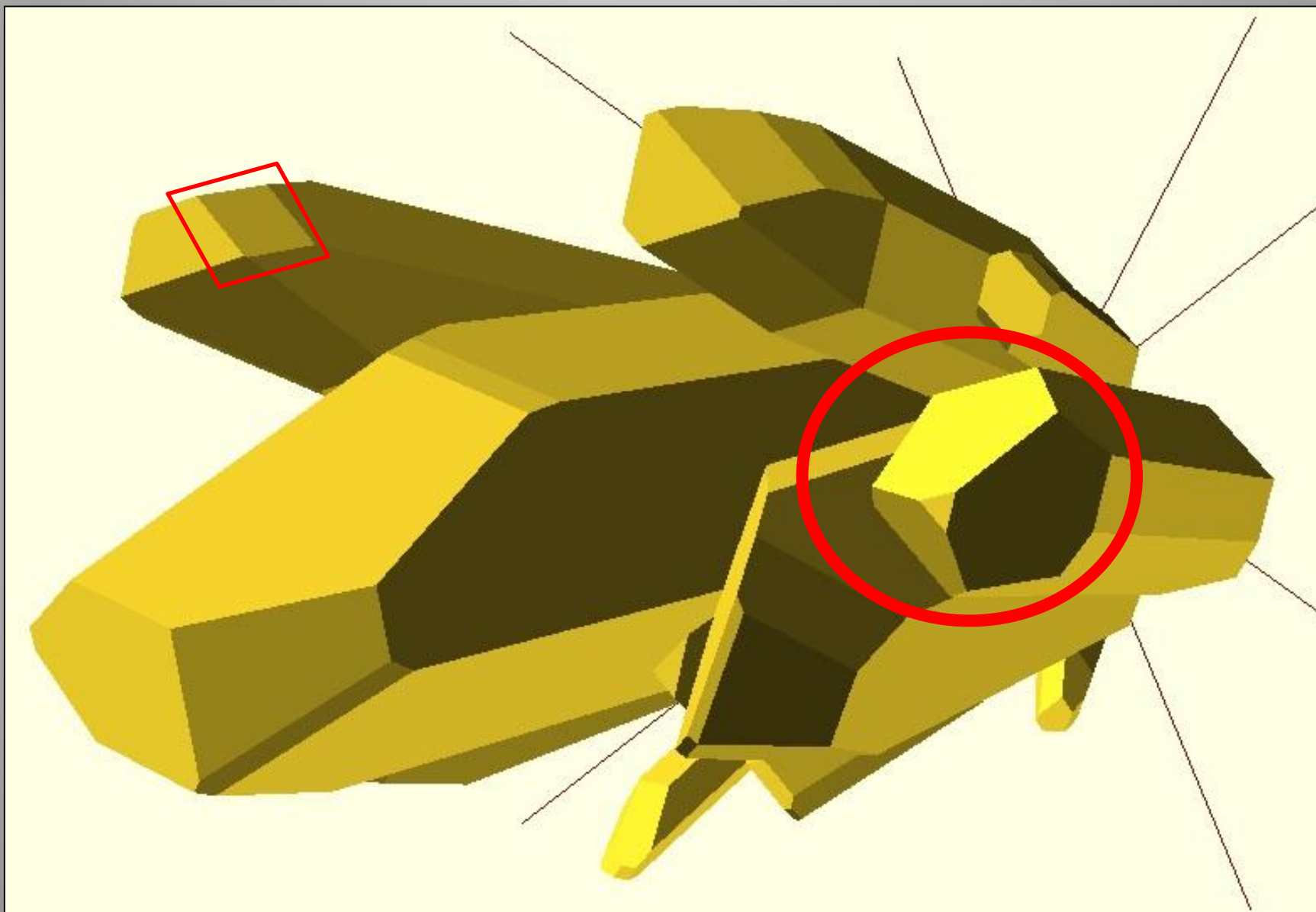
3D модель кристалла



Многогранники в кристалле

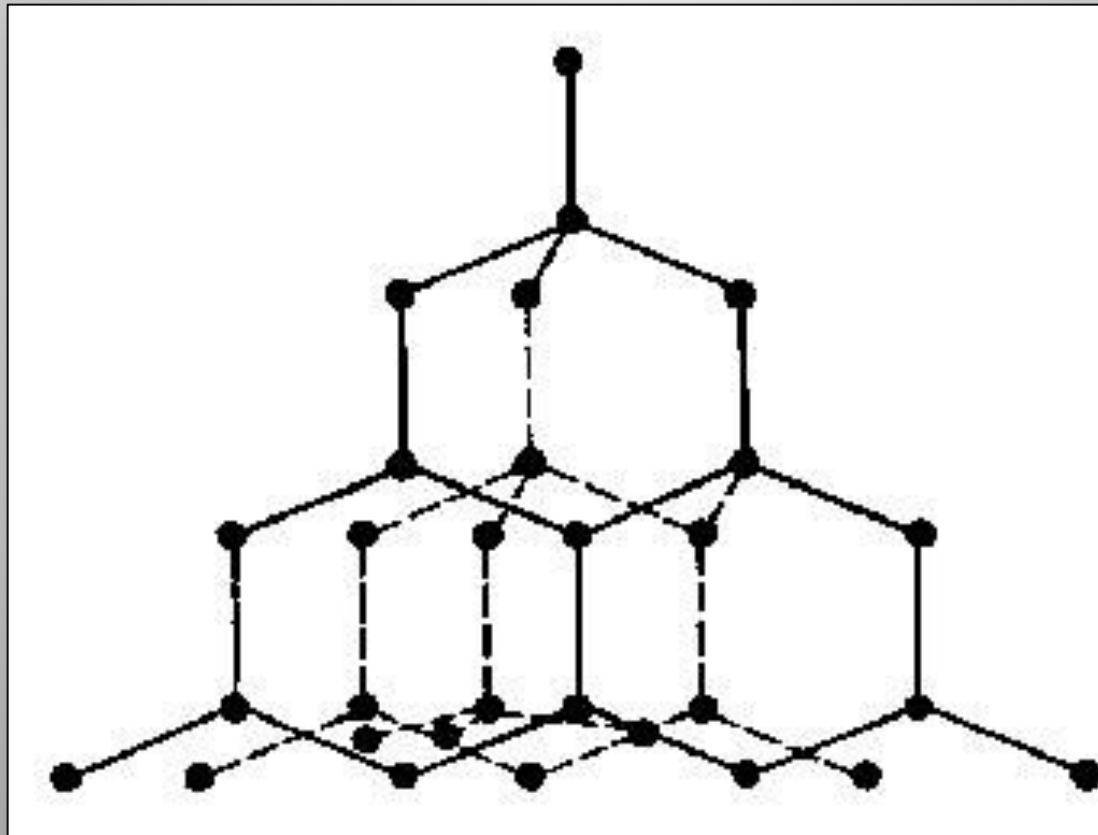


Многогранники в кристалле



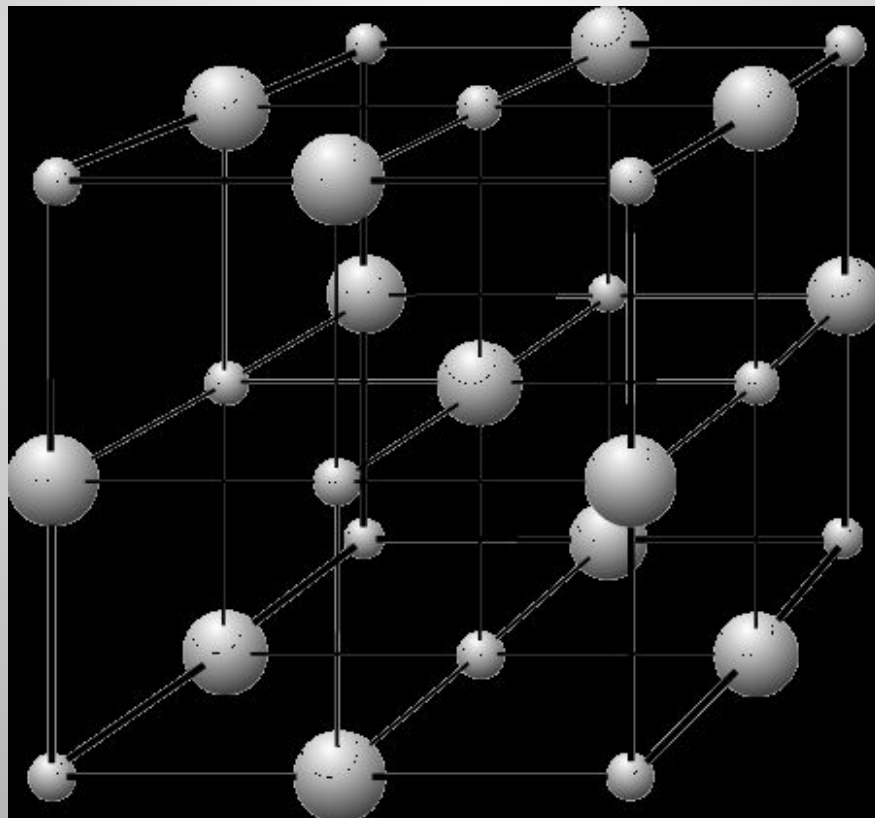
Многогранники в кристаллах

Элементарная ячейка кристалла алмаза представляет собой тетраэдр, в центре и четырех вершинах которого расположены атомы углерода



Многогранники в кристаллах

Кристаллическая решетка поваренной соли имеет форму куба (гексаэдра). Маленькие шарики – ионы натрия, большие – ионы хлора



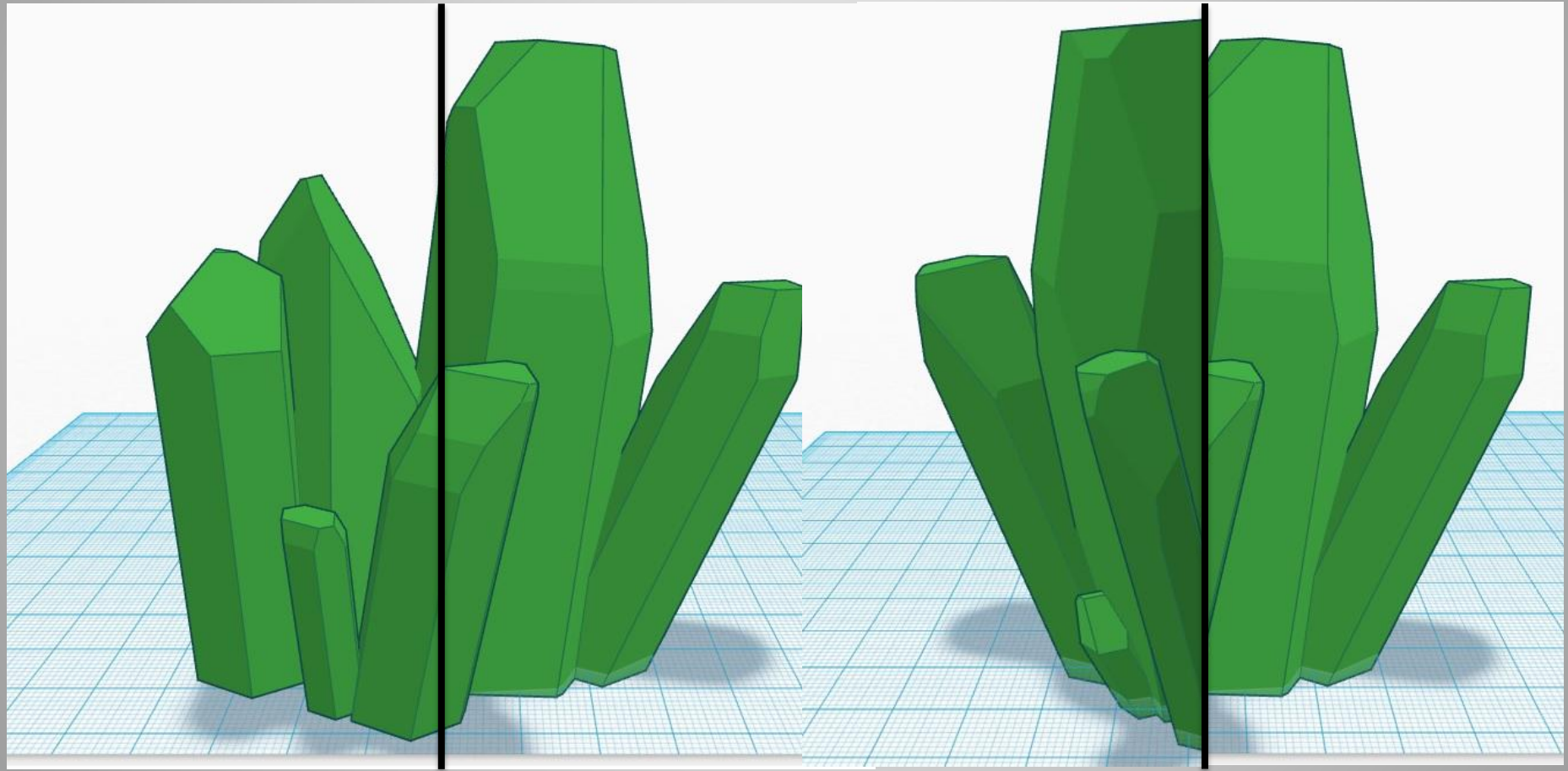
Многогранники на 3D модели

На 3D модели мы обнаружили огромное количество многогранников:

- усеченный тетраэдр;
- треугольник;
- параллелограмм;
- прямоугольник;
- икосаэдр;
- усеченный октаэдр

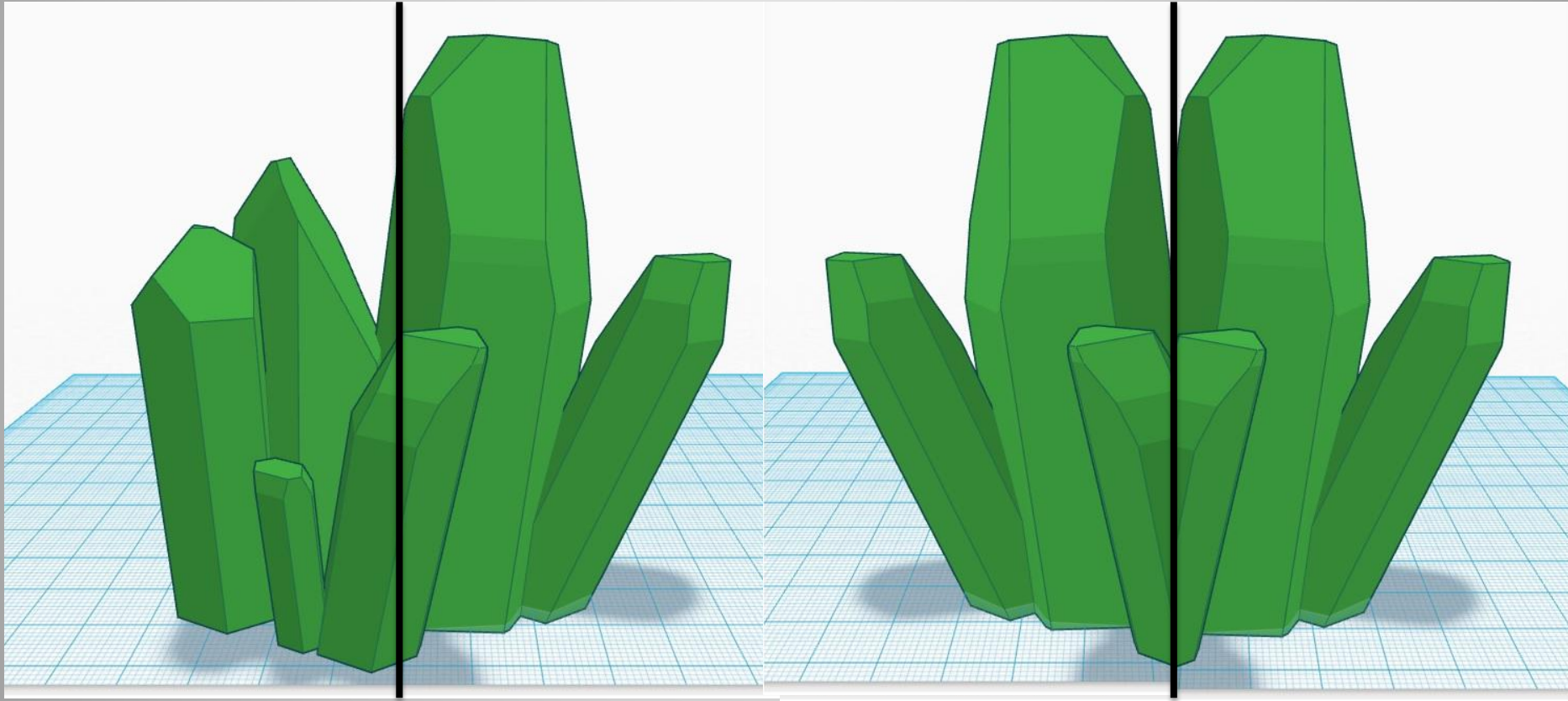
Симметрия кристалла

Поворот



Симметрия кристалла

Отражение



Вывод

В ходе нашей работы мы выявили, что идеальные кристаллы имеют геометрически правильное внутреннее строение и образованы в виде выпуклых многогранников с плоскими гранями и прямыми рёбрами

Многогранник Дюрера



«Меланхолия» — резцовая гравюра на меди немецкого художника Альбрехта Дюрера, законченная в 1514 году. Является одной из наиболее известных работ Дюрера, и выделяется сложностью и неочевидностью идеи, яркостью символов и аллегорий

Альбрехт Дюрер



1471—1528гг.

— немецкий живописец и график, один из величайших мастеров западноевропейского Ренессанса.

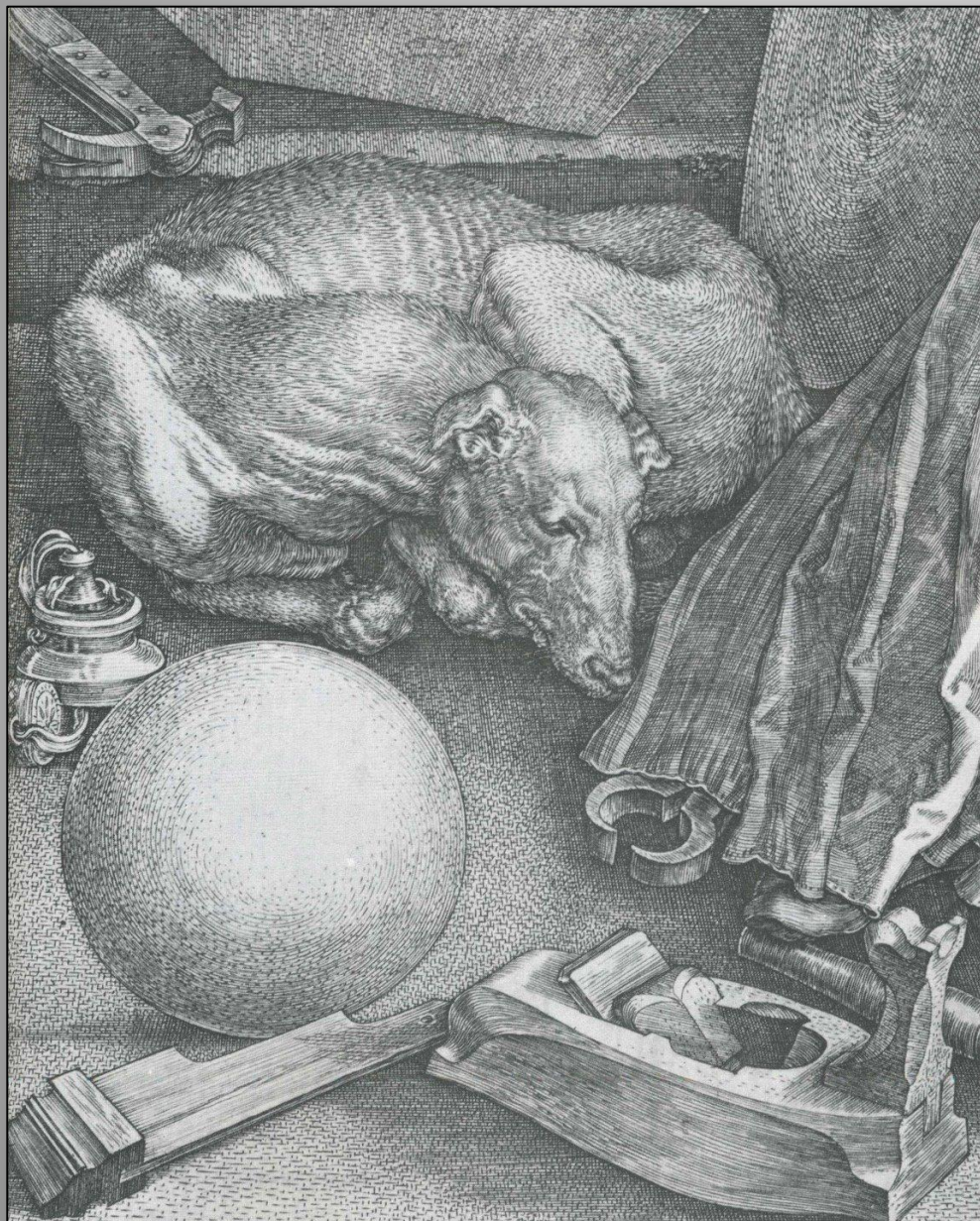
Изучал проблемы перспективы, занимался теоретическими вопросами изобразительного искусства

Символы в гравюре



Считается, что на гравюре изображен автопортрет Дюрера и присутствует разделение на три яруса

Первый ярус



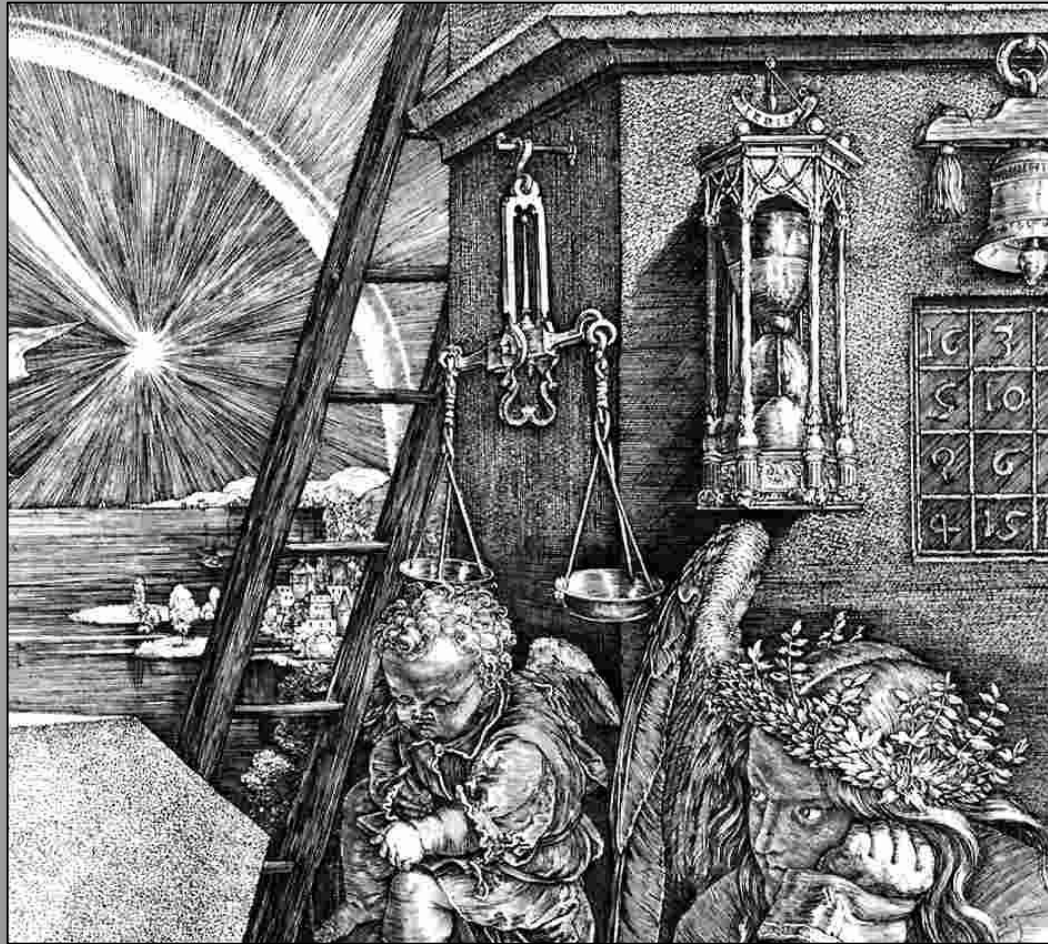
Ремесленный
уровень, к которому
относятся такие
предметы ремесла,
как рубанки,
инструменты,
идеально
выточенный шар

Второй ярус

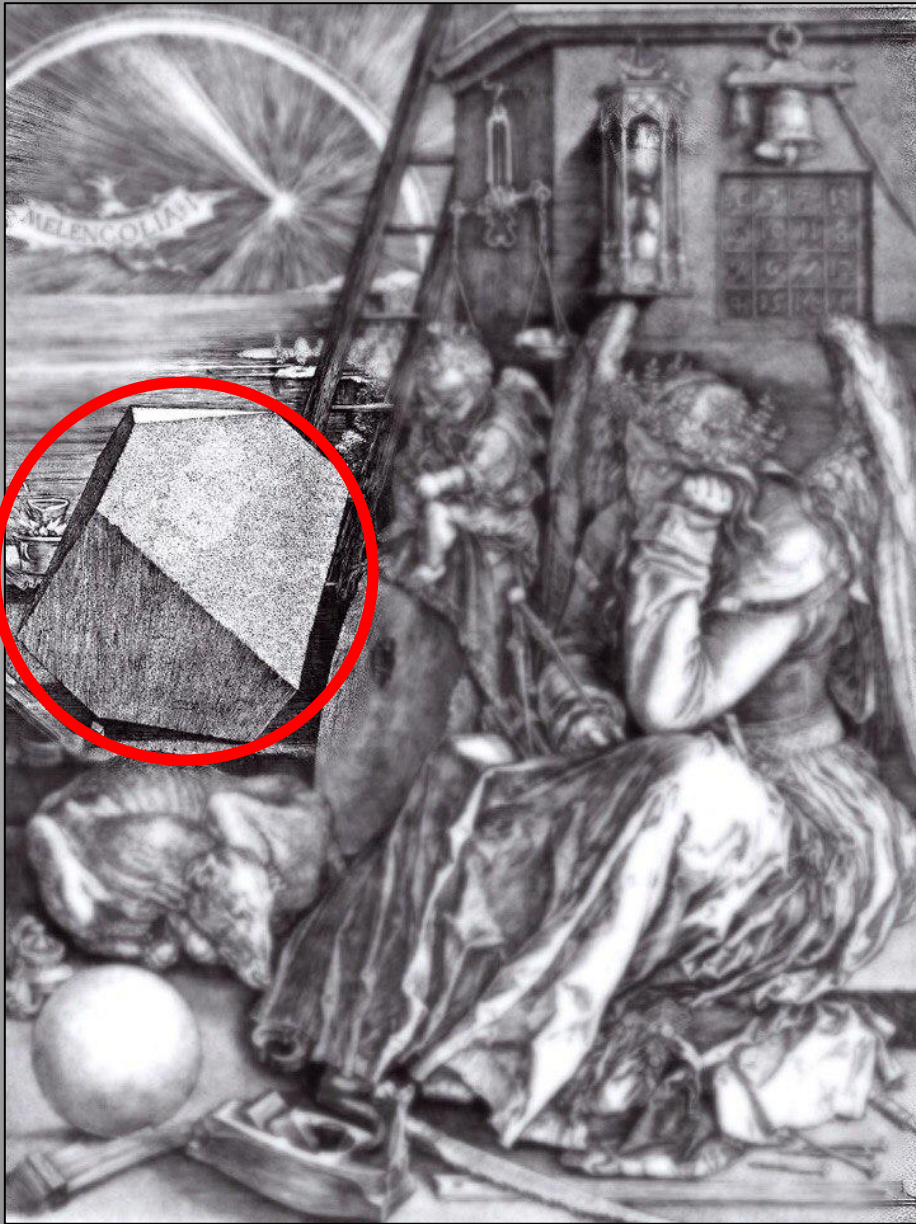


Интеллектуальное
познание – циркуль,
весы, песочные часы,
магический квадрат

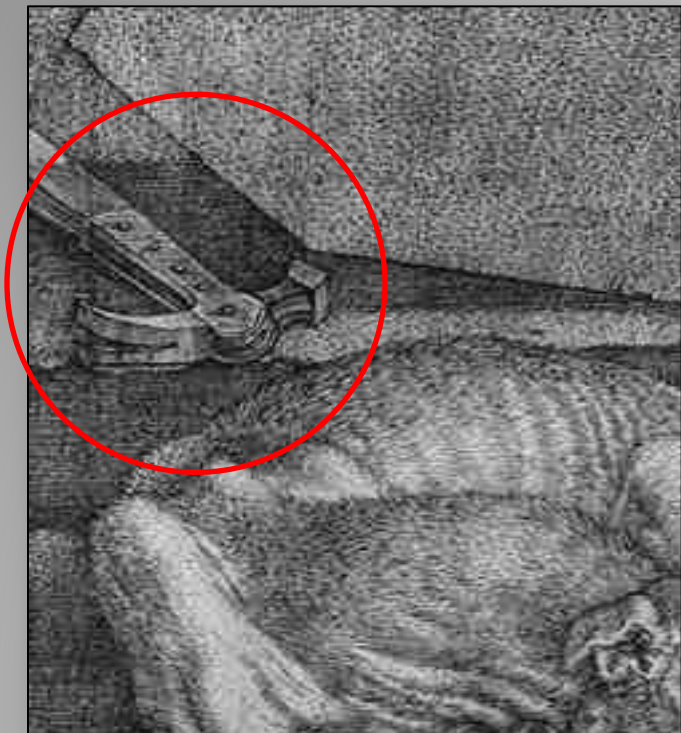
Третий ярус



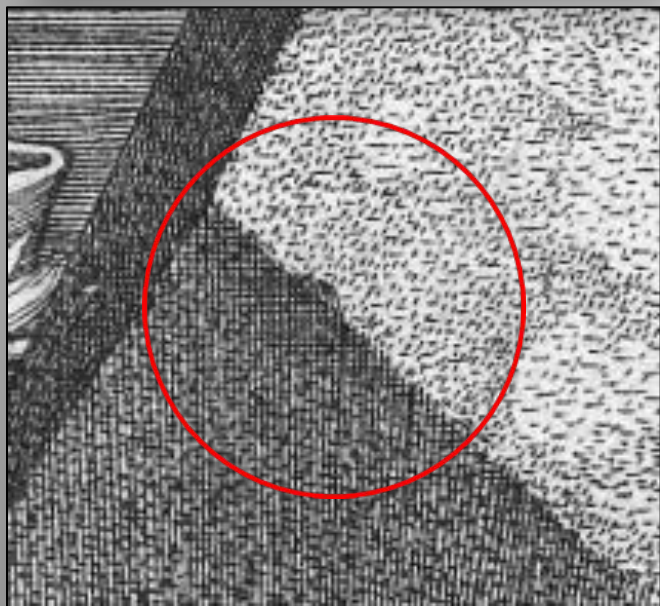
Третий ярус — непознаваемого и божественного. Лестница уходит в небо, за край гравюры, как и башня, у подножия которой сидит Ангел



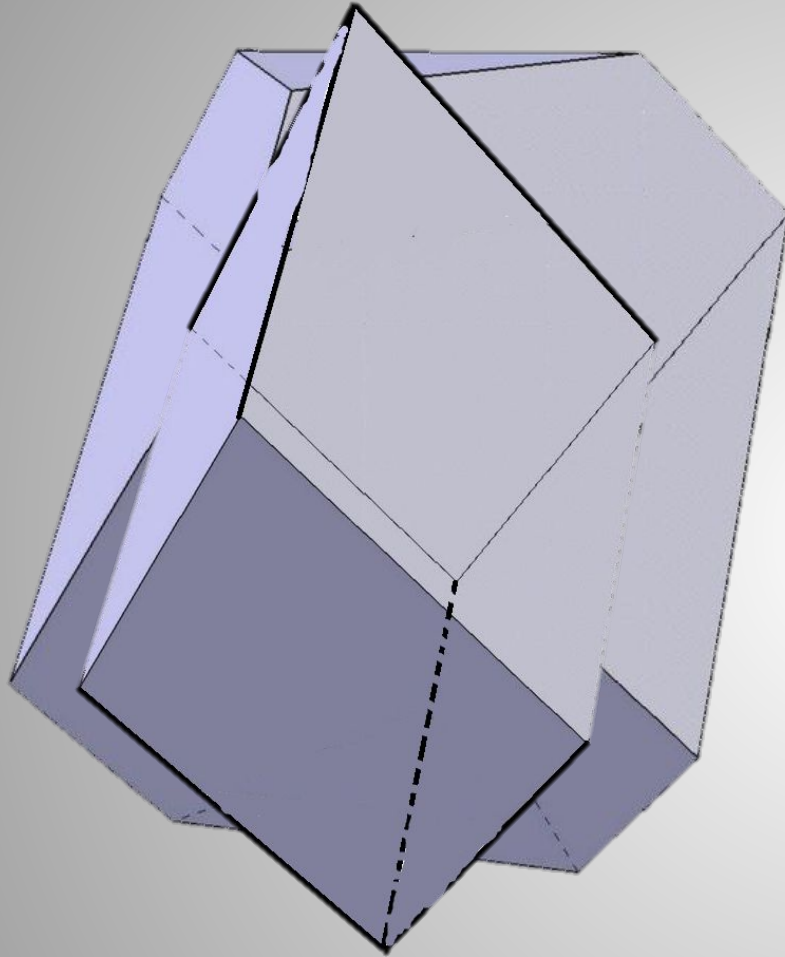
На заднем плане, позади центрального персонажа картины, каменный многогранник, сложной формы - композиционно уравновешивающий плечистую фигуру "Крылатого Гения"



Форма камня рукотворна.
Рядом с многогранником
молоток. На гранях камня
небольшие сколы.

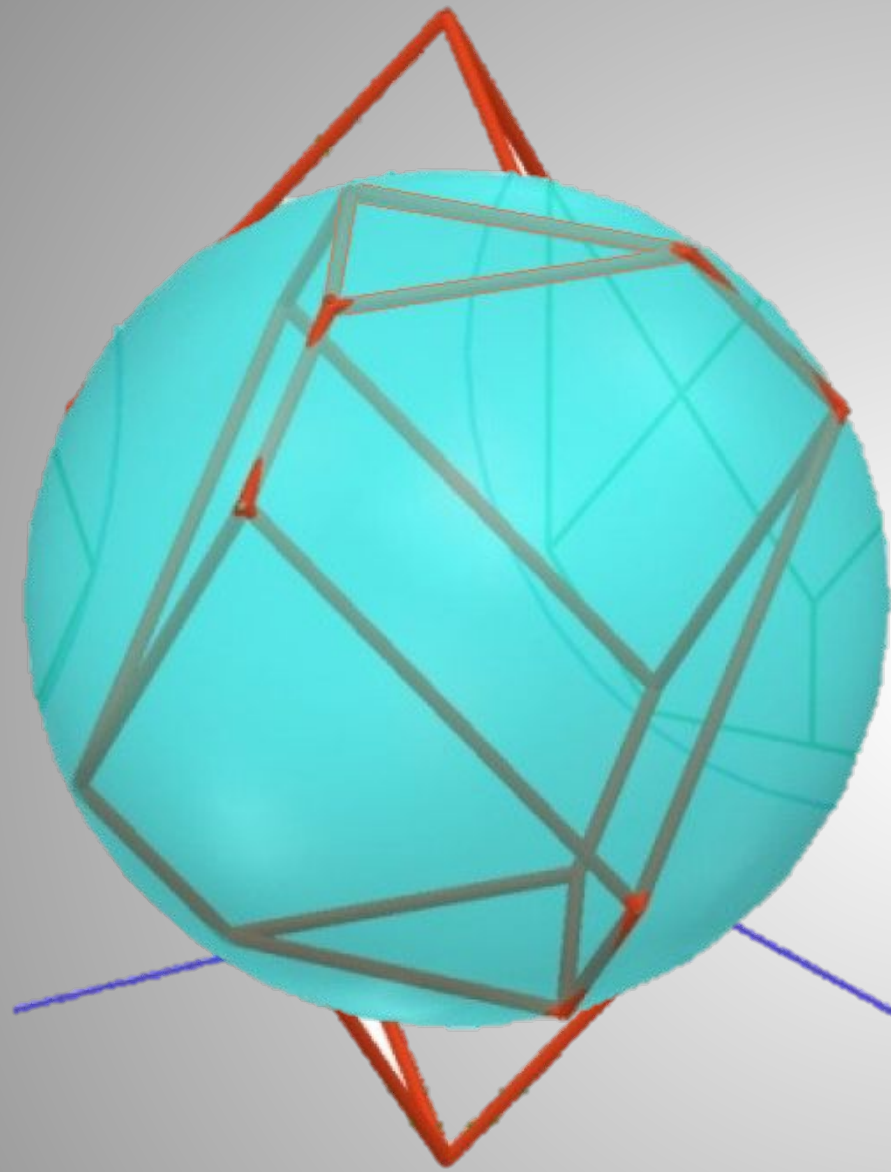


Исследователи считают, что
многогранник состоит из
обработанного флюорита,
куска плавикового шпата



Многогранник Дюрера является выпуклым, состоит из шести одинаковых, имеющих осевую симметрию пятиугольников и двух равносторонних треугольников

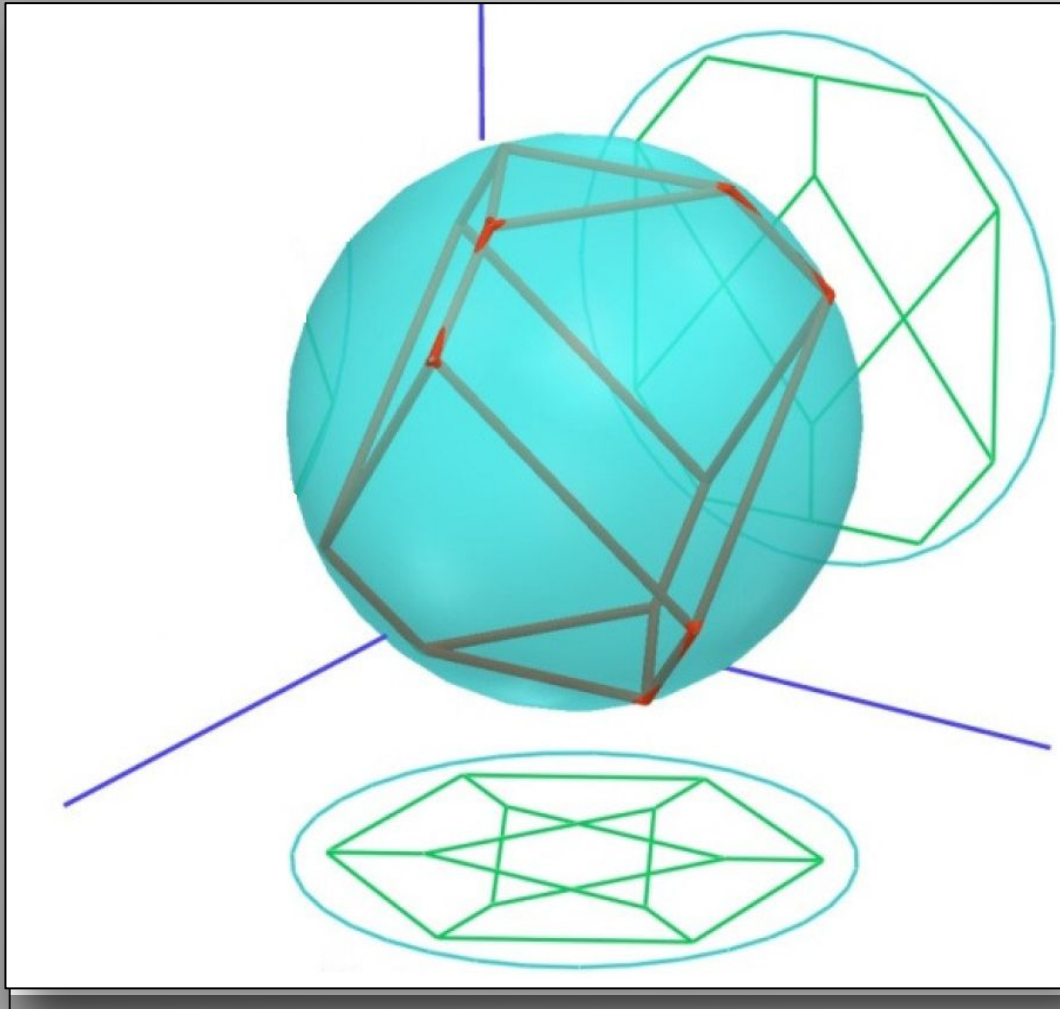
Исходник - шестигранный ромбоэдр, который является одновременно и косо́й призмой



Шесть из восьми углов
лежат на общей описанной
сфере, два пика
выступают за пределы
сферы.

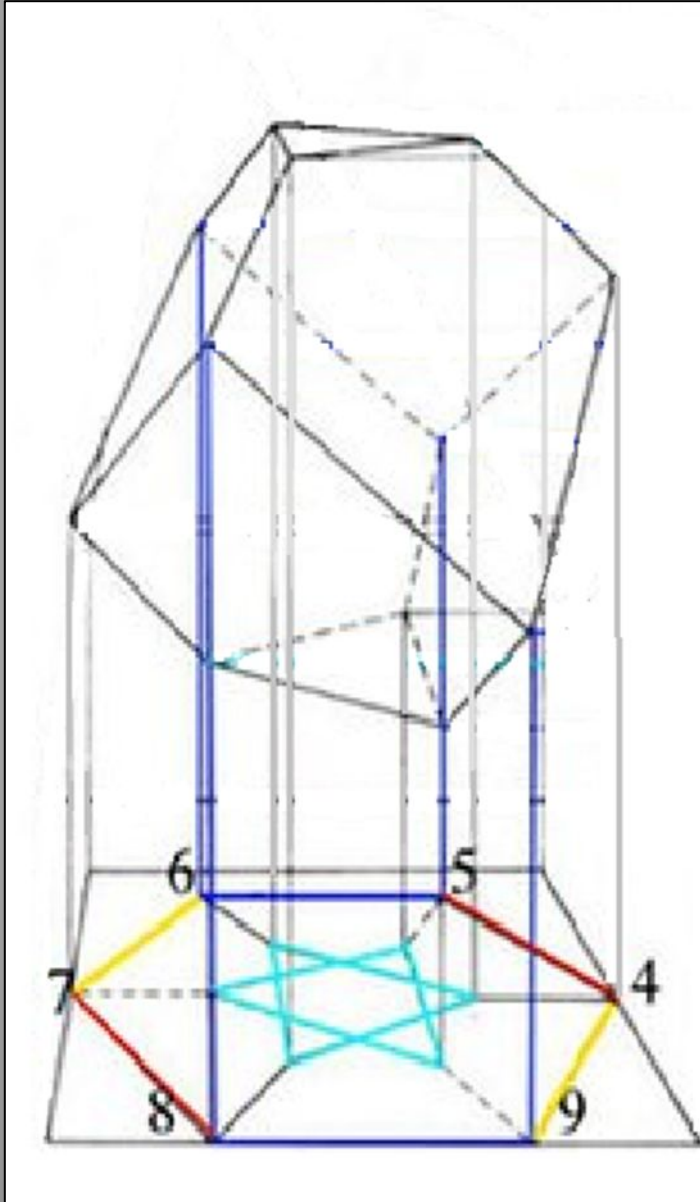
При отсечении пиков на
одинаковой высоте в
каждом случае
появляются три новых
угла

Проекции

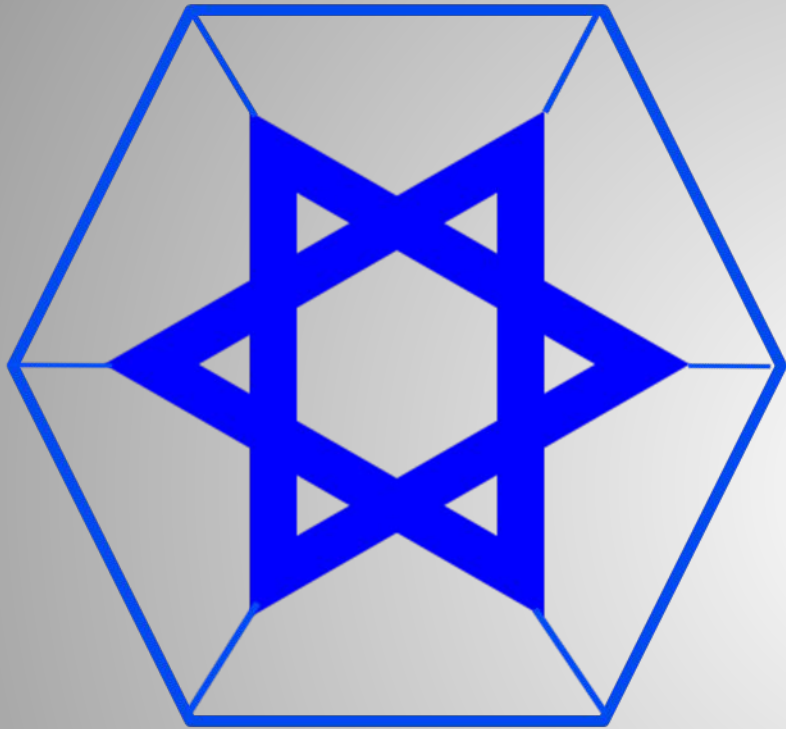


Доктор Эрнст Теодор Майер заметил, что проекция вершин многогранника на горизонтальную плоскость, образует звезду Давида, а боковая проекция прекрасно вписывается в "магический квадрат"

Звезда Давида

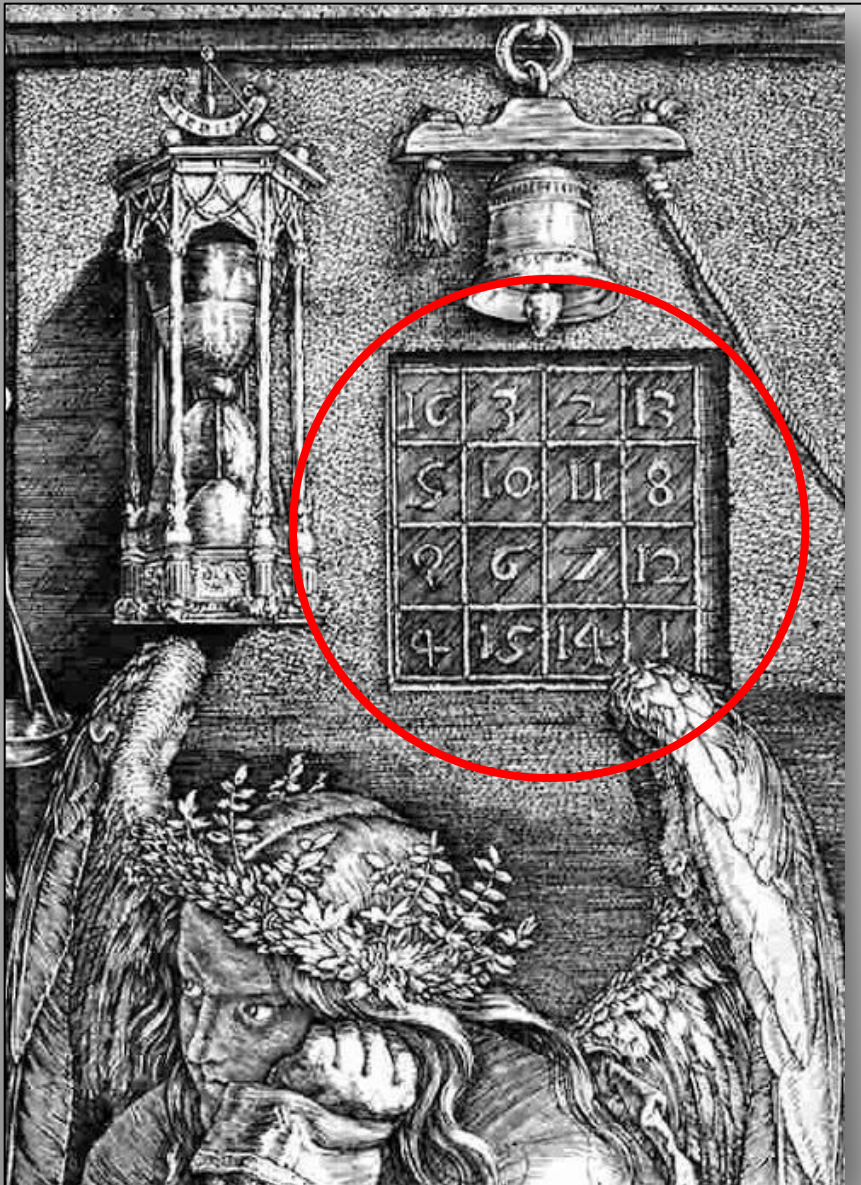


Звезда Давида — древний символ, эмблема в форме шестиконечной звезды (гексаграммы), в которой два одинаковых равносторонних треугольника (один развёрнут вершиной вверх, другой — вершиной вниз) наложены друг на друга



Звезда Давида
олицетворяет все четыре
первоосновы: огонь и
воздух, воду и землю.
Верхний угол одного из
треугольников
символизирует огонь, два
других — воду и воздух

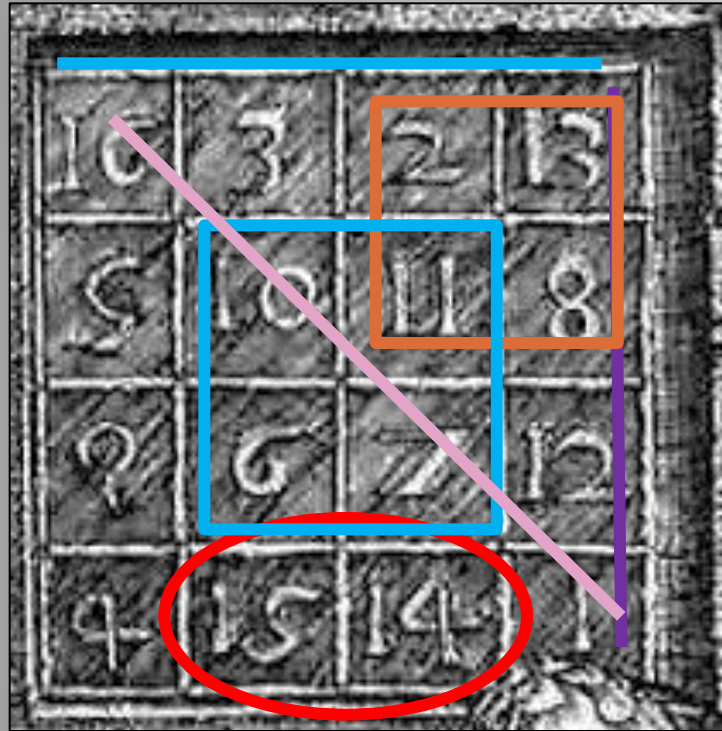
Магический квадрат



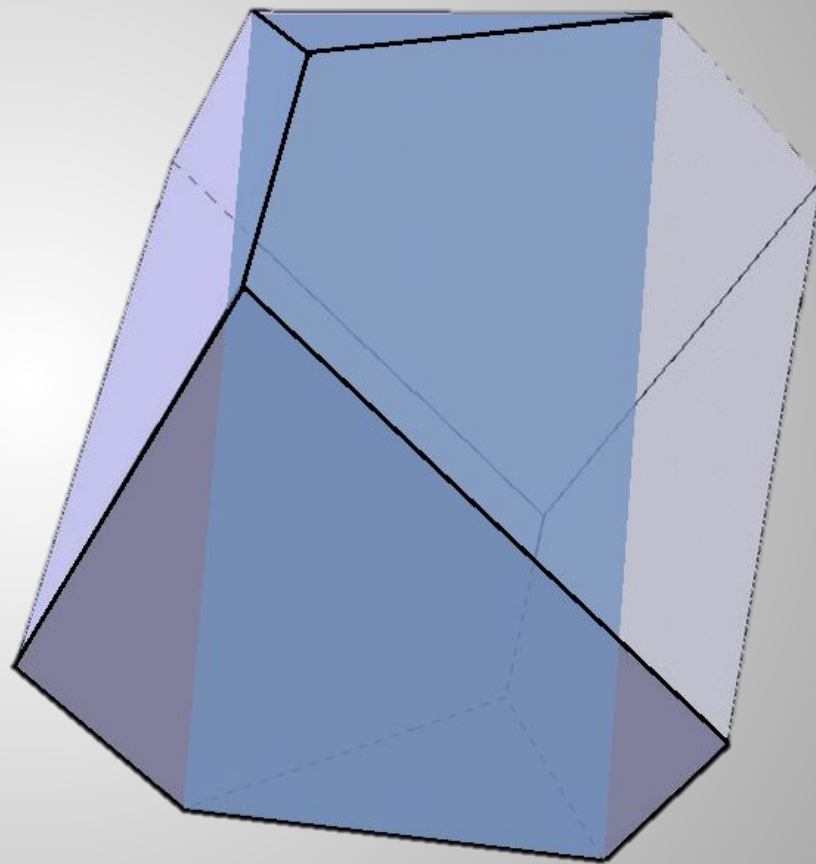
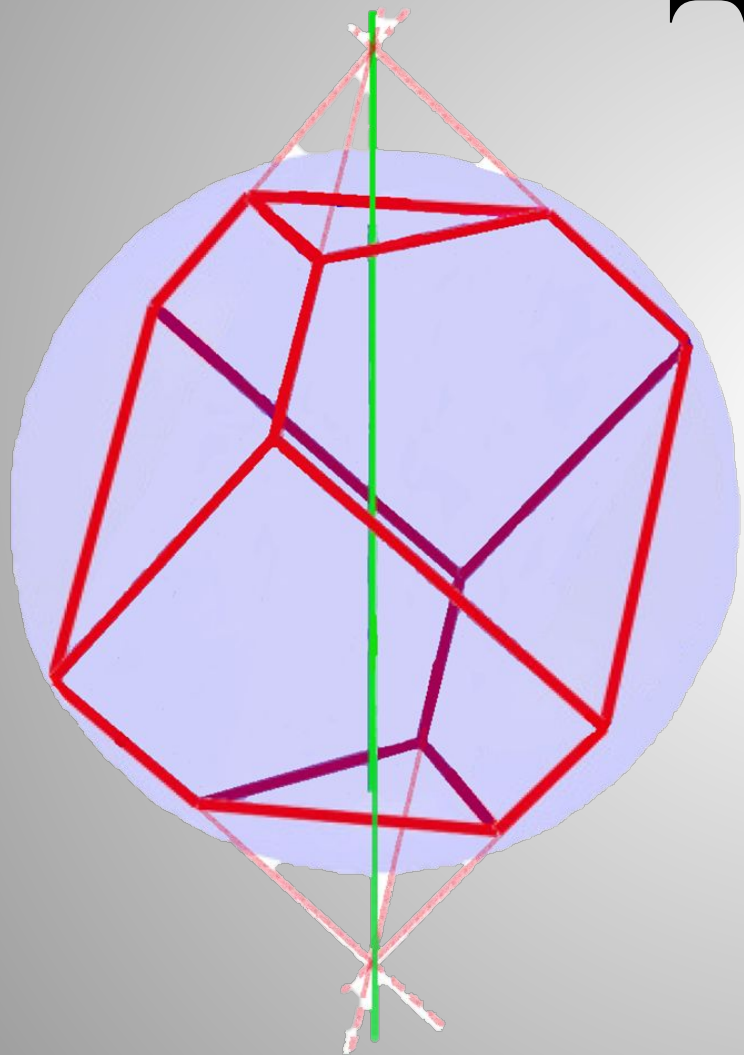
Магический, или волшебный квадрат — это квадратная таблица $n \times n$ (в данном случае 4×4), заполненная числами таким образом, что сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях одинакова

Магический квадрат 4×4 , изображённый на гравюре, считается самым ранним в европейском искусстве.

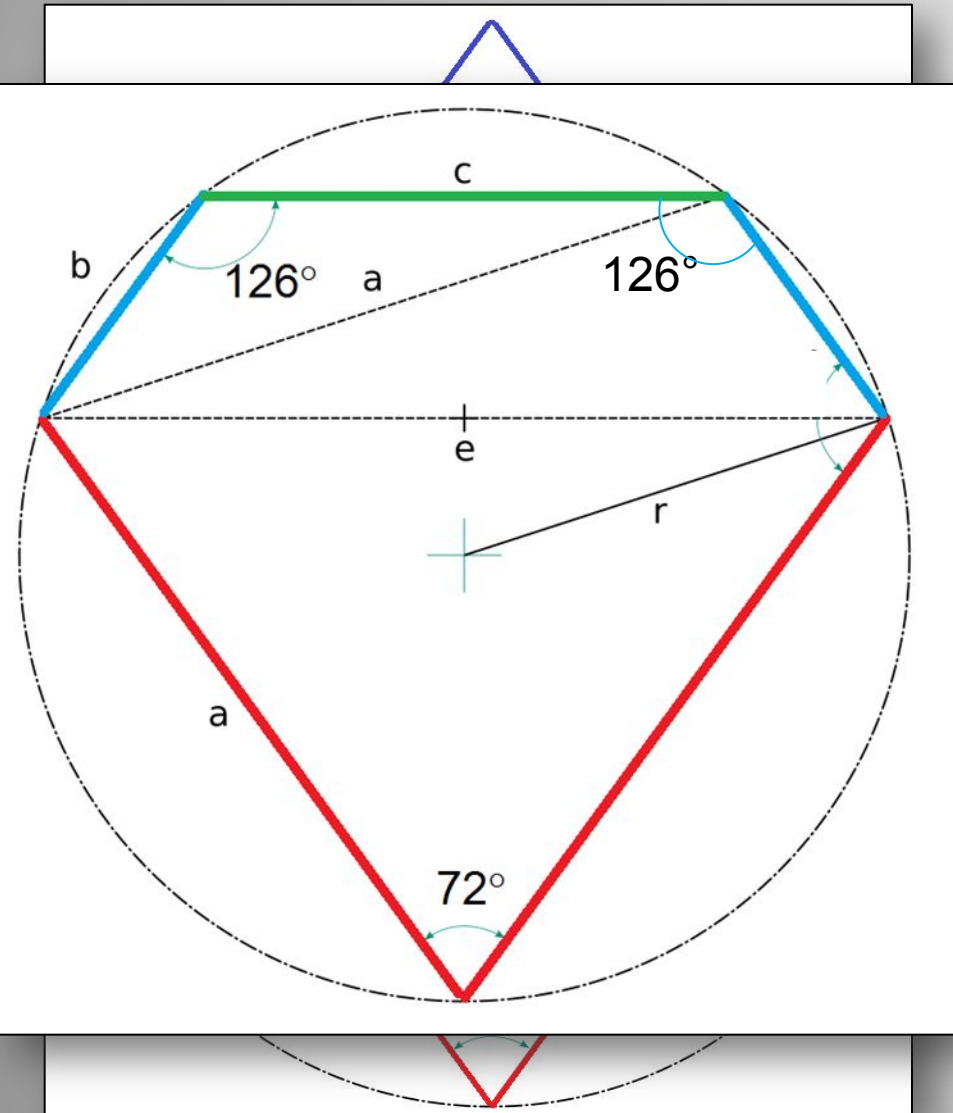
Два средних числа в нижнем ряду указывают дату создания гравюры (1514). Сумма чисел на любой горизонтали, вертикали и диагонали равна 34



Симметрия в многограннике Дюрера

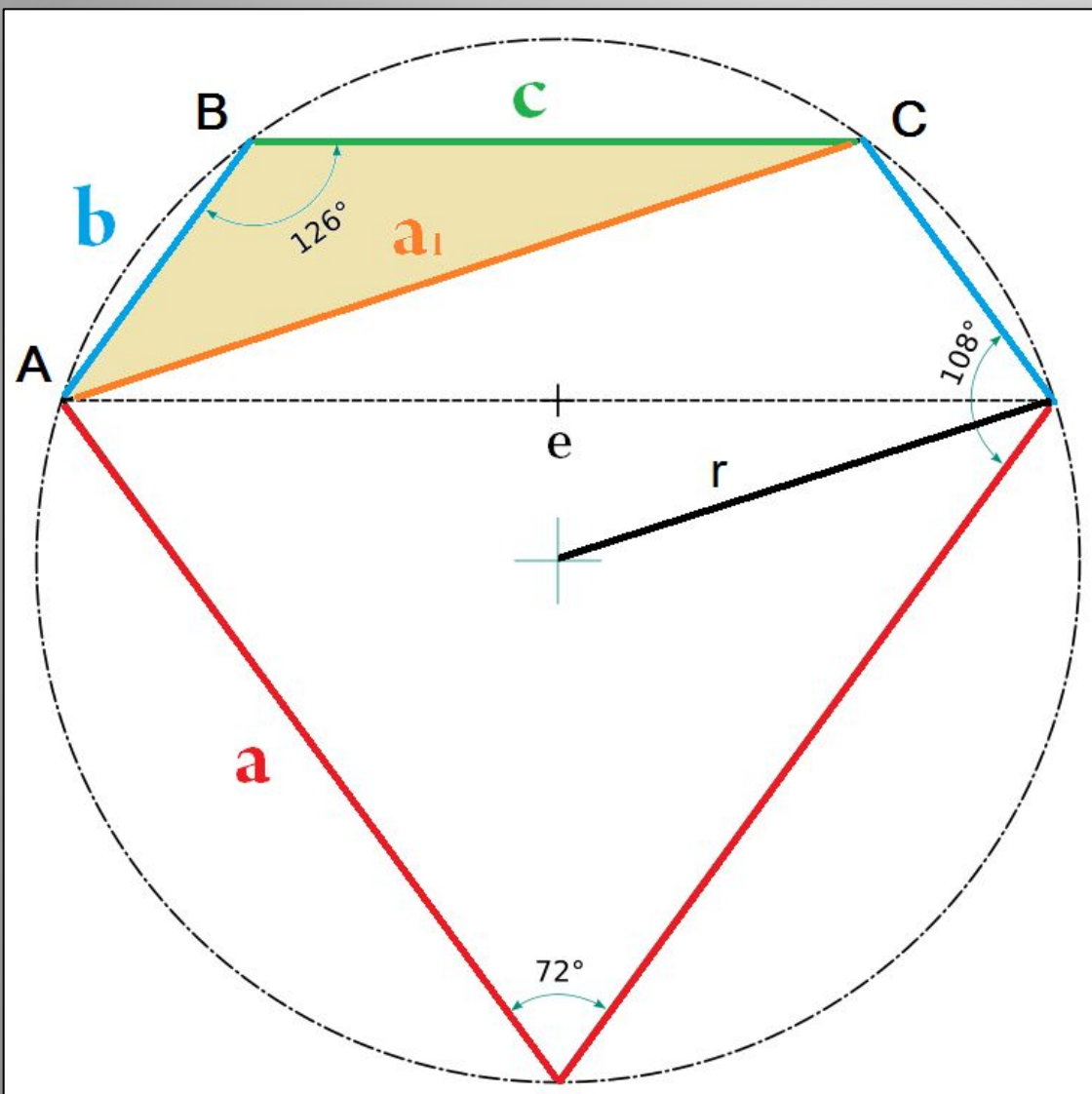


Пятиугольные боковые грани многогранника Дюрера



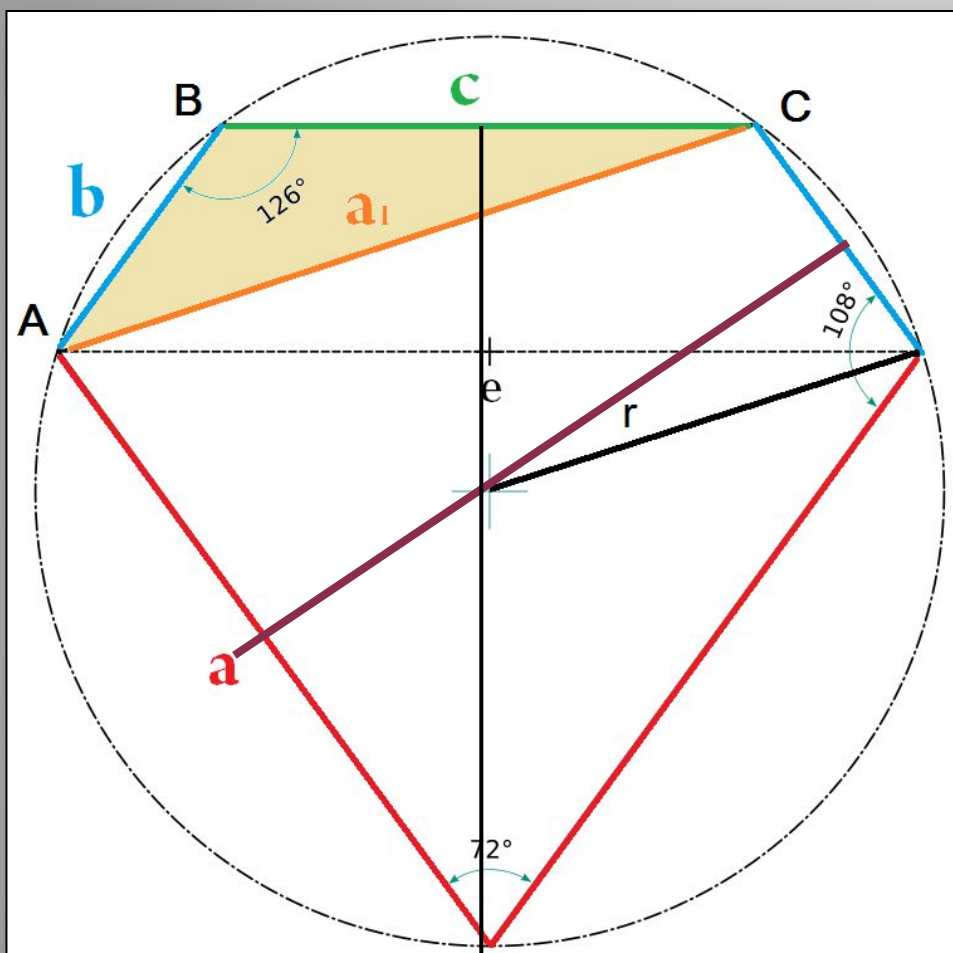
В результате отсечения ромбовидные грани многогранника Дюрера становятся пятиугольниками. Две грани пятиугольника остаются нетронутыми с углом 72° между ними, два других тупых угла равны 126°

Свойства пятиугольных боковых граней многогранника Дюрера



- Соотношения сторон в золотой пропорции:

$$\frac{a}{r} = \frac{r}{b} = \frac{e}{c}$$



Диагонали образуют со стороной **a** равнобедренную трапецию, ось которой не совпадает с осью пятиугольника

Вывод

Многогранники присутствуют и в искусстве, играя важную роль в понимании смысла произведений. Каждый их элемент, каждый признак несет символическую нагрузку

В ходе исследования мы

- изучили и исследовали историю изменения и развития понятия многогранника;
- рассмотрели виды симметрии многогранников;
- смоделировали «идеальный» дом и идеальный кристалл;
- сконструировали модель ДНК;
- нашли виды звездчатых многогранников в живой и «неживой» природе;
- обнаружили многогранники в искусстве и интерпретировали их символическую роль

Вывод

Мы доказали, что многогранники являются неотъемлемой частью живой и «неживой» природы. С помощью них можно сконструировать биологические модели живых организмов, создать идеальный кристалл, стать архитектором и даже проанализировать картины разных эпох

Спасибо за внимание!