

Муниципальное бюджетное нетиповое общеобразовательное  
учреждение

«Городской классический лицей»

Учебный проект

«Тысяча граней  
геометрической красоты»  
(часть 2)

Авторы проекта:  
Ананева Мария;  
Курилович Полина;  
Орлова Валерия;  
Устинова Полина;  
Суханова Арина;  
Филонова Ксения

Руководитель:  
Иноземцева  
Елена Ивановна

г. Кемерово, 2016

# Звездчатые многогранники

**Многогранник** – это тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников

**Звёздчатый многогранник** — это невыпуклый многогранник, грани которого пересекаются между собой. Как и у незвёздчатых многогранников грани попарно соединяются в рёбрах

# Звёздчатые многогранники

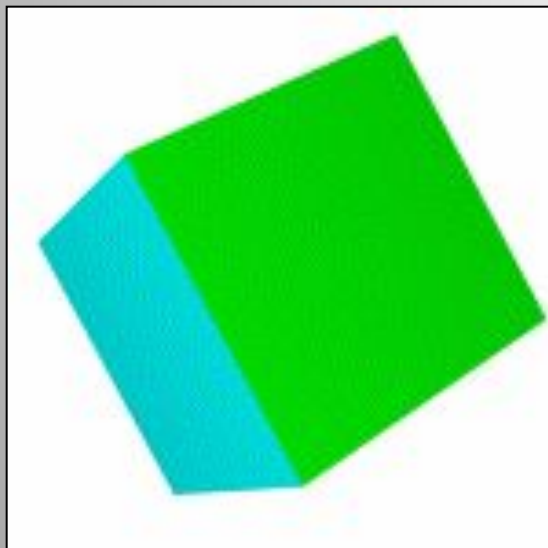


**Правильные** — это звёздчатые многогранники, гранями которых являются одинаковые правильные или звёздчатые многоугольники

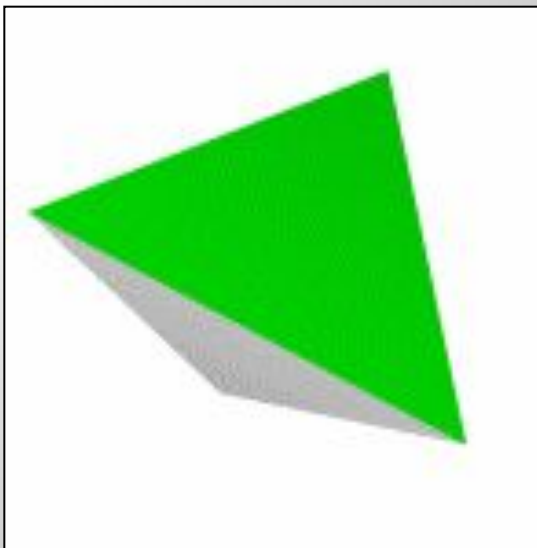
# Звёздчатые многогранники



**Правильные**



Куб



Тетраэдр

# Звёздчатые многогранники

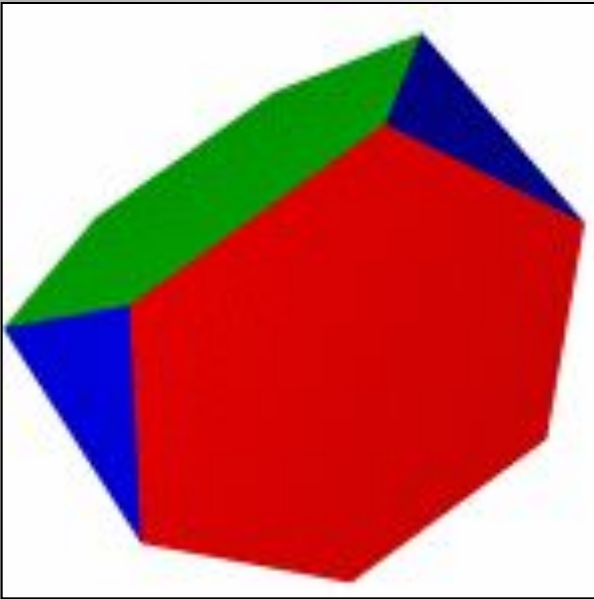


**Полуправильные** — многогранники, гранями которых являются правильные или звёздчатые многоугольники, но не обязательно одинаковые

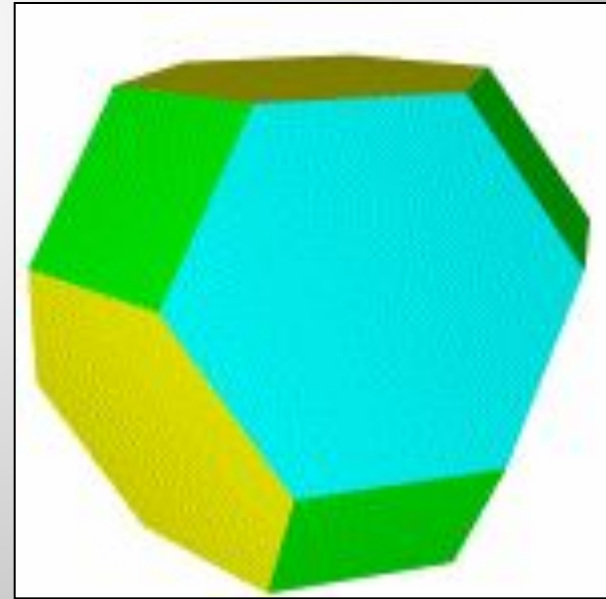
# Звёздчатые многогранники



**Полуправильные**



Усеченный тетраэдр



Усеченный октаэдр



# Звёздчатые многогранники



**Однородные** — правильные и полуправильные выпуклые многогранники. У этих тел все грани являются правильными многоугольниками, а все вершины одинаковы

# Однородные многогранники



Платоновы тела



Пять уникальных форм.  
Грани Платоновых тел -  
правильные  
многоугольники одного  
типа



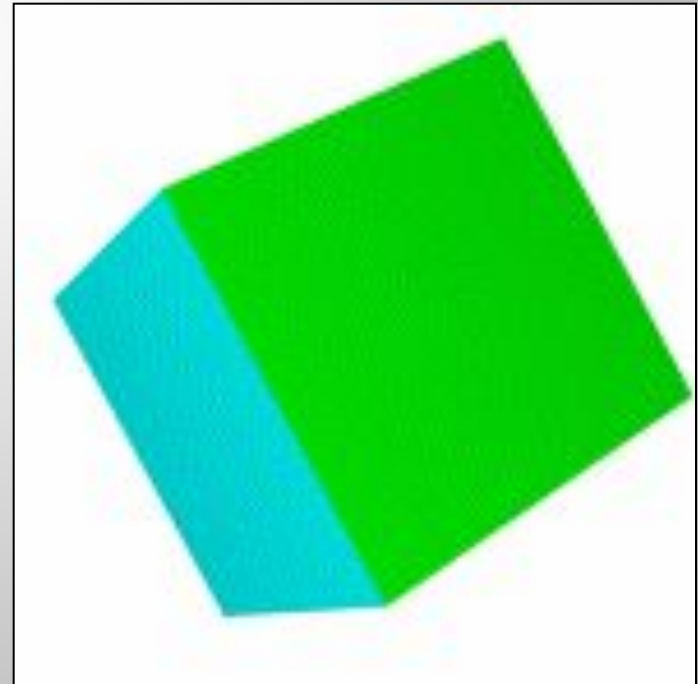
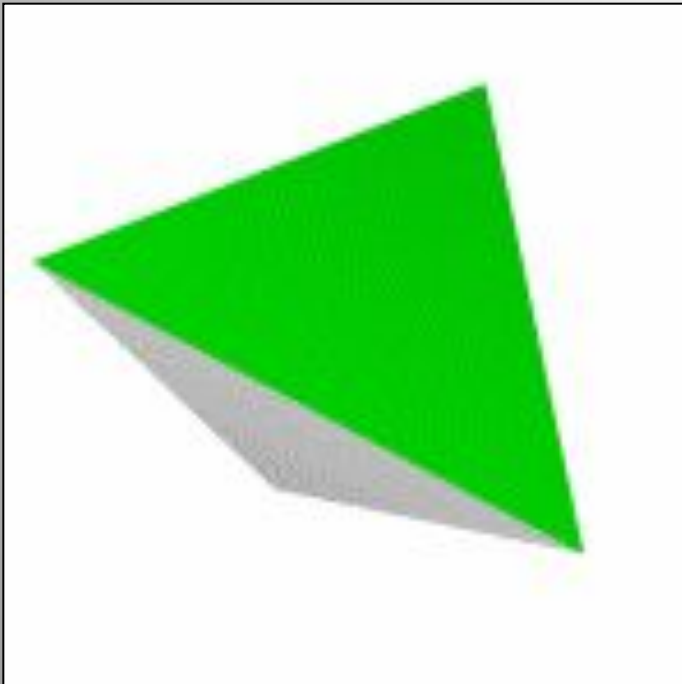
Архимедовы тела



Полуправильные  
однородные выпуклые  
многогранники

# Тетраэдр и куб

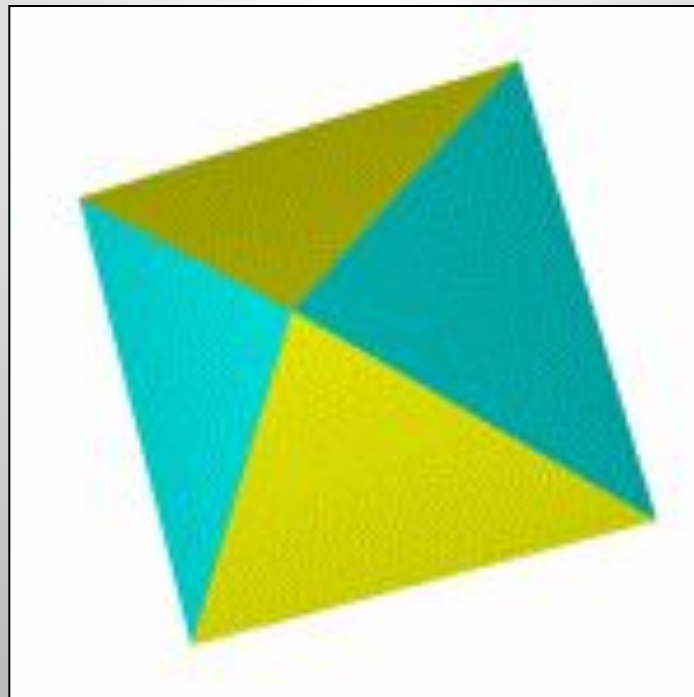
Не имеют звёздчатых форм, так как их грани при продлении через рёбра не пересекаются



# Октаэдр

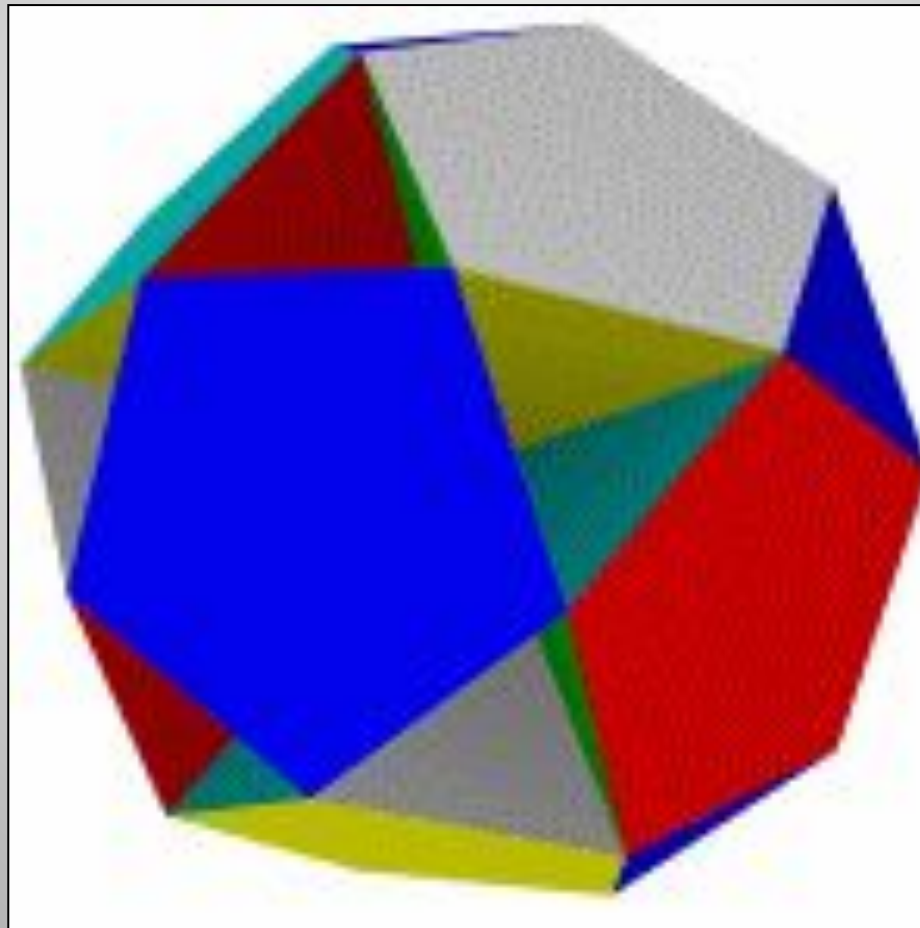
Существует только одна звёздчатая форма.

*Stella octangula* — звезда восьмиугольная



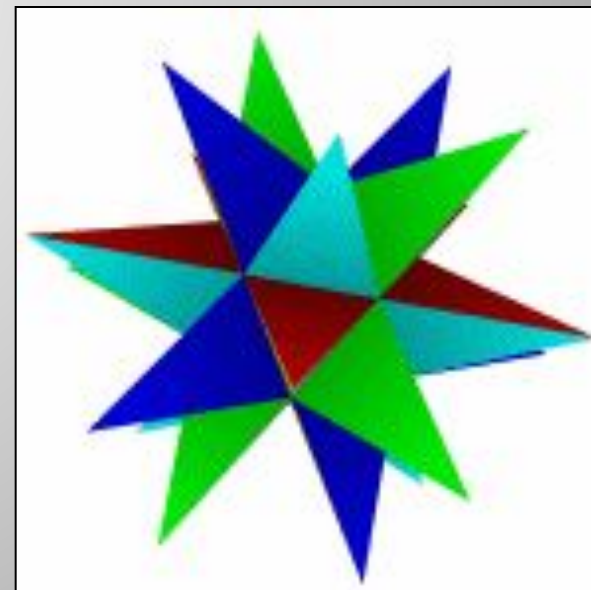
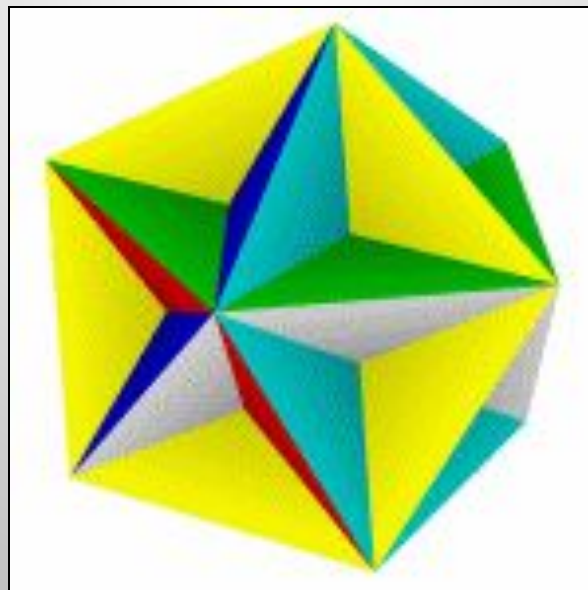
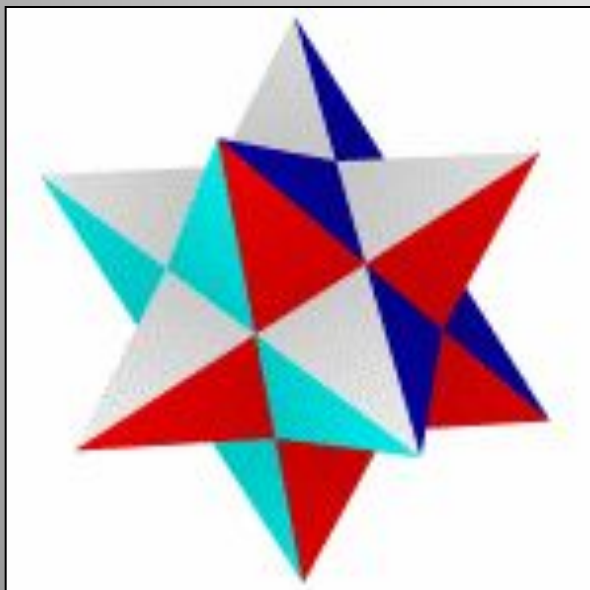
# Додекаэдр

У большого додекаэдра гранями являются  
пятиугольники



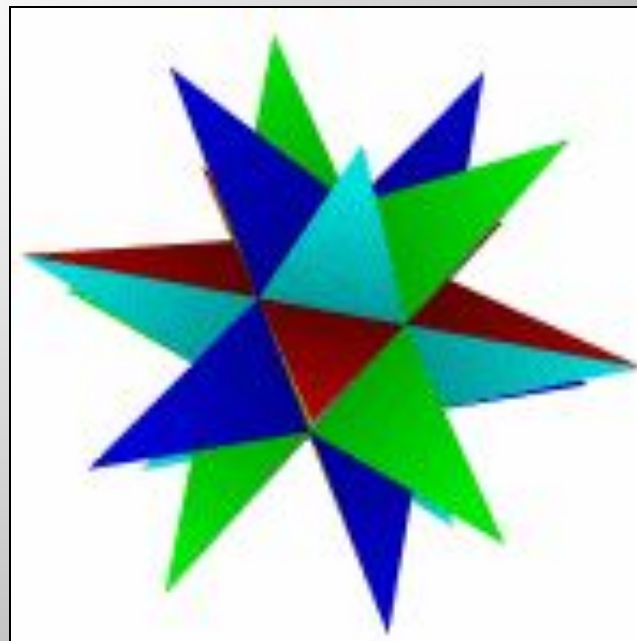
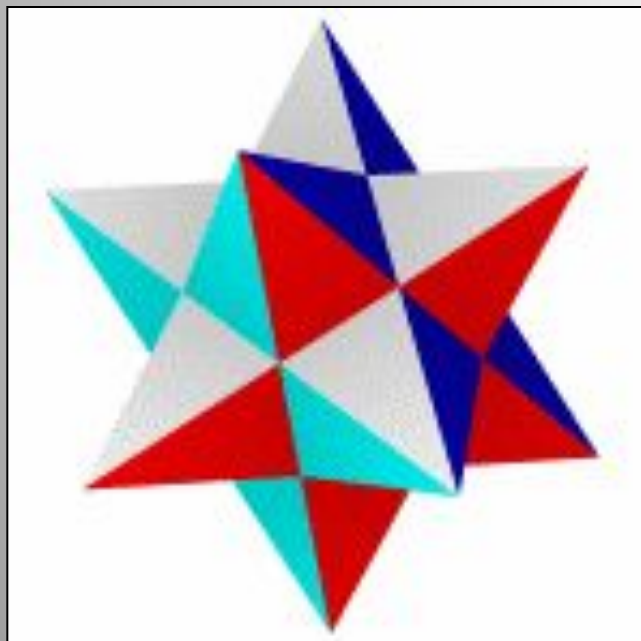
# Имеет три звёздчатые формы

- малый звёздчатый додекаэдр;
- большой додекаэдр;
- большой звёздчатый додекаэдр.



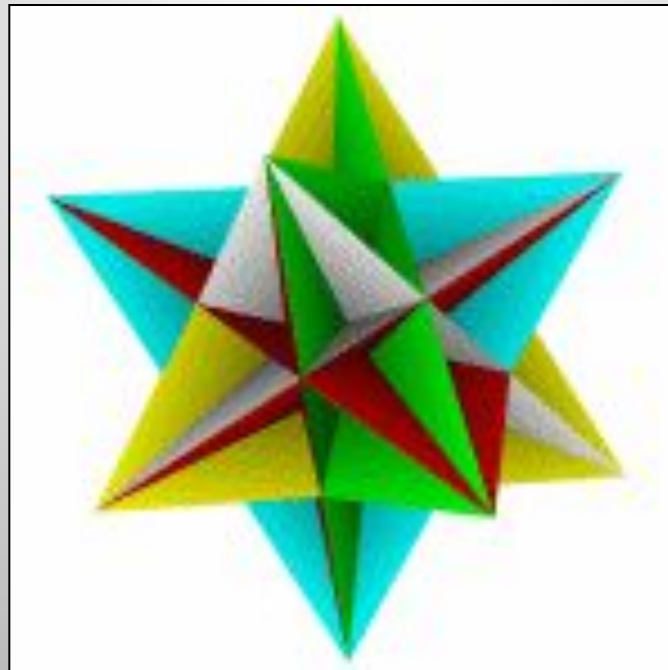
Любая из звёздчатых форм додекаэдра не является соединением платоновых тел, а образует новый многогранник.

У малого звёздчатого и большого звёздчатого додекаэдров гранями являются пятиконечные звёзды (пентаграммы)



# Икосаэдр

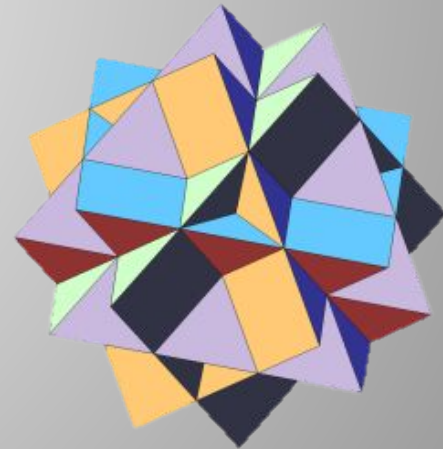
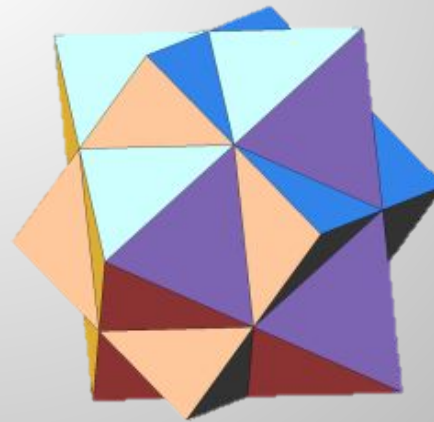
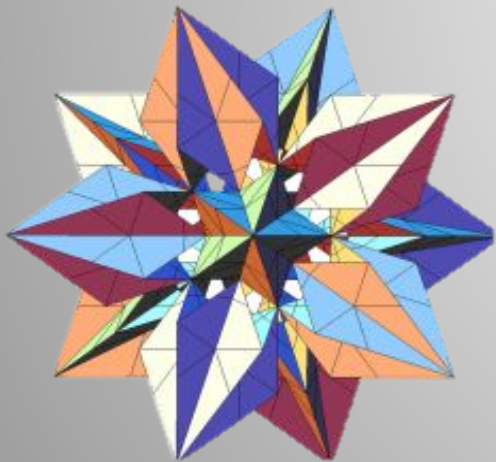
- соединение пяти октаэдров;
- соединение пяти тетраэдров;
- соединение десяти тетраэдров.





# Кубооктаэдр

Имеет 4 звёздчатые формы

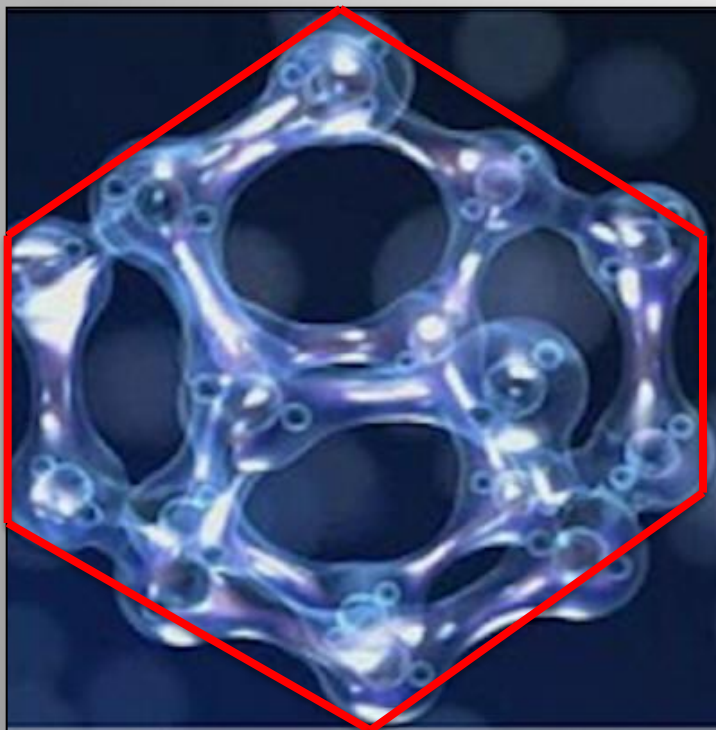


# Многогранники в снежинках

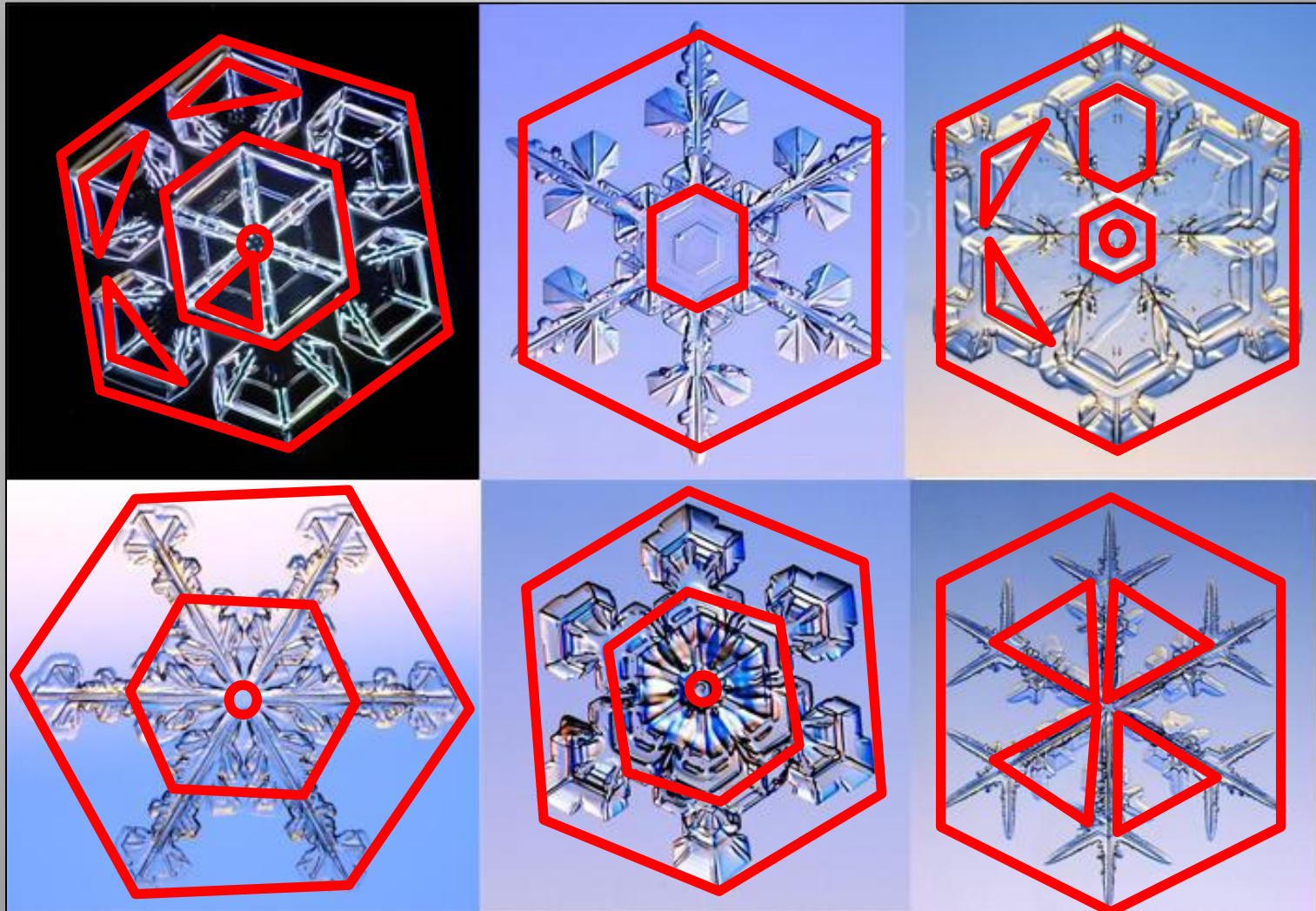
Снег возникает, когда микроскопические капли воды в облаках притягиваются к пылевым частицам и замерзают.

Появляющиеся при этом кристаллы льда падают вниз и растут в результате конденсации на них влаги из воздуха

Из-за особой структуры молекул воды  
ВОЗМОЖНЫ УГЛЫ ЛИШЬ В  $60^\circ$  и  $120^\circ$



# Множество многогранников и Платоновых тел



# Евграф Федоров



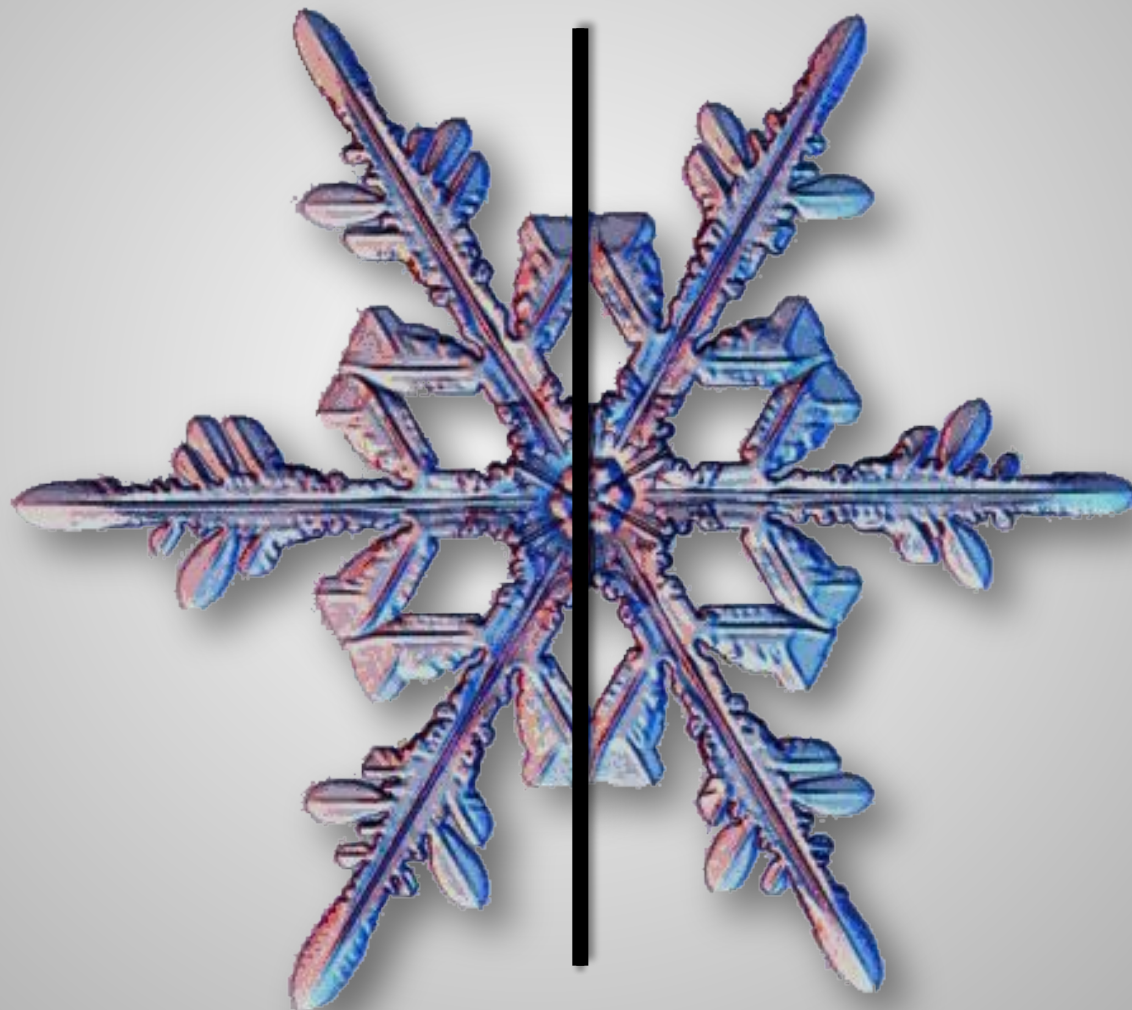
— русский академик  
РАН, кристаллограф,  
минералог и математик.  
Народоволец.  
Директор петербургского  
Горного института

10.12.1853 – 21.05.1919 гг.

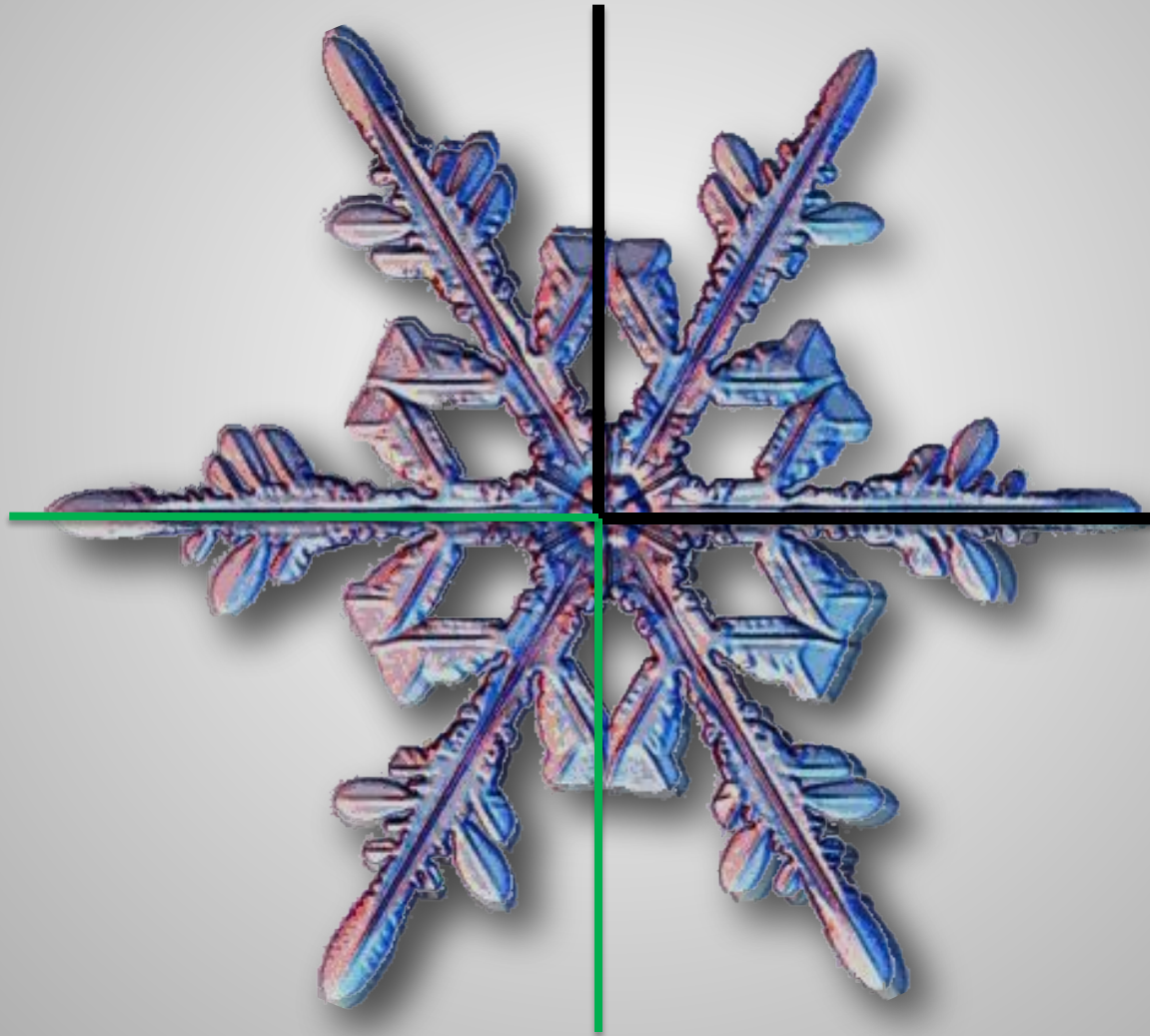
В 1890 году вывел все геометрические законы сочетания элементов симметрии в кристаллических структурах

Показал, что имеется 230 пространственных групп симметрии

# Зеркальная симметрия



# Поворотная симметрия

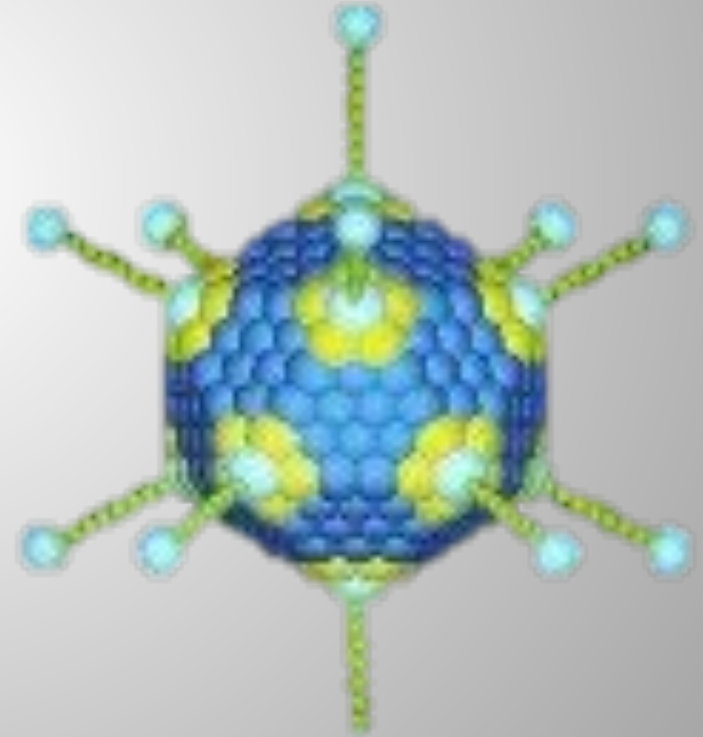
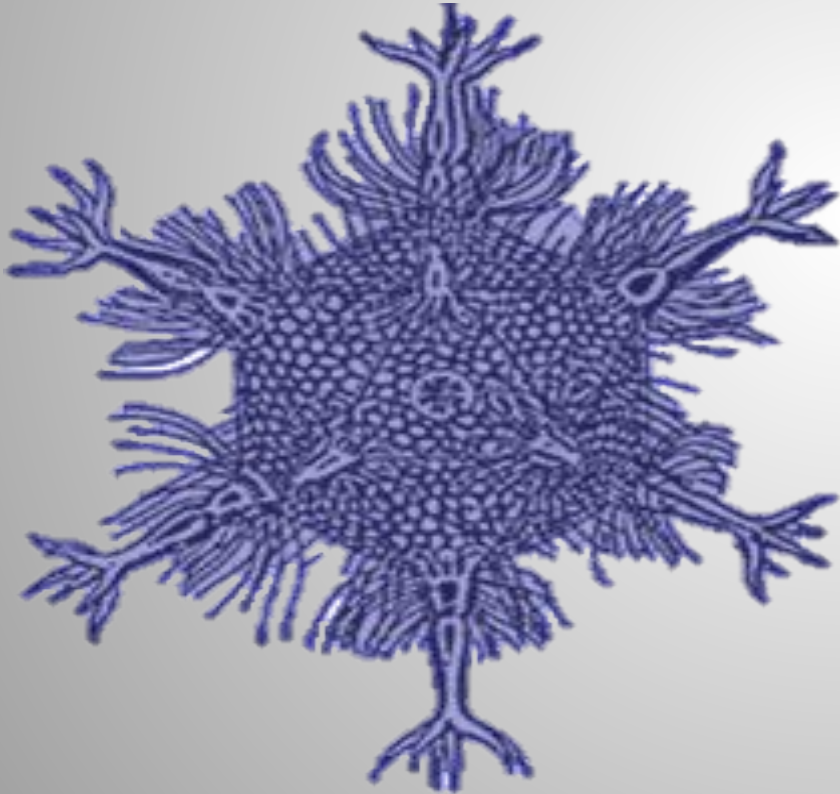




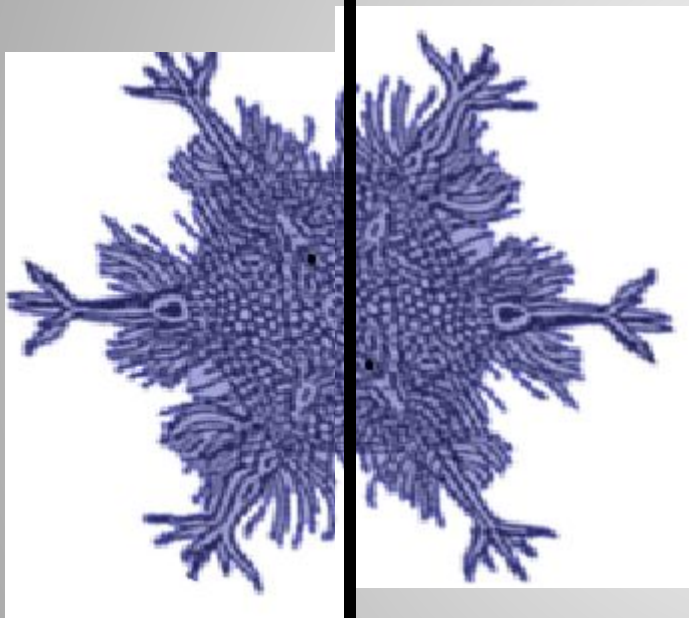
# Многогранники в биологии

Феодария – одноклеточный организм, обитающий на морских глубинах, служит добычей коралловых рыб

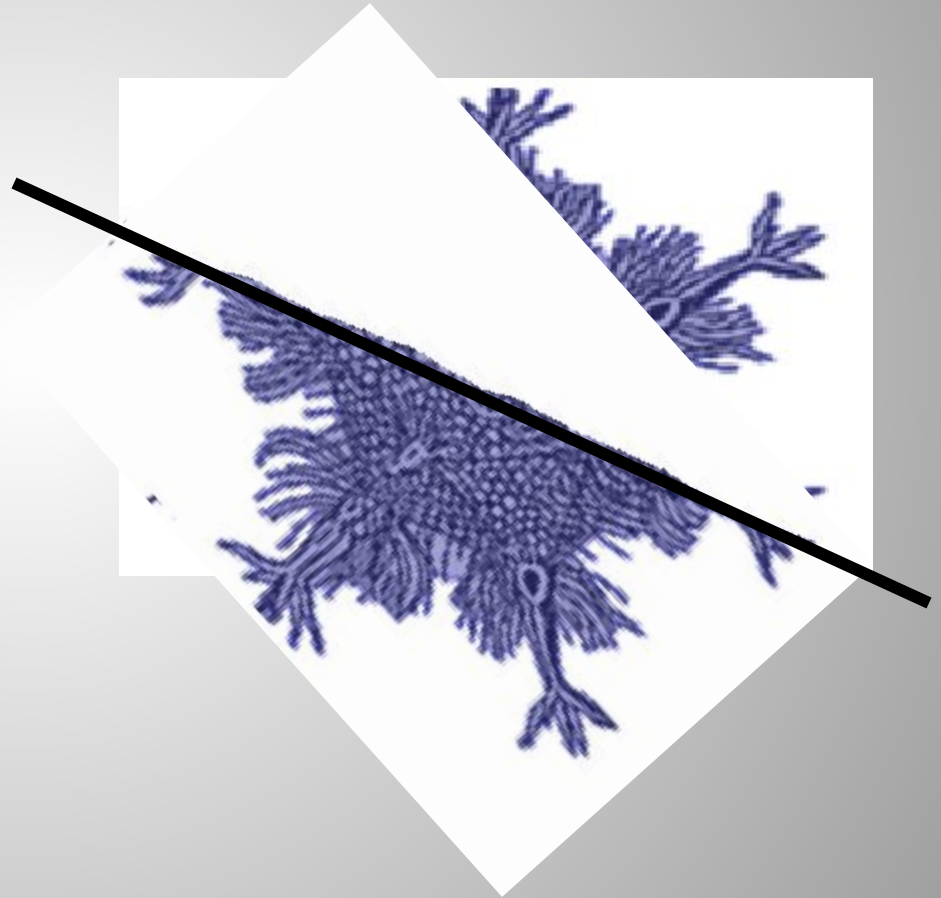
Из 12 вершин скелета выходят 12 полых игл. На концах игл находятся зубцы, делающие иглу еще более эффективной при защите



# Осевая симметрия феодарии



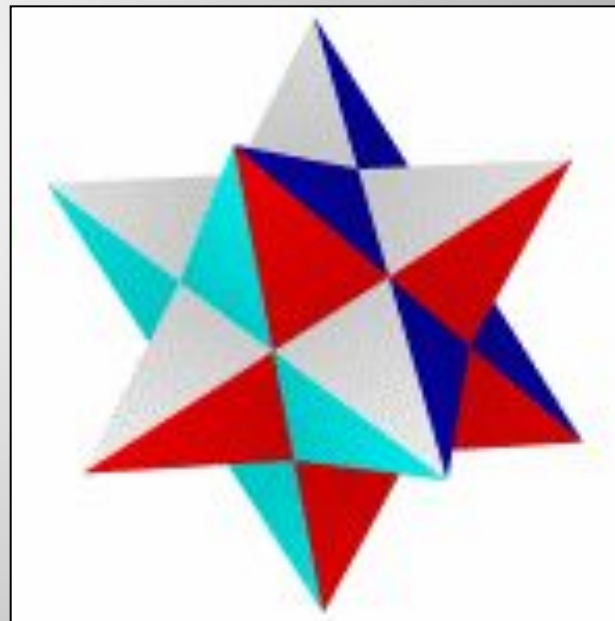
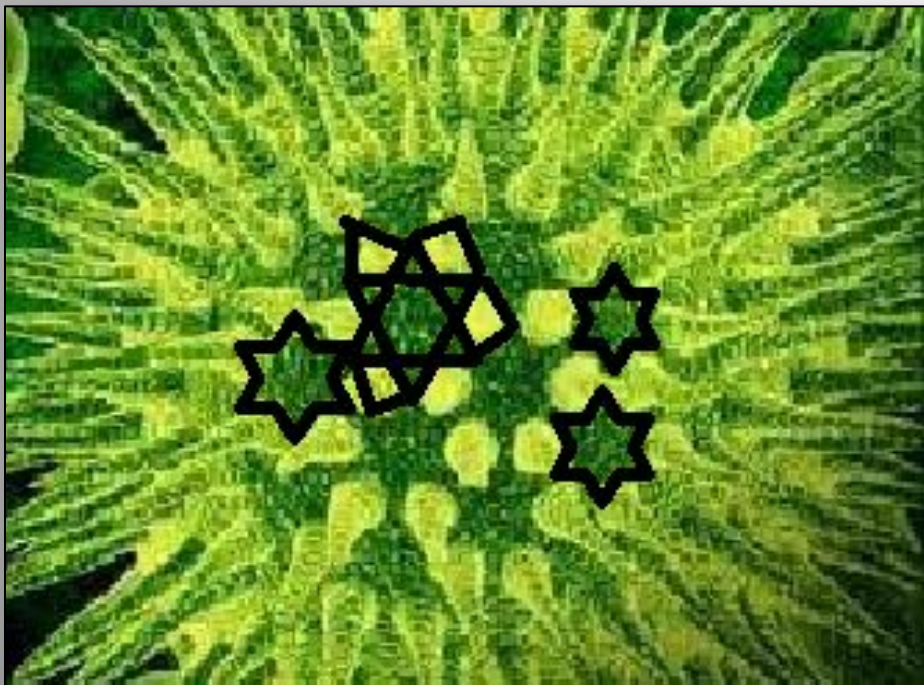
# Зеркальная симметрия



Из всех многогранников с тем же числом граней именно икосаэдр имеет наименьший объем при наибольшей площади поверхности.

Это свойство помогает морскому организму преодолевать давление водной толщи

Бактерии можно представить в виде звездчатых многогранников. Такое строение говорит о плотном расположении тканей бактерии, что позволяет ей перемещаться внутри организмов



Звездчатая форма  
додекаэдра

**Аденовирусы** – большая группа ДНК-содержащих вирусов, вызывающие простудные заболевания, являются перспективными объектами для разработки медицинских технологий и средств генной терапии

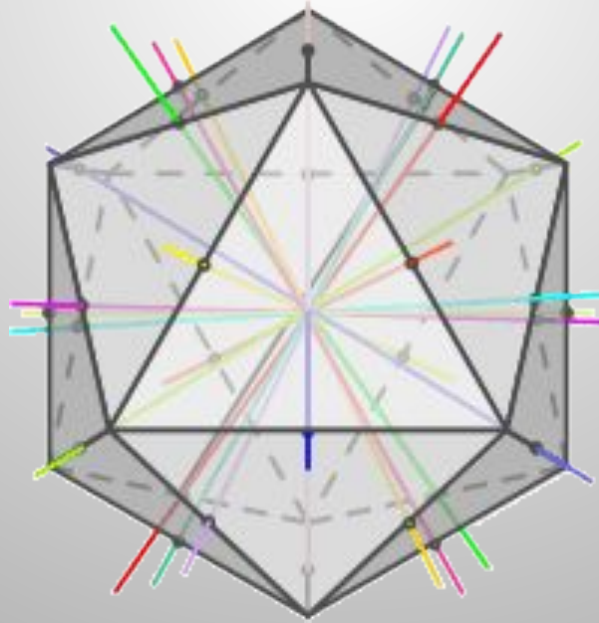
Внешняя оболочка аденовируса имеет форму икосаэдра со скругленными рёбрами.

В каждой вершине имеется выступающая белковая структура, необходимая для связывания с клеточными рецепторами



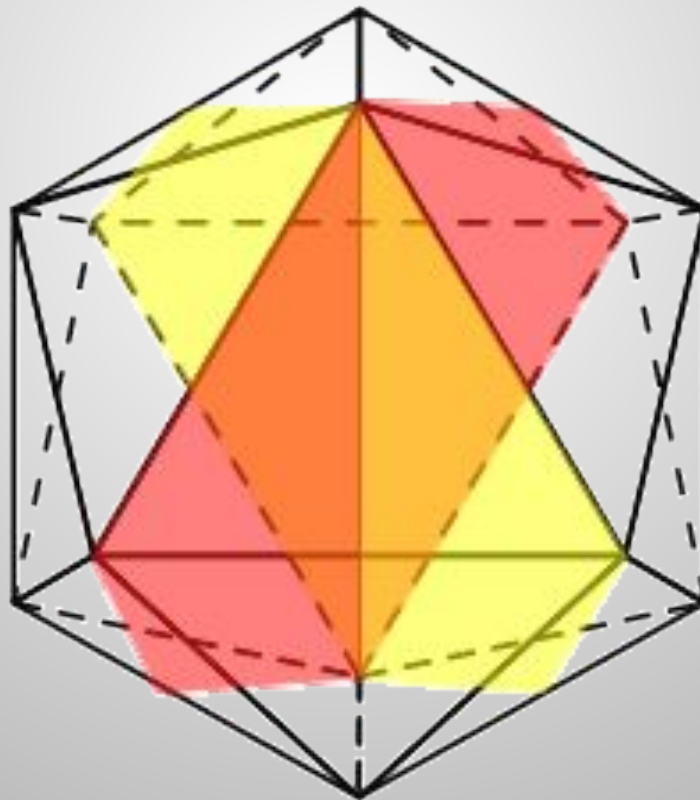
# Аденовирус симметричен

Ось симметрии икосаэдра проходит через середины противоположащих параллельных ребер. Точка пересечения осей икосаэдра – это и есть его центр симметрии. У икосаэдра 15 осей симметрии



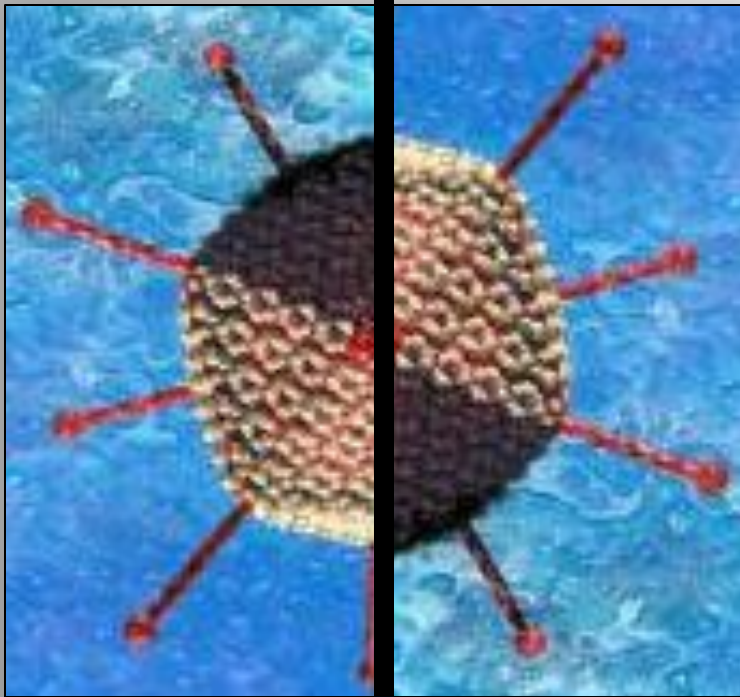


Плоскости симметрии проходят через четыре вершины, которые лежат в одной плоскости, и середины противоположных параллельных ребер. У икосаэдра 15 плоскостей симметрии

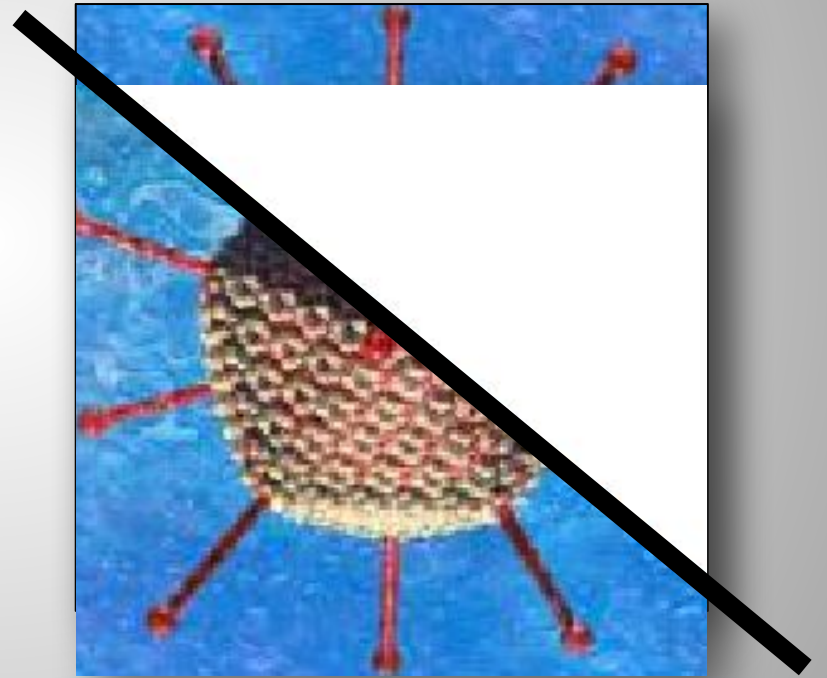


# Аденовирус симметричен

Зеркальная  
симметрия



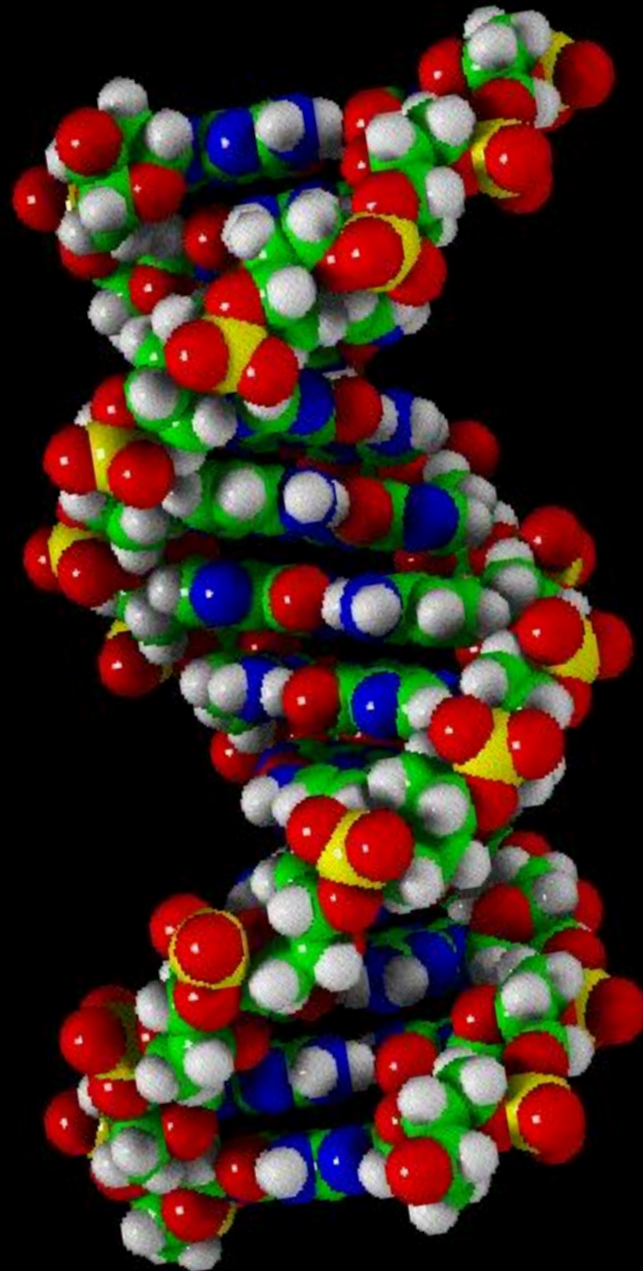
Осевая симметрия



Молекула ДНК представляет собой вращающийся куб. При повороте куба последовательно на  $72^\circ$  по определённой модели, получается икосаэдр.

Двойная нить спирали ДНК построена по принципу двухстороннего соответствия: за икосаэдром следует додекаэдр, затем опять икосаэдр. Это вращение через куб создаёт молекулу ДНК

# Модель молекулы полигогранников



декаэдр

# Вывод

В ходе нашего исследования мы выяснили, что с помощью многогранников можно научиться строить биологические модели, а также выяснили, что многогранники встречаются в окружающем нас мире чаще, чем мы думаем

# Симметрия кристаллов

*Симметрия кристаллов* – свойство кристаллов совмещаться с собой при поворотах, отражениях, параллельных переносах, либо при части или комбинации этих операций. Симметрия внешней формы кристалла определяется симметрией его атомного строения, которая обуславливает также и симметрию физических свойств кристалла

# Точечные группы симметрии кристаллов

*Точечные группы симметрии* - группы симметрии, операции которых оставляют хотя бы одну точку пространства на месте

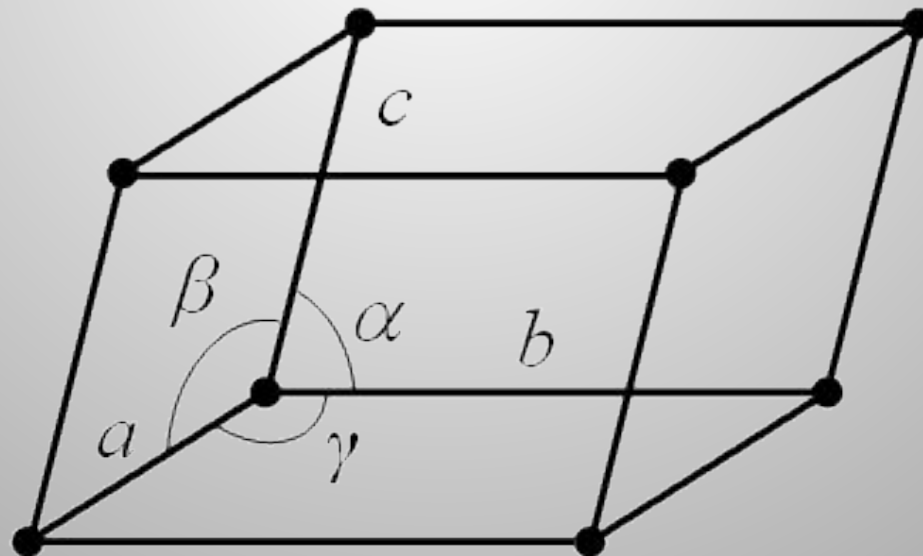
- группа линейных преобразований;
- группа вращений;
- зеркальная симметрия



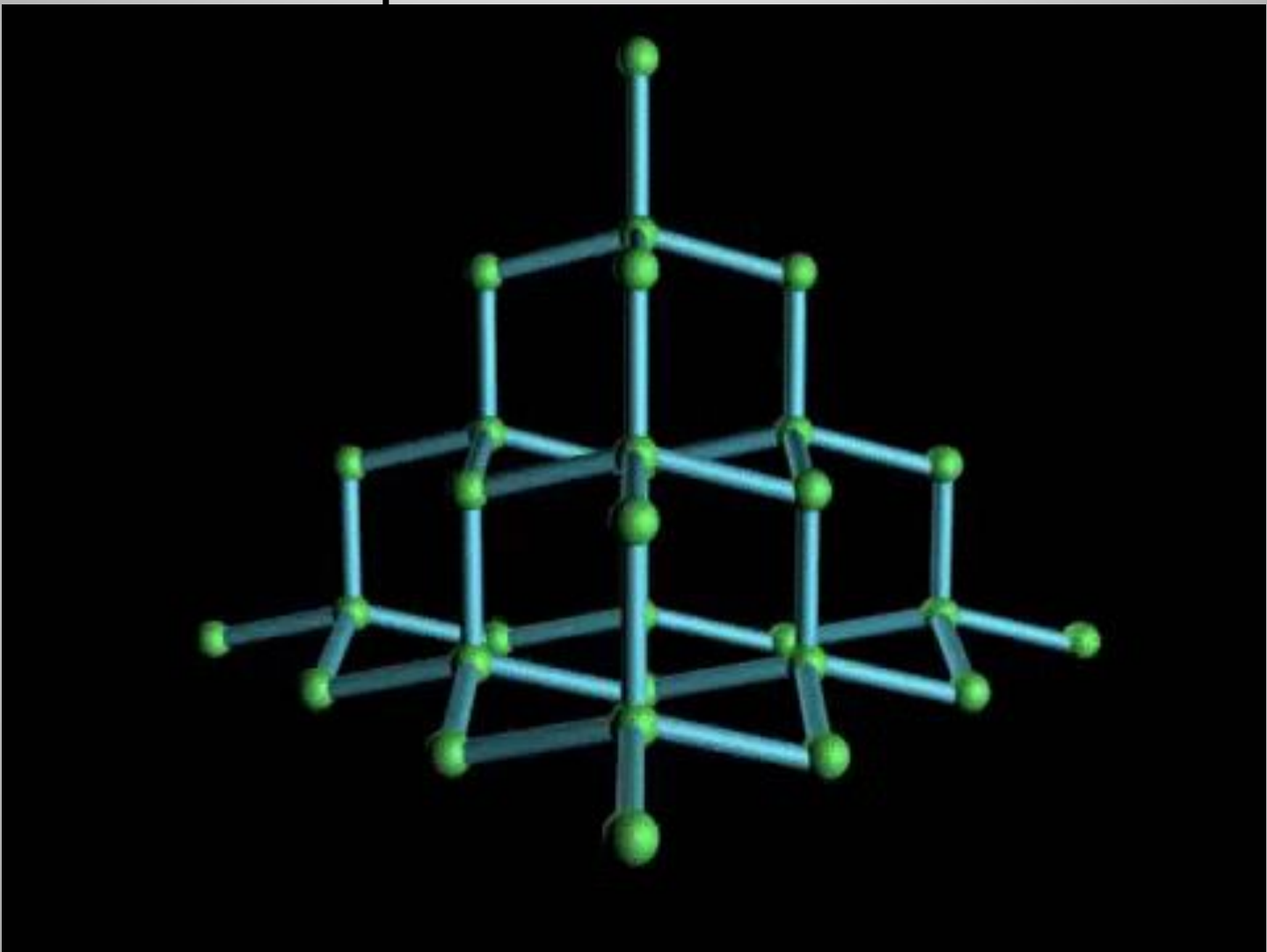
В элементарной ячейке может содержаться один атом (примитивная ячейка), или больше одного (сложная ячейка).

В общем случае элементарная ячейка имеет форму параллелепипеда и характеризуется параметрами:

- длина ребер **a, b, c**;
- углы между ребрами  **$\alpha, \beta, \gamma$**



При описании симметрии любого кристалла используется фундаментальное понятие его кристаллической решетки



Преобразования симметрии объекта —  
пространственные перемещения, совмещающие  
его самим собой.

Для кристаллических структур имеются 32  
точечные группы и 230 пространственных групп

# Идеальный кристалл

Идеальный кристалл — это математический объект, имеющий полную, свойственную ему симметрию, идеализированно ровные гладкие грани.

Идеальный кристалл можно построить путем бесконечного повторения в пространстве его структурной единицы (элементарной ячейки)

# Исследование

Мы решили воссоздать идеальный кристалл на примере природного при помощи моделирования и проверить его свойства симметрии с использованием его объемной модели

# Выращивание кристалла

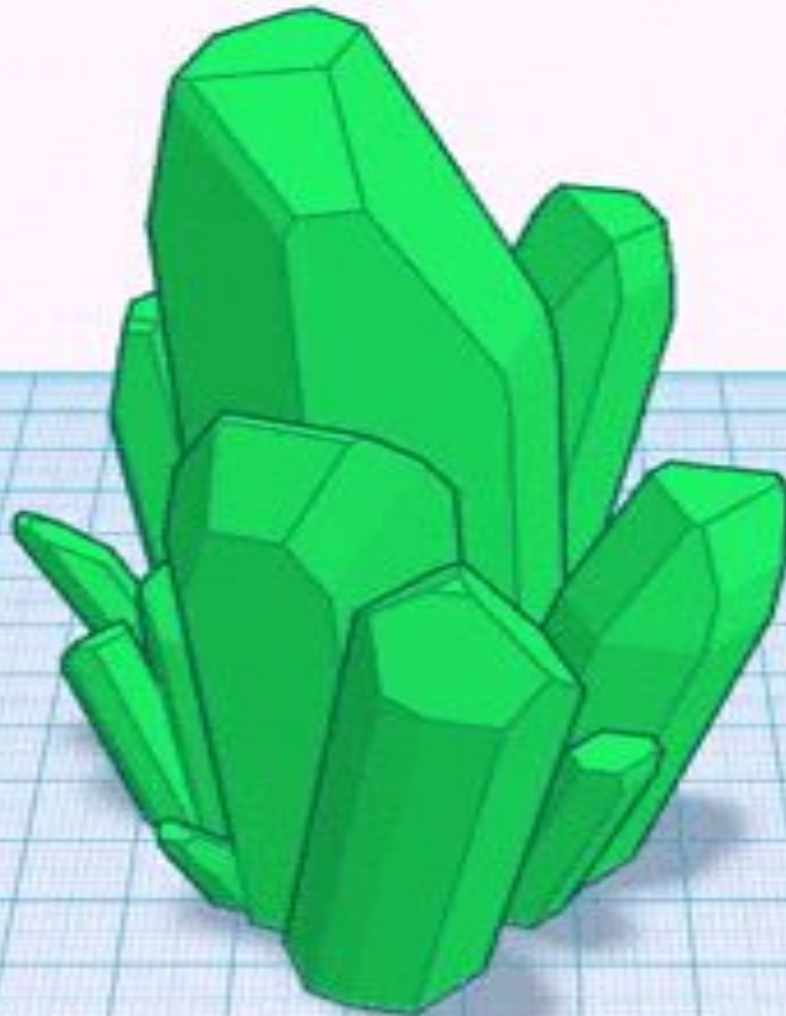


# Моделирование кристалла

В процессе моделирования мы использовали:

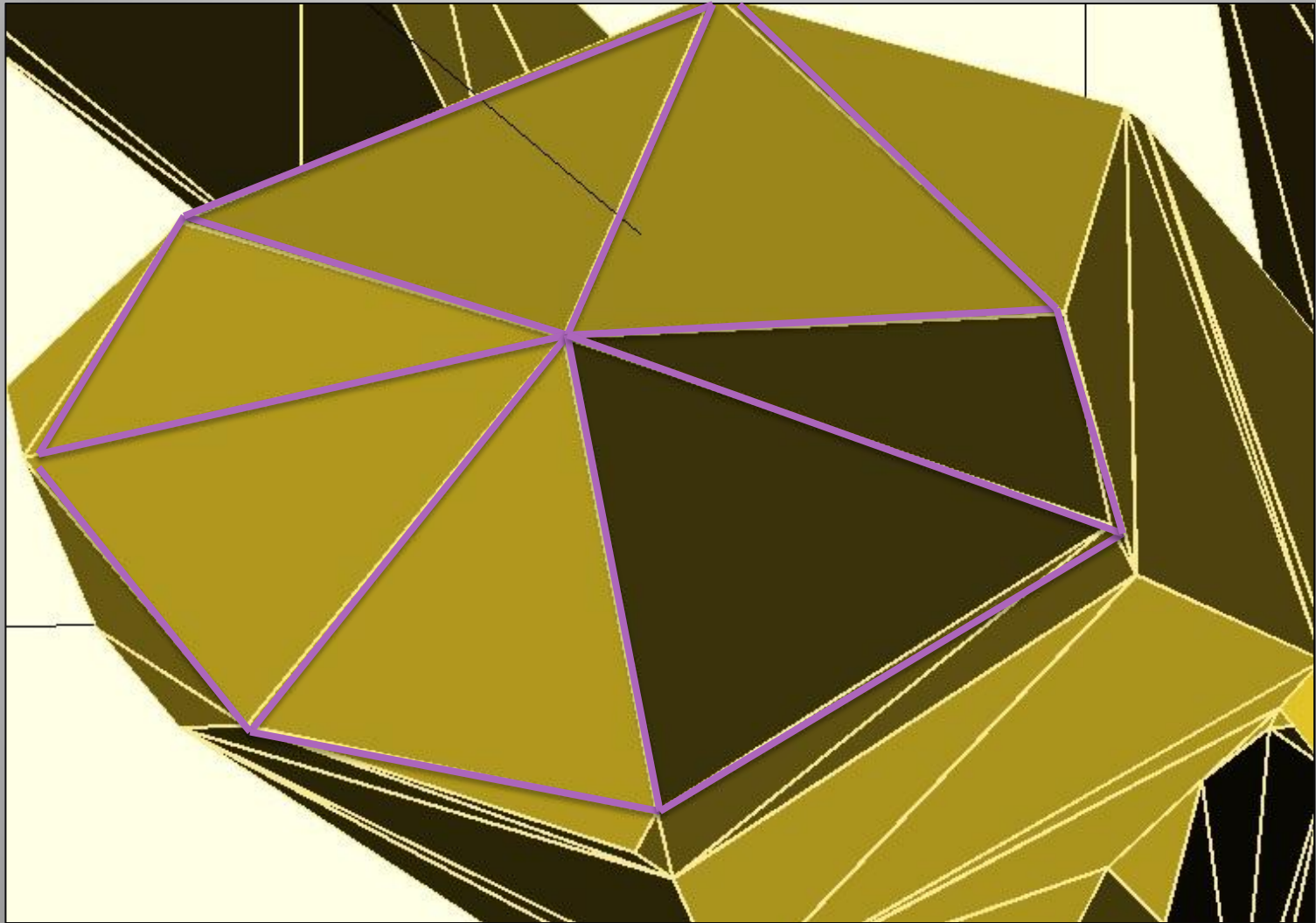
- программу «3D Crafter»;
- теоретические основы кристаллографии;
- природный кристалл

# 3D модель кристалла

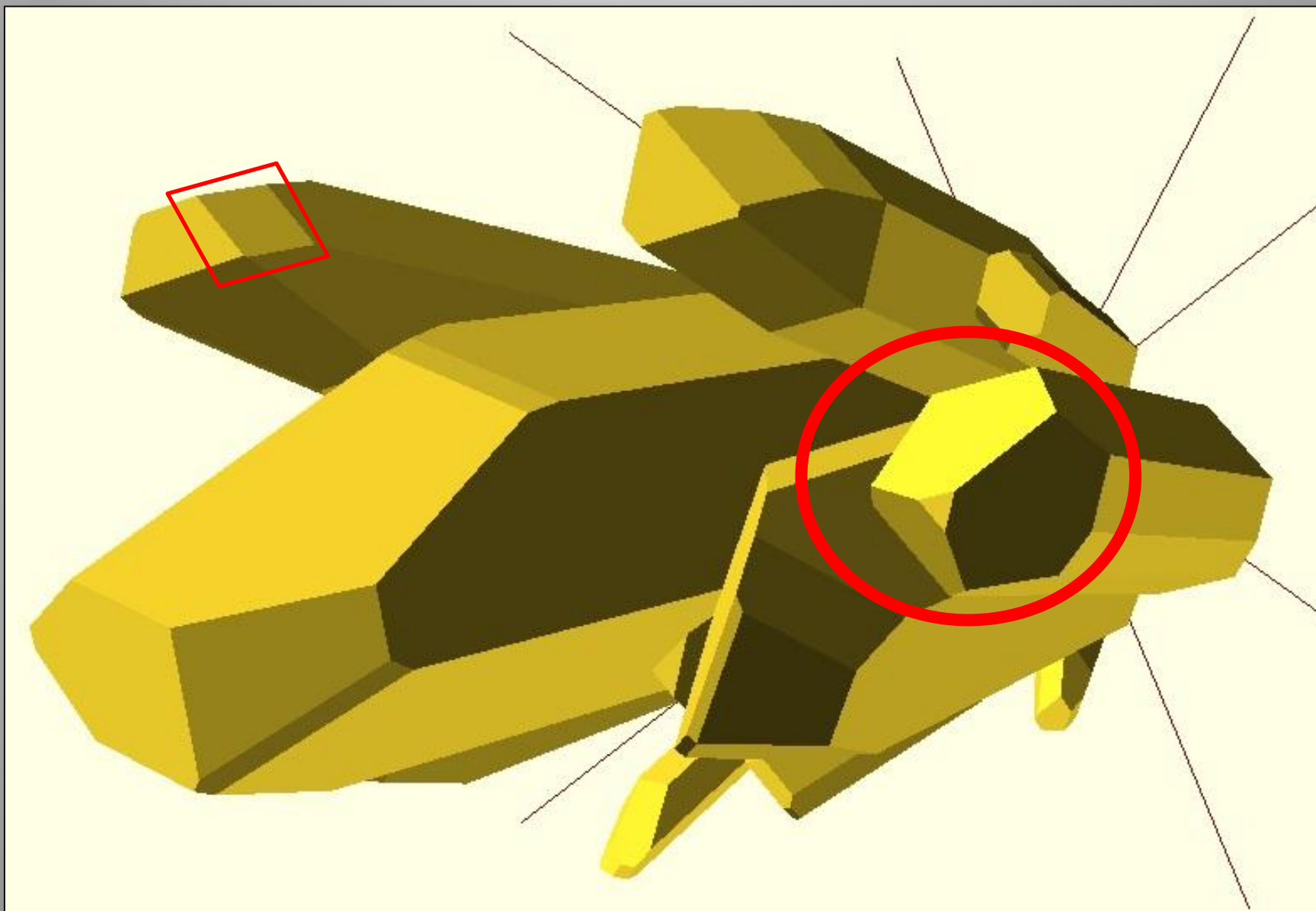




# Многогранники в кристалле

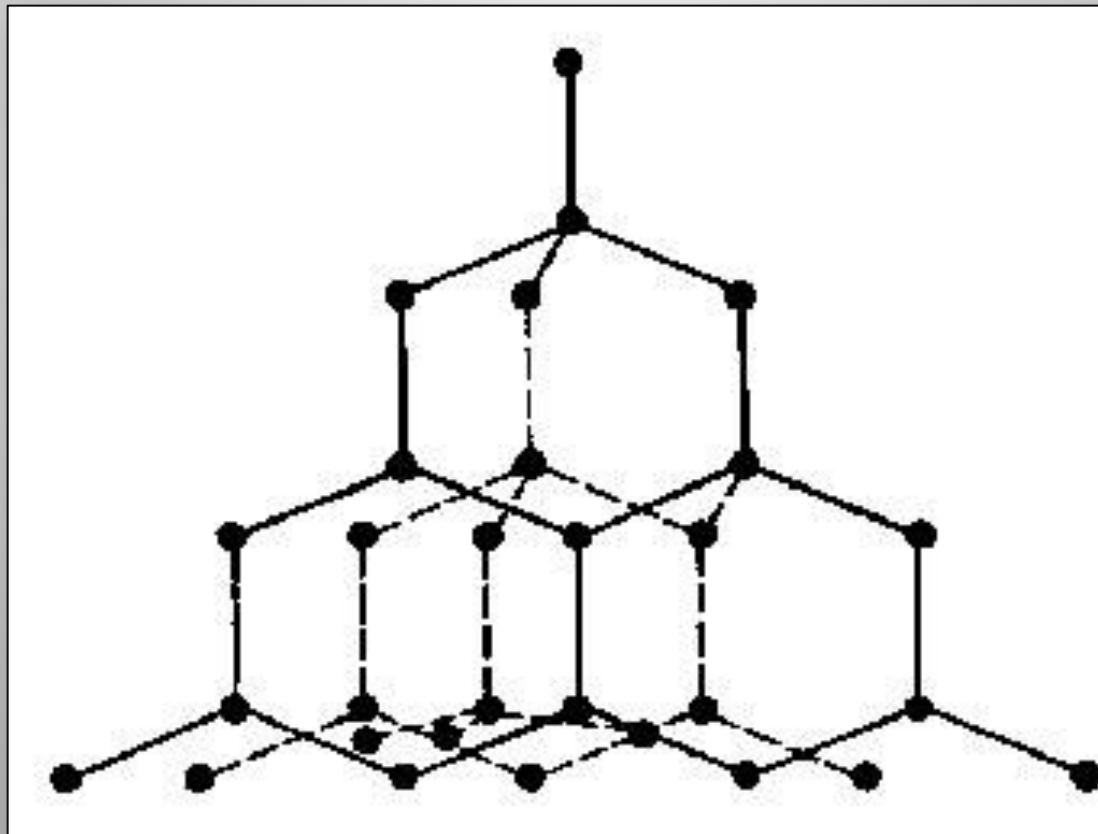


# Многогранники в кристалле



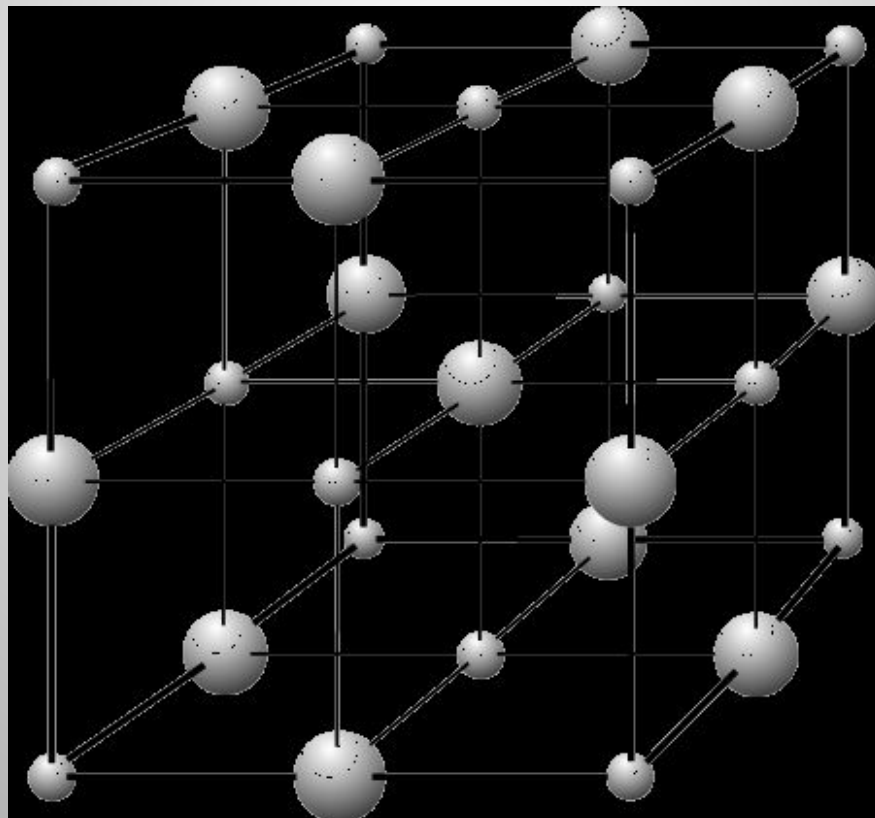
# Многогранники в кристаллах

Элементарная ячейка кристалла алмаза представляет собой тетраэдр, в центре и четырех вершинах которого расположены атомы углерода



# Многогранники в кристаллах

Кристаллическая решетка поваренной соли имеет форму куба (гексаэдра). Маленькие шарики – ионы натрия, большие – ионы хлора



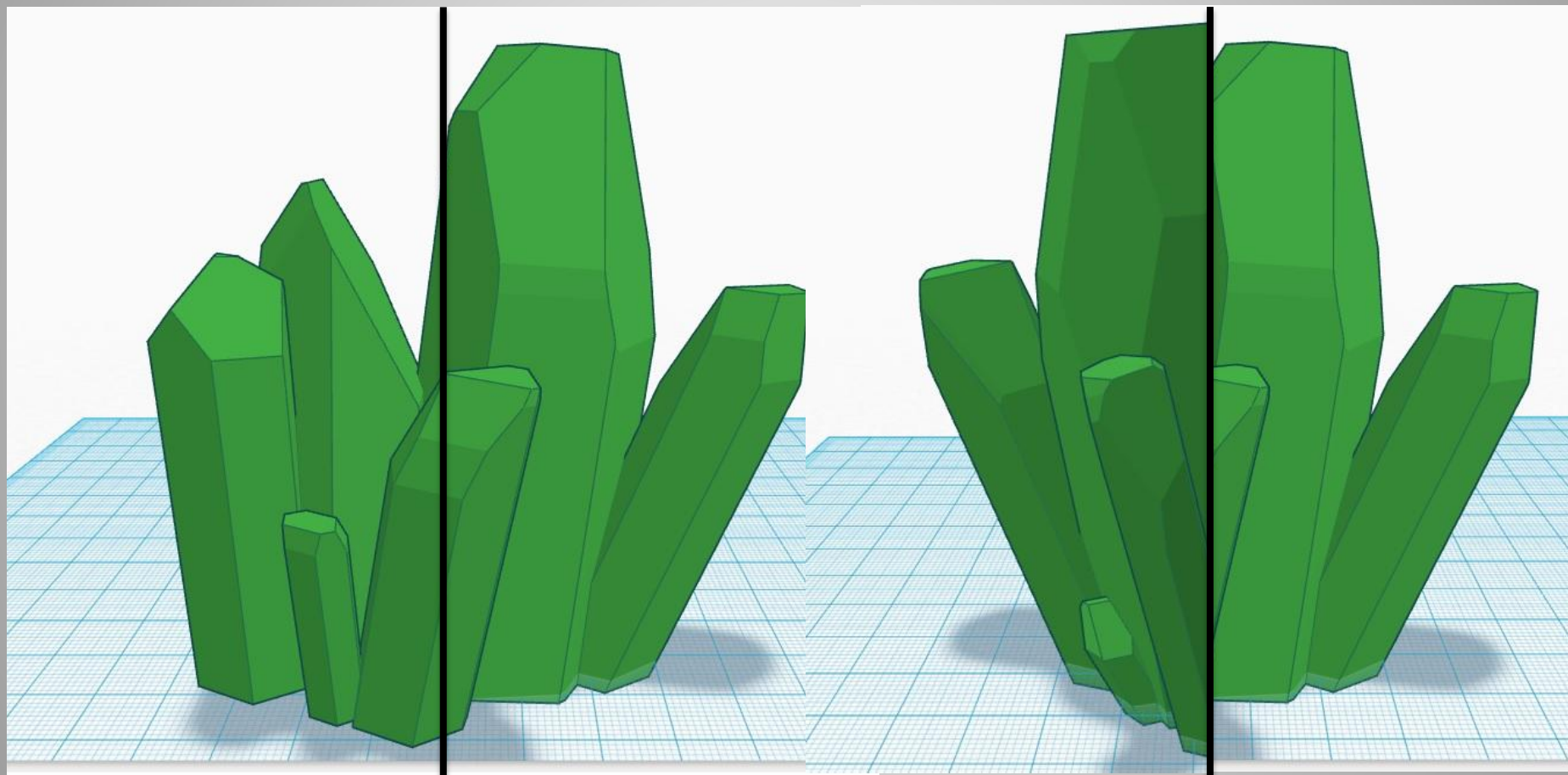
# Многогранники на 3D модели

На 3D модели мы обнаружили огромное количество многогранников:

- усеченный тетраэдр;
- треугольник;
- параллелограмм;
- прямоугольник;
- икосаэдр;
- усеченный октаэдр

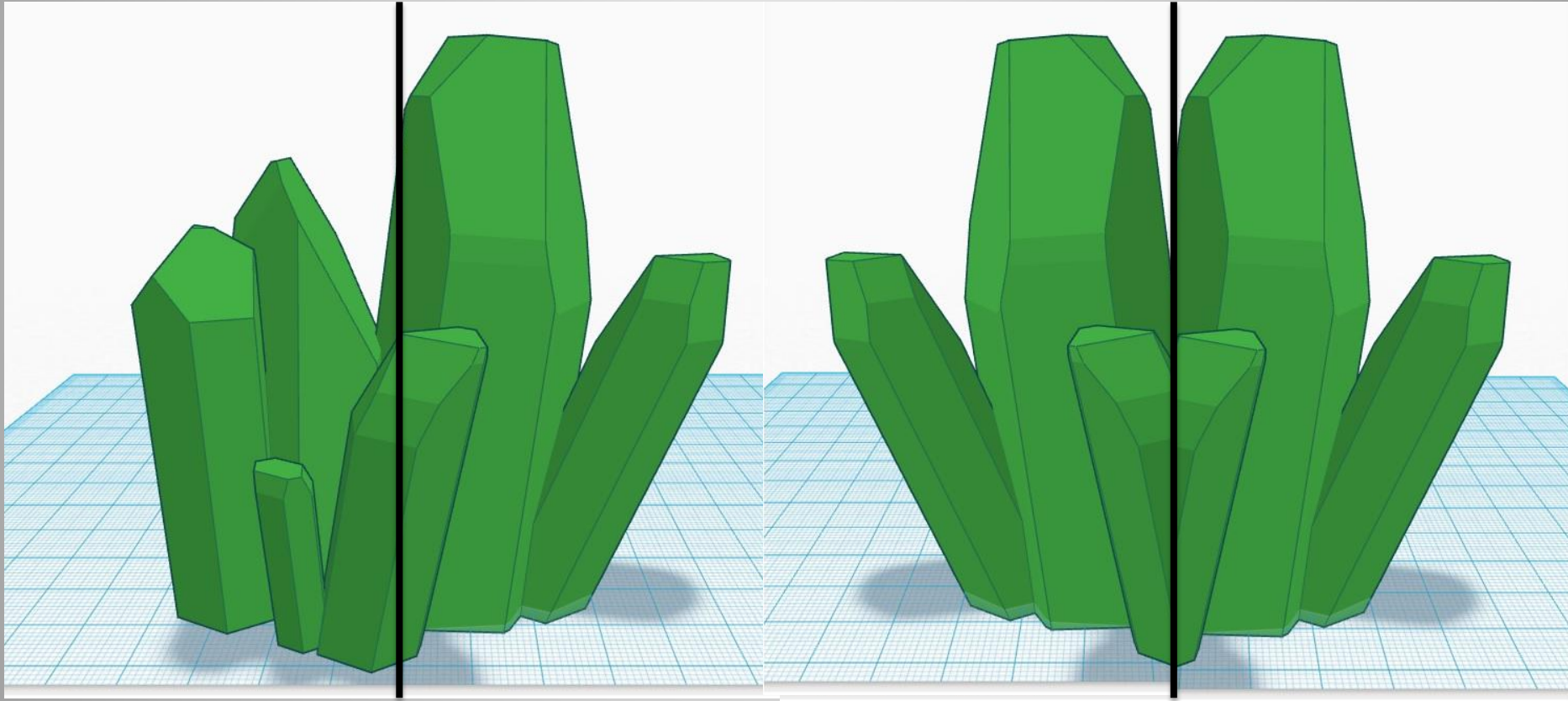
# Симметрия кристалла

## Поворот



# Симметрия кристалла

## Отражение



# Вывод

В ходе нашей работы мы выявили, что идеальные кристаллы имеют геометрически правильное внутреннее строение и образованы в виде выпуклых многогранников с плоскими гранями и прямыми рёбрами



# Многогранник Дюрера



«Меланхолия» — резцовая гравюра на меди немецкого художника Альбрехта Дюрера, законченная в 1514 году. Является одной из наиболее известных работ Дюрера, и выделяется сложностью и неочевидностью идеи, яркостью символов и аллегорий

# Альбрехт Дюрер



1471—1528гг.

— немецкий живописец и график, один из величайших мастеров западноевропейского Ренессанса.

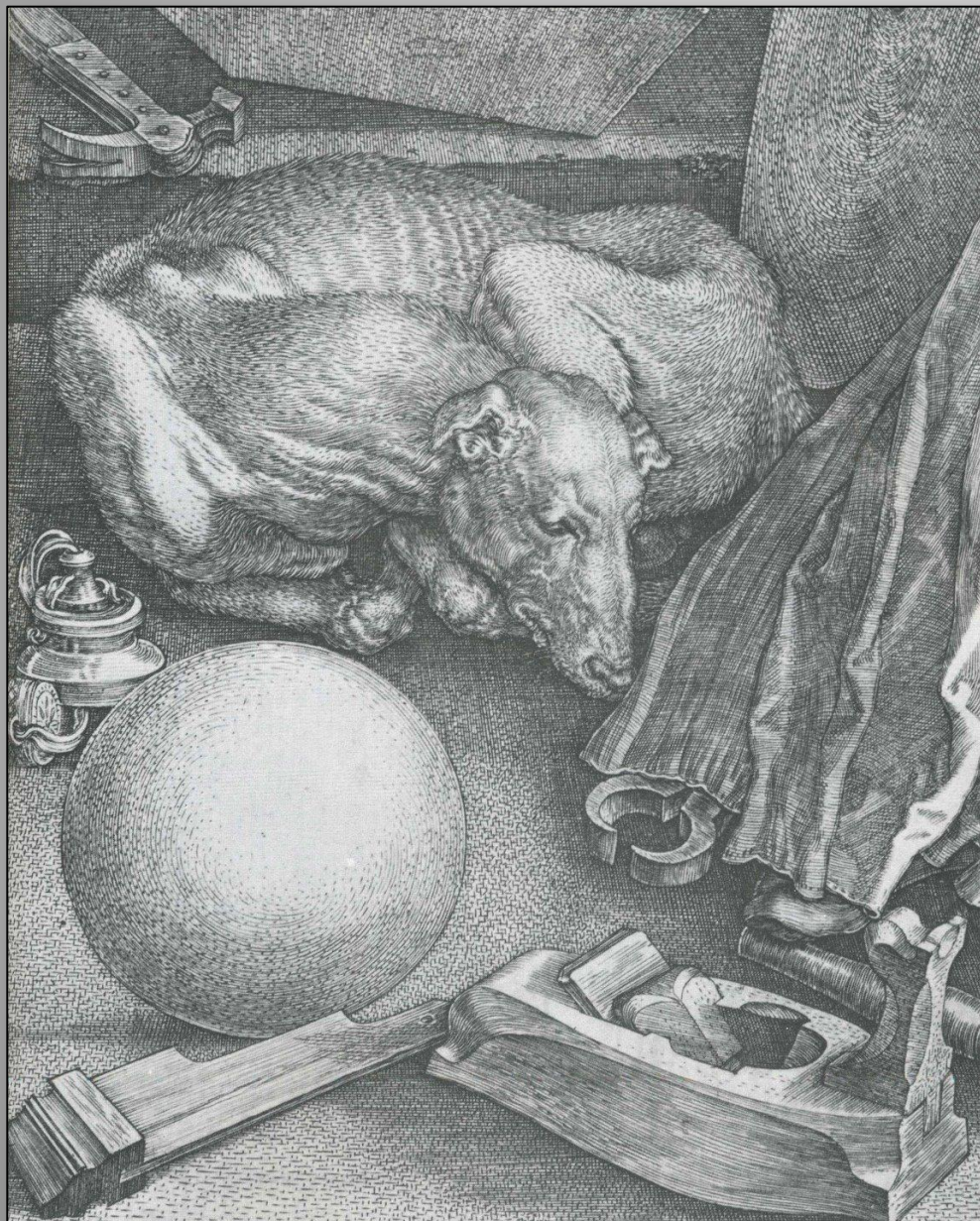
Изучал проблемы перспективы, занимался теоретическими вопросами изобразительного искусства

# Символы в гравюре



Считается, что на гравюре изображен автопортрет Дюрера и присутствует разделение на три яруса

# Первый ярус



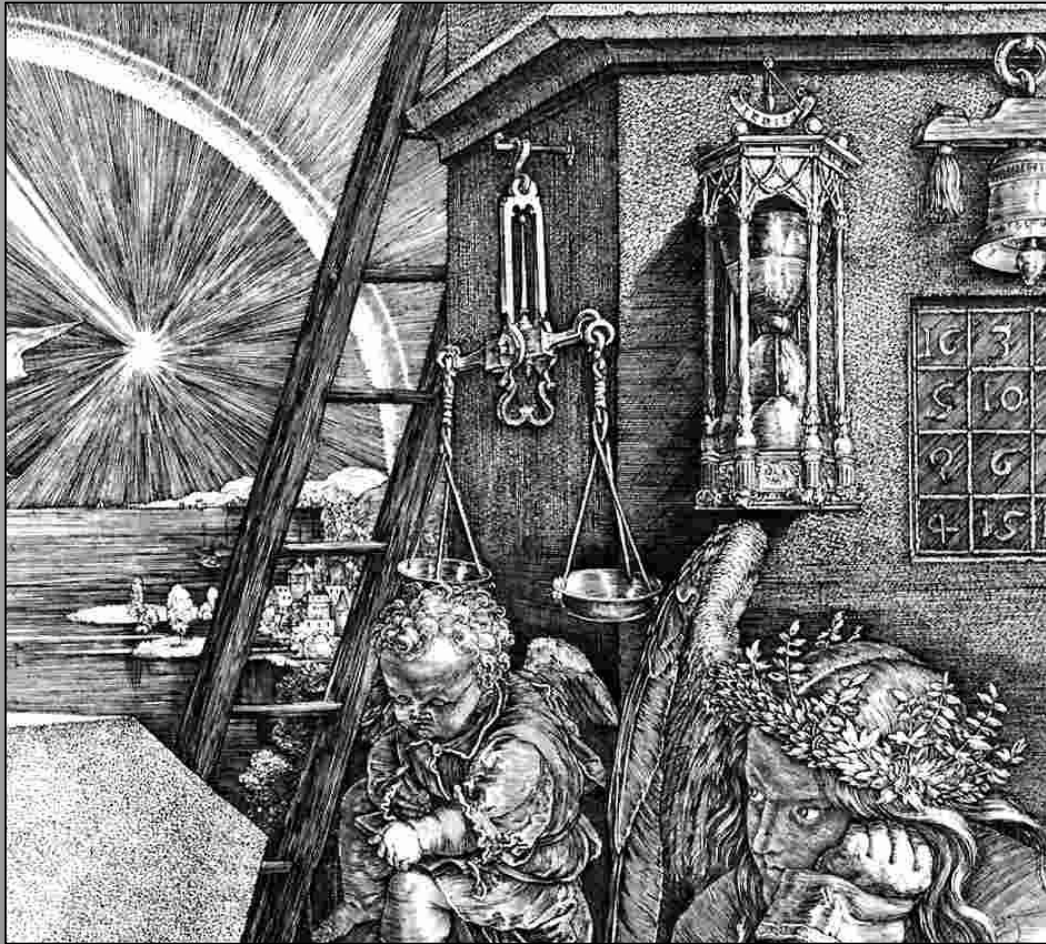
Ремесленный  
уровень, к которому  
относятся такие  
предметы ремесла,  
как рубанки,  
инструменты,  
идеально  
выточенный шар

# Второй ярус

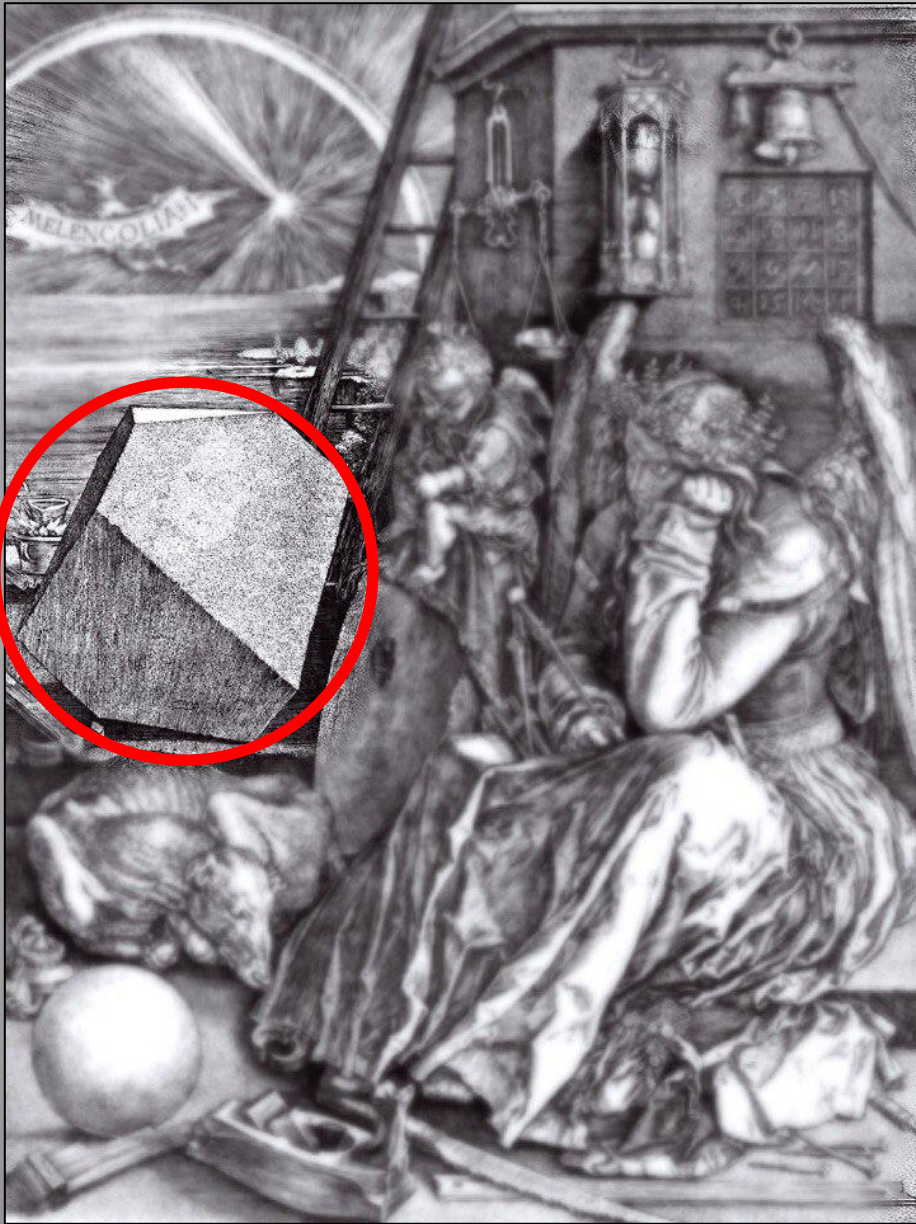


Интеллектуальное  
познание – циркуль,  
весы, песочные часы,  
магический квадрат

# Третий ярус

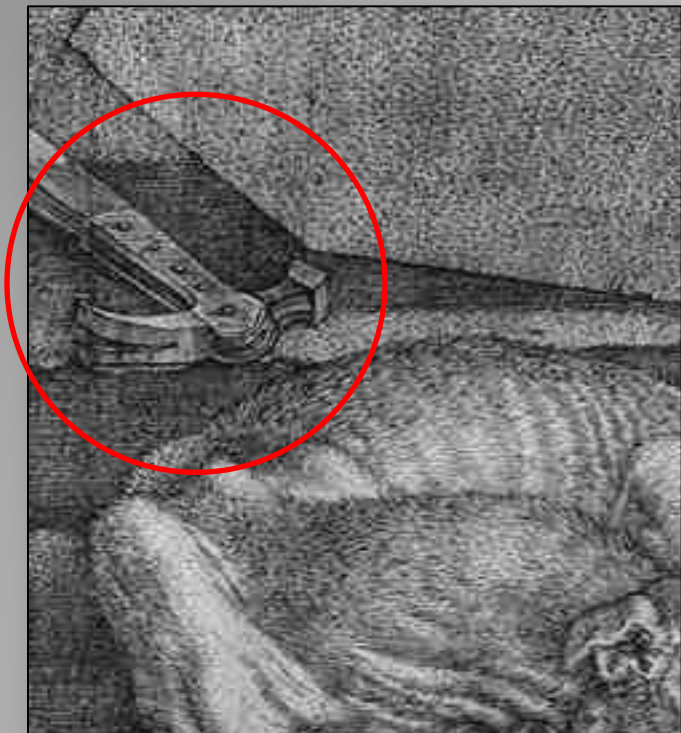


Третий ярус — непознаваемого и божественного. Лестница уходит в небо, за край гравюры, как и башня, у подножия которой сидит Ангел

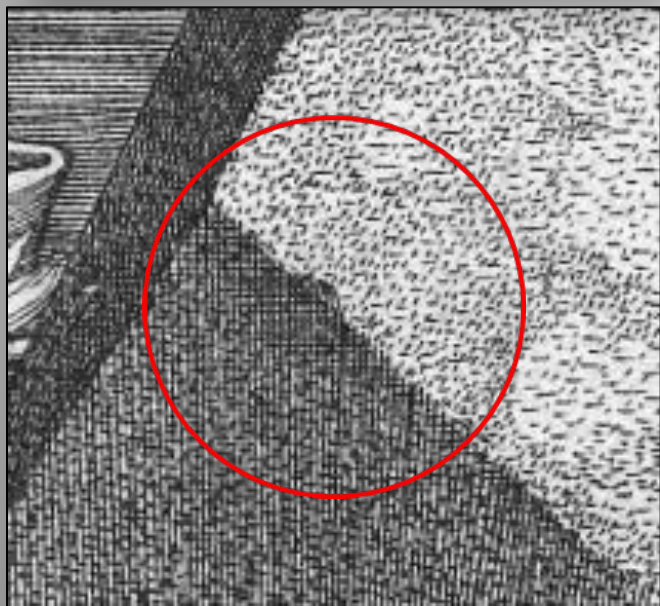


На заднем плане, позади центрального персонажа картины, каменный многогранник, сложной формы - композиционно уравновешивающий плечистую фигуру "Крылатого Гения"

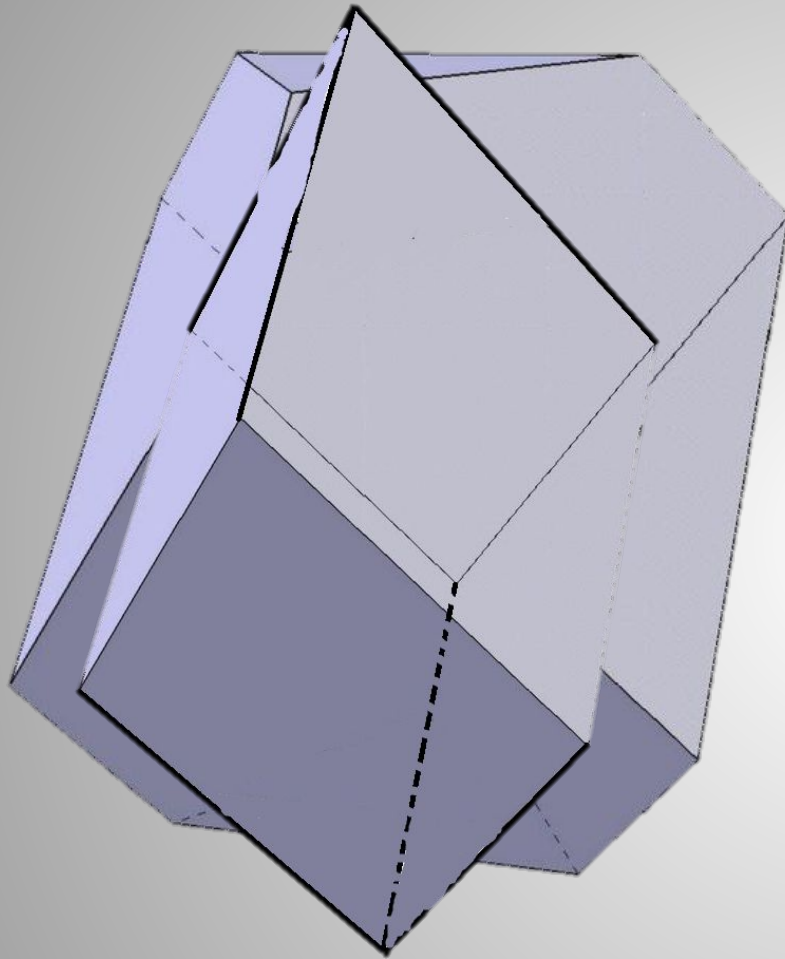




Форма камня рукотворна.  
Рядом с многогранником  
молоток. На гранях камня  
небольшие сколы.

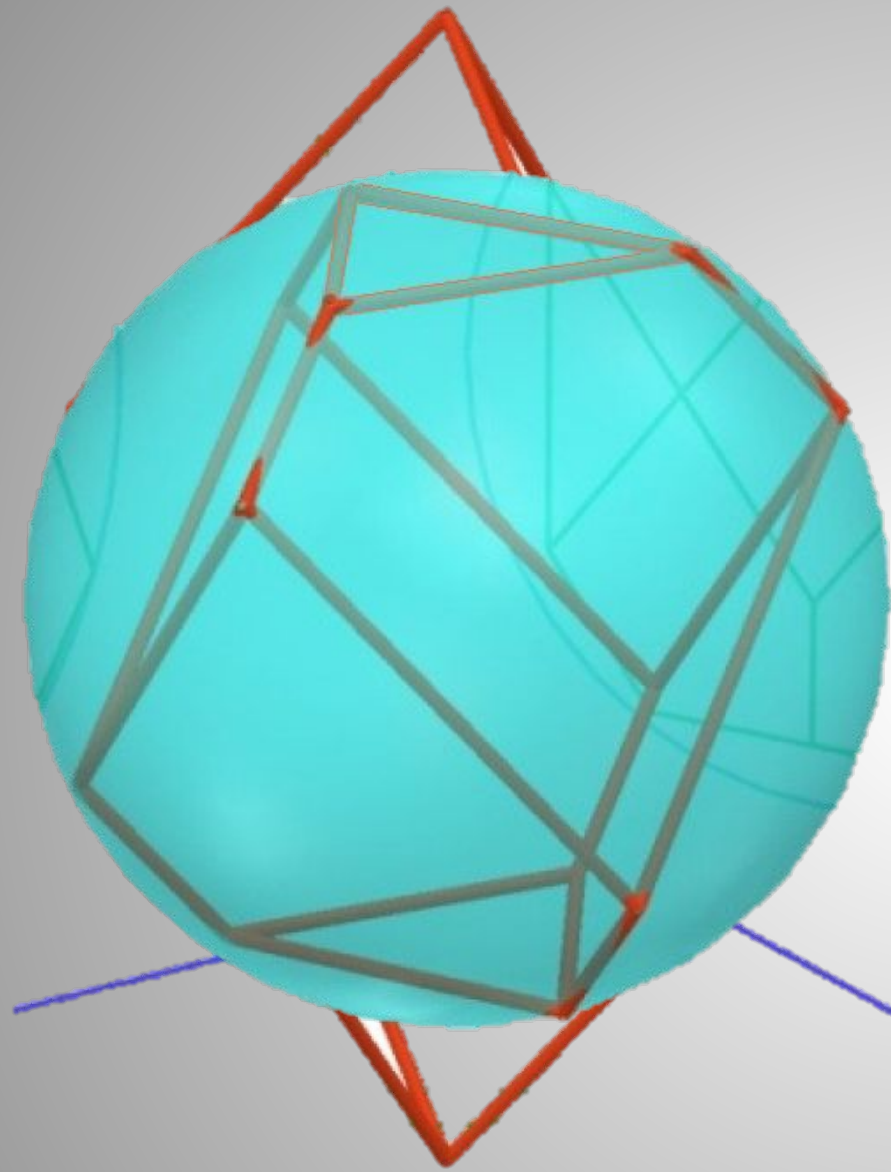


Исследователи считают, что  
многогранник состоит из  
обработанного флюорита,  
куска плавикового шпата



Многогранник Дюрера является выпуклым, состоит из шести одинаковых, имеющих осевую симметрию пятиугольников и двух равносторонних треугольников

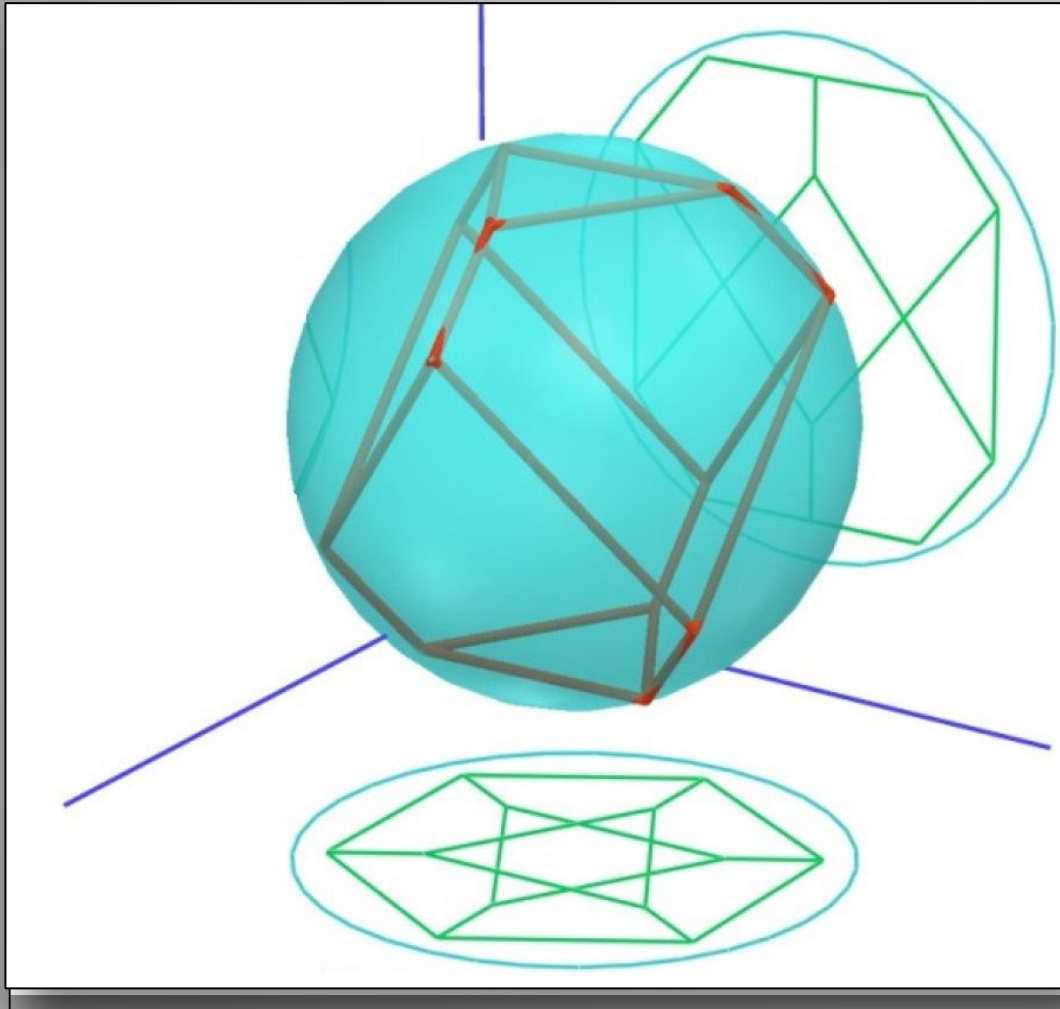
Исходник - шестигранный ромбоэдр, который является одновременно и косо́й призмой



Шесть из восьми углов  
лежат на общей описанной  
сфере, два пика  
выступают за пределы  
сферы.

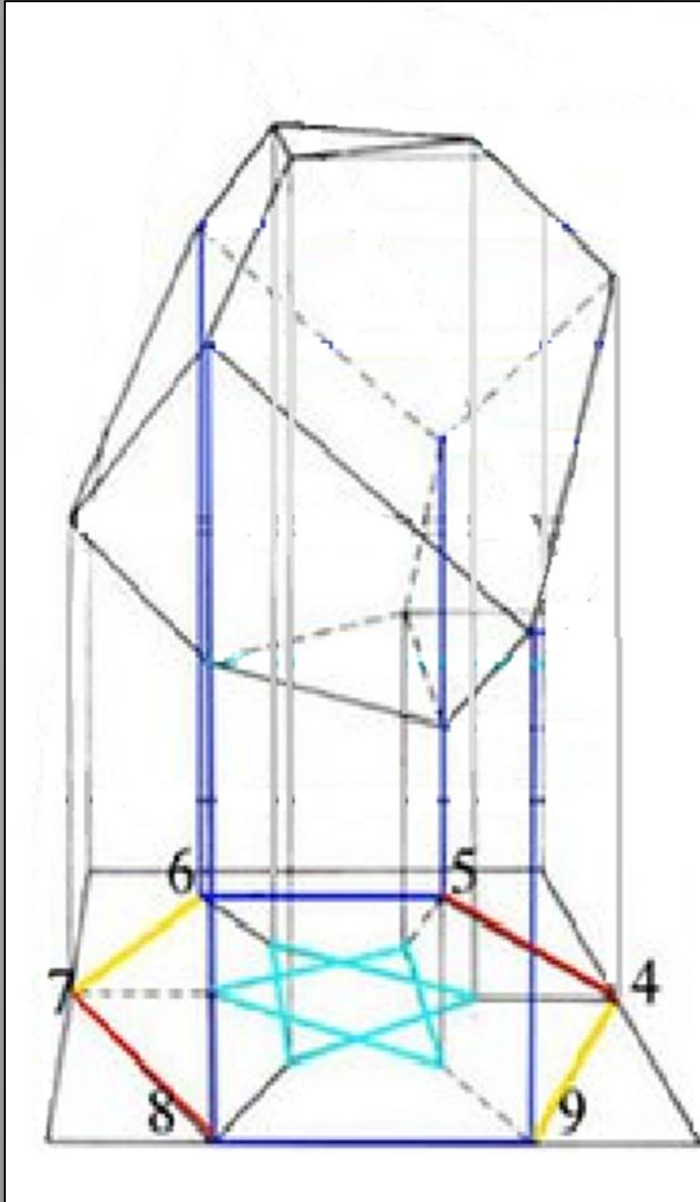
При отсечении пиков на  
одинаковой высоте в  
каждом случае  
появляются три новых  
угла

# Проекции

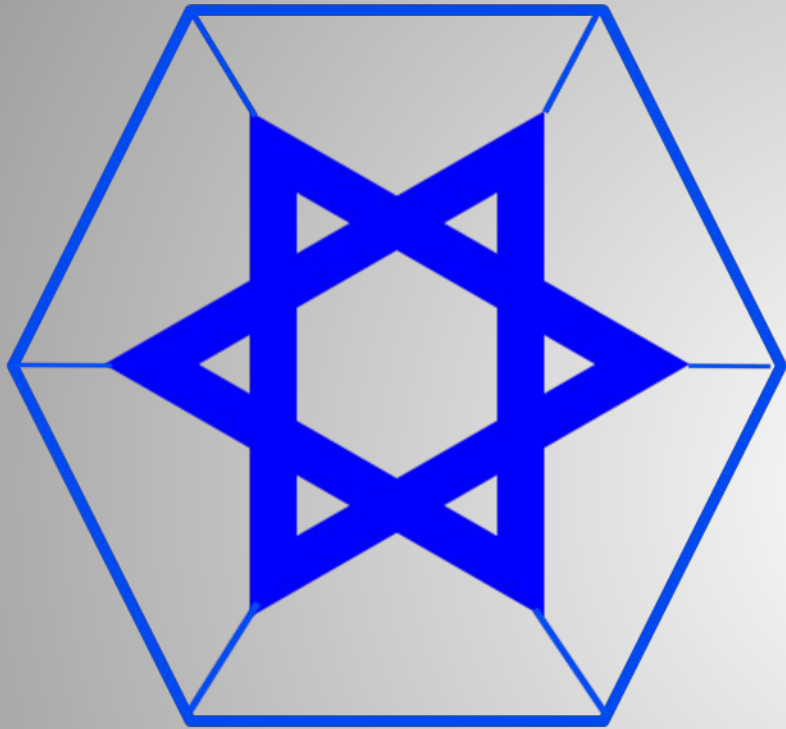


Доктор Эрнст Теодор Майер заметил, что проекция вершин многогранника на горизонтальную плоскость, образует звезду Давида, а боковая проекция прекрасно вписывается в "магический квадрат"

# Звезда Давида

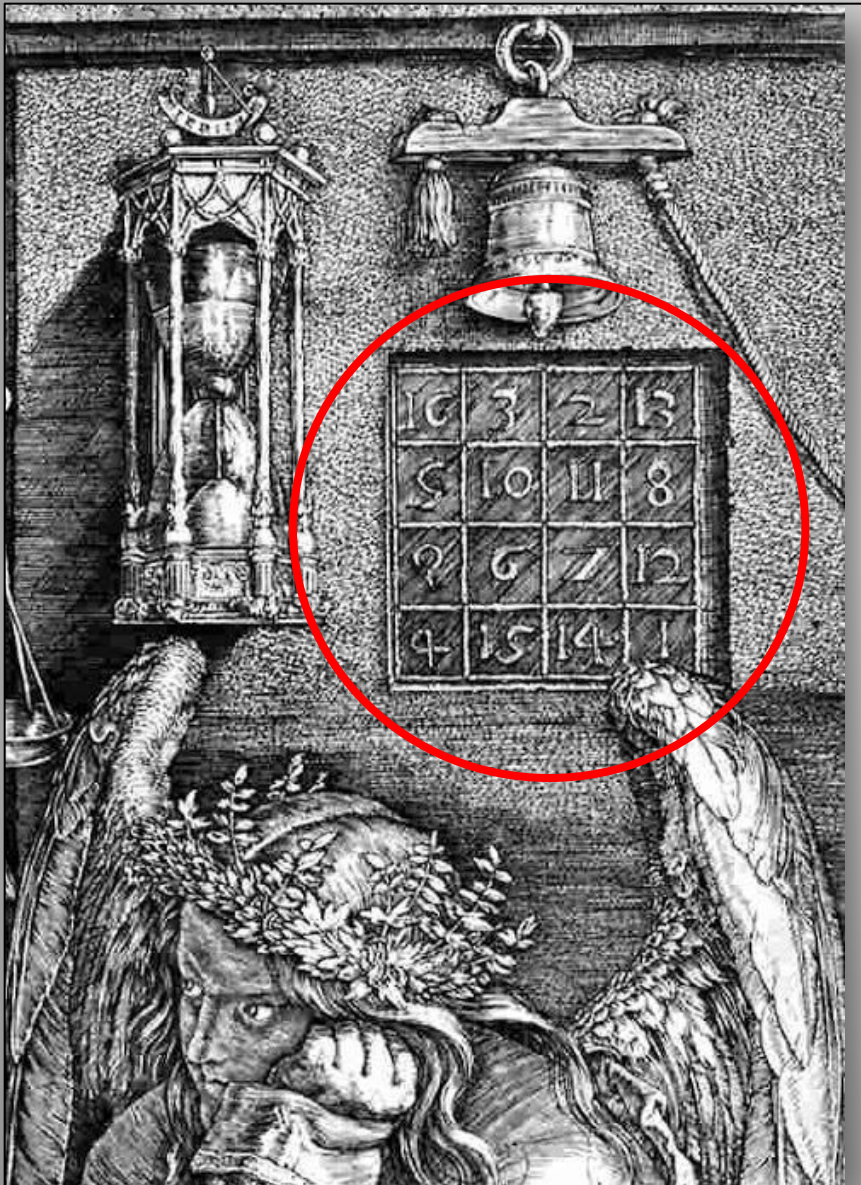


Звезда Давида — древний символ, эмблема в форме шестиконечной звезды (гексаграммы), в которой два одинаковых равносторонних треугольника (один развёрнут вершиной вверх, другой — вершиной вниз) наложены друг на друга



Звезда Давида  
олицетворяет все четыре  
первоосновы: огонь и  
воздух, воду и землю.  
Верхний угол одного из  
треугольников  
символизирует огонь, два  
других — воду и воздух

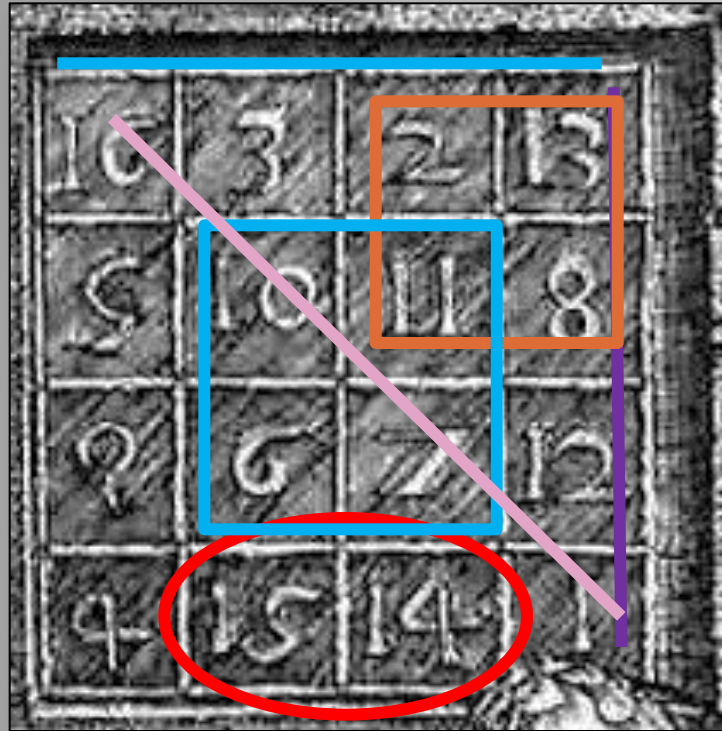
# Магический квадрат



Магический, или волшебный квадрат — это квадратная таблица  $n \times n$  (в данном случае  $4 \times 4$ ), заполненная числами таким образом, что сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях одинакова

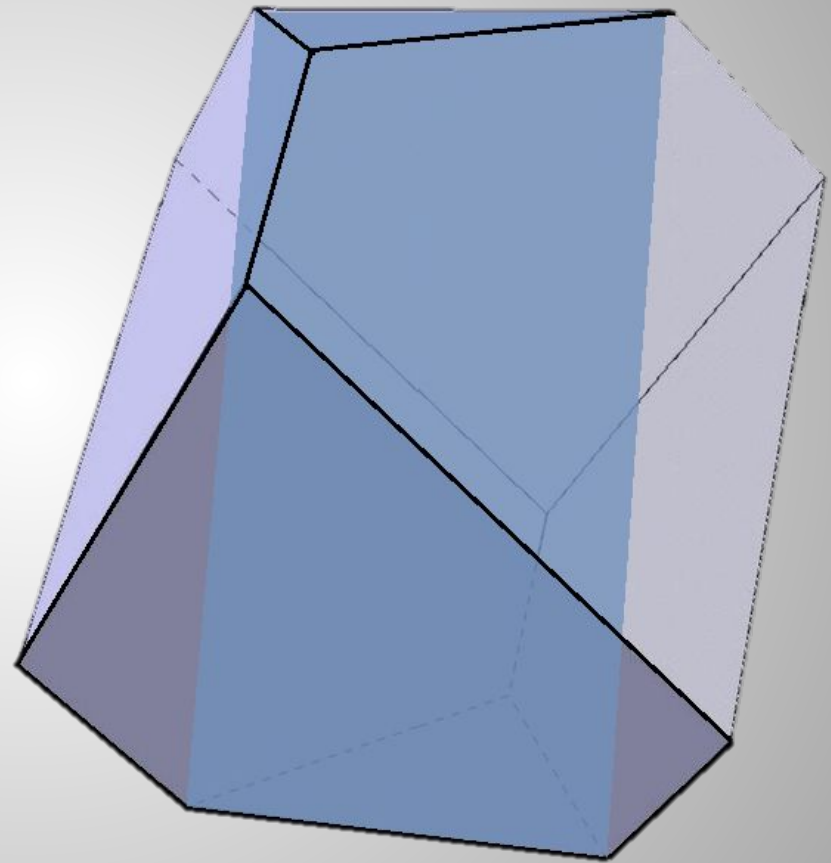
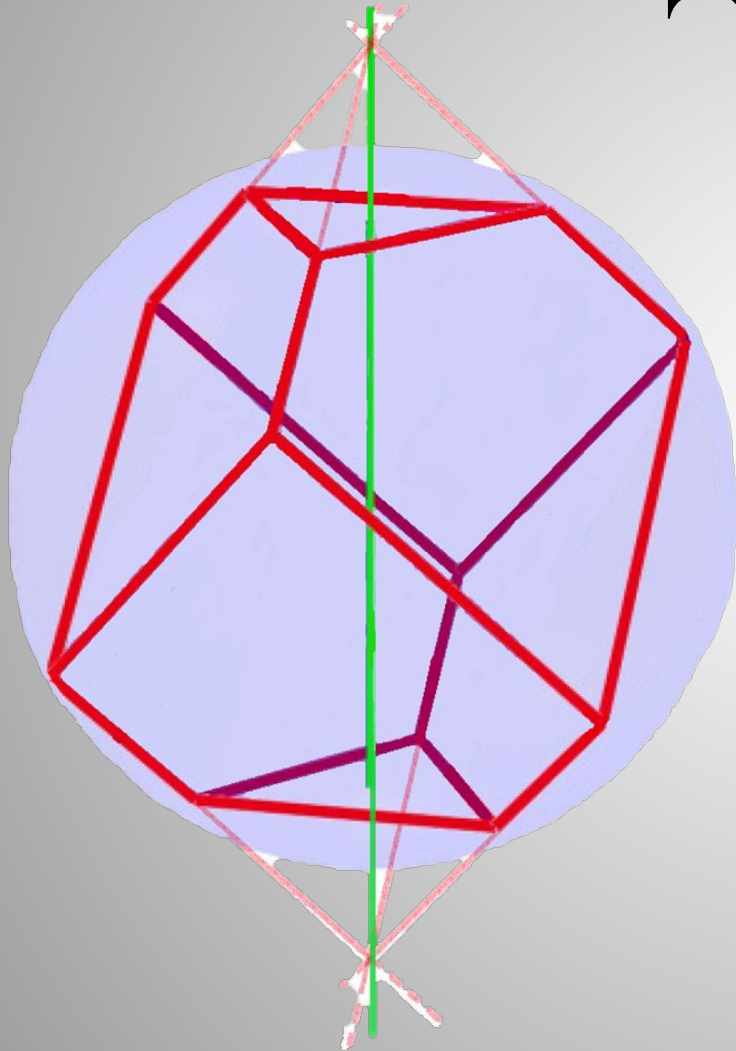
Магический квадрат  $4 \times 4$ , изображённый на гравюре, считается самым ранним в европейском искусстве.

Два средних числа в нижнем ряду указывают дату создания гравюры (1514). Сумма чисел на любой горизонтали, вертикали и диагонали равна 34

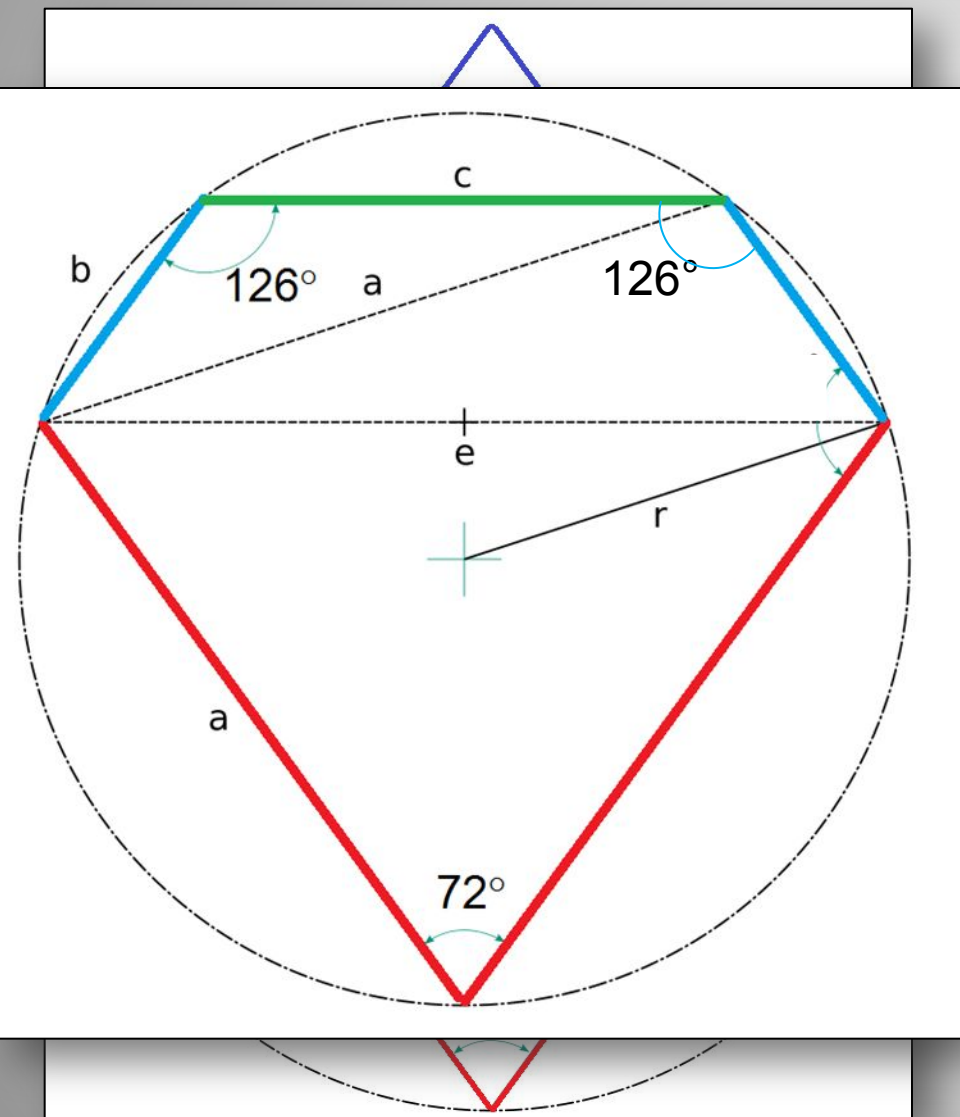




# Симметрия в многограннике Дюрера

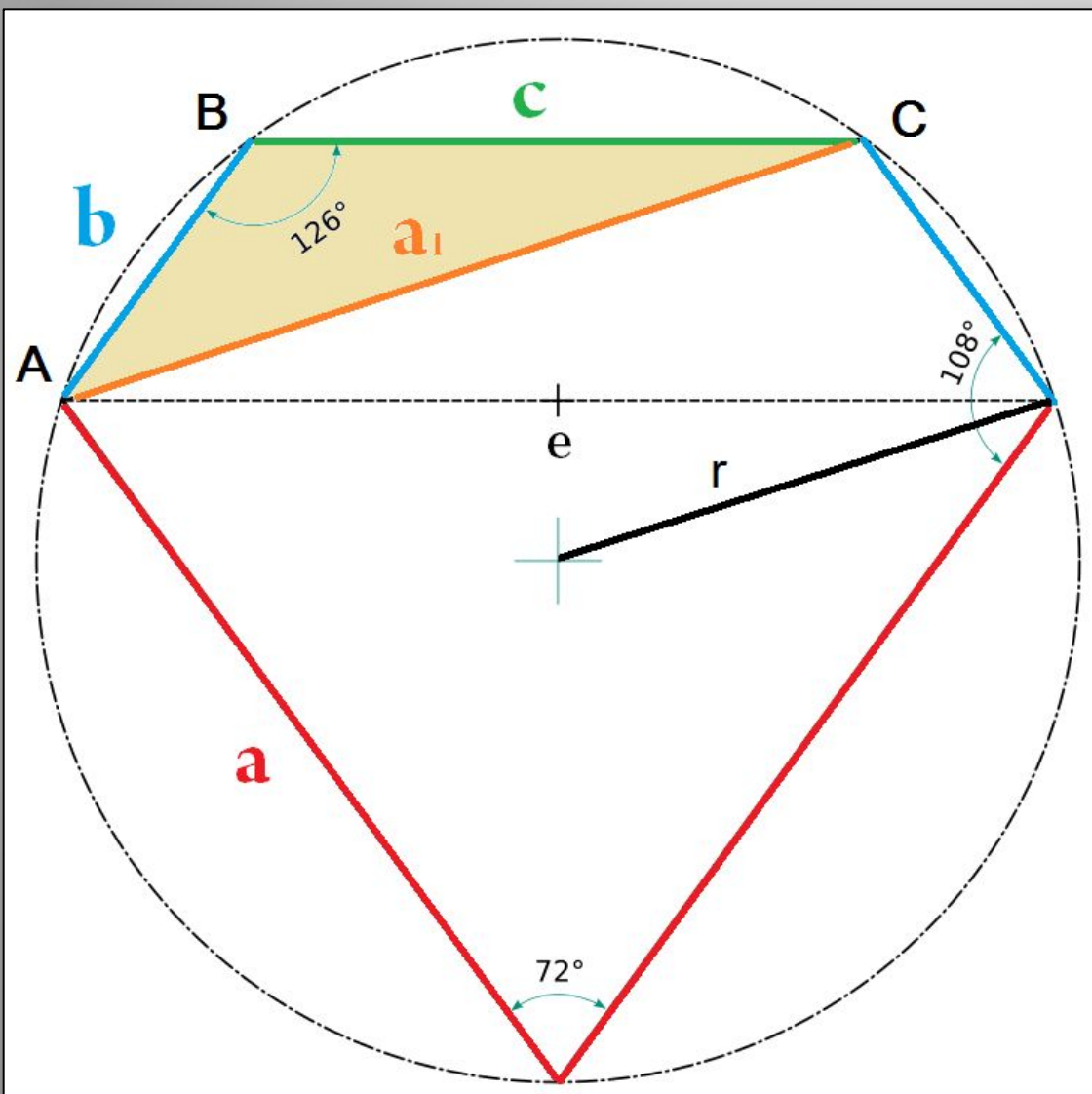


# Пятиугольные боковые грани многогранника Дюрера



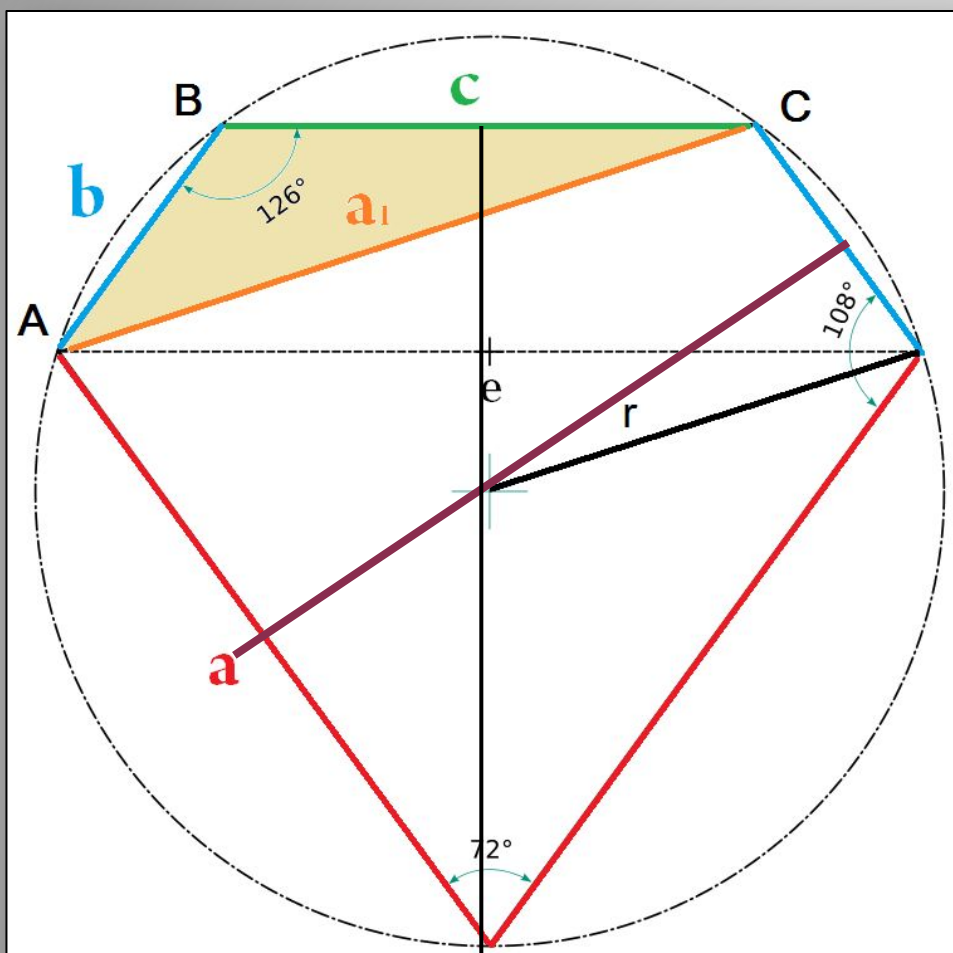
В результате отсечения ромбовидные грани многогранника Дюрера становятся пятиугольниками. Две грани пятиугольника остаются нетронутыми с углом  $72^\circ$  между ними, два других тупых угла равны  $126^\circ$

# Свойства пятиугольных боковых граней многогранника Дюрера



- Соотношения сторон в золотой пропорции:

$$\frac{a}{r} = \frac{r}{b} = \frac{e}{c}$$



Диагонали образуют со стороной **a** равнобедренную трапецию, ось которой не совпадает с осью пятиугольника

# Вывод

Многогранники присутствуют и в искусстве, играя важную роль в понимании смысла произведений. Каждый их элемент, каждый признак несет символическую нагрузку

# В ходе исследования мы

- изучили и исследовали историю изменения и развития понятия многогранника;
- рассмотрели виды симметрии многогранников;
- смоделировали «идеальный» дом и идеальный кристалл;
- сконструировали модель ДНК;
- нашли виды звездчатых многогранников в живой и «неживой» природе;
- обнаружили многогранники в искусстве и интерпретировали их символическую роль

# Вывод

Мы доказали, что многогранники являются неотъемлемой частью живой и «неживой» природы. С помощью них можно сконструировать биологические модели живых организмов, создать идеальный кристалл, стать архитектором и даже проанализировать картины разных эпох

Спасибо за внимание!