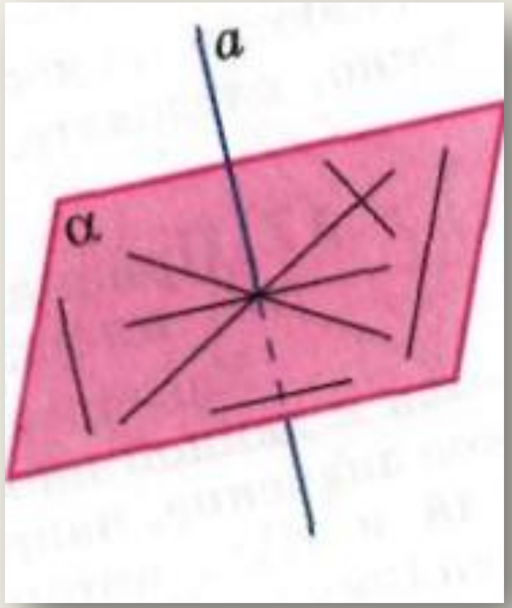
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Хуснутдинова Л.
Каледина Я.

Определение

Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости



Перпендикулярность прямой и плоскости обозначается как $a \perp \alpha$.

Теоремы

1. ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна плоскости. (рис. 1)

2. 1-ое СВОЙСТВО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.

Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой. (Рис. 2)

3. 2-ое СВОЙСТВО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.

Если две прямые перпендикулярные к плоскости, то они параллельны. (рис. 2)

4. 3-е СВОЙСТВО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.

Через любую точку пространства проходит
прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна. (рис. 3)

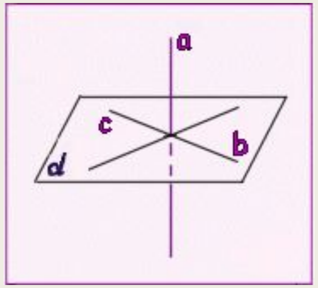


Рис. 1

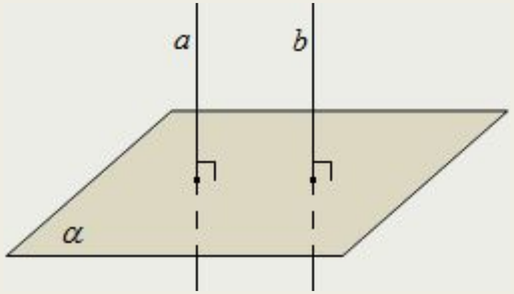


Рис. 2

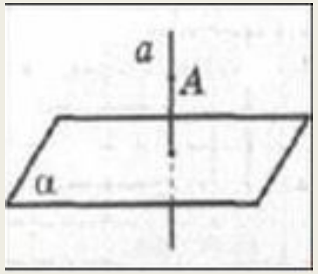
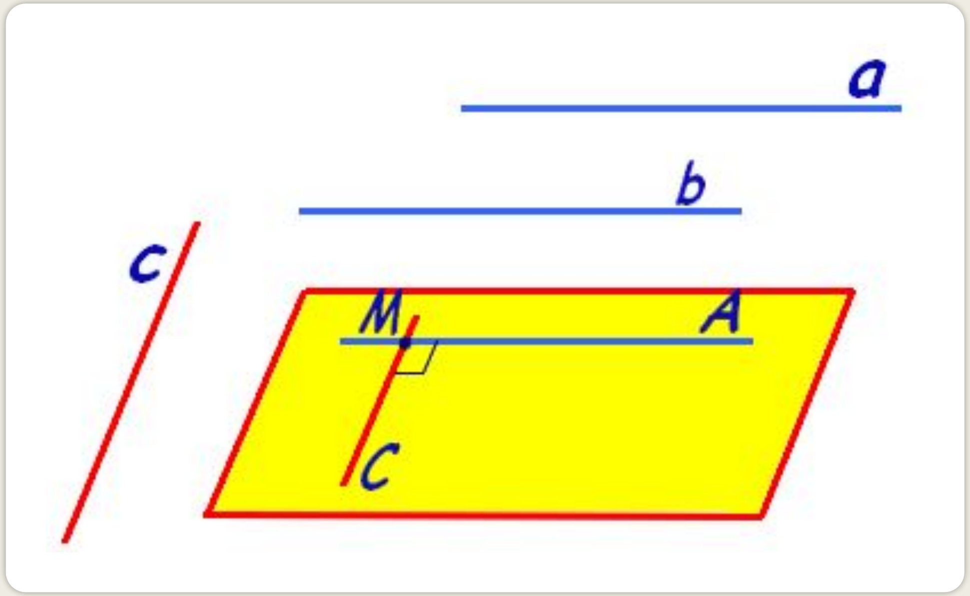


Рис.3

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.



Доказательство леммы

Дано: $a \parallel b$; $a \perp c$

Доказать: $b \perp c$

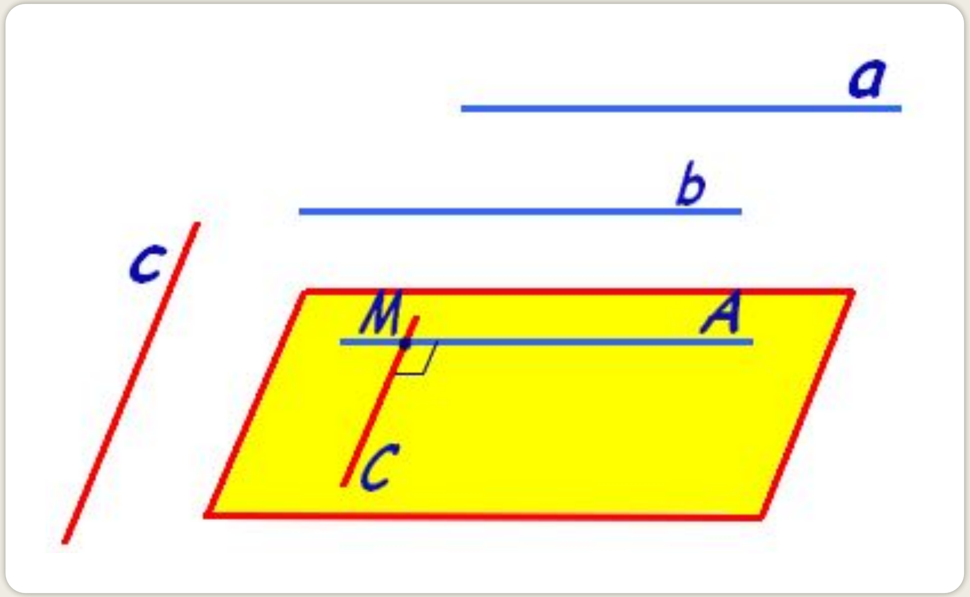
Доказательство:

Проведем $CM \parallel c$, $MA \parallel a$.

Так как $a \perp c$, то $\angle AMC = 90$

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \text{ (по условию)} \\ MA \parallel a \text{.(по построению)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

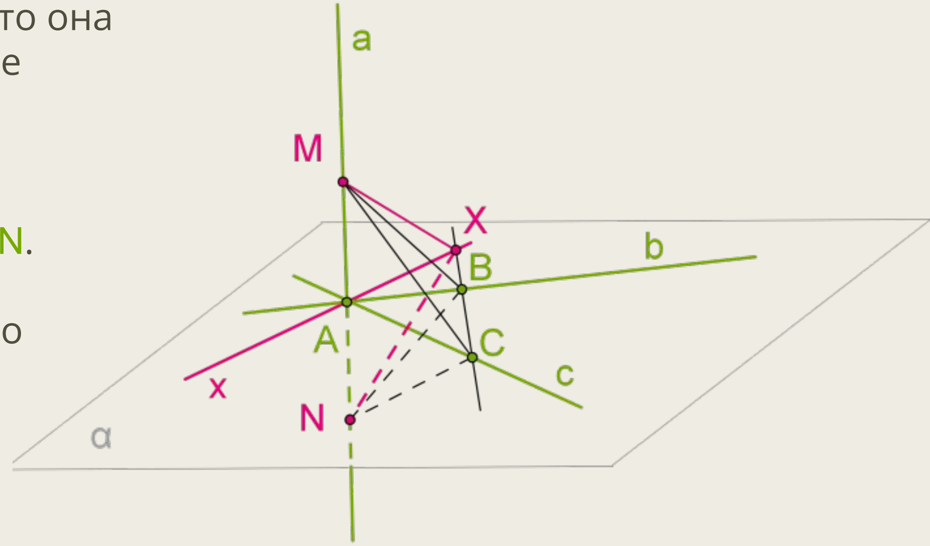
$$\left.\begin{array}{l} MA \parallel b,\ MC \parallel c \\ MA \perp MC \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp c$$



Доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть a — прямая, перпендикулярная прямым b и c в плоскости. Проведём прямую a через точку A пересечения прямых b и c. Докажем, что прямая a перпендикулярна плоскости, то есть каждой прямой в этой плоскости.

1. Проведём произвольную прямую x через точку A в плоскости и покажем, что она перпендикулярна прямой a. Проведём в плоскости произвольную прямую, не проходящую через точку A и пересекающую прямые b, c и x. Пусть точками пересечения будут B, C и X.



2. Отложим на прямой a от точки A в разные стороны равные отрезки AM и AN.

3. Треугольник MCN равнобедренный, так как отрезок AC является высотой по условию теоремы и медианой по построению (AM=AN). По той же причине треугольник MBN тоже равнобедренный.

4. Следовательно, треугольники MBC и NBC равны по трём сторонам.

5. Из равенства треугольников MBC и NBC следует равенство углов MBX и NBX и, следовательно, равенство треугольников MBX и NBX по двум сторонам и углу между ними.

6. Из равенства сторон MX и NX этих треугольников заключаем, что треугольник MXN равнобедренный. Поэтому его медиана XA является также высотой. А это и значит, что прямая x перпендикулярна a. По определению прямая a перпендикулярна плоскости.

Задача №1

Прямая *PQ* параллельна плоскости α . Через точки *P* и *Q* проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α, которые пересекают эту плоскость соответственно в точках *P1* и *Q1*. Докажите, что *PQ = P1Q1*.

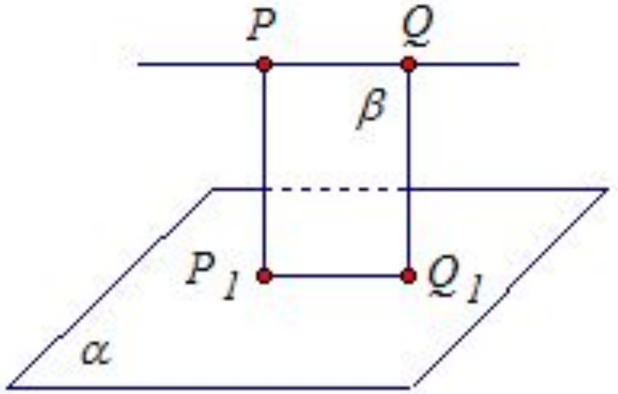
Дано: $PQ \parallel \alpha$,

$PP_1 \perp \alpha$

$QQ_1 \perp \alpha$

$P_1, Q_1 \in \alpha$

Доказать: $PQ = P_1Q_1$



Доказательство:

Две прямые *PP1* и *QQ1* перпендикулярны к одной и той же плоскости α. Значит, эти прямые параллельны между собой. Пусть через них проходит плоскость β. В плоскости β прямые *PQ* и *P1Q1* параллельны, так как по условию *PQ* параллельна α.

Рассмотрим прямоугольник *PP1Q1Q*. В прямоугольнике *PP1Q1Q* противоположные стороны равны, значит, *PQ = P1Q1*, что и требовалось доказать.

Задача№2

Через точки *P* и *Q* прямой *PQ* проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие ее соответственно в точках *P1* и *Q1*.Найдите *P1Q1*, если *PQ* = 15см., *PP1*= 21,5 см., *QQ1*= 33,5 см.

Дано: $PP_1 \perp \alpha$; $PP_1 = 21{,}5$ см

$QQ_1 \perp \alpha$; $QQ_1 = 33{,}5$ см

$PQ = 15$ см

Найти: P_1Q_1

Решение:

Две прямые *PP1* и *QQ1* перпендикулярны к одной и той же плоскости α. Значит, прямые *PP1* и *QQ1* параллельны. Значит, через них проходит единственная плоскость *PQQ1P1*. Прямая *PP1* перпендикулярная плоскости α, а значит и прямой *P1Q1*. Так как прямые *PP1* и *QQ1* параллельны, а угол *PP1Q1* прямой, то четырехугольник *PP1Q1Q* - прямоугольная трапеция.

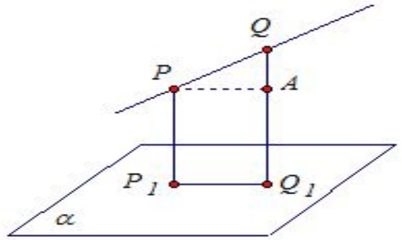


Рис. 6

Проведем прямую *PA* перпендикулярно прямой *QQ1*.Отрезки *PA* и *P1Q1* равны.

Отрезок *Q1A* равен отрезку *PP1*. Найдем *QA*: *QA* = *QQ1* - *AQ1* = *QQ1* - *PP1* = 33,5 - 21,5 = 12 см.

Рассмотрим треугольник *APQ*. Он прямоугольный, так как угол *QAP* прямой. Найдем катет *PA*.

$$PA = \sqrt{PQ^2 - QA^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ см.}$$

P1Q1 = *PA* = 9 см.

Ответ: 9 см.

Задача№3

Номер 127

В треугольнике ABC сумма углов A и B равна 90. Прямая BD перпендикулярна к плоскости ABC. Докажите, что CD перпендикулярна AC

Дано: ΔABC; $\angle A + \angle B = 90^\circ$.

Т.к. $\angle A + \angle B = 90^\circ$, то $\angle C = 90^\circ$ (т.к. $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 90^\circ$).

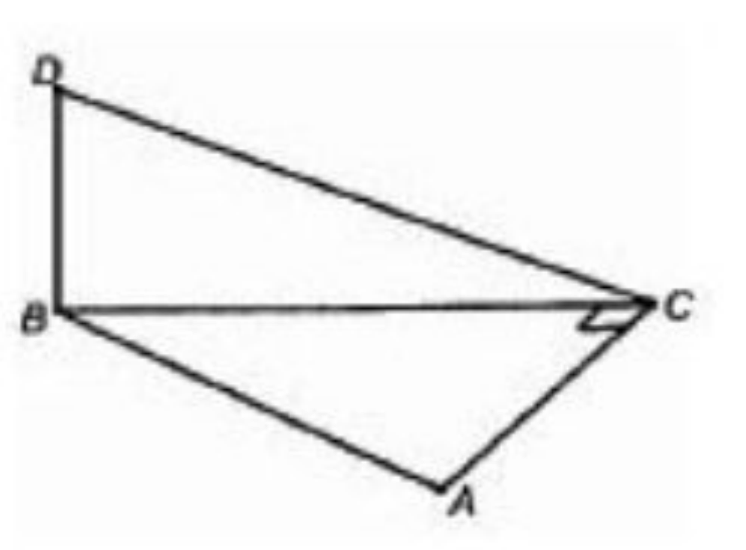
$AC \perp BD$ – по условию;

$AC \perp BC$.

Тогда, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $AC \perp$ пл. BDC (т.к. перпендикулярна двум прямым в ней).

Следовательно, $AC \perp DC$.

Что и требовалось доказать.



Задача№4
Номер 117

В тетраэдре ABCD BC перпендикулярна AD.Докажите, что AD перпендикулярна MN, где M и N-середины ребер AB и AC.

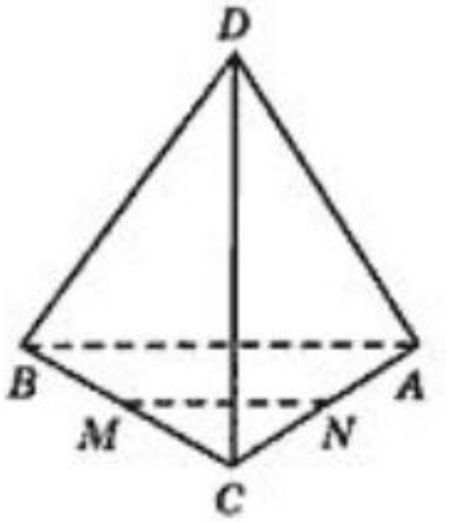
Дано: $BC \perp AD$, MN — середина AB и AC.

Доказать: $AD \perp MN$.

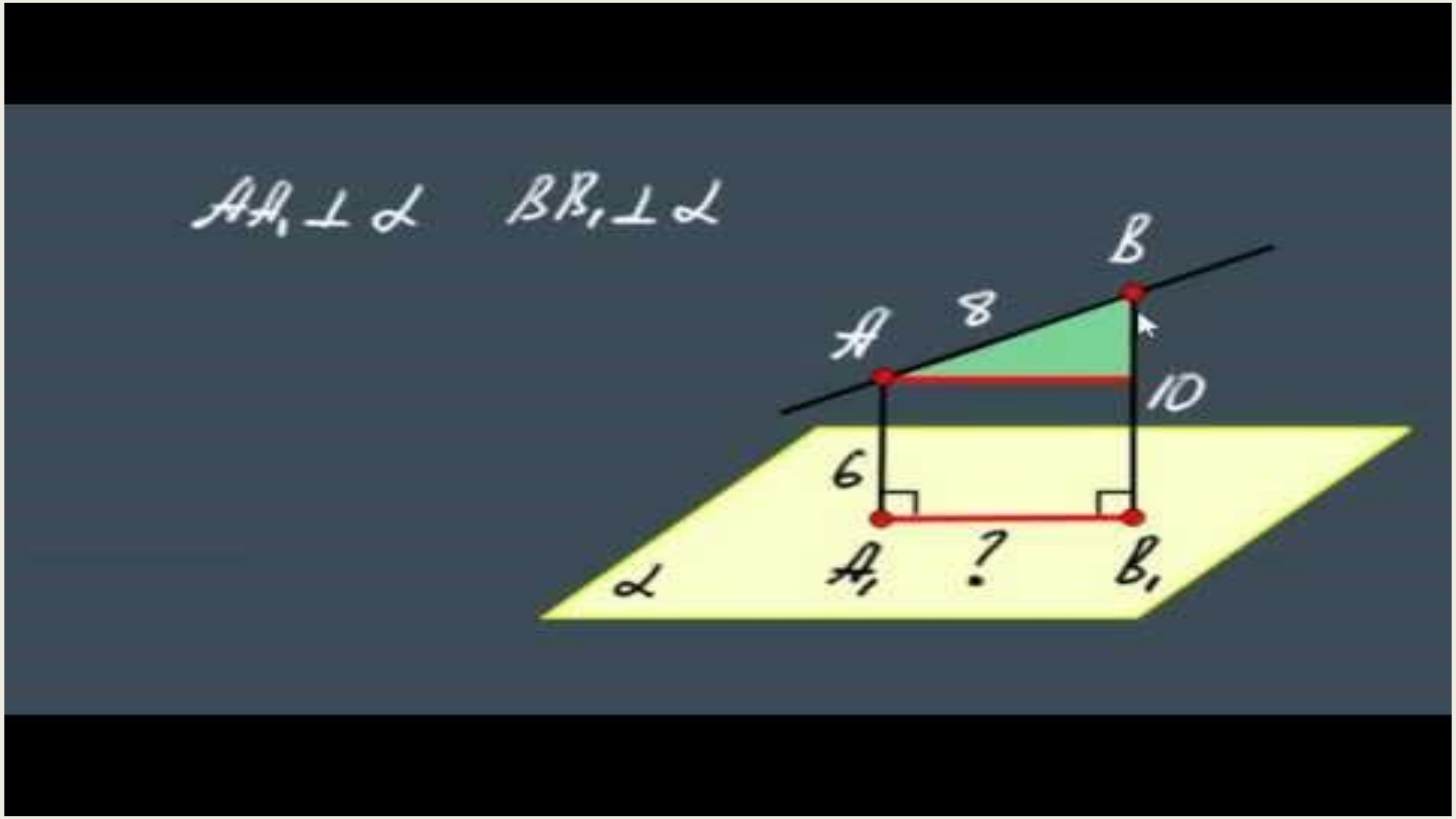
Доказательство:

$BC \perp AD$ и $MN \parallel AC$ (средняя линия ΔABC) следовательно, $AD \perp MN$.

MN — средняя линия ΔABC следовательно, $MN \parallel BC$ и так как $BC \perp AD$ следовательно, $AD \perp MN$.



Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Спасибо за внимание!