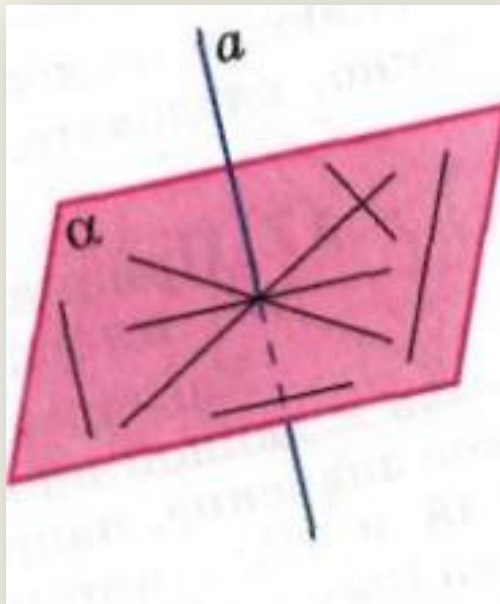




ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО СТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Определение

Прямая называется
перпендикулярной к плоскости, если
она перпендикулярна к любой
прямой, лежащей в этой плоскости



Перпендикулярность
прямой и плоскости
обозначается как
 $a \perp \alpha$.

Теоремы

1. ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна плоскости. (рис. 1)

2. 1-ое СВОЙСТВО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.

Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой. (Рис. 2)

3. 2-ое СВОЙСТВО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.

Если две прямые перпендикулярные к плоскости, то они параллельны. (рис. 2)

4. 3-е СВОЙСТВО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна. (рис. 3)

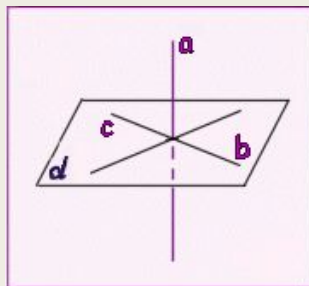


Рис. 1

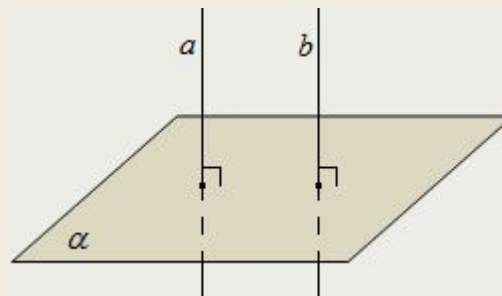


Рис. 2

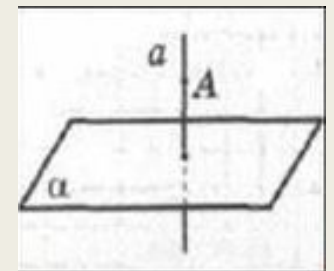
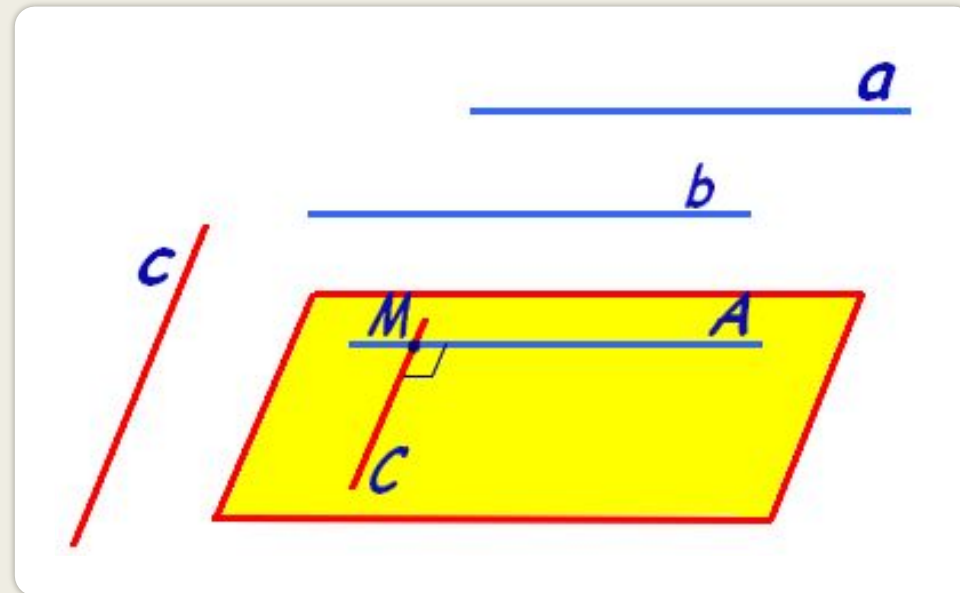


Рис.3

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.



Доказательство леммы

Дано: $a \parallel b$; $a \perp c$

Доказать: $b \perp c$

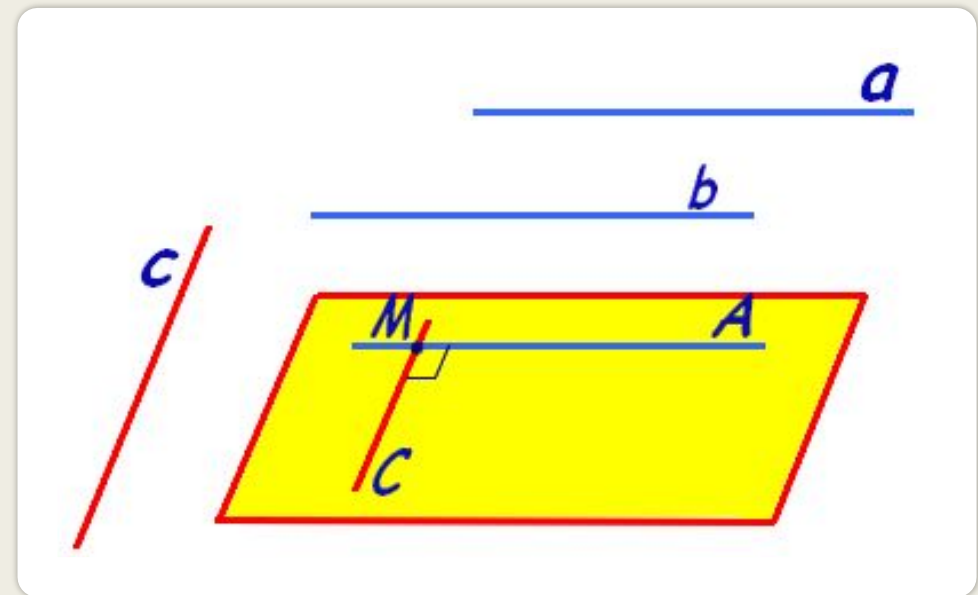
Доказательство:

Проведем $CM \parallel c$, $MA \parallel a$.

Так как $a \perp c$, то $\angle AMC = 90^\circ$

$a \parallel b$ (по условию)
 $MA \parallel a$ (по построению) $\} \Rightarrow$

$MA \parallel b$, $MC \parallel c$
 $MA \perp MC$ $\} \Rightarrow b \perp c$



Доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть a — прямая, перпендикулярная прямым b и c в плоскости. Проведём прямую a через точку A пересечения прямых b и c . Докажем, что прямая a перпендикулярна плоскости, то есть каждой прямой в этой плоскости.

1. Проведём произвольную прямую x через точку A в плоскости и покажем, что она перпендикулярна прямой a . Проведём в плоскости произвольную прямую, не проходящую через точку A и пересекающую прямые b , c и x . Пусть точками пересечения будут B , C и X .

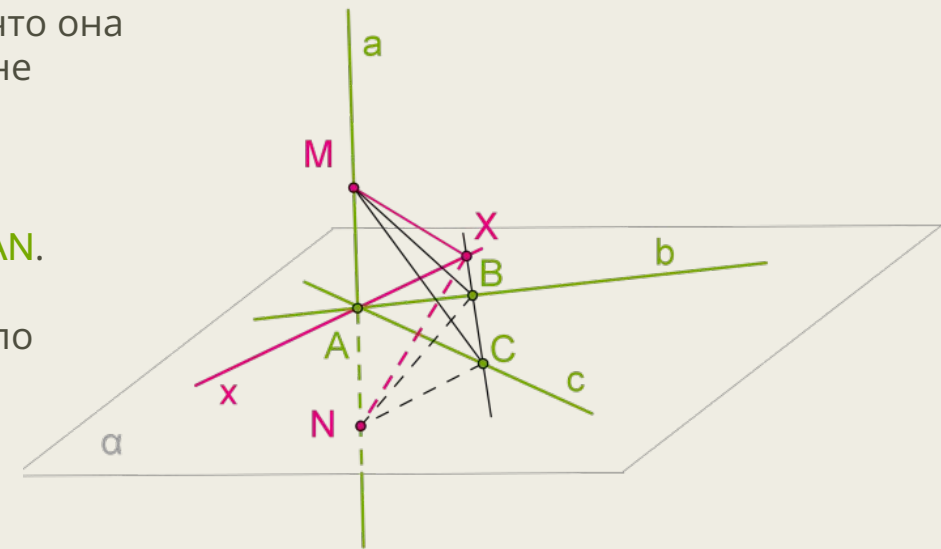
2. Отложим на прямой a от точки A в разные стороны равные отрезки AM и AN .

3. Треугольник MCN равнобедренный, так как отрезок AC является высотой по условию теоремы и медианой по построению ($AM=AN$). По той же причине треугольник MBN тоже равнобедренный.

4. Следовательно, треугольники MBC и NBC равны по трём сторонам.

5. Из равенства треугольников MBC и NBC следует равенство углов MBX и NBX и, следовательно, равенство треугольников MBX и NBX по двум сторонам и углу между ними.

6. Из равенства сторон MX и NX этих треугольников заключаем, что треугольник MXN равнобедренный. Поэтому его медиана XA является также высотой. А это и значит, что прямая x перпендикулярна a . По определению прямая a перпендикулярна плоскости.



Задача №1

Прямая PQ параллельна плоскости α . Через точки P и Q проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α , которые пересекают эту плоскость соответственно в точках P_1 и Q_1 . Докажите, что $PQ = P_1Q_1$.

[ОБ]

Дано: $PQ \parallel \alpha$,

$PP_1 \perp \alpha$

$QQ_1 \perp \alpha$

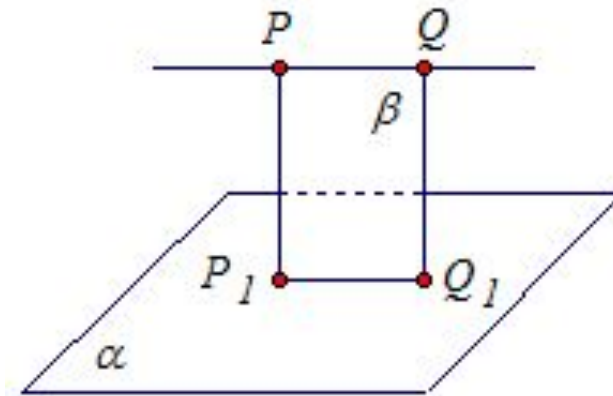
$P_1, Q_1 \in \alpha$

Доказать: $PQ = P_1Q_1$

Доказательство:

Две прямые PP_1 и QQ_1 перпендикулярны к одной и той же плоскости α . Значит, эти прямые параллельны между собой. Пусть через них проходит плоскость β . В плоскости β прямые PQ и P_1Q_1 параллельны, так как по условию PQ параллельна α .

Рассмотрим прямоугольник PP_1Q_1Q . В прямоугольнике PP_1Q_1Q противоположные стороны равны, значит, $PQ = P_1Q_1$, что и требовалось доказать.



Задача №2

Через точки P и Q прямой PQ проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие ее соответственно в точках P_1 и Q_1 . Найдите P_1Q_1 , если $PQ = 15$ см., $PP_1 = 21,5$ см., $QQ_1 = 33,5$ см.

Дано: $PP_1 \perp \alpha$; $PP_1 = 21,5$ см

$QQ_1 \perp \alpha$; $QQ_1 = 33,5$ см

$PQ = 15$ см

Найти: P_1Q_1

Решение:

Две прямые PP_1 и QQ_1 перпендикулярны к одной и той же плоскости α . Значит, прямые PP_1 и QQ_1 параллельны. Значит, через них проходит единственная плоскость PQQ_1P_1 . Прямая PP_1 перпендикулярна плоскости α , а значит и прямой P_1Q_1 . Так как прямые PP_1 и QQ_1 параллельны, а угол PP_1Q_1 прямой, то четырехугольник PP_1Q_1Q - прямоугольная трапеция.

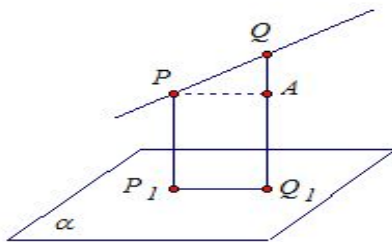


Рис. 6

Проведем прямую PA перпендикулярно прямой QQ_1 . Отрезки PA и P_1Q_1 равны.

Отрезок QA равен отрезку PP_1 . Найдем QA : $QA = QQ_1 - AQ_1 = QQ_1 - PP_1 = 33,5 - 21,5 = 12$ см.

Рассмотрим треугольник APQ . Он прямоугольный, так как угол QAP прямой. Найдем катет PA .

$$PA = \sqrt{PQ^2 - QA^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ см.}$$

$$P_1Q_1 = PA = 9 \text{ см.}$$

Ответ: 9 см.

Задача №3

Номер 127

В треугольнике ABC сумма углов A и B равна 90° . Прямая BD перпендикулярна к плоскости ABC . Докажите, что CD перпендикулярна AC .

Дано: $\triangle ABC$; $\angle A + \angle B = 90^\circ$.

Т.к. $\angle A + \angle B = 90^\circ$, то $\angle C = 90^\circ$ (т.к. $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 90^\circ$).

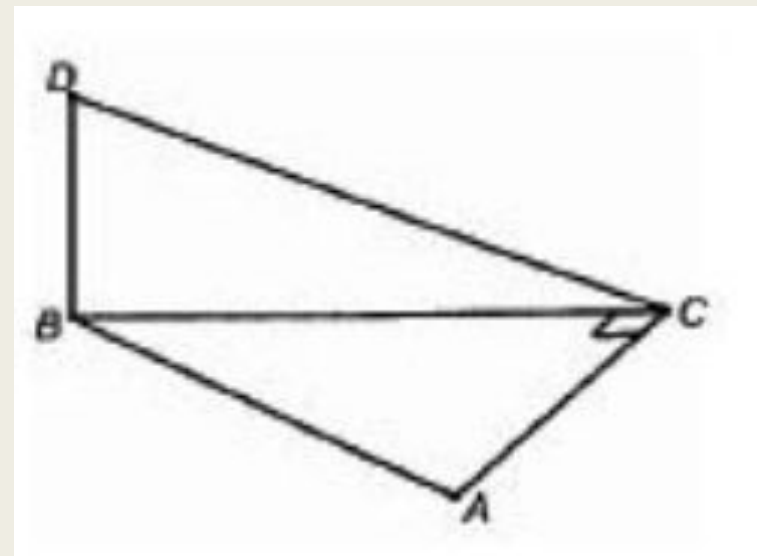
$AC \perp BD$ – по условию;

$AC \perp BC$.

Тогда, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $AC \perp$ пл. BDC (т.к. перпендикулярна двум прямым в ней).

Следовательно, $AC \perp DC$.

Что и требовалось доказать.



Задача №4

Номер 117

В тетраэдре $ABCD$ $BC \perp AD$. Докажите, что $AD \perp MN$, где M и N — середины ребер AB и AC .

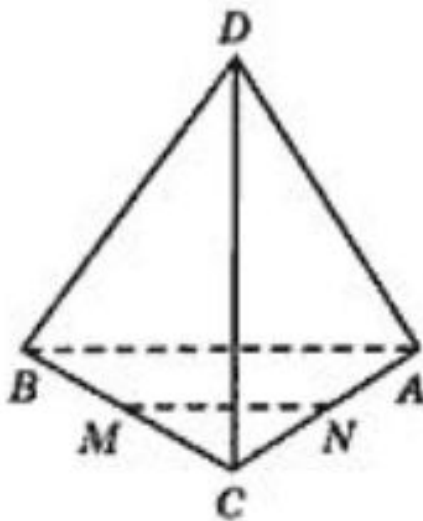
Дано: $BC \perp AD$, MN — середина AB и AC .

Доказать: $AD \perp MN$.

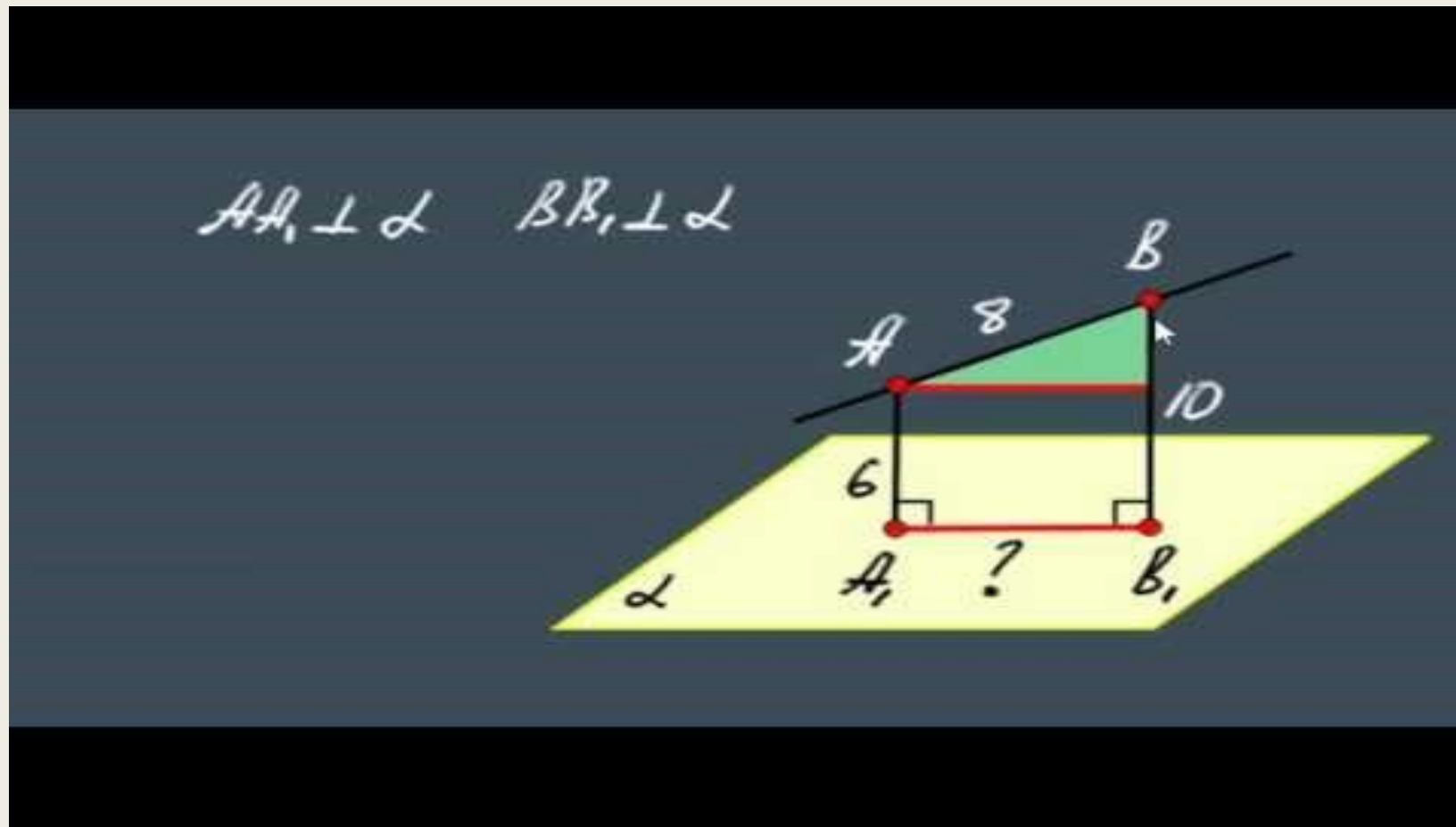
Доказательство:

$BC \perp AD$ и $MN \parallel AC$ (средняя линия $\triangle ABC$) следовательно, $AD \perp MN$.

MN — средняя линия $\triangle ABC$ следовательно, $MN \parallel BC$ и так как $BC \perp AD$ следовательно, $AD \perp MN$.



Признак перпендикулярности прямой и плоскости



Спасибо за внимание!