




*Золотое сечение*  
*или*  
*Код да Винчи*

«Есть в математике нечто,  
вызывающее человеческий  
восторг».

Ф. Хауздорф.

# Содержание

- Золотое сечение – гармоническая пропорция.
- История Золотого сечения.
- Деление отрезка в золотом отношении.
- Золотой треугольник.
- Золотой прямоугольник.
- Пентаграмма.
- Золотой прямоугольный треугольник.
- Золотой эллипс.
- Золотое сечение в природе.
- Пропорция и Золотое сечение во внешних формах человека.
- Золотое сечение в живописи.
- Золотое сечение в архитектуре и скульптуре .
- Золотое сечение в поэзии.
- Золотое сечение в музыке.



# **Золотое сечение - гармоническая пропорция**

# Математическое понимание гармонии

- **Гармония** – связь, созвучие, соразмерность, согласованность частей одного целого.
- **Математическая гармония** - это равенство или соразмерность частей друг с другом и части с целым.

Понятие математической гармонии тесно связано с понятиями **пропорции** и **симметрии**.

# Золотое сечение – гармоническая пропорция

- **Пропорция** (от лат. *proportio*) означает «соразмерность», «определенное соотношение частей между собой».
- В математике **пропорцией** называют равенство двух отношений:

$$a : b = c : d.$$

- Отрезок прямой АВ можно разделить на две части следующими способами:
  - а) на две равные части;
  - б) на две неравные части в любом отношении (такие части пропорции не образуют);
  - в) таким образом, когда  $AB : AC = AC : BC$ .  
Последнее и есть золотое деление или деление отрезка в крайнем и среднем отношении.

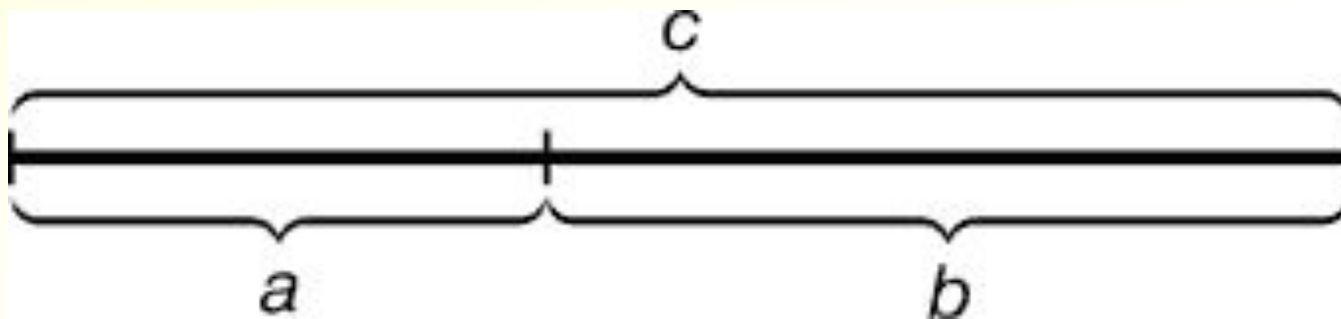
а) A C B

б) A C B

в)   $AB : AC = AC : BC$

# Понятие «Золотое сечение»

**Золотое сечение** - деление непрерывной величины на две части в таком отношении, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая ко всей величине.

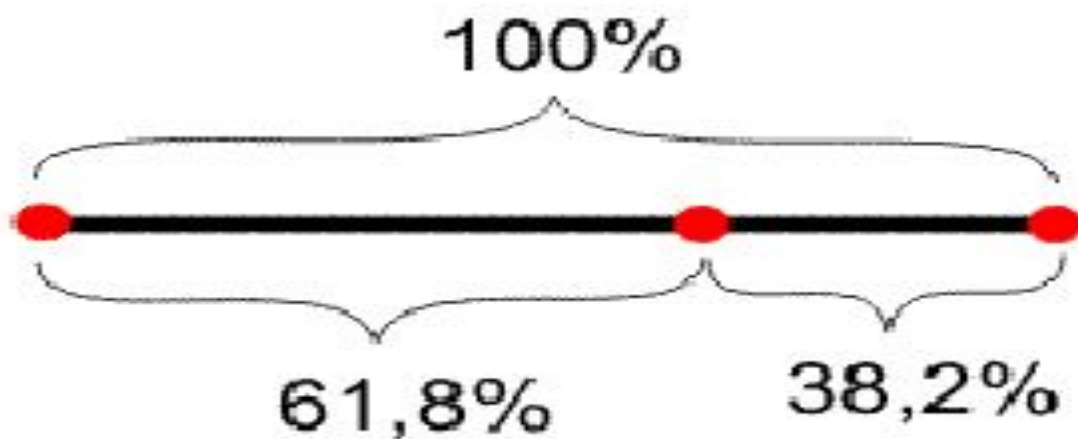


$$\mathbf{a : b = b : c} \quad \text{или} \quad \mathbf{c : b = b : a}$$

Эта пропорция равна:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398874989484 \dots$$

Золотое сечение в процентах







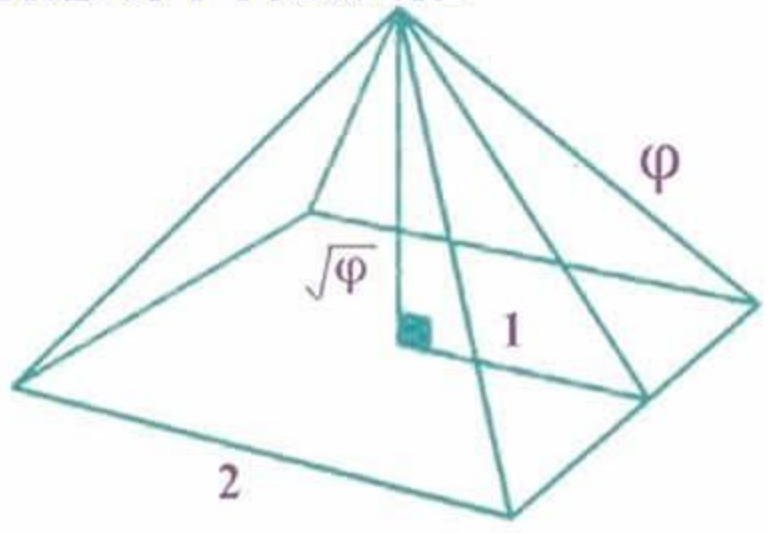
# История Золотого сечения

# История «Золотого сечения»

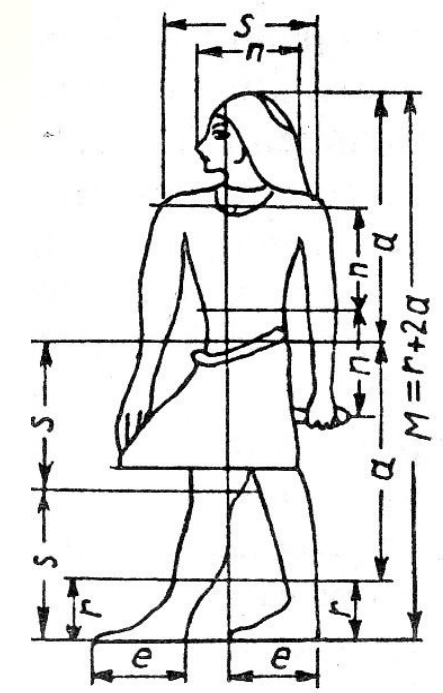
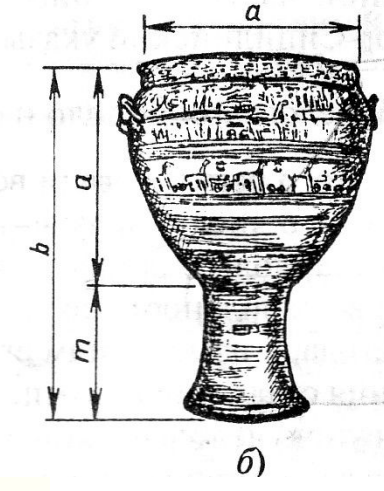
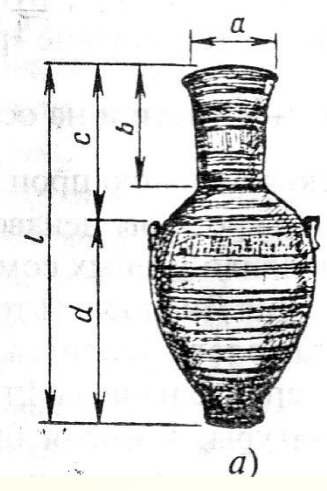
## Теория гармонии Древних

- Понятие о золотом делении ввел в научный обиход Пифагор, древнегреческий философ и математик (VI в. до н.э.)
- В Древнем Египте существовала «система правил гармонии», основанная на Золотом Сечении.
- В Древней Греции Золотое Сечение было своеобразным каноном культуры, который пронизывает все сферы науки и искусства. Красота и гармония стали важнейшими категориями познания.
- В толковании древних греков **понятие золотого сечения, и понятие гармонии идентичны.**
- Согласно Пифагору гармония имеет численное выражение, то есть, она связана с концепцией числа.
- Евклид излагает теорию Платоновых тел, которая является существенным разделом геометрической теории Золотого Сечения.

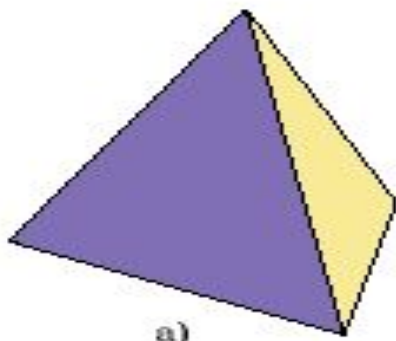
# GREAT PYRAMID



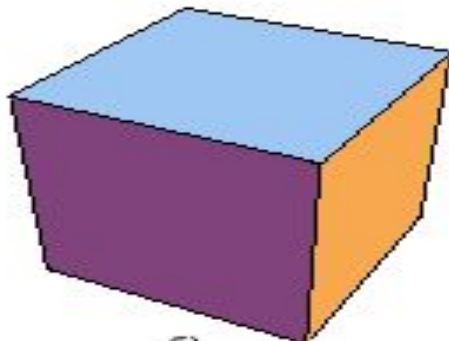
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{d}{l} = \phi.$$



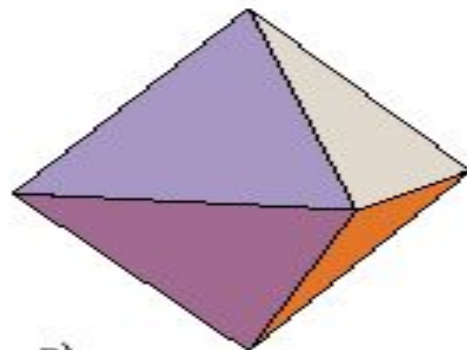
# Платоновы тела:



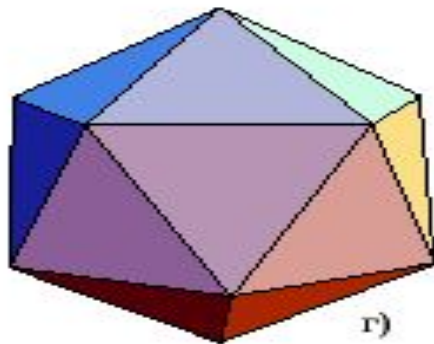
а)



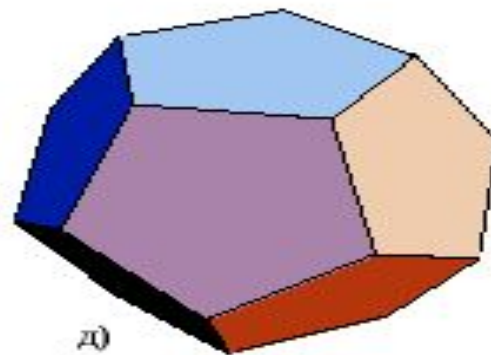
б)



в)



г)



д)

- а) тетраэдр («Огонь»), б) гексаэдр («Земля»),  
в) октаэдр («Воздух»),  
г) икосаэдр («Вода»),  
д) додекаэдр («Вселенский разум»).

# Ряд Фибоначчи

- С историей золотого сечения связано имя итальянского математика Леонардо Фибоначчи.



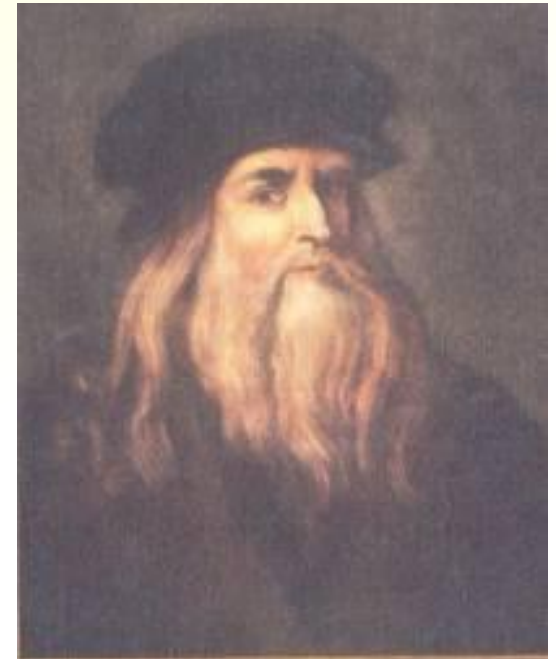
- Ряд чисел

**0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55**  
и т.д. известен как ряд Фибоначчи.

# «Золотая Пропорция» - главный эстетический принцип эпохи Средневековья

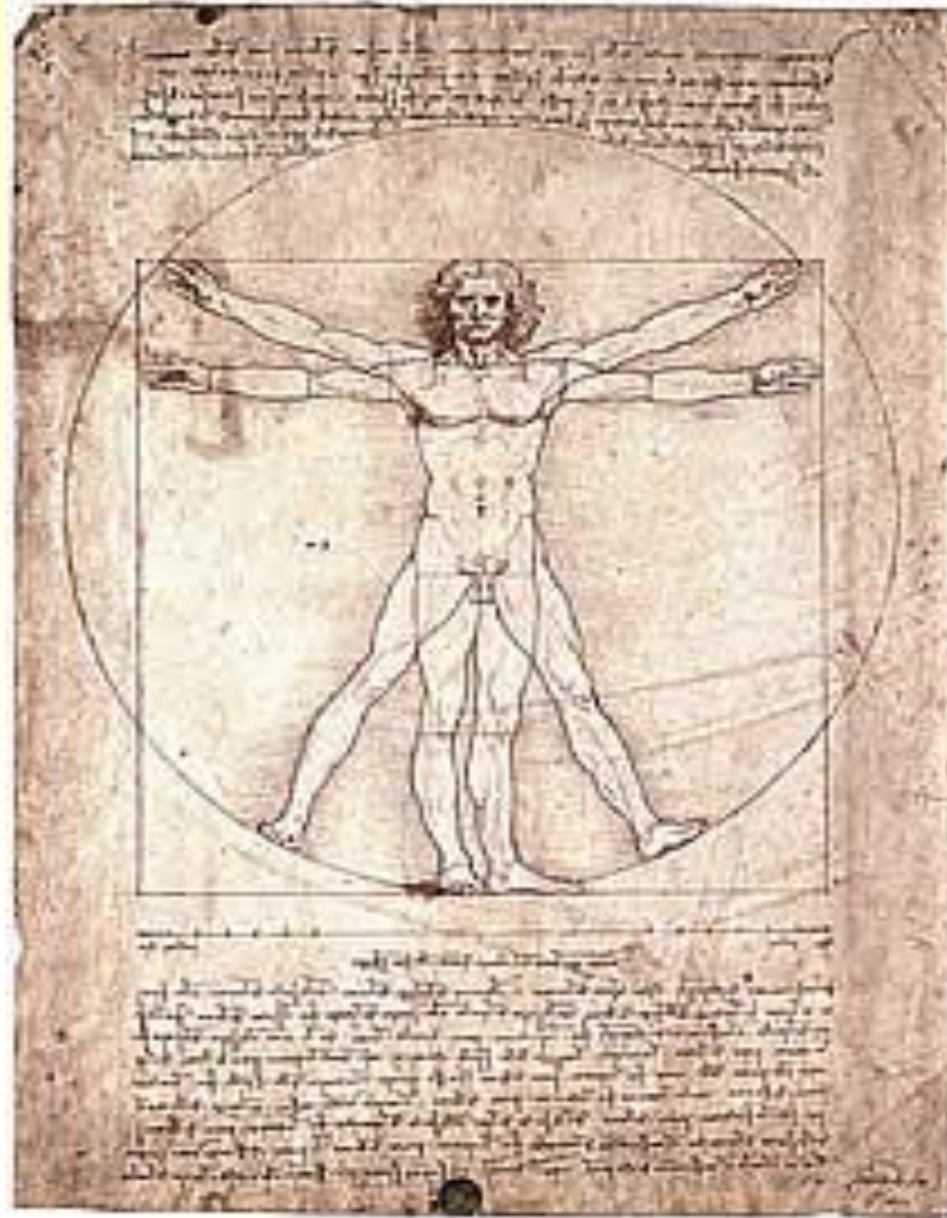
**Леонардо да Винчи(1452-1519) художник и ученый был одним из первых, кто ввел сам термин «Золотое Сечение».**

Доказано, что во многих своих произведениях Леонардо да Винчи использовал пропорции золотого сечения, в частности, в своей всемирно известной фреске «Тайная вечеря» и непревзойденной «Джоконде».



**«Пусть никто, не будучи математиком, не дерзнет читать мои труды».** Леонардо да Винчи.

# «Витрувианский человек» Леонардо да Винчи



# Пропорции человеческого тела (Витрувий)

- длина от кончика самого длинного до самого низкого основания из четырёх пальцев равна ладони
- ступня составляет три ладони
- локоть составляет шесть ладоней
- высота человека составляет четыре локтя (и соответственно 24 ладони)
- шаг равняется четырём ладоням
- размах человеческих рук равен его высоте
- расстояние от линии волос до подбородка составляет  $\frac{1}{10}$  его высоты
- расстояние от макушки до подбородка составляет  $\frac{1}{8}$  его высоты
- расстояние от макушки до сосков составляет  $\frac{1}{4}$  его высоты
- максимум ширины плеч составляет  $\frac{1}{4}$  его высоты
- расстояние от локтя до кончика руки составляет  $\frac{1}{4}$  его высоты
- расстояние от локтя до подмышки составляет  $\frac{1}{8}$  его высоты
- длина руки составляет  $\frac{2}{5}$  его высоты
- расстояние от подбородка до носа составляет  $\frac{1}{3}$  длины его лица
- расстояние от линии волос до бровей  $\frac{1}{3}$  длины его лица
- длина ушей  $\frac{1}{3}$  длины лица
- пупок является центром окружности



**Лука Пачоли ( 1445  
—19 июня 1517)  
итальянский  
математик.**

В 1509 г. в Венеции была  
издана книга Пачоли  
«Божественная  
пропорция».





Альбрехт Дюрер (1471-1528)-  
выдающийся немецкий  
художник и теоретик искусства  
эпохи Возрождения.

Дюрер:

«Необходимо, чтобы тот,  
кто что-либо умеет, обучил  
этому других, которые в  
этом нуждаются. Это я и  
вознамерился сделать». 18

# Вклад Кеплера в теорию Золотого Сечения



- Иоганн Кеплер (1571-1630)-астроном, приверженец Золотого Сечения.
- Кеплер обратил внимание на ботаническую закономерность **филлотаксиса** и установил **связь между числами Фибоначчи и золотой пропорцией**, доказав, что последовательность отношений соседних чисел Фибоначчи:  
 $1/1; 2/1; 3/2; 5/3; 8/5; 13/8; \dots$  в пределе стремится к золотой пропорции.

«Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них – это теорема Пифагора, а другое – деление отрезка в среднем и крайнем отношении... Первое можно сравнивать с мерой золота; второе же больше напоминает - драгоценный камень.»



# Золотое сечение в геометрии

# Деление отрезка в золотом отношении

**Дано:** отрезок АВ.

**Построить:** золотое сечение отрезка АВ, т.е. точку Е так, чтобы  $\frac{BE}{AE} = \frac{AE}{AB}$

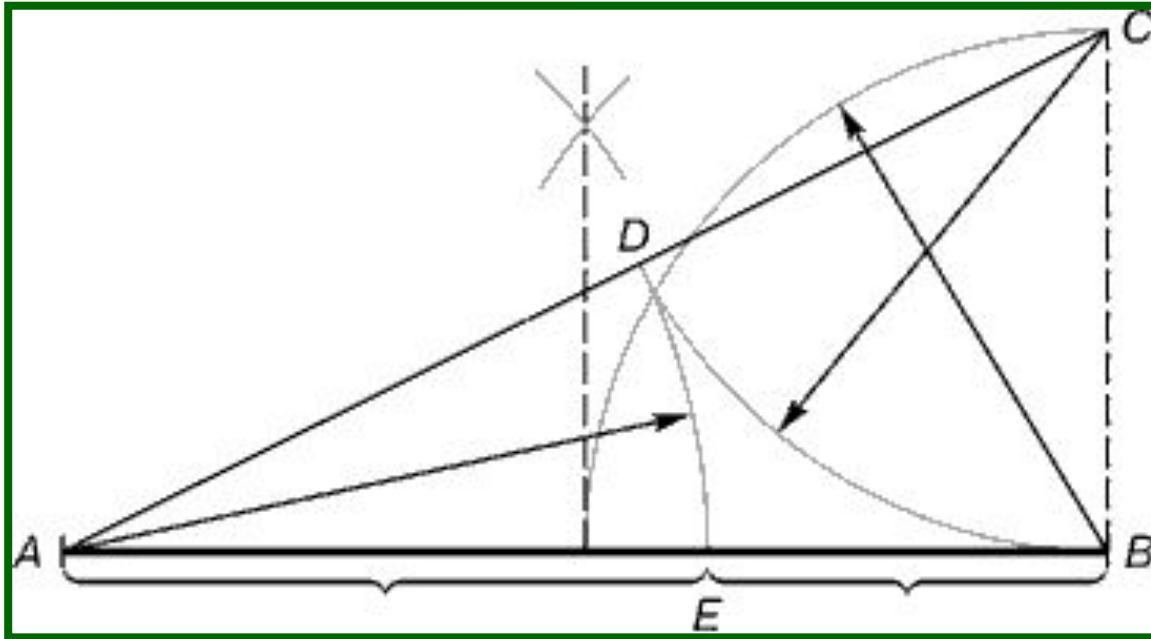
**Построение.**

1) Построим прямоугольный треугольник, у которого один катет в два раза больше другого. Для этого восстановим в точке В перпендикуляр к прямой АВ и на нем отложим отрезок  $BC = \frac{1}{2} AB$

2) Далее, соединим точки А и С, отложим отрезок  $CD = CB$ ,

3) Отложим  $AE = AD$ .

Точка Е является искомой, она производит золотое сечение отрезка АВ.

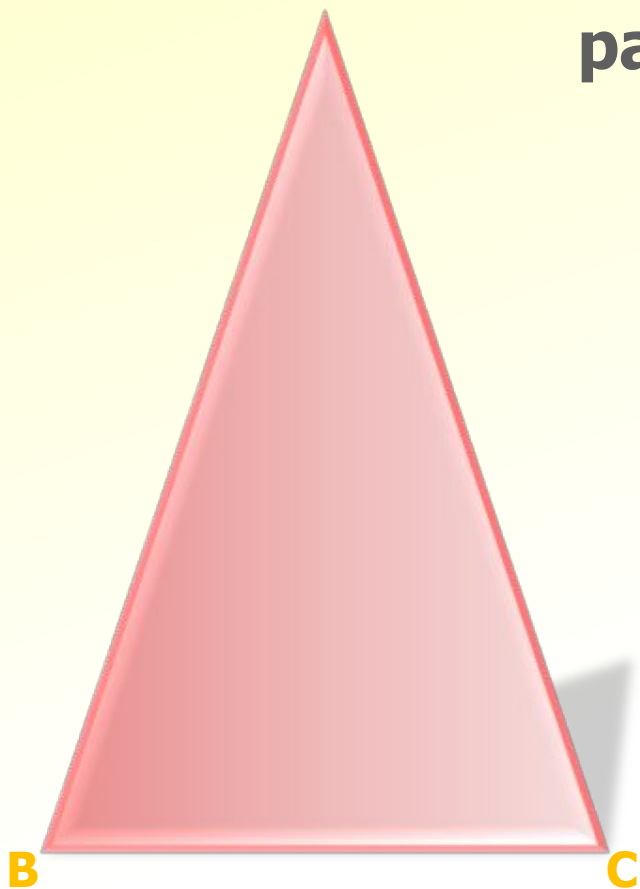


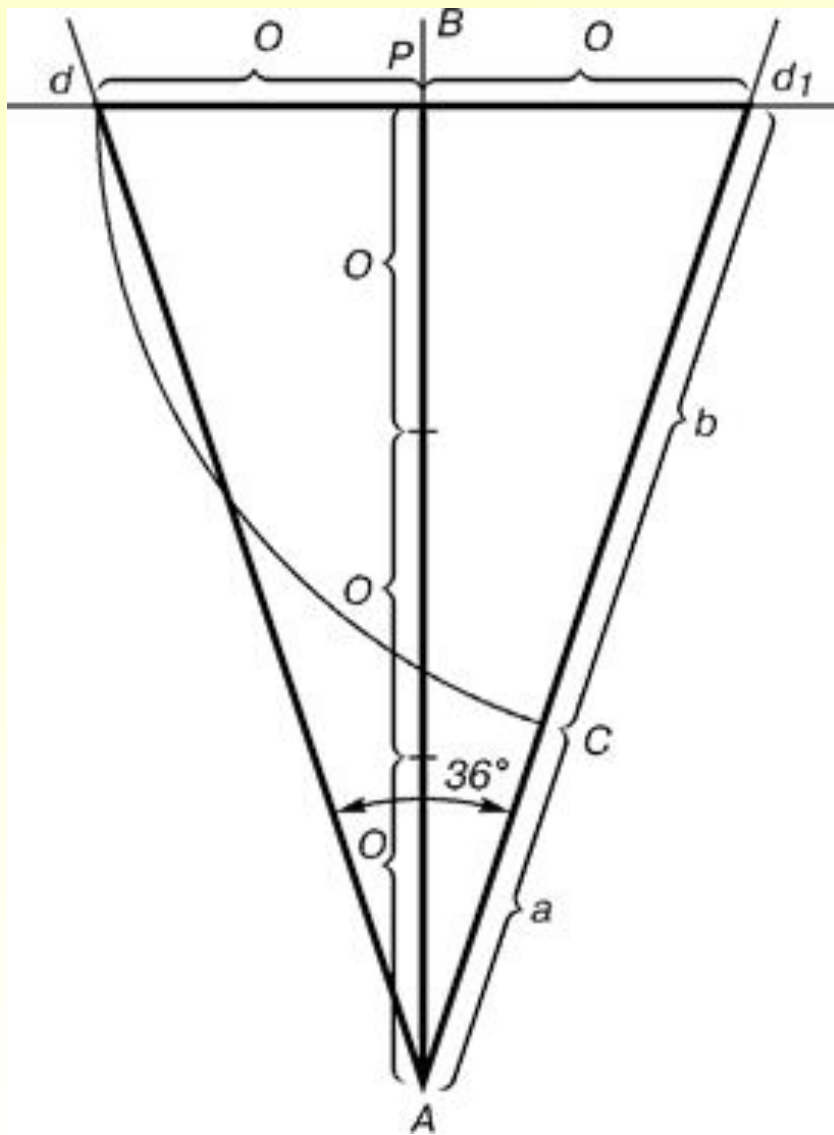
# Золотой треугольник

Золотым называется такой равнобедренный треугольник, основание и боковая сторона которого находятся в золотом отношении:

$$\frac{AB}{BC} = \varphi$$

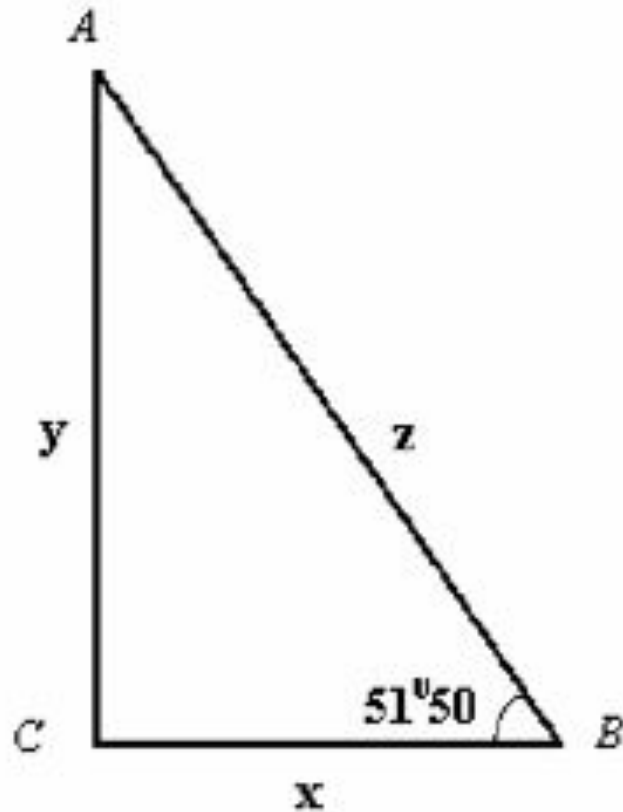
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$$





Проводим прямую  $AB$ . От точки  $A$  откладываем на ней три раза отрезок  $O$  произвольной величины, через полученную точку  $P$  проводим перпендикуляр к линии  $AB$ , на перпендикуляре вправо и влево от точки  $P$  откладываем отрезки  $O$ . Полученные точки  $d$  и  $d_1$  соединяем прямыми с точкой  $A$ . Отрезок  $dd_1$  откладываем на линию  $Ad_1$ , получая точку  $C$ . Она разделила линию  $Ad_1$  в пропорции золотого сечения. Линиями  $Ad_1$  и  $dd_1$  пользуемся для построения «золотого» прямоугольника.

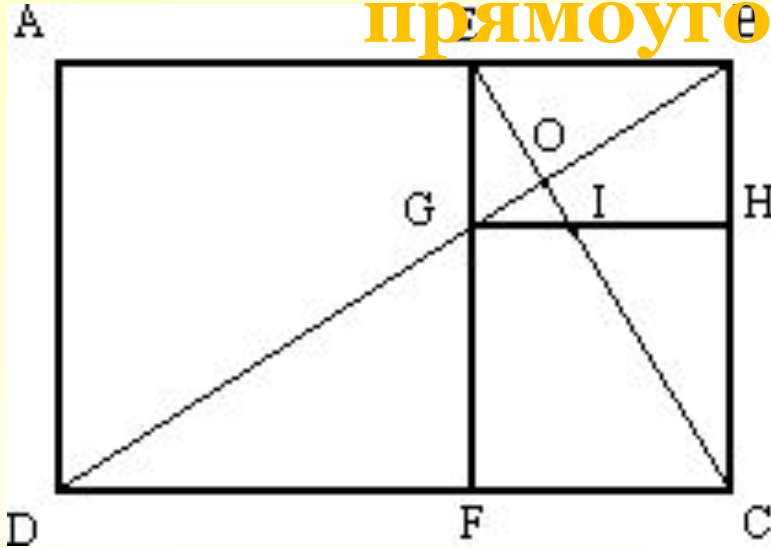
# Золотой прямоугольный треугольник



- В золотом прямоугольном треугольнике отношение большего катета к меньшему равно  $\sqrt{\varphi}$ , а отношение гипотенузы к меньшему катету равно  $\varphi$ , то есть «золотой пропорции».



# Золотой прямоугольник

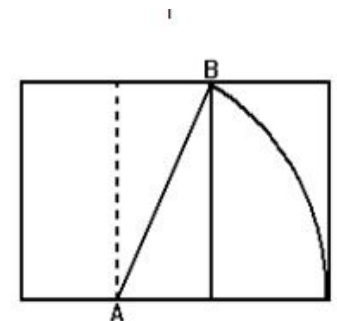
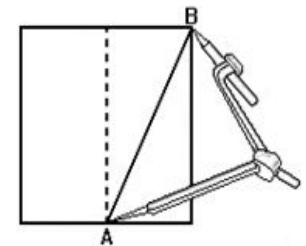
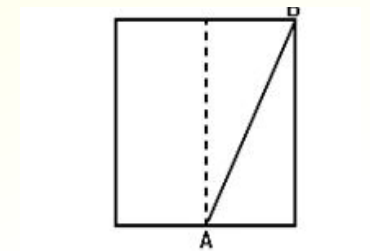
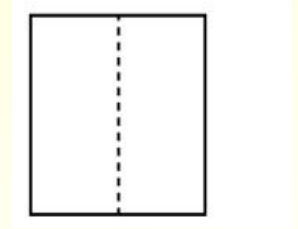


$$\frac{AB}{BC} = \varphi$$

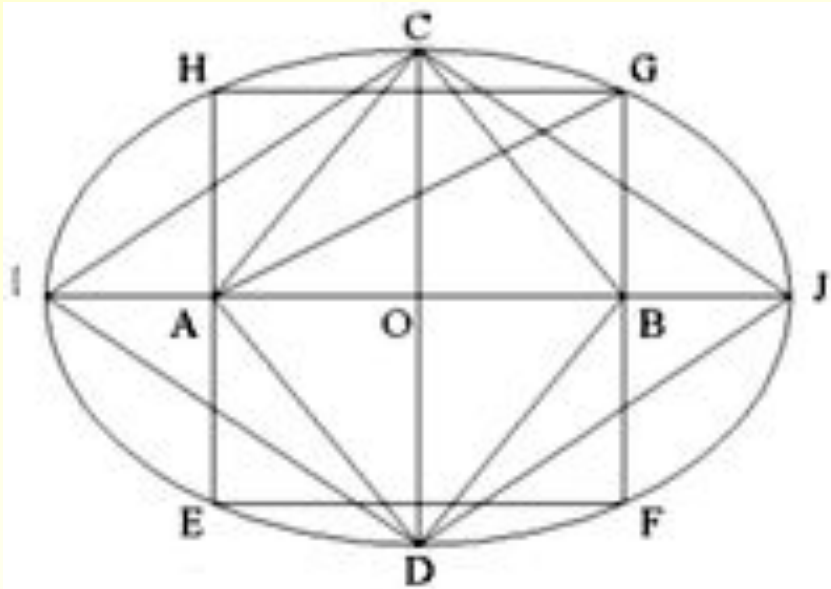
Прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении, т.е. отношение длины к ширине даёт число  **$\varphi$** , называется **золотым прямоугольником.**

# Построение золотого прямоугольника.

- 1) Начертите квадрат и разделите его на два равных прямоугольника.
- 2) В одном из прямоугольников проведите диагональ АВ.
- 3) Проведите окружность радиуса АВ с центром в точке А.
- 4) Продолжите основание квадрата до пересечения с дугой и проведите боковую сторону искомого прямоугольника под прямым углом.



# Золотой эллипс

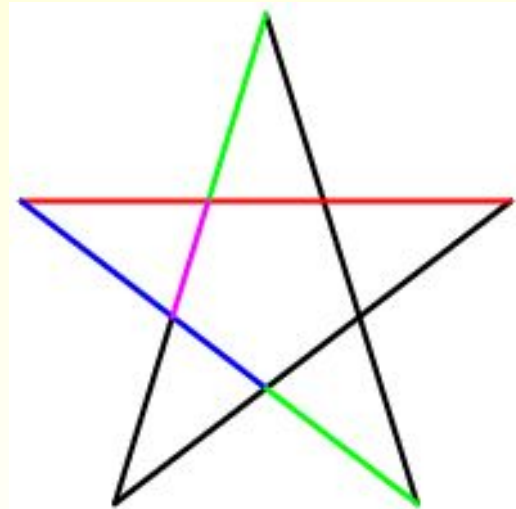
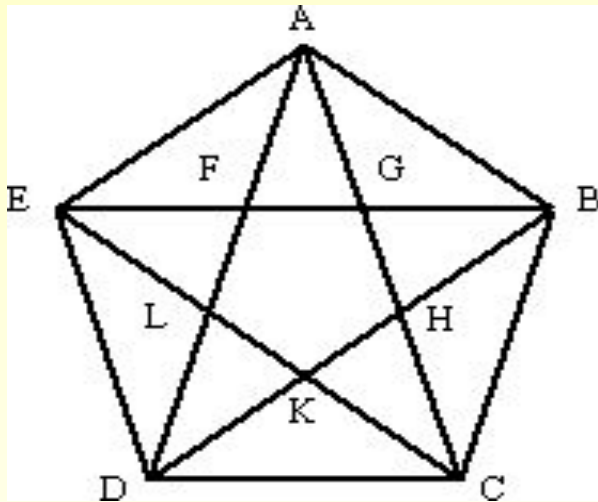


**Золотой эллипс** формируется с помощью двух ромбов ACBD и ICJD, вписанных в эллипс. Золотые ромбы ACBD и ICJD состоят из 4-х прямоугольных треугольников типа OCB или OJD, которые являются золотыми прямоугольными треугольниками.

$$\frac{OB}{BC} = \frac{1}{\varphi}; \quad \frac{OB}{OC} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}; \quad \frac{OC}{CJ} = 1; \quad \frac{OC}{OJ} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}};$$

$$\frac{CB}{CJ} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OJ} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}};$$

# Пентаграмма



Если в пентаграмме провести все диагонали, то в результате получим **пятиугольную звезду**.

Точки пересечения диагоналей в пентаграмме являются **точками золотого сечения диагоналей** (отношение синего отрезка к зелёному, красного к синему, зелёного к фиолетовому, равны **1.618**). При этом эти точки образуют **новую пентаграмму  $FGHKL$**  и **пять правильных треугольников ( $ADC, ADB, EBD, AEC, EBC$ )**

# Пятиконечная звезда на флагах.



Буркина Фасо



Венесуэла



Гвинея - Бисау



Гена



Вьетнам



Гондурас



Гренада



Джибути



Доминика



Зимбабве



Ирак



Йемен

# Пятиконечная звезда на флагах.



Камерун



Китай



Коморские острова



Корейская народная  
Демокр-ая р - ка



Куба



Либерия



Мавритания



Микронезия



Мозамбик



Новая Зеландия



Пакистан




Папуа – Новая Гвинея



**Раифский мужской монастырь.**

**«Пентагон» США.**





# Золотое сечение в природе



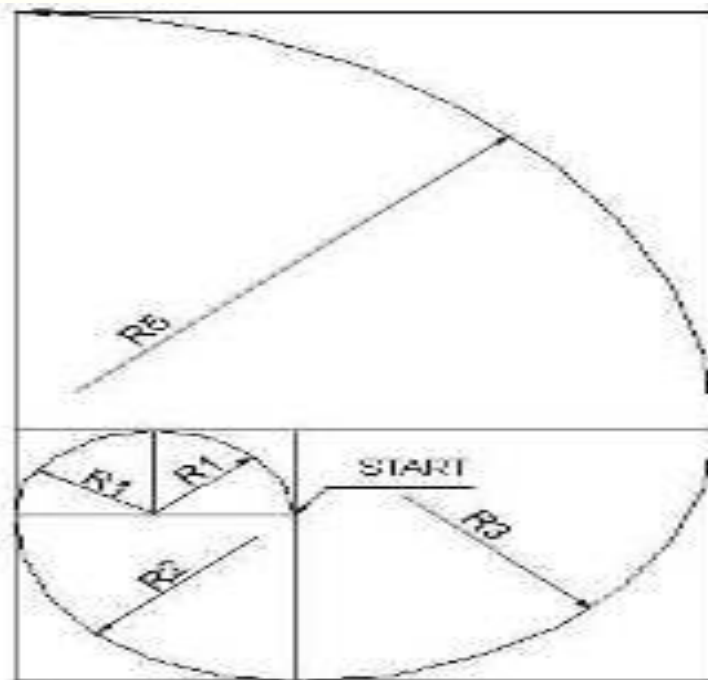
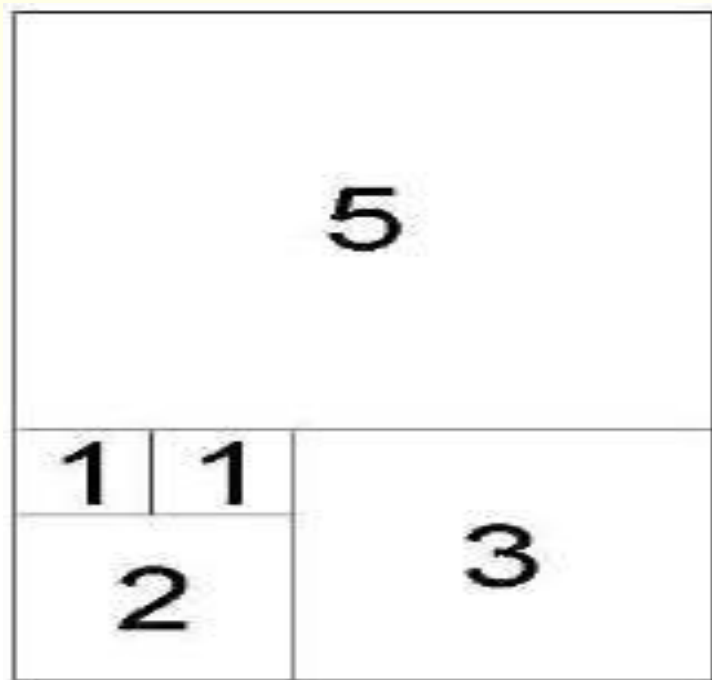
## Вопрос:

Что общего в молекулах ДНК, кристаллах снежинок, лепестков розы, раковин моллюсков, рогов млекопитающих, далеких космических галактиках?



# Золотая спираль (спираль Архимеда)

Ответ: в основе их структуры лежит золотая (логарифмическая) спираль. Эта спираль вписывается в золотой прямоугольник (отношение длины и ширины которого равно числу  $\Phi$ ). Последовательно отрезая от него квадраты и вписывая в каждый из них по четверти окружности, мы и получим золотую спираль



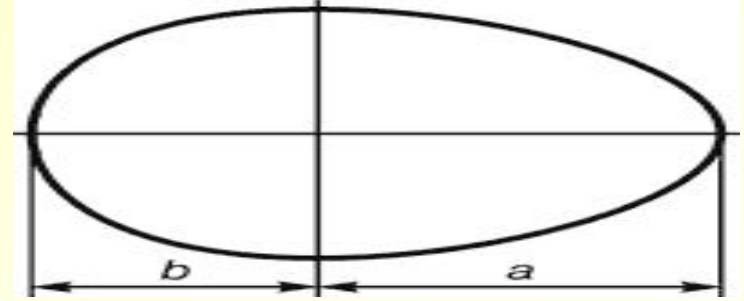
# Явление филлотаксиса

Филлотаксисом называется своеобразное решетчатое расположение листьев, семян, чешуек многих видов растений. Ряды ближайших соседей в таких решетках разворачиваются по спиралям или закручиваются винтовыми линиями вокруг цилиндра.



Семечки в подсолнухе расположены по логарифмическим спиралям. При этом отношение числа левых и правых спиралей равно отношению соседних чисел Фибоначчи . Можно встретить подсолнухи с отношением количества спиралей  $34 / 55$  и  $55 / 89$ .

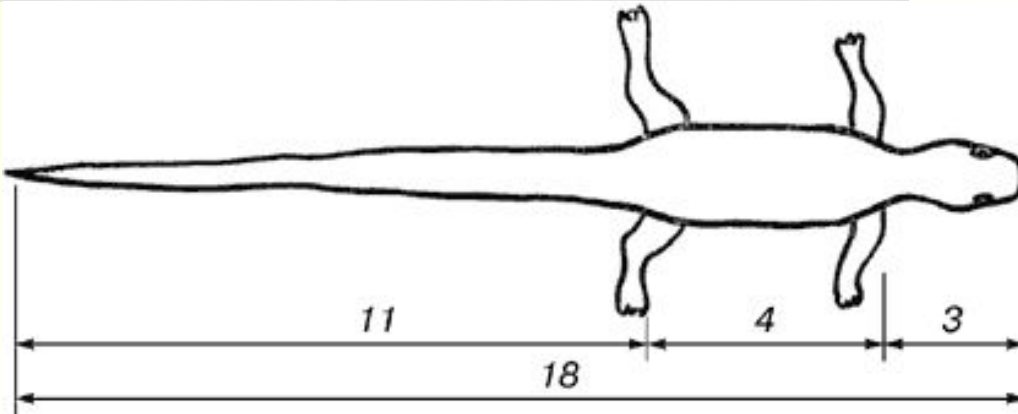
Форма птичьих яиц описывается золотым сечением.



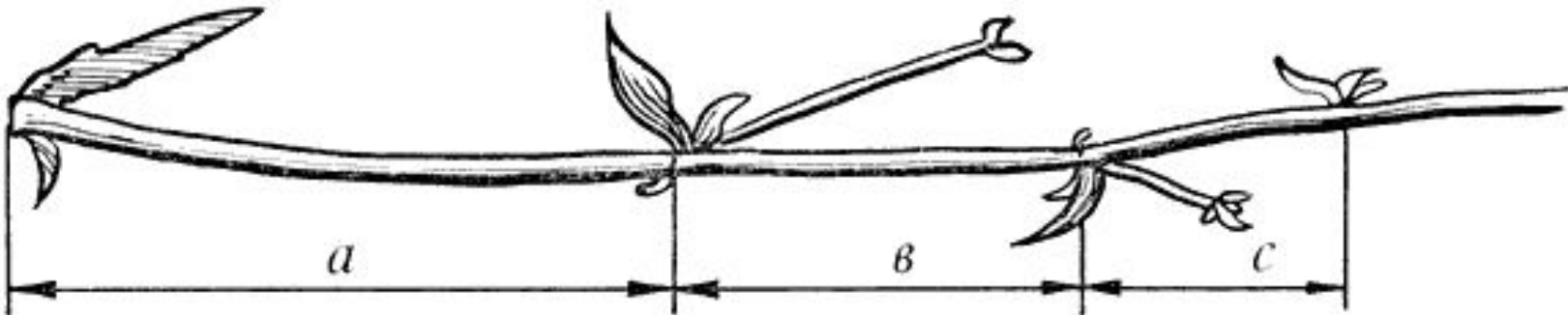
Совершенная форма тела стрекозы создана по законам золотого сечения: отношение длины хвоста и корпуса равно отношению общей длины к длине хвоста.




Ящерица.



Цикорий.

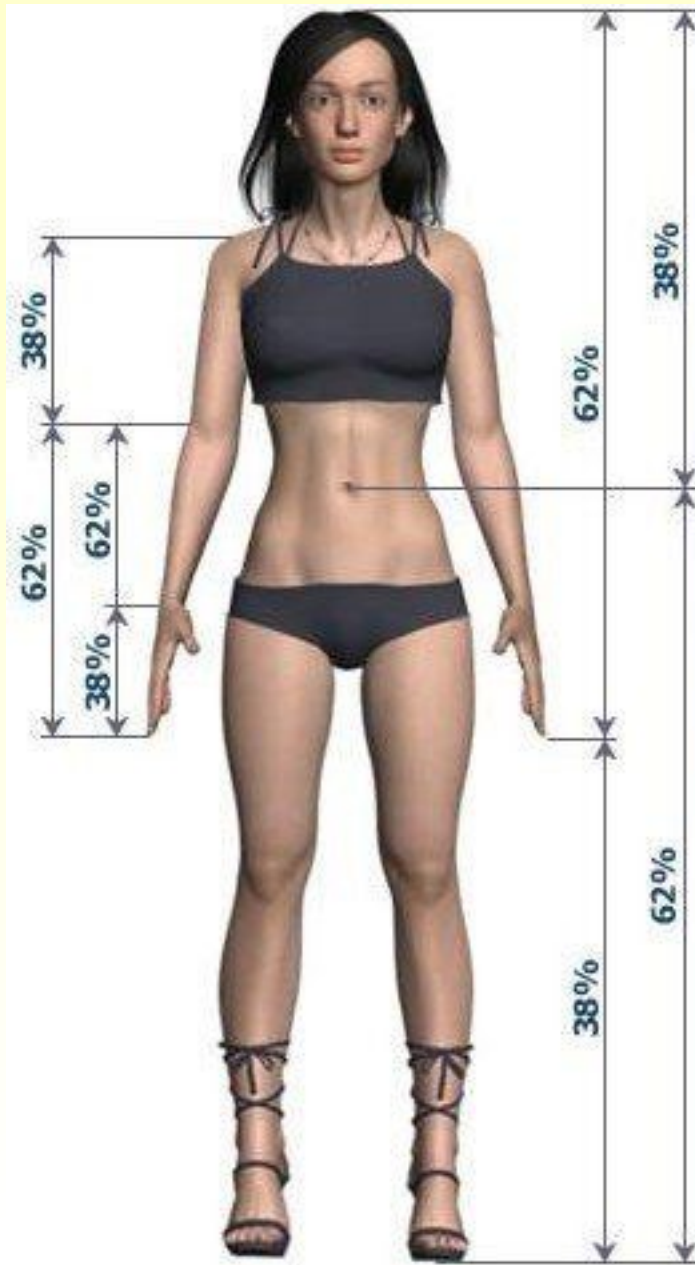




# Золотое сечение и пропорция во внешних формах человека.

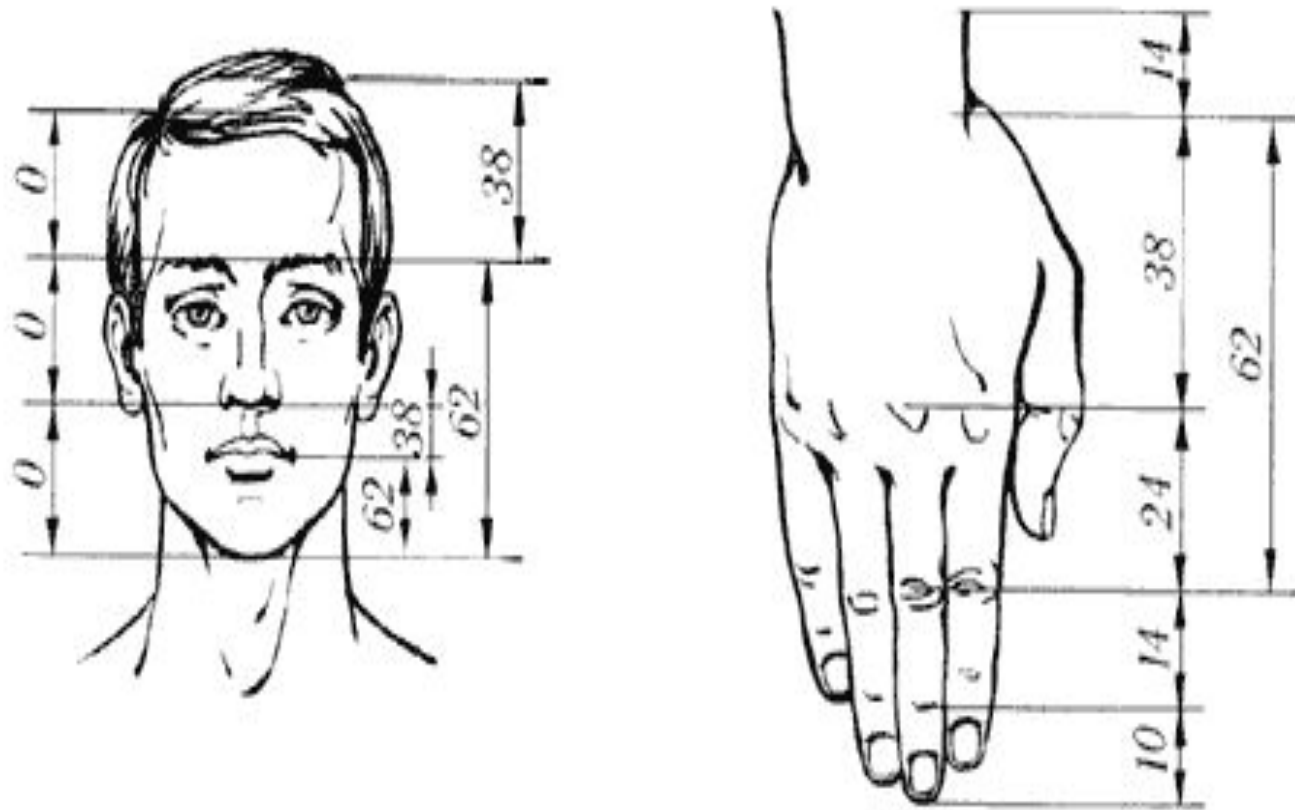
«Обнаженное тело кажется мне прекрасным.  
Для меня оно – чудо, где не может быть  
ничего безобразного»

О. Роден.

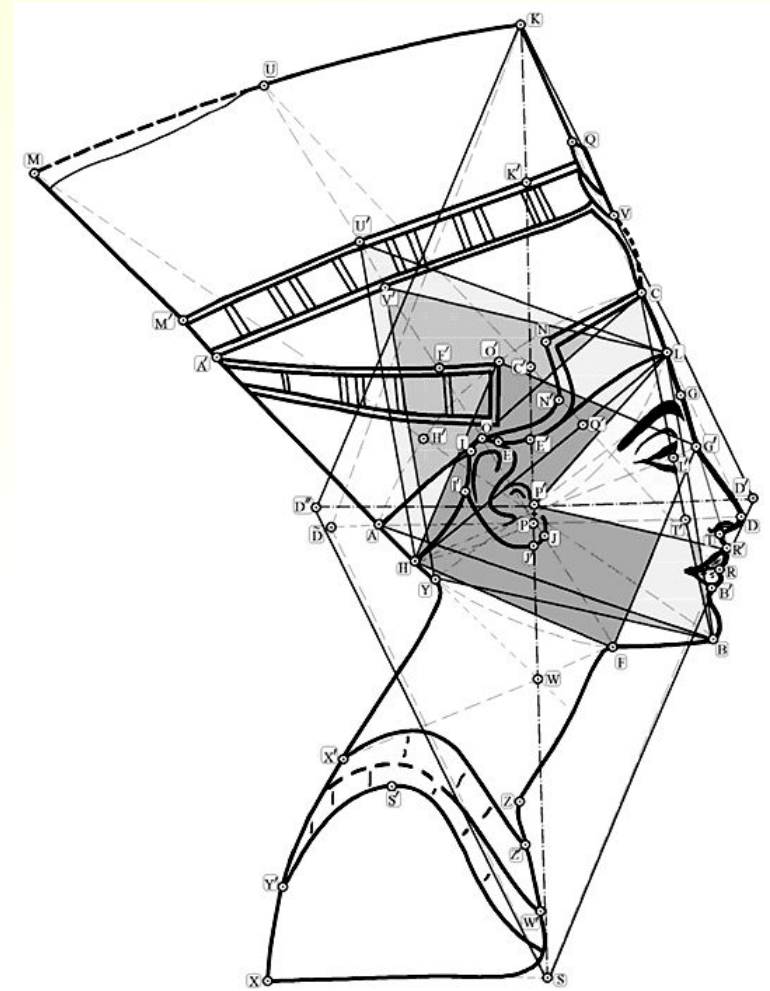


- *Цейзинг:*
- Мужское тело:
- $13 : 8 = 1,625$
- Женское тело:
- $8 : 5 = 1,6$ .
- У новорожденного:  $1 : 1$ .

# Пропорции золотого сечения в частях тела

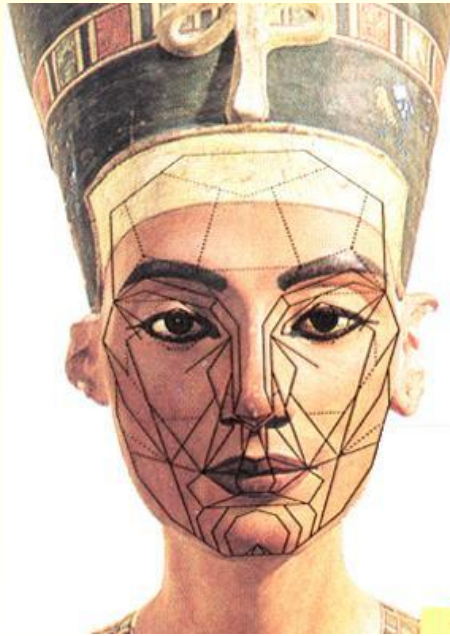


# Скульптурный портрет Нефертити и его гармонический анализ, выполненный Э.М. Сороко.






# Гармонический анализ женского лица.



Н.И. Крюковский :

- *"Созерцая совершенное, прекрасное человеческое лицо и тело, невольно приходишь к мысли о каком-то скрытом, но явственно чувствующемся математическом изяществе его форм, о математической правильности и совершенстве составляющих его криволинейных поверхностей!"*

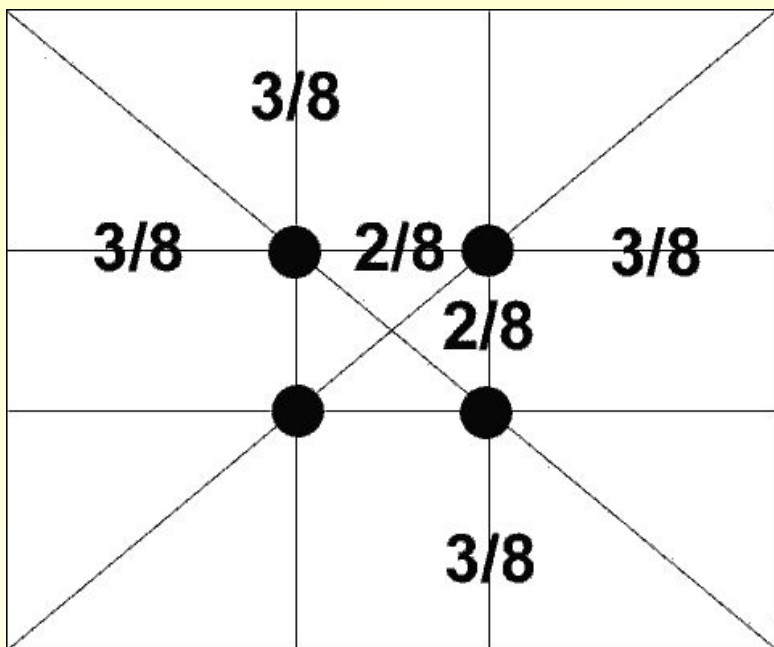


# Золотое сечение в живописи

«Поистине живопись – наука и  
законная дочь природы...»

Леонардо да

Винчи



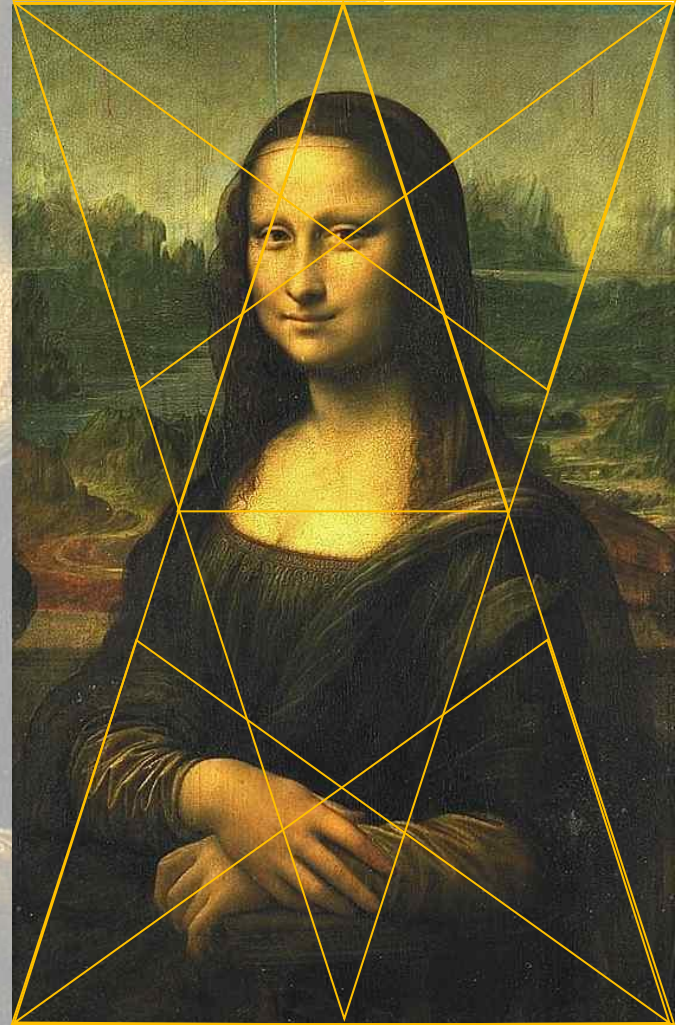
«Золотое сечение»  
картины.

В эпоху Возрождения художники открыли, что любая картина имеет определенные точки, невольно приковывающие наше внимание, так называемые зрительные центры. Таких точек всего четыре, и расположены они на расстоянии  $3/8$  и  $5/8$  от соответствующих краев плоскости.

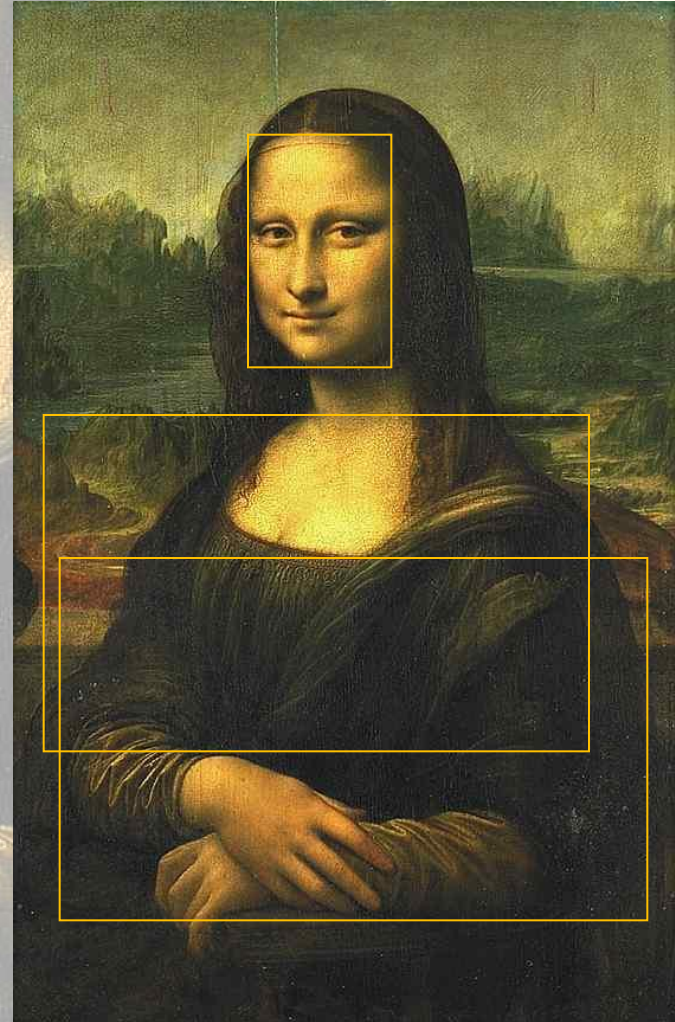
# Золотое сечение в картине Леонардо да Винчи "Джоконда"



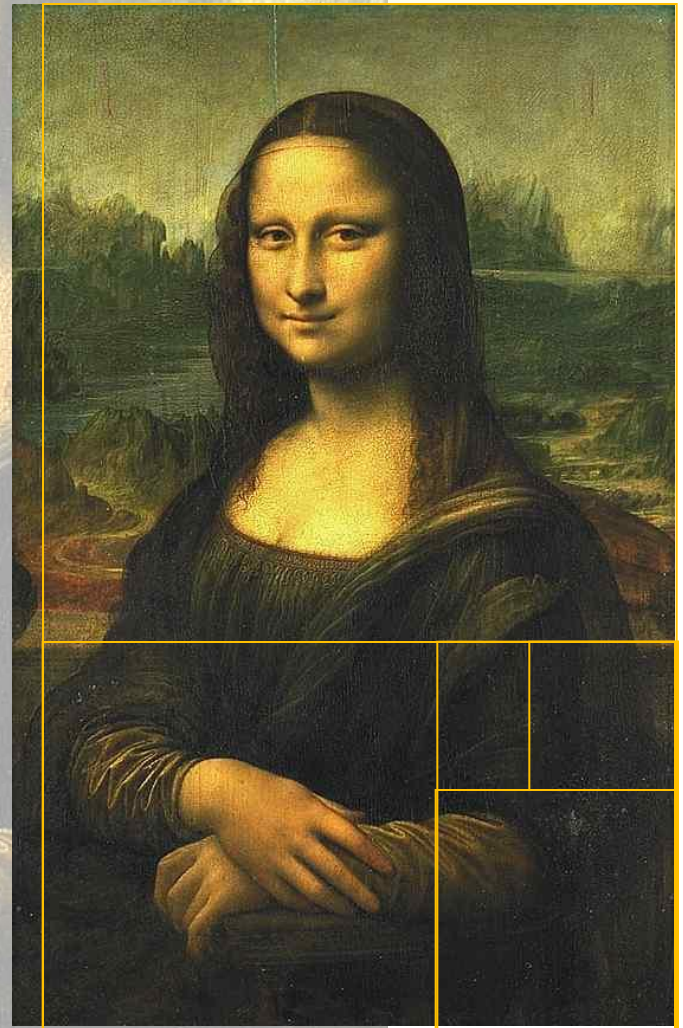
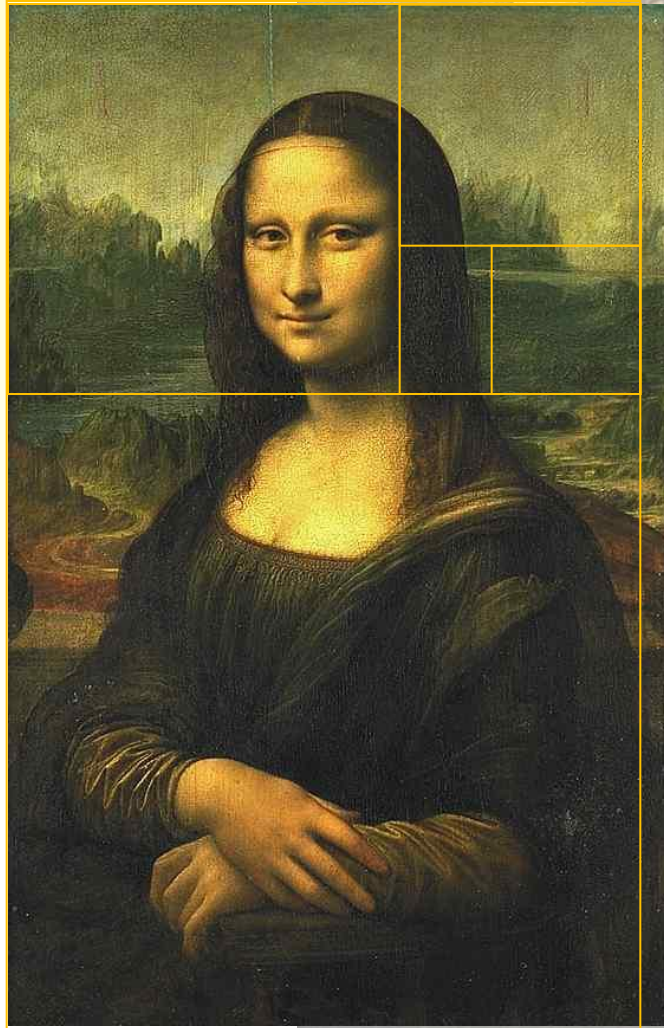
Портрет Моны Лизы привлекает тем, что композиция рисунка построена на «золотых треугольниках».



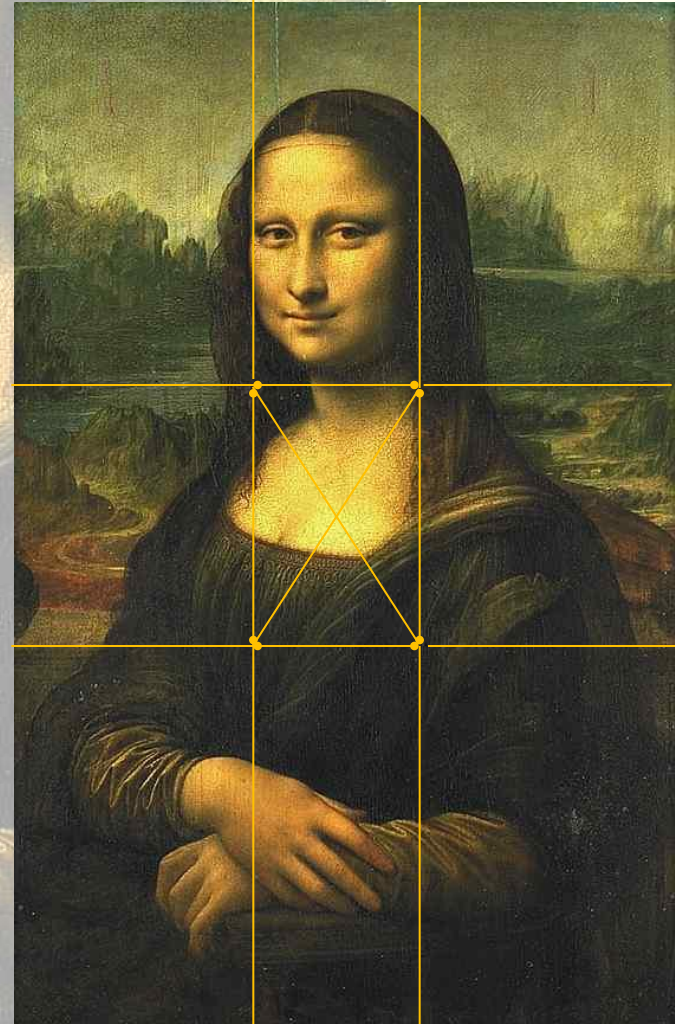
Существовало мнение, что композиция имеет успех из-за построения на «золотых прямоугольниках».



Существовало мнение, что композиция имеет успех из-за построения на «золотых прямоугольниках».

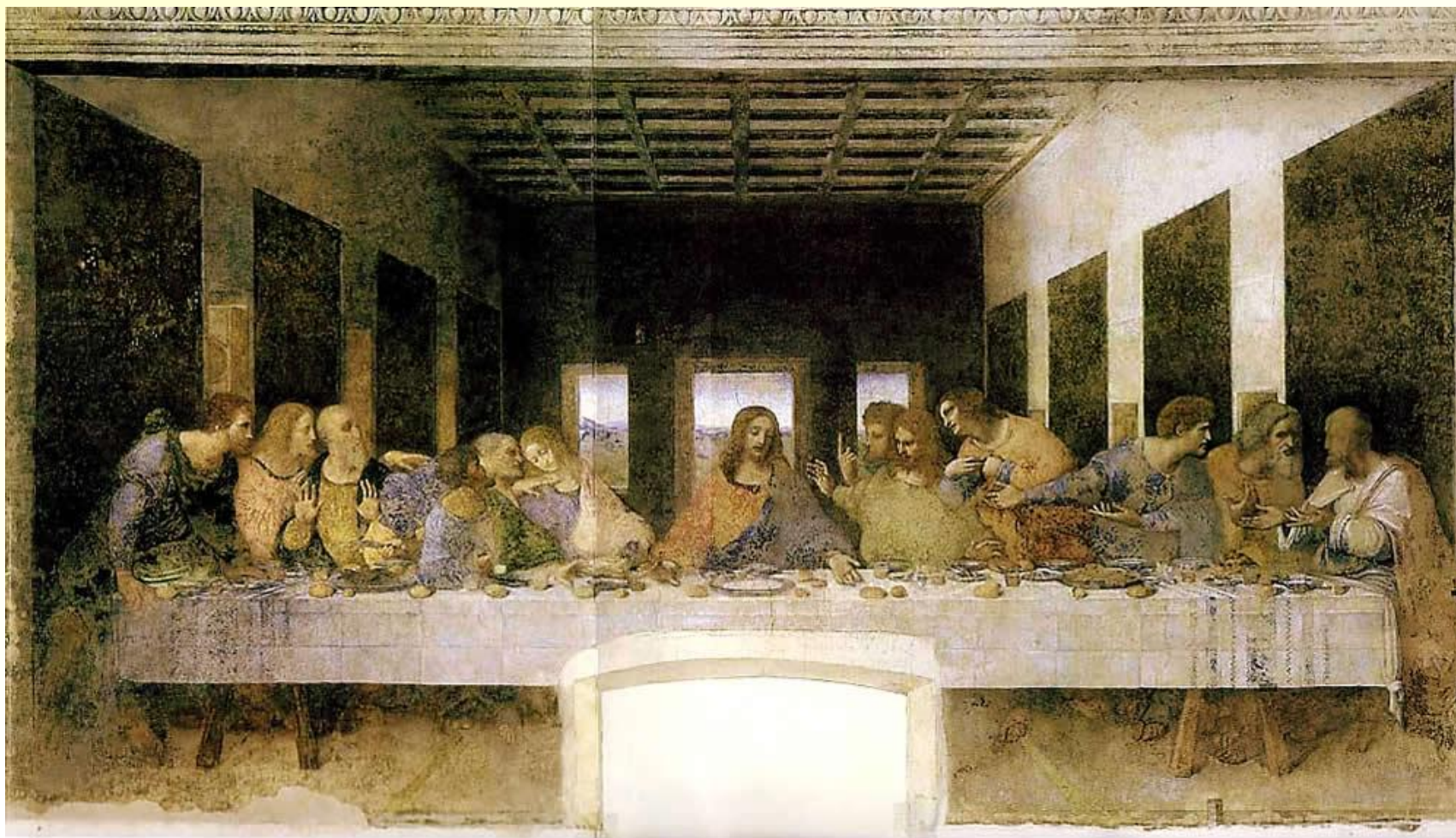


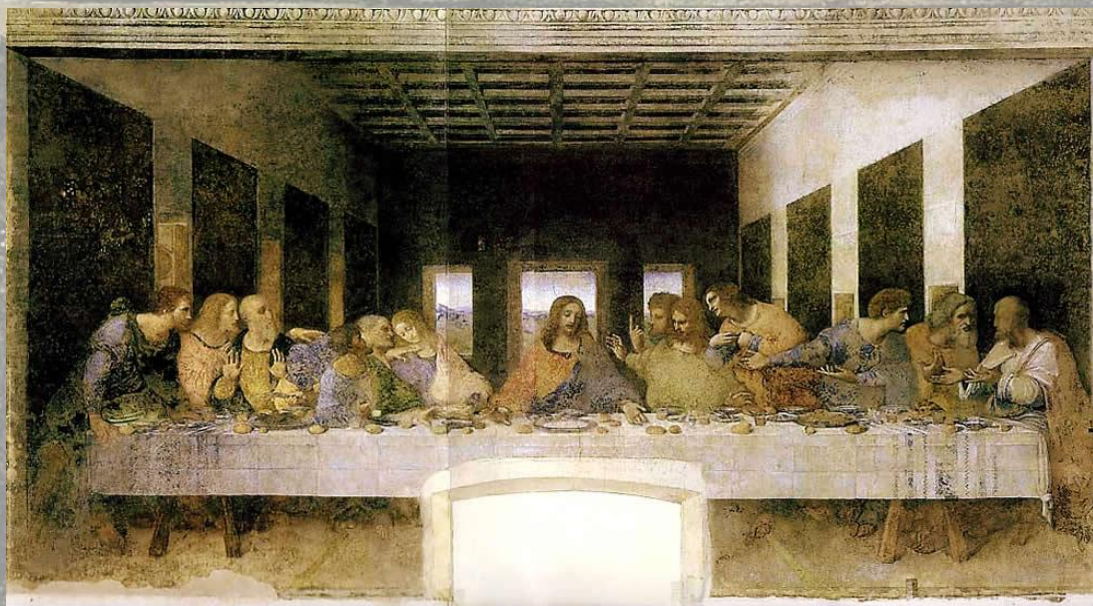
Картина имеет точки, невольно приковывающие наше внимание, так называемые зрительные центры..



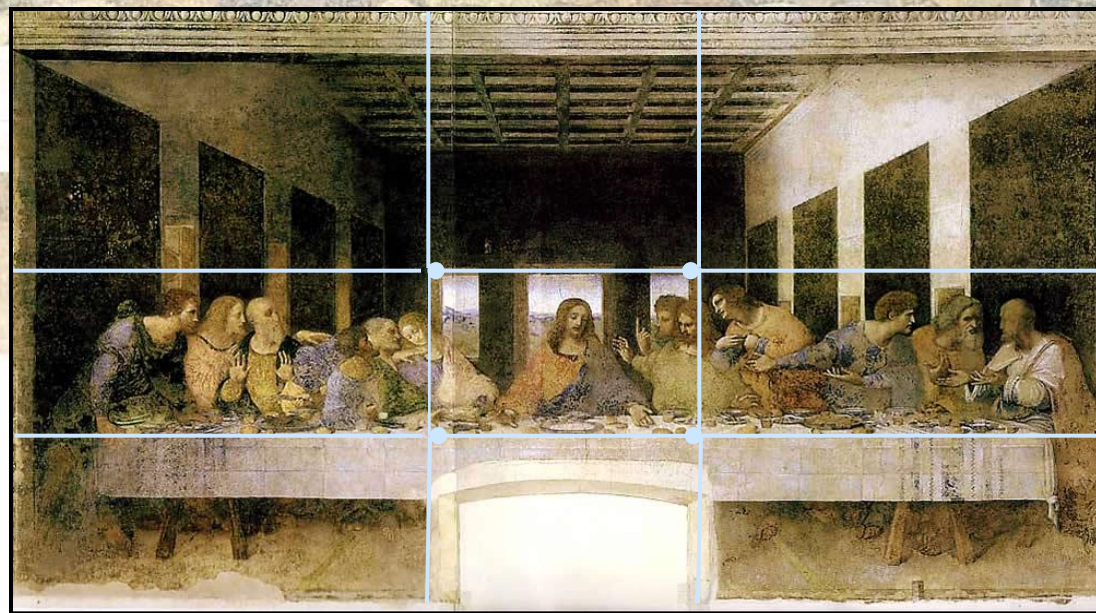


# Фреска Леонардо да Винчи «Тайная вечеря» и золотое сечение

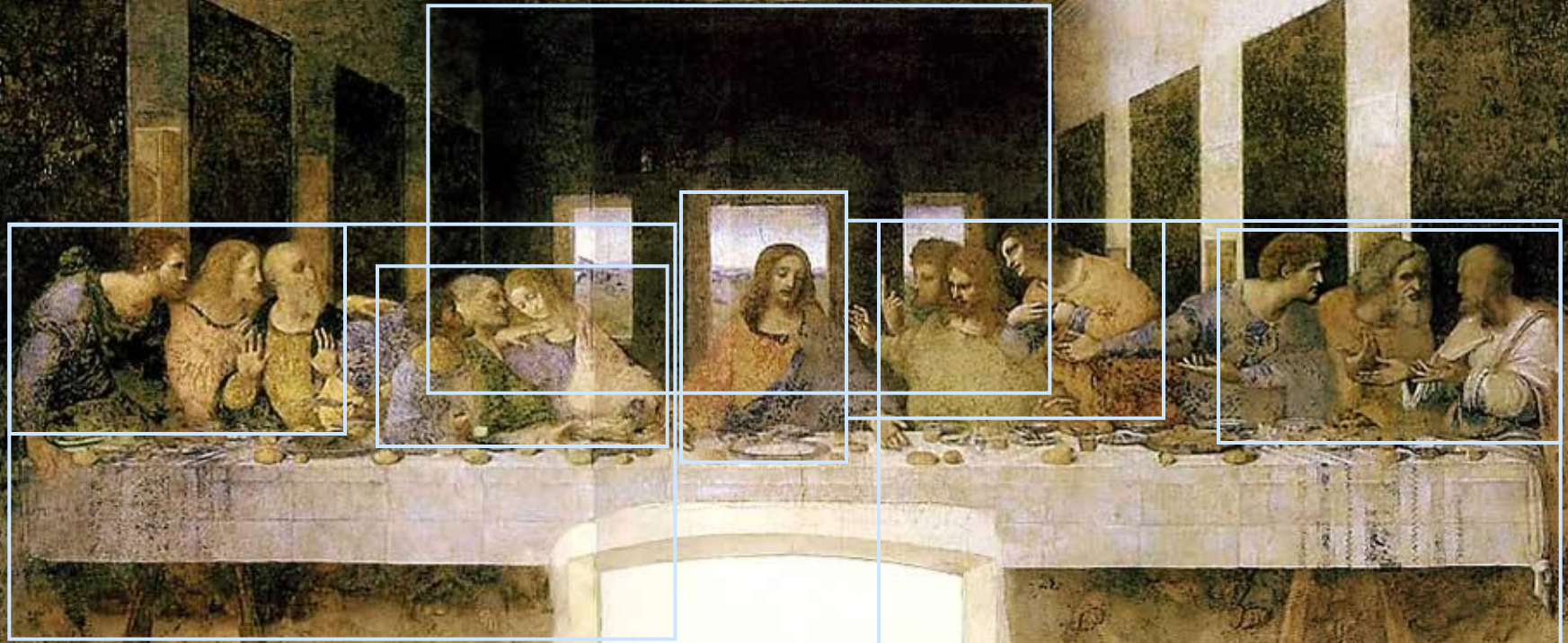


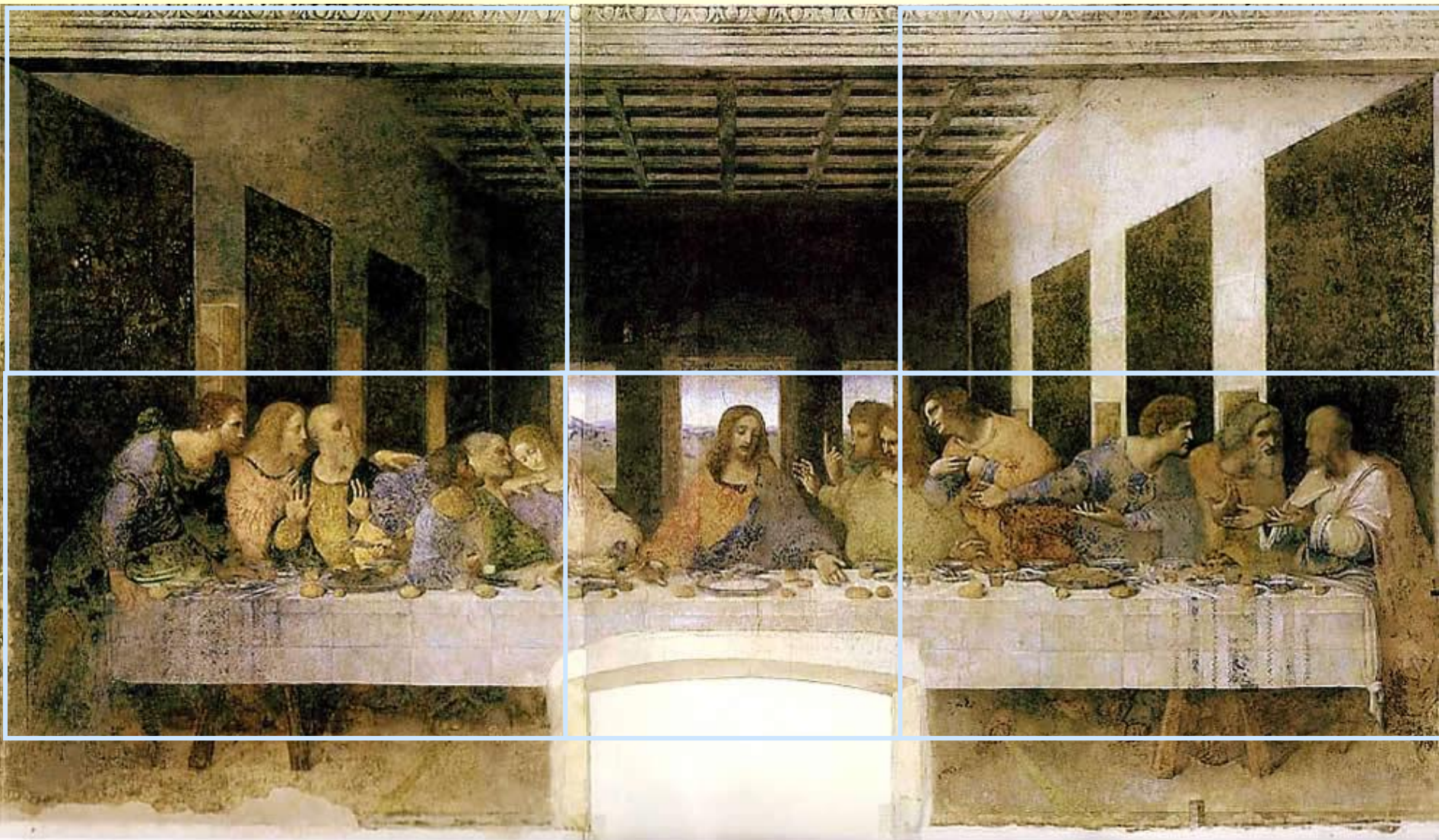


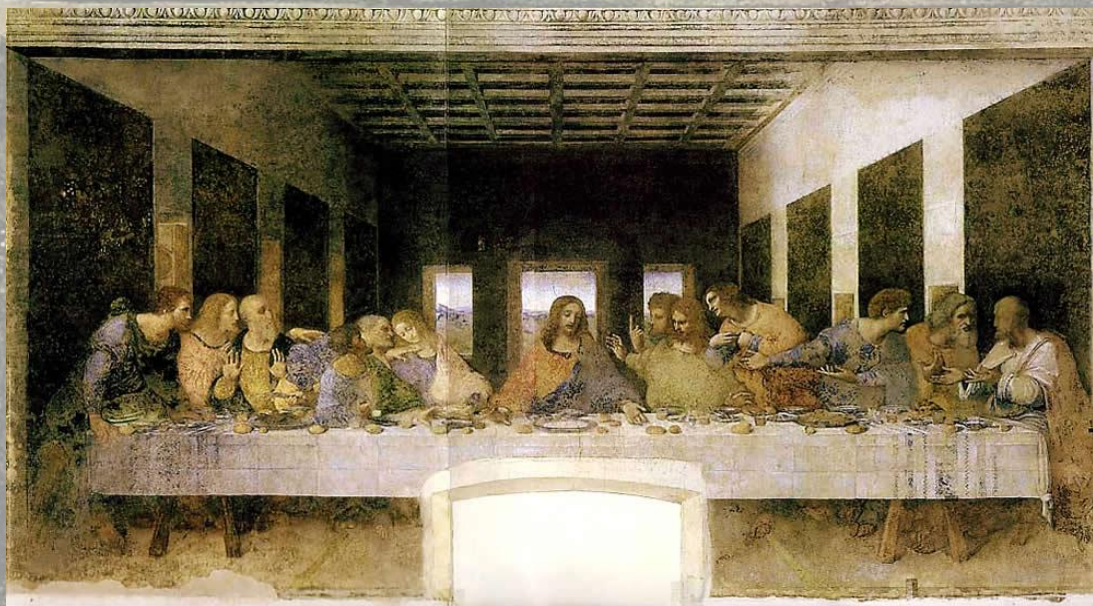
На фреске  
«Тайная вечеря»  
четко  
просматривается  
деление картины  
в пропорциях  
золотого сечения.



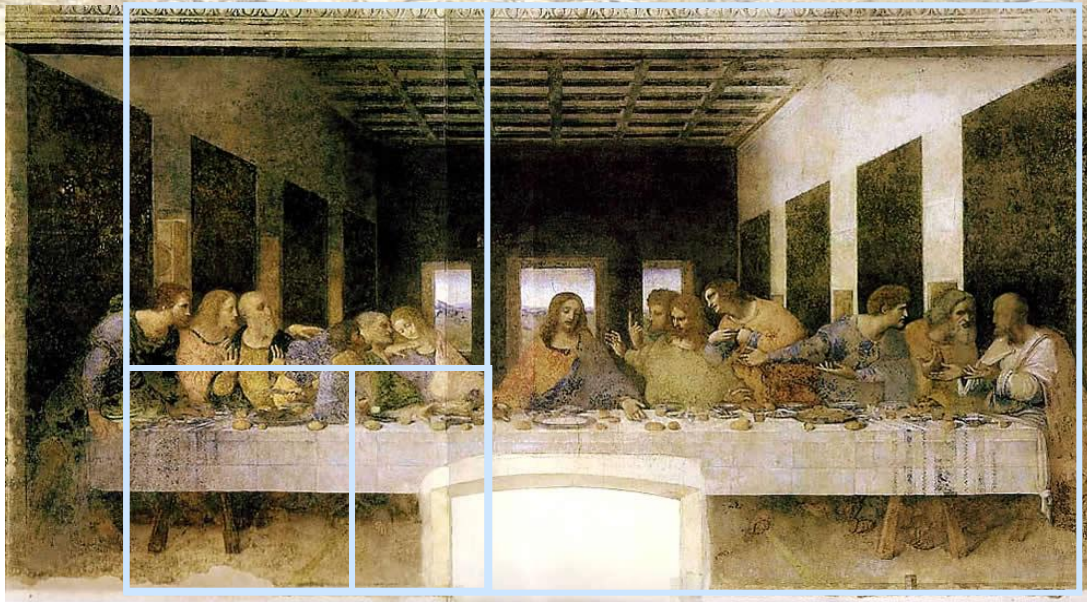
# Наличие золотых прямоугольников





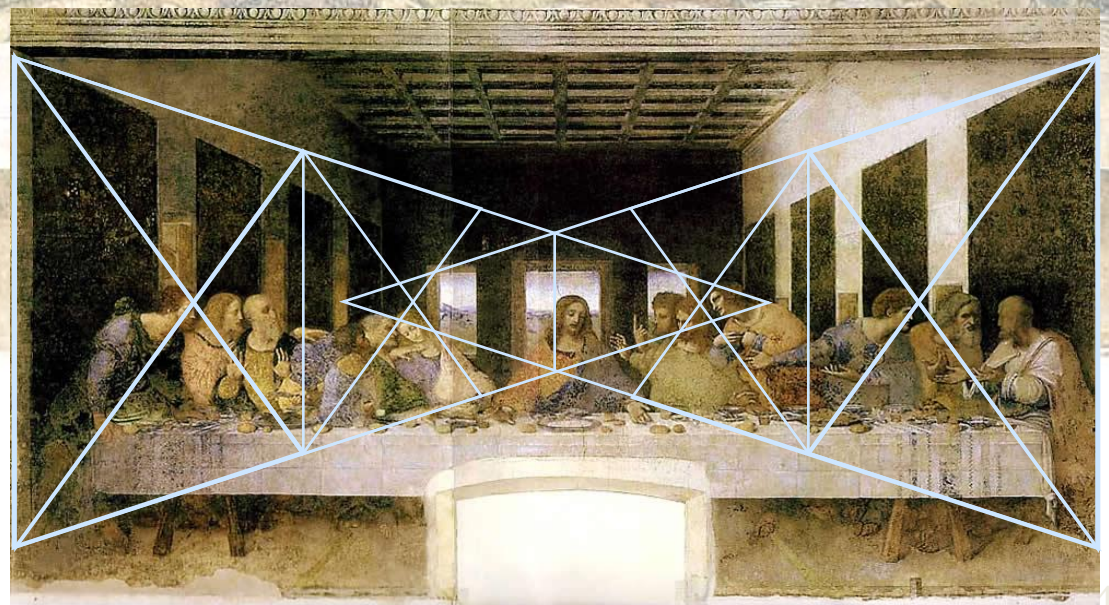


На фреске  
«Тайная вечеря»  
четко  
просматривается  
наличие золотого  
прямоугольника





В композиции фрески «Тайная вечеря» можно обнаружить наличие золотых треугольников.



# Золотое сечение в картине И.И. Шишкина «Корабельная роща»



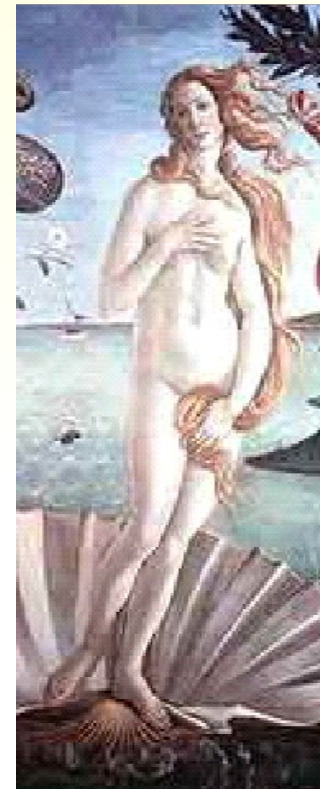
На знаменитой картине И.И. Шишкина «Корабельная роща» с очевидностью просматриваются мотивы золотого сечения.





# Золотые треугольники и композиция картины

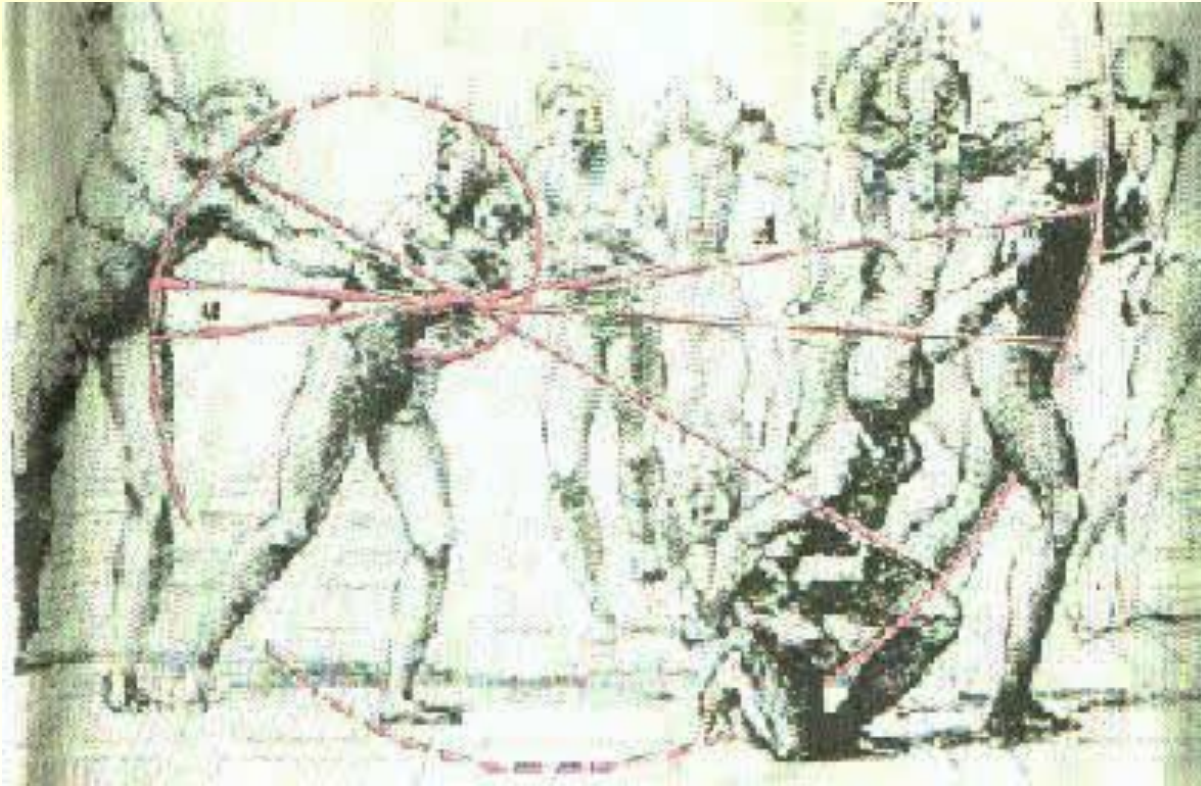




Сандро Ботичелли «Рождение Венеры» (около 1485 г).

- Пропорции Венеры выполнены в **золотом сечении**.

# Золотая спираль в картине Рафаэля" Избиение младенцев»

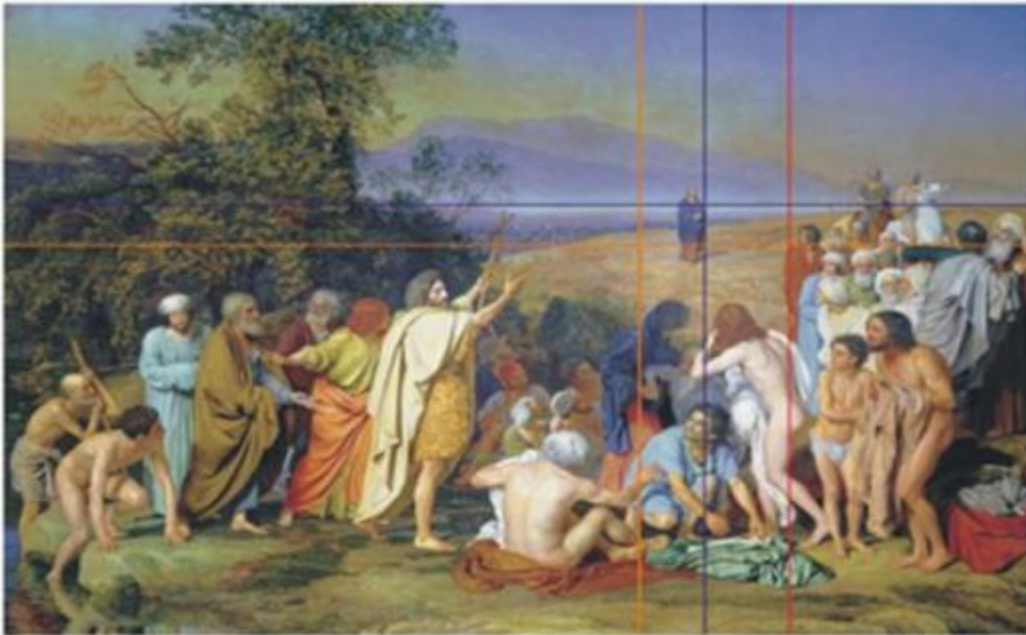


«Золотая спираль» выбрана как композиционная основа рисунка Рафаэля.



*К.А. Васильев «У окна»*

$X/\Phi X - X/\pi X - X/\Phi^3$



$Y - Y/\pi$

$Y/\Phi$

*Иванов  
«Явление Христа народу»*



*Суд Париса Камея*



# Золотое сечение в архитектуре и скульптуре

Гармония – вот что лежит в основе всех видов искусства на всем протяжении человеческой истории.

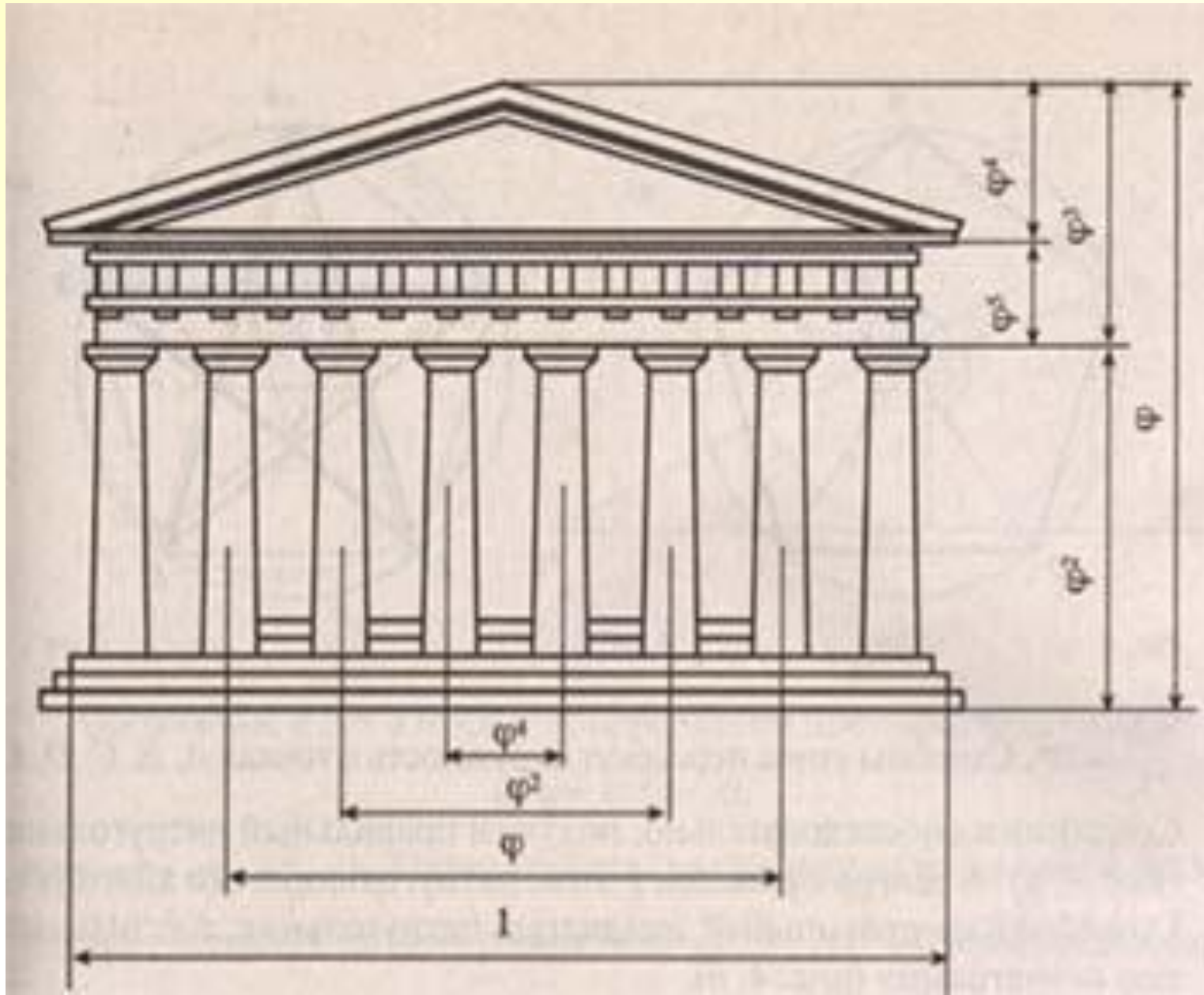
*И.В.Жолтовский*

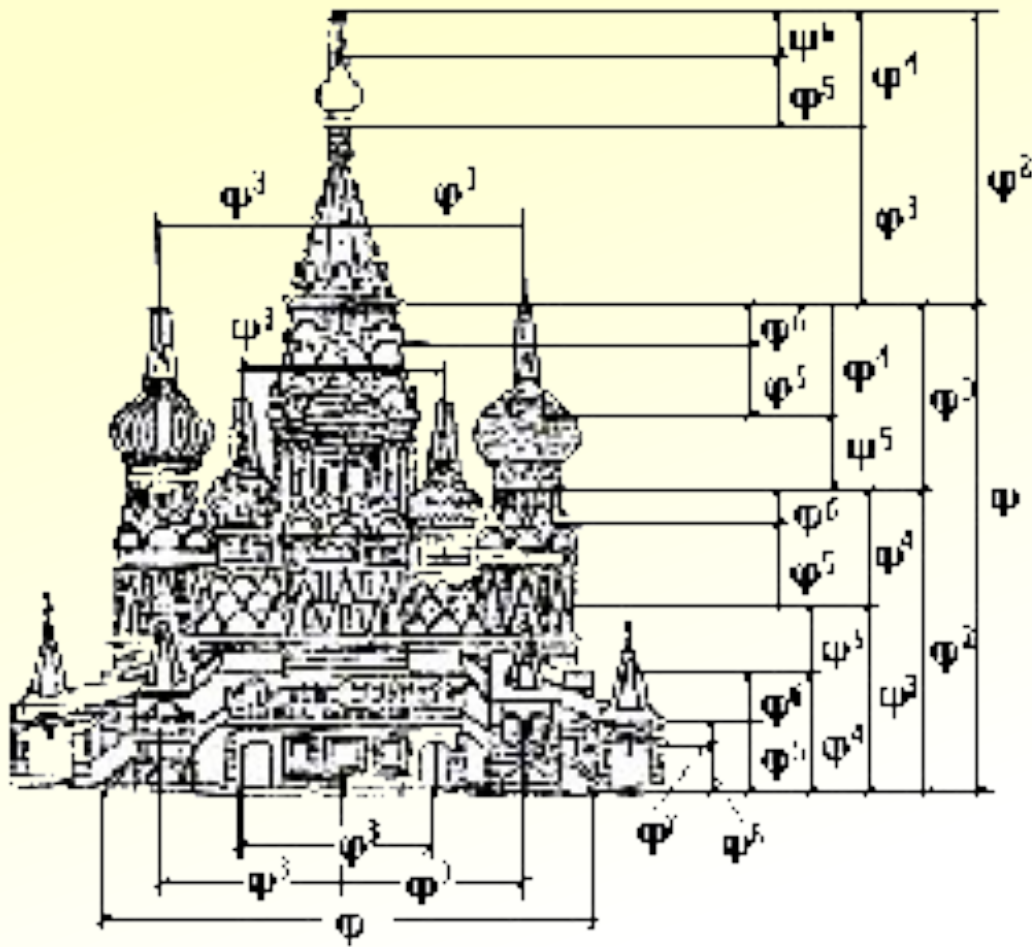
# Парфенон – главный храм Афинского Акрополя.

Архитектор Фидий



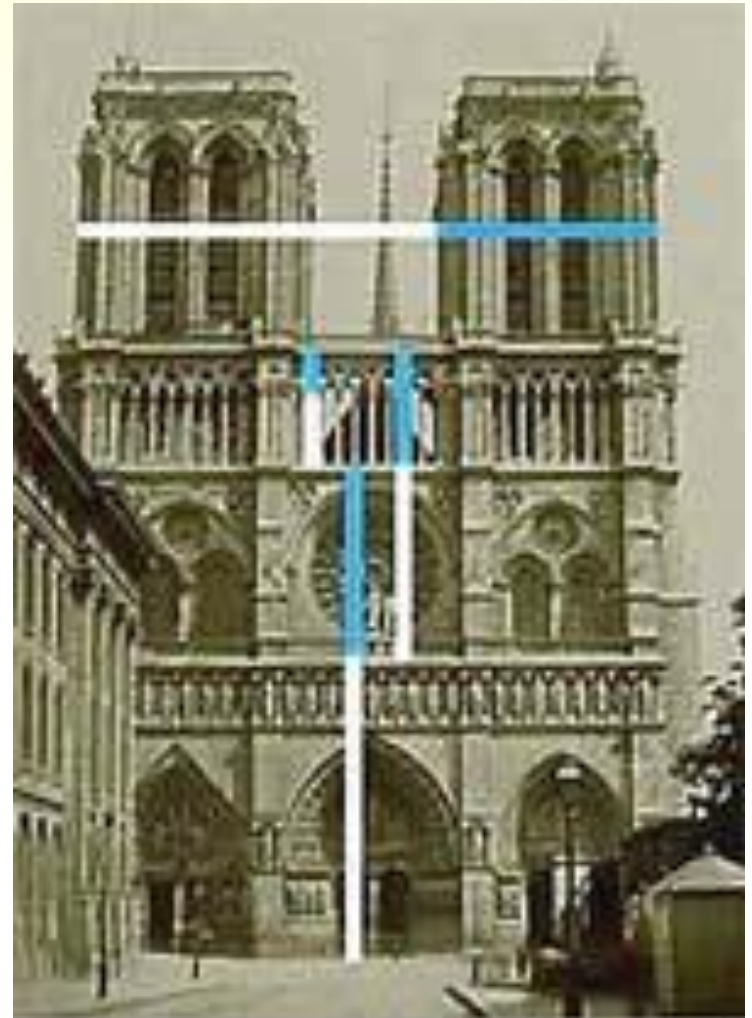
# Афинский Акрополь – Золотое сечение



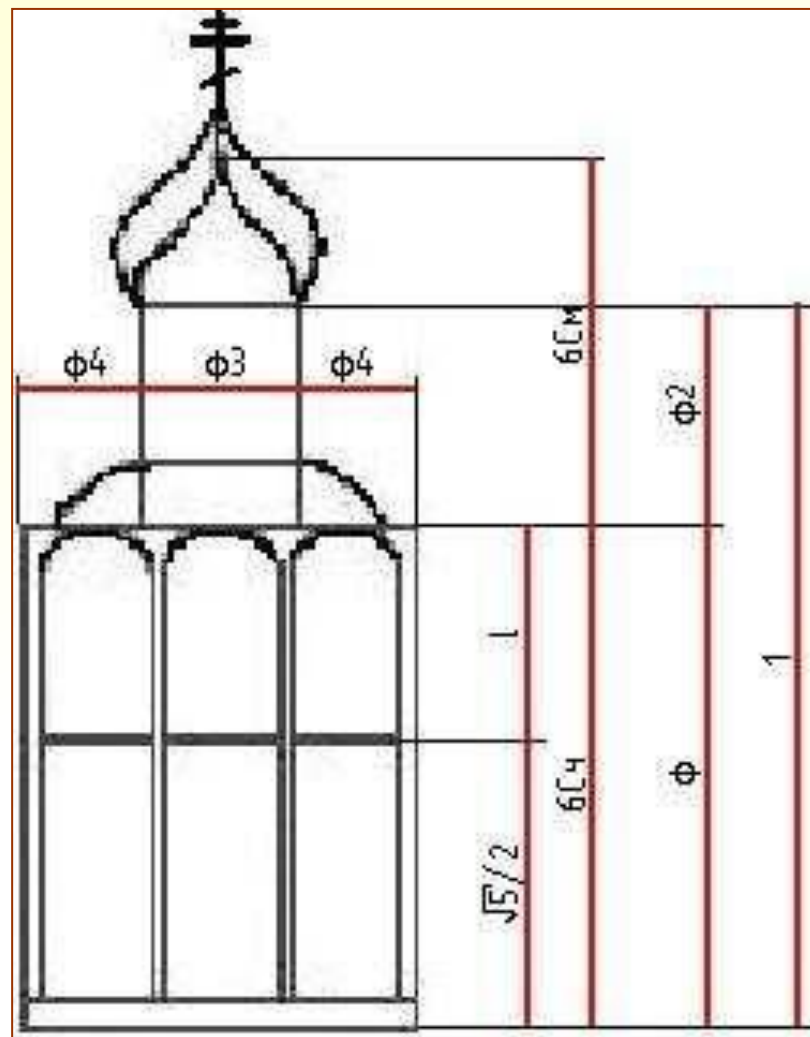


Покровский Собор на Красной  
Площади в Москве.

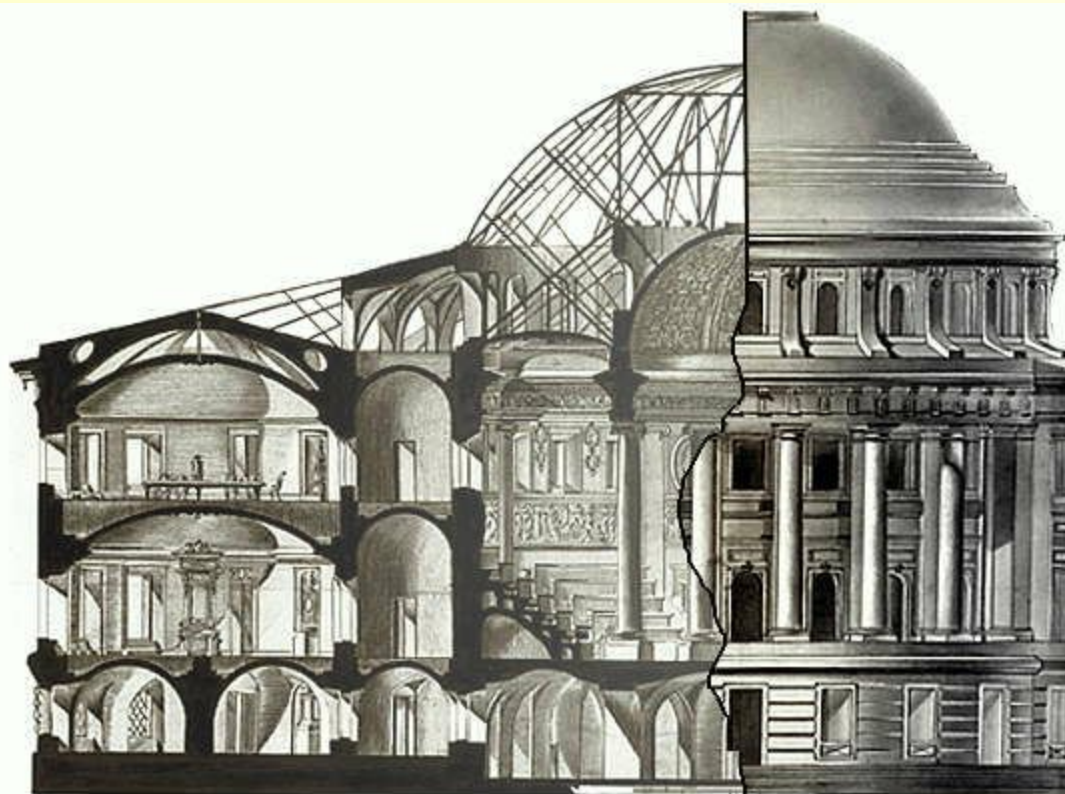
Собор Нотр-дам де Пари  
в Париже.







Церковь Покрова Богородицы на Нерли 1165 год  
«Простая» красота пропорций **золотого сечения**.



М.Ф. Казаков. Сенат.Разрез.(парадный зал).Фрагмент проекта. Москва (1776-1782)



М.Ф.Кзаков. Голицынская больница.  
Москва. 1794-1801гг



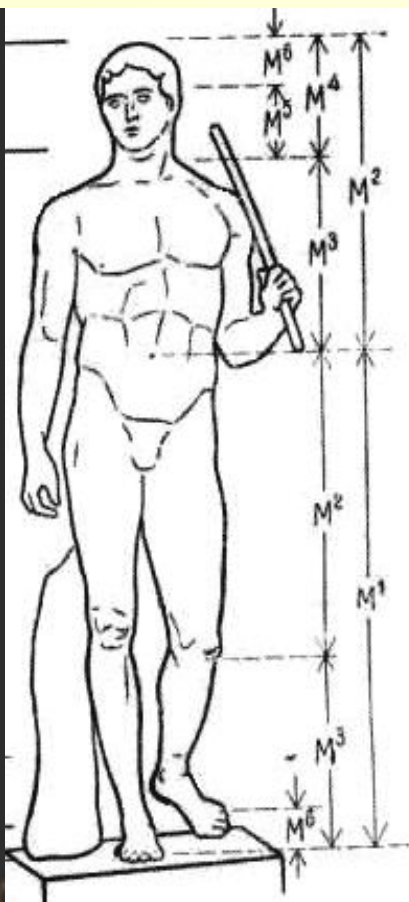
Петровский дворец.(1776 –1796 ).

Военно-воздушная академия.

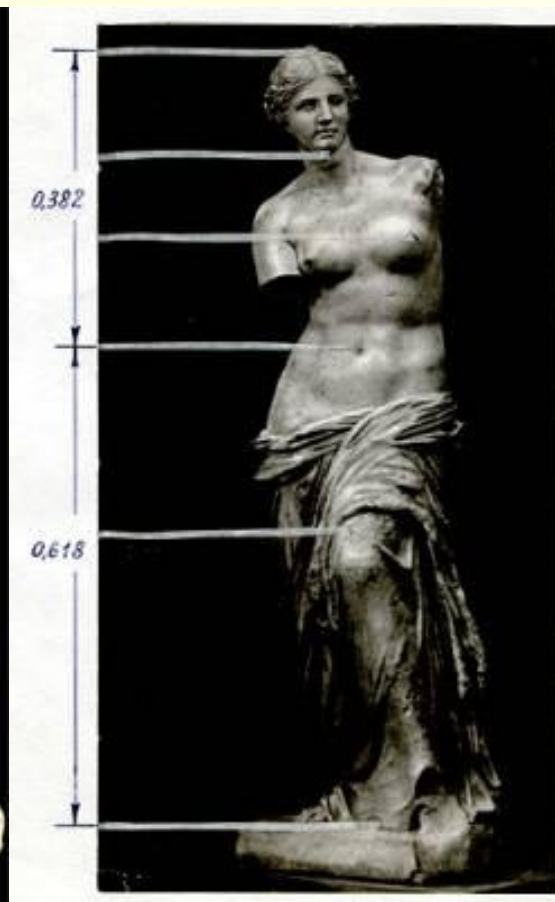


В.И.Баженов. Дом – Пашкова.  
Москва.1786г.

# Золотое сечение в скульптуре



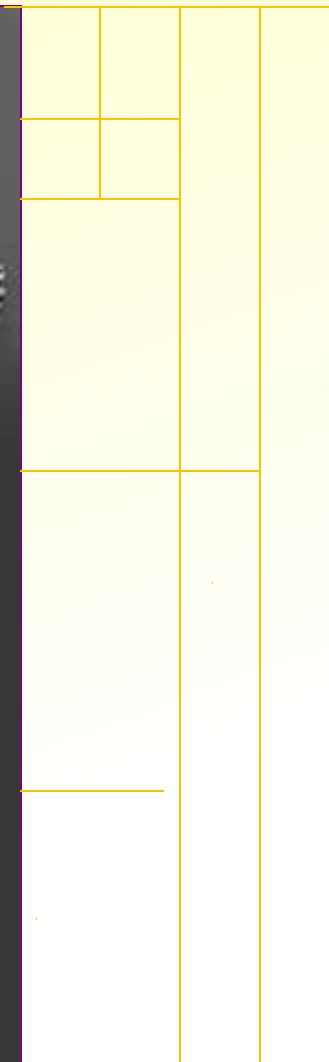
Дорифор Поликлета



Венера Милосская

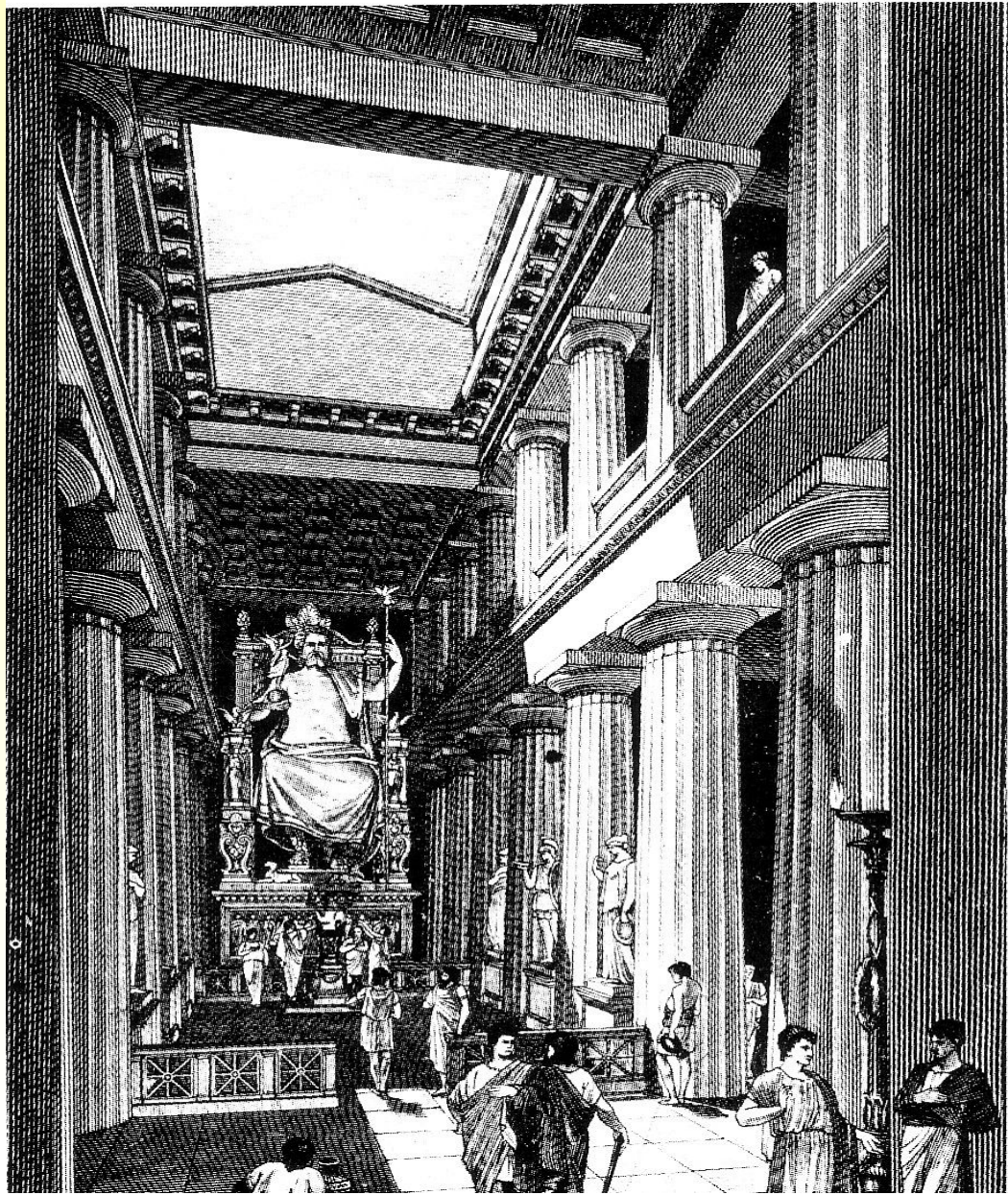


Моисей. Скульптура Микеланджело(1515г.)




Аполлон Бельведерский.Скульптор Леохара  
(середина V века до н.э.)







Афина Парфенос.Скульптор Фидий(Vвек до н.э.)



# Золотое сечение в поэзии и музыке

Все, что пишется с божественным  
вдохновением и святым духом, то весьма  
прекрасно.  
Демокрит.

# Золотое сечение в музыке



Результаты исследования золотого сечения в музыке впервые изложены в докладе Эмилия Розенова и позднее развиты в его статье «Закон золотого сечения в поэзии и музыке». Розенов показал действие данной пропорции в музыкальных формах эпохи Барокко и классицизма на примере произведений Баха, Моцарта, Бетховена.

# Золотое сечение в поэзии



- Примеры из поэзии бесчисленны. Исследователи особенно выделяют гений А.С. Пушкина.
- Наиболее часто в стихотворениях А.С. Пушкина встречающиеся размеры его стихов тяготеют к числам 5, 8, 13, 21, 34, размер близок к числам ряда Фибоначчи. На эти строки приходятся смысловые максимумы стихотворений.

# "Не дорого ценю я громкие права..."

- Не дорого ценю я громкие права,  
От коих не одна кружится голова.  
Я не ропщу о том, что отказали боги  
Мне в сладкой участи оспаривать налоги  
Или мешать царям друг с другом воевать;  
И мало горя мне, свободно ли печать  
Морочит олухов, иль чуткая цензура  
В журнальных замыслах стесняет балагура.  

---

Все это, видите ль, слова, слова, слова.  
Иные, лучшие, мне дороги права:  
Иная, лучшая, потребна мне свобода:  
Зависеть от царя, зависеть от народа -  
Не все ли нам равно? Бог с ними.  

---

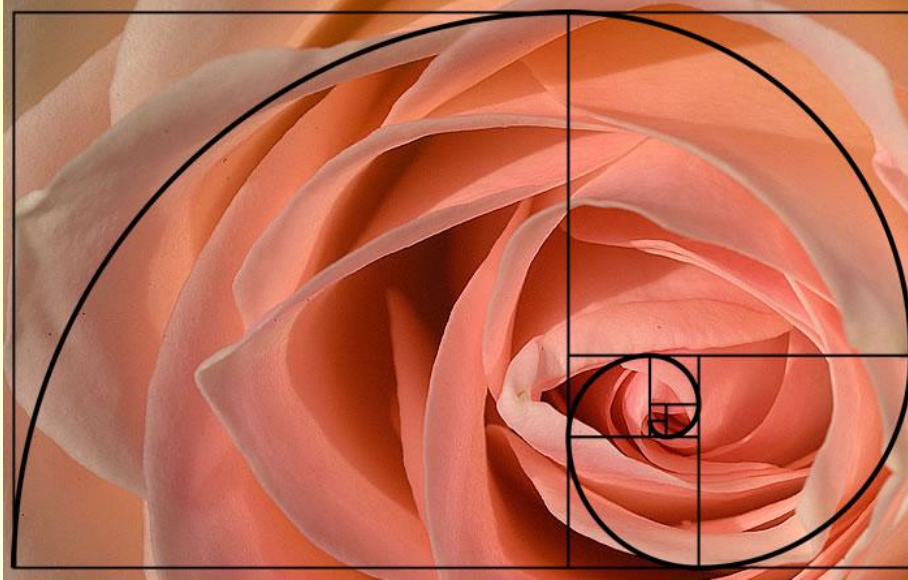
Никому отчета не давать, себе лишь самому  
Служить и угождать; для власти, для ливреи  
Не гнуть ни совести, ни помыслов, ни шеи;  
По прихоти своей скитаться здесь и там,  
Дивясь божественным природы красотам,  
И пред созданьями искусств и вдохновенья  
Трепеща радостно в восторгах умиленья,  
Вот счастье! Вот права ...
- 21 строка.
- Две смысловые части: в 13 и 8 строк.
- Первая часть этого стиха по смысловому содержанию делится на 8 и 5 строк.
- Все стихотворение построено по законам золотой пропорции.

# *Пора, мой друг, пора!*

- *Пора, мой друг, пора! Покоя сердце просит –  
Летят за днями дни, и каждый час уносит  
Частичку бытия, а мы с тобой вдвоем  
Предполагаем жить... И глядь – как раз – умрем.  
На свете счастья нет, но есть покой и воля.*
- 

*Давно завидная мечтается мне доля –  
Давно, усталый раб, замыслил я побег  
В обитель дальнюю трудов и чистых нег.*

- 8 строк.
- Две смысловые части.
- 1 часть -5 строк.
- 2 часть – 3 строки.
- Это закономерность творческого восприятия поэта, интуитивное чувство гармонии.



«Высшее назначение математики...состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает». Винер Н.