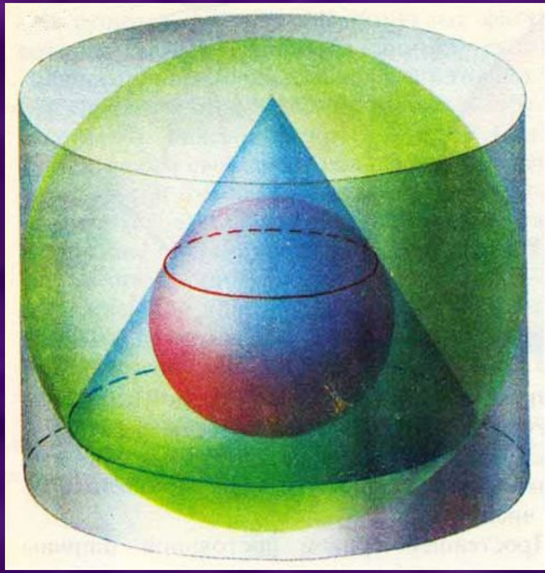
муниципальное автономное общеобразовательное

учреждение

средняя общеобразовательная школа № 45

Методическое пособие для учащихся 11 классов

«Тела вращения, вписанные в тела вращен



Составил

учитель математики

высшей категории

Гавинская Елена

Вячеславовна.

г.Калининград

2016-2017 учебный год

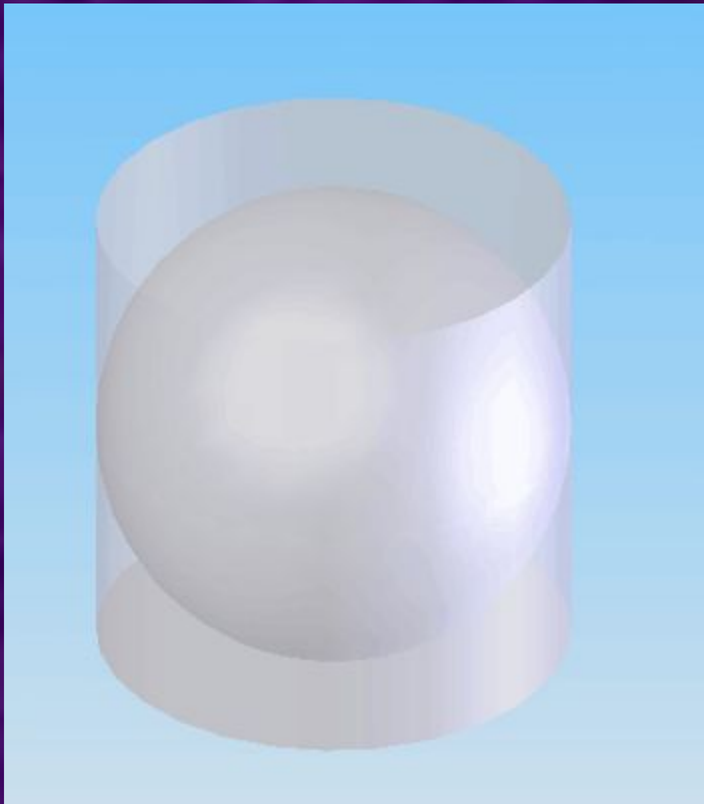
Шар, вписанный в цилиндр.

Шар можно вписать только в такой цилиндр, высота которого равна диаметру основания (такой цилиндр называется равносторонним).

Шар касается оснований цилиндра в их центрах и боковой поверхности цилиндра по окружности большого круга шара, параллельной основаниям цилиндра.

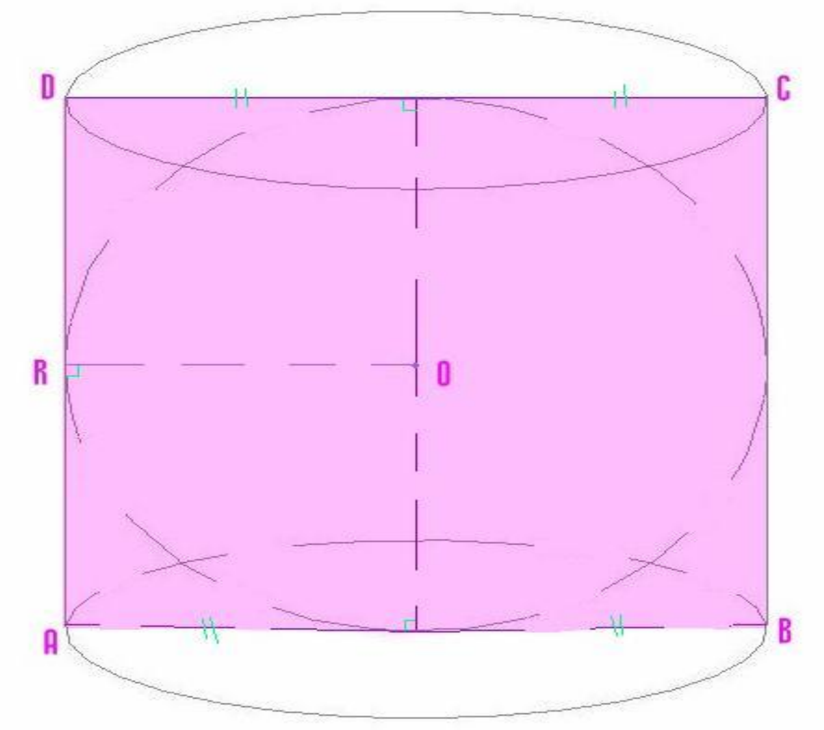
Радиус шара R равен радиусу цилиндра r, а диаметр шара равен высоте цилиндра:

$$R = r,$$
$$2R = H$$



Задача про шар, вписанный в цилиндр.

«В цилиндр вписан шар, радиус которого равен 5 см. Найти площадь поверхности цилиндра».

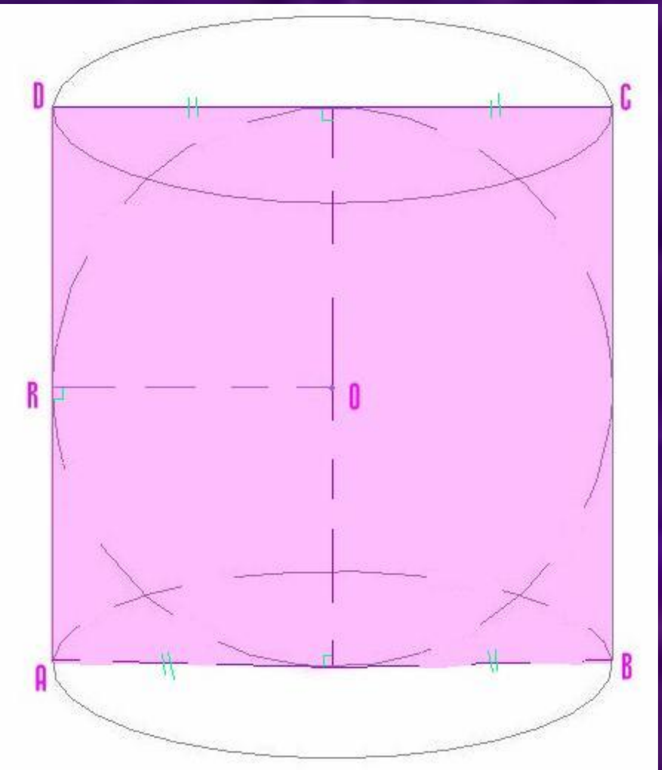


Дано:

цилиндр; шар вписан в к цилиндр;
радиус шара R=5 см.

Найти: $S_{\text{полн.цил.}}$

Решение:



Рассмотрим осевое сечение цилиндра ABCD – квадрат, так как по свойству цилиндра с вписанным в него шаром, $H=2R_{\text{шара}}=2r_{\text{цилиндра}}$.

1.Так как по условию шар вписан в цилиндр и R=5 см, то по свойству: r=5 см, а H=2·5=10 (см)

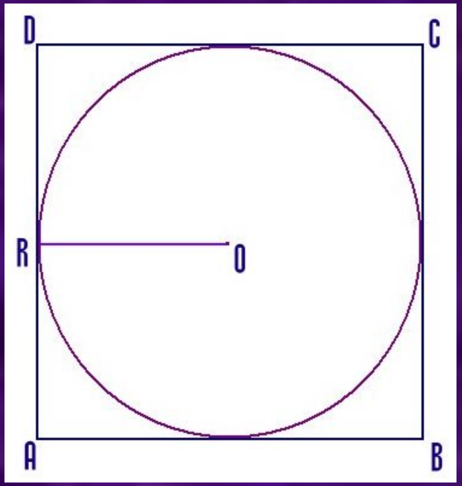
2.

$$S_ц = 2 \bullet \pi \bullet r \bullet (r+H)$$

$$S_ц = 2 \bullet \pi \bullet 5 \bullet (5+10)$$

$$S_ц = 10 \bullet \pi \bullet 15$$

$$S_ц = 150 \bullet \pi \ (\text{см}^2)$$



Ответ: 150 П см^2.

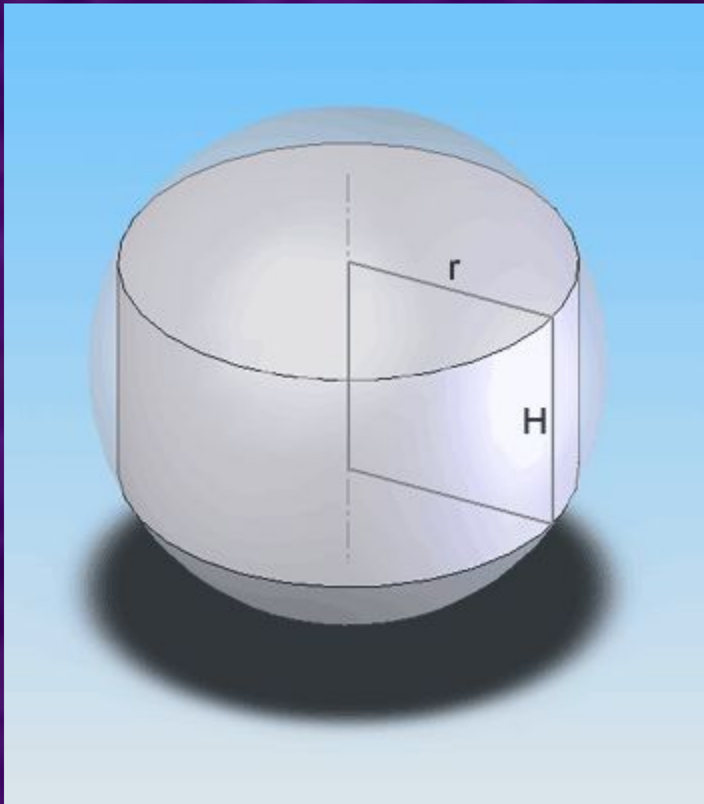
Шар, описанный около цилиндра.

<u>**Шар можно описать около любого (прямого кругового) цилиндра.**</u>

Окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара. Центр шара лежит на середине высоты, проходящей через ось цилиндра.

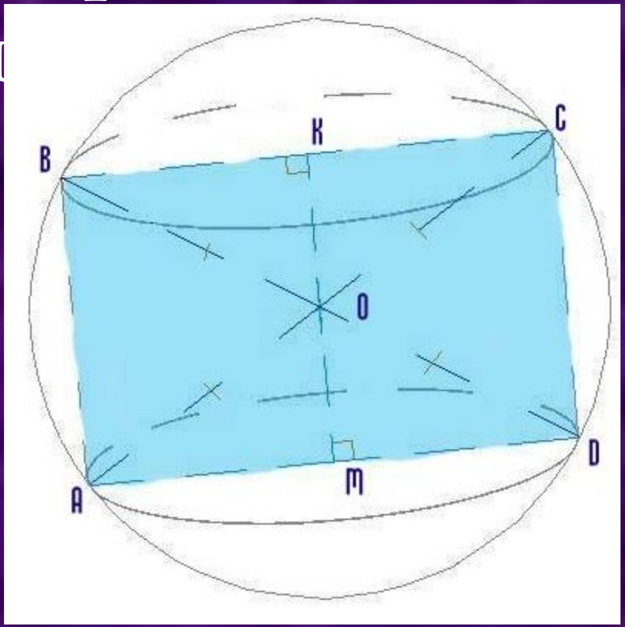
Радиус шара R, радиус цилиндра r и высота цилиндра H связаны соотношением:

$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2$$



Задача про цилиндр, вписанный в шар.

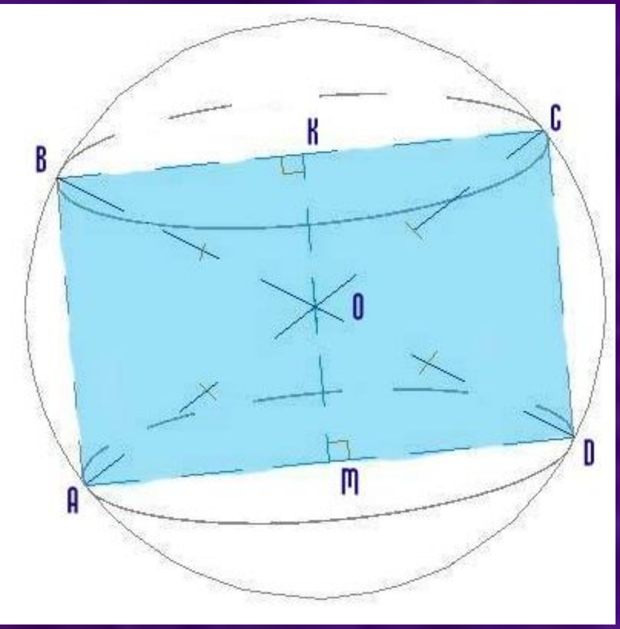
«Угол между диагоналями осевого сечения цилиндра равен 60 градусов, а образующая цилиндра – 6 см. Найти объём шара, описанного вокруг цилинд



Дано: цилиндр; образующая AB=6 см; угол между диагоналями осевого сечения равен 60º ;шар (т.O;R) описан около цилиндра.

Найти: $V_{шара}$

Решение:



Рассмотрим осевое сечение цилиндра ABCD – прямоугольник.

1. ∠AOB=180º-∠BOC

   Но ∠BOC – угол между диагоналями осевого сечения цилиндра, то есть ∠BOC=60º.

   ∠AOB=180º-60º=120º

2. В △BOC по теореме косинусов:

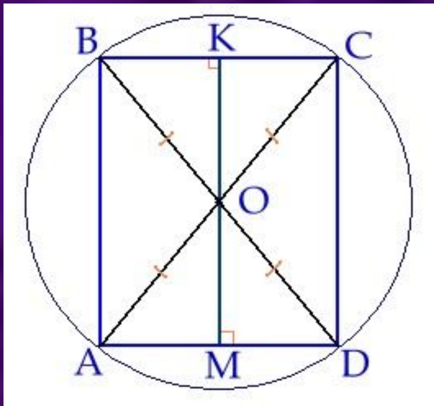
$$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2 \bullet BO \bullet AO \bullet \cos AOB$$

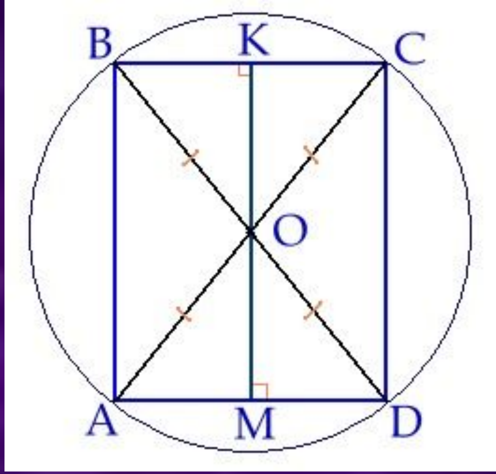
$$36 = R^2 + R^2 - 2 \bullet R \bullet R \bullet \cos 120^o$$

$$36 = 2 \bullet R^2 - 2 \bullet R^2 \bullet (-0{,}5)$$

$$3 \bullet R^2 = 36$$

$$R^2 = 12$$





$R = \sqrt{12}$ или $R = -\sqrt{12}$

$R = 2\sqrt{3}(см)$ $R = -2\sqrt{3}$ - не удовлетворяет условию задачи

3.

$$V_{шара} = \frac{4}{3} \bullet \pi \bullet R^3$$

$$V_{шара} = \frac{4}{3} \bullet \pi \bullet 24 \bullet \sqrt{3}$$

$$V_{шара} = 32 \bullet \pi \bullet \sqrt{3}(см^3)$$

Ответ: $32 \bullet \pi \bullet \sqrt{3}\ см^3$

Шар, вписанный в конус.

<u>**Шар можно вписать в любой конус**</u>.

Шар касается основания конуса в его центре и боковой поверхности конуса по окружности, лежащей в плоскости, параллельной основанию конуса.

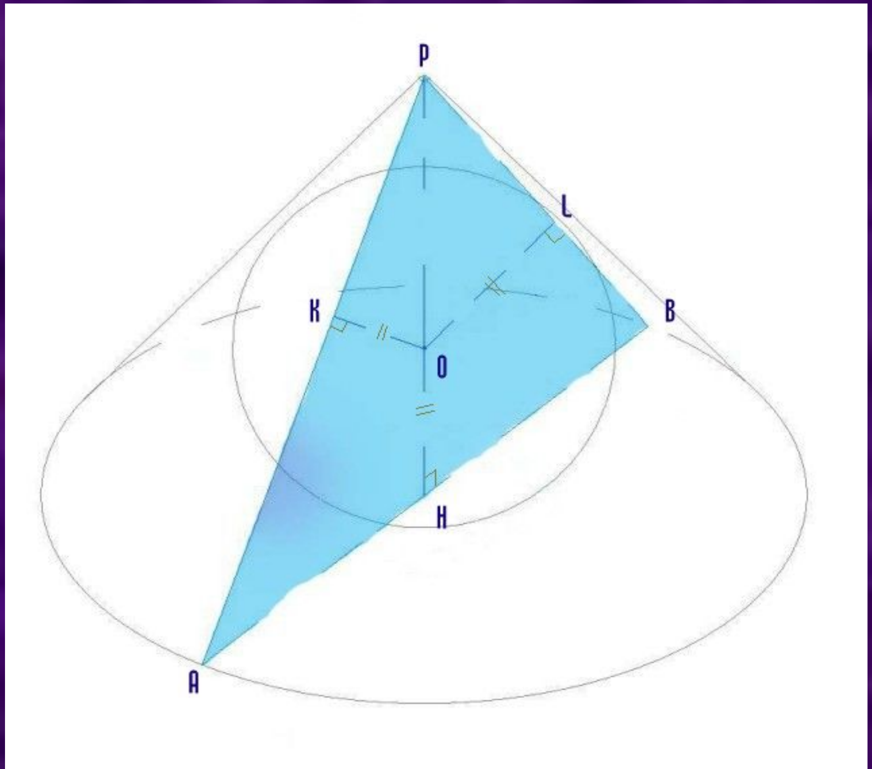
Центр шара лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник, являющийся осевым сечением конуса.

Радиус шара R, радиус конуса r и высота конуса H связаны соотношением:

$$\frac{R}{H-R}=\frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}}$$

Задача про шар, вписанный в конус.

«В конус, радиус основания которого равен 8 дм, вписан шар радиуса 4 дм. Найти объём данного конуса».



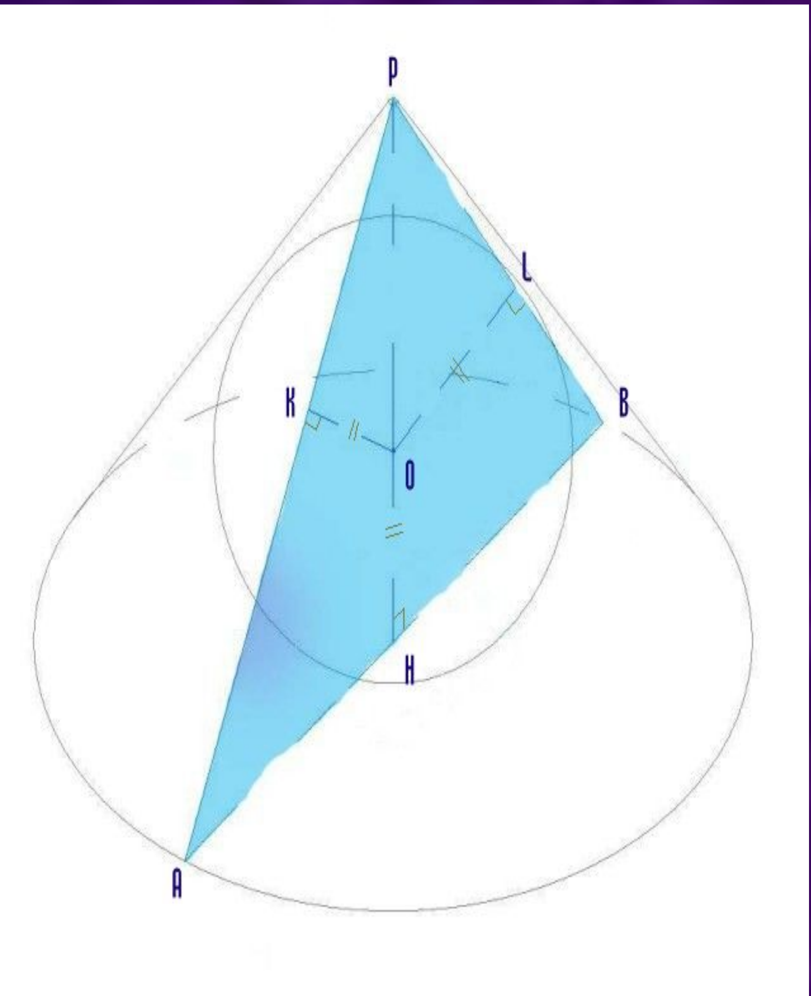
Дано:

конус; шар (т.О;R=OH=4 дм) вписан в конус

радиус основания AH=8 дм;.

Найти: $V_{\text{конуса}}$

Решение:



Рассмотрим осевое сечение конуса PAB – равнобедренный треугольник.

1. KO=OL=R

   KO ⊥ AP   => PO – биссектриса

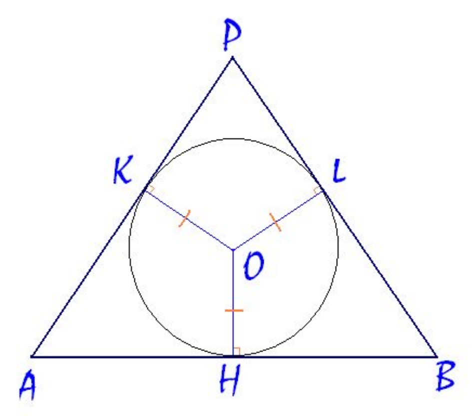
   OL ⊥ PB

2. Пусть PO∩AB=E

   Но △PAB – равнобедренный (так как AP=PB как образующие)

   Значит, по свойству PE – высота => =>PE ⊥ AB.

   Но OH ⊥ AB (по свойству радиусов) => E и H совпадают.



3. В △OPK и △APH

∠PKO=∠PHA=90°

∠P-общий

△OPK~△APH (по 2 углам) =>

OK:AH=PK:PH

4:8=PK:(PO+4)

1:2=PK:(PO+4)

4. В △POK (прямоугольный) по теореме Пифагора:

$PO^2=PK^2+KO^2$

$$PK=\sqrt{PO^2-KO^2}$$

$$PK=\sqrt{PO^2-16}$$

5. 1:2=PK:(PO+4)

$$\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{PO^2-16}}{PO+4}$$

$$PO+4=2\sqrt{PO^2-16}$$

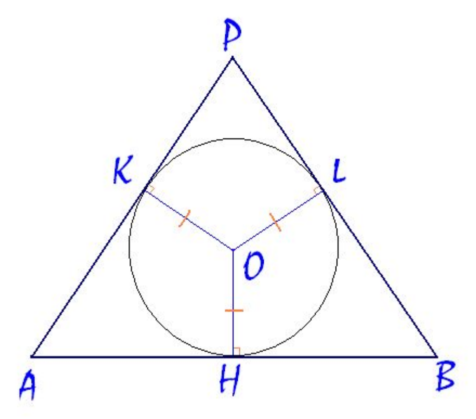
$$(PO+4)^2=4(PO^2-16)$$

$$PO^2+8\bullet PO+16=4\bullet PO^2-64$$

$$3\bullet PO^2-8\bullet PO-80=0$$

$$D=64-4\bullet 3\bullet(-80)=64+960=1024$$

$$PO=\frac{8\pm\sqrt{1024}}{2\bullet 3}$$



$$PO = \frac{8 \pm 32}{6}$$

$$PO = \frac{8+32}{6}$$ или $$PO = \frac{8-32}{6}$$

$$PO = \frac{40}{6}$$ $$PO = \frac{-24}{6}$$

$$PO = 6\frac{2}{3}(дм)$$ $$PO = -4$$ -не удовлетворяет условию задачи

6. HP=PO+OH

$$HP = 6\frac{2}{3} + 4 = 10\frac{2}{3}(дм)$$

7. $$V_{кон} = \frac{1}{3} h \bullet \pi \bullet R^2$$

$$V_{кон} = \frac{1}{3} \bullet \frac{32}{3} \bullet \pi \bullet 16 = \frac{512\pi}{9} = 56\frac{8\pi}{9}(дм^3)$$

Ответ: $56\frac{8\pi}{9}(дм^3)$

Шар, описанный около конуса.

<u>Шар можно описать около любого конуса.</u>

Окружность основания конуса и вершина конуса лежат на поверхности шара.

Центр шара лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, являющегося осевым сечением конуса.

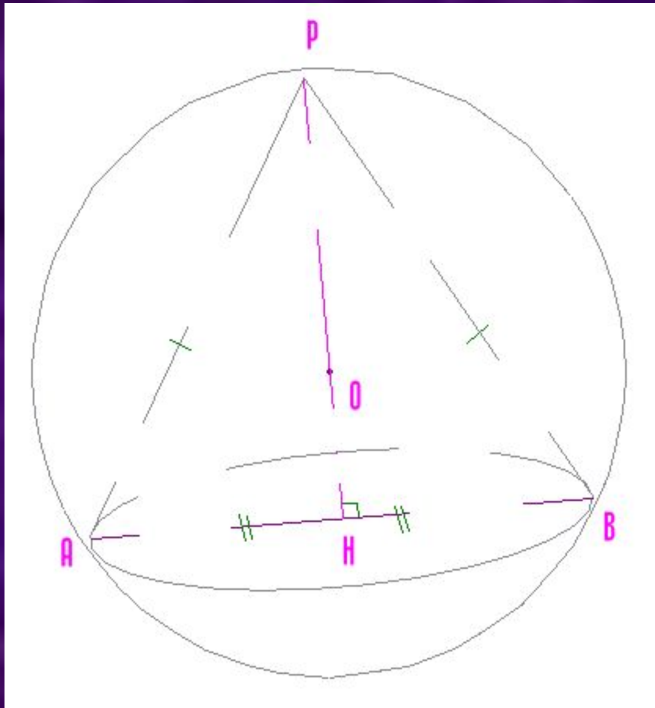
Радиус шара R, радиус конуса r и высота конуса H связаны соотношением:

$$R^2 = (H - R)^2 + r^2$$

Это соотношение справедливо и в том случае, когда H < R.

Задача про конус, вписанный в шар.

«В шар вписан конус, радиус основания которого равен 3 см, а высота – 5 см. Найти площадь поверхности шара».



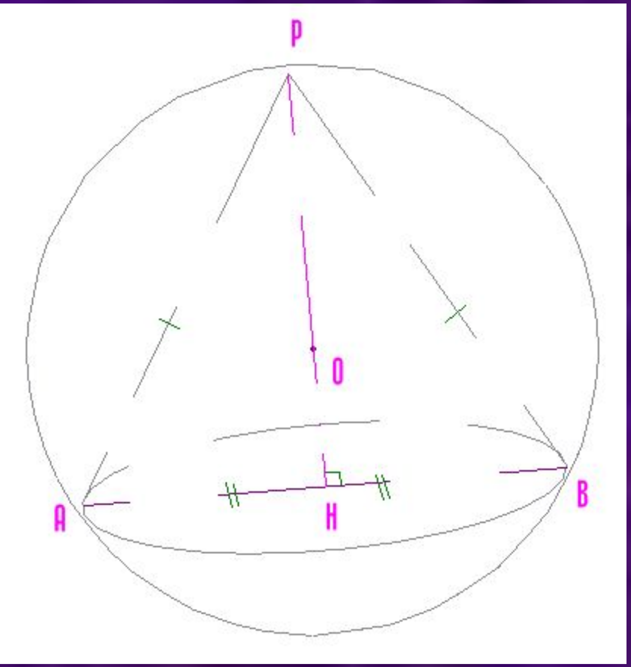
Дано:

конус; шар (т.O;R) описан около конуса;

радиус основания AH=3 см; высота конуса PH=5 см;

Найти: $S_{шара}$

Решение:



Рассмотрим осевое сечение конуса △PAB – равнобедренный треугольник.

1. В △PAH (прямоугольный) по теореме Пифагора:

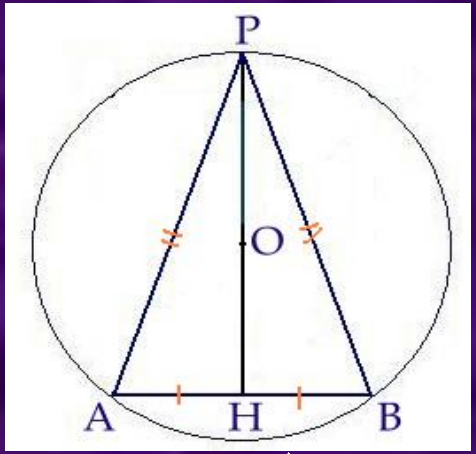
$AP^2=AH^2+PH^2$

$$PH = \sqrt{AP^2 + AH^2}$$

$$AP = \sqrt{9+25}$$

$$AP = \sqrt{36}$$

AP=6 см



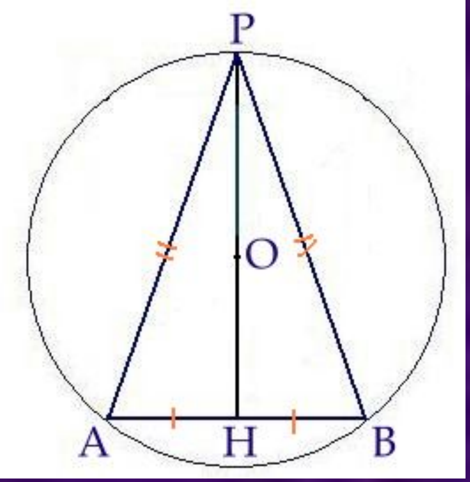
2. AP=PB=6 см (как образующие конуса)

AB=2 AH =2 · 3 =6 (см)

⇒ △APB – равносторонний (по определению).

Значит, по свойству AP=2 R sin60°

$AP=R\sqrt{3}$



$$R = \frac{AP}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

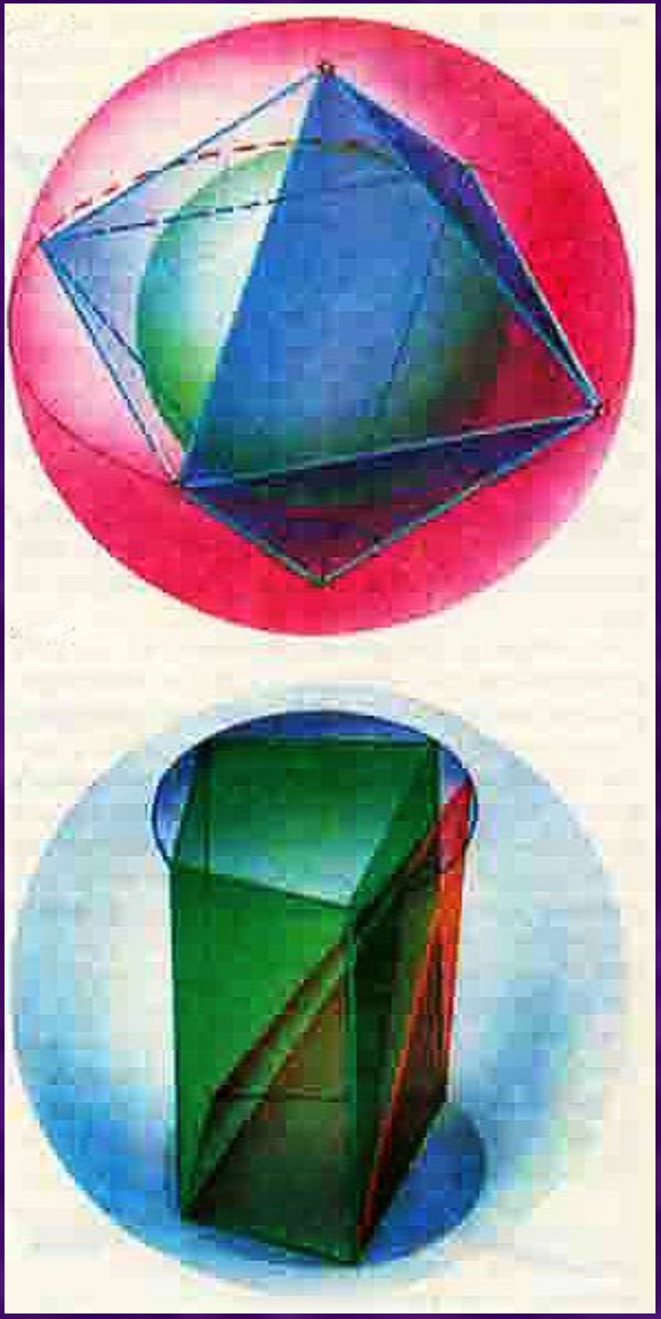
$$R = 2\sqrt{3}(см)$$

$$S_ш = 4 \bullet \pi \bullet R^2$$

$$S_ш = 4 \bullet \pi \bullet 12$$

$$S_ш = 48 \bullet \pi (см^2)$$

Ответ: 48 π $см^2$.



Это лишь некоторые примеры вписанных друг в друга тел в нашей жизни.

Последнее время они получили большое распространение, особенно в дизайне. Это касается различных домашних аксессуаров, таких как светильники, подсвечники, вазы и даже кофейные столики и тумбочки.

Владимир Артурович Левшин. «Нулик-мореход». Глава 21. В проливе Бесконечности.

- 27 нуляля

На рассвете вошли в пролив Бесконечности. Капитан приказал швартоваться, и все отправились на берег. Наконец-то я очутился на самой что ни на есть настоящей твёрдой почве...

Но что это? Навстречу нам поднялось с земли какое-то бородатое чудище. Вообще-то я не из трусливого десятка: если и нырнул за спину капитана, так только на всякий случай. Впрочем, ничего такого не случилось.

Чудище оказалось всего-навсего моряком с корабля, затонувшего здесь примерно 150 лет назад. Все матросы погибли, а этого подобрали чуть живого и обратили в рабство. С тех пор местный правитель заставляет его каждый день выполнять одну и ту же работу.

Правитель, кстати, совсем ещё молоденький: ему пошёл всего лишь три тысячи сто восьмидесятый годок. А дети у него и совсем крошки! Мальчику две тысячи сто восемьдесят пять лет, а девочке как раз вчера стукнуло тысяча двести тридцать два.

Ну, мы, конечно, удивились, когда капитан сказал, что в этом проливе живут вечно. Как-никак - пролив Бесконечности!

Потом он спросил у матроса, какую такую работу заставляет его делать правитель?

- Известно какую,- вздохнул бородач.- Кубики-шарики, шарики-кубики... Ну и понаделал я их за полтора-то века - не сказать! А им всё не так...

- Кому это "им"? - полюбопытствовал я.

- Да деткам правителя,-пояснил он.-Уж такие они привередливые, такие завидущие! Казалось бы, чего у них только нет, разве что птичьего молока, а им всё мало...

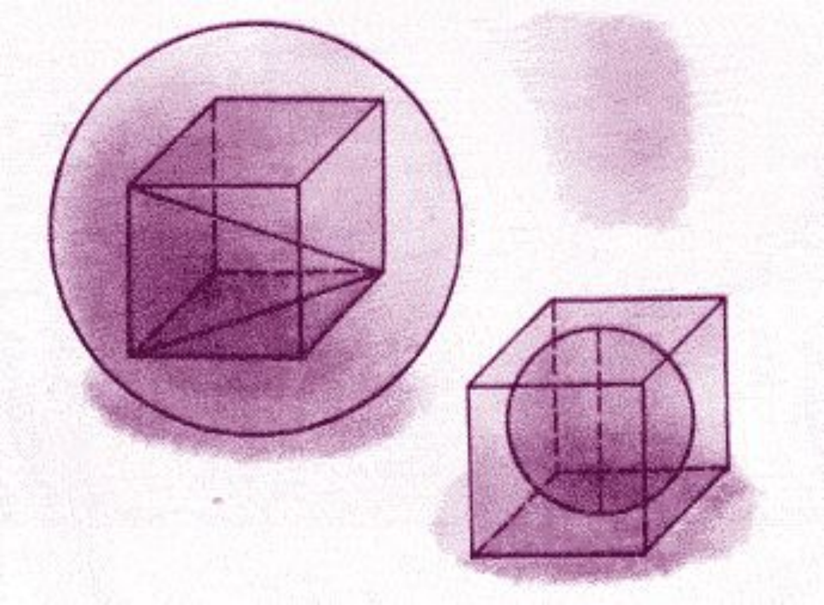
Ну, мы, понятно, стали его тормошить, расспрашивать и узнали вот что.

- Когда привели меня во дворец в первый раз,- начал матрос,- правитель поглядел на меня и сказал: "Ну, моряк, благодари судьбу! Ты у меня без работы не останешься. Наказываю тебе сделать такую игрушку, чтобы пришлась по вкусу разом и сынку моему, и дочке. А то у них четыре миллиарда триста восемьдесят цацок, а ни одна не по нраву! Даю тебе сутки сроку: угодишь обоим - награжу, не угодишь - пеняй на себя!"

Стал я думать, что бы такое смастерить? А потом и надумал: сделаю что-нибудь попроще. А ну как оно-то и понравится? Соорудил я им прозрачный кубик. Небольшой такой - ребро сантиметров в десять, не выше, а грани хоть и прозрачные, а все в разные цвета покрашены. Что ни грань - другая окраска. Прямо радуга... Всю ночь я с этим кубиком провозился, а наутро понёс во дворец.

Сынок правителя поглядел, поморщился и сказал: "Эка невидаль - кубик! Вот кабы сделать для него футляр, и чтобы футляр тот был - разъёмный шарик, и чтобы кубик точно в него вписывался!"

А дочка тоже поморщилась и так сказала: "Кубик как кубик - мне такой ни к чему! Вот кабы сам он был разъёмным футлярчиком, а в футлярчике - шарик, да чтобы точно в него вписывался - тогда бы я ещё подумала!"



Вот оно, значит, как. Одному - одно, другому - другое. Ему подавай шарик, чтобы туда кубик влезал, ей - тот же кубик, только с шариком внутри...

На другое утро принёс я свою работу во дворец - всё честь по чести, как велено! Один шар около кубика описывается, другой в тот же кубик вписывается. А детки опять носы воротят. Сынок говорит: "Хорошо бы около большого шарика ещё один кубик описать!" А дочка своё ладит: пусть, говорит, в маленький шарик ещё один кубик вписывается... И опять промудрил я до рассвета. А утром всё повторилось сызнова. Сынок требует около большого кубика ещё один шарик описать, а дочка - в маленький кубик ещё один шарик вписать...

Так оно с тех пор и пошло. Одни сутки мастерю по два шарика, другие - по два кубика. А чтобы счёт дням не потерять, каждая пара шариков и кубиков у меня номерами помечена: 1, 2, 3 и так далее. Дескать, сделано в первые сутки, на вторые или там на двадцать пятые...

Матрос закончил рассказывать, тяжело вздохнул и задумался.

- Н-да, незавидная у вас работка,- сказал Пи.- И как только вам удаётся делать одни кубики и шарики всё больше и больше, а другие - мал мала меньше? Ведь самый малюсенький из них, поди, и в микроскоп не разглядишь!

- На то и пролив Бесконечности,- отвечал тот.

- А где же вы их храните? - поинтересовался я.

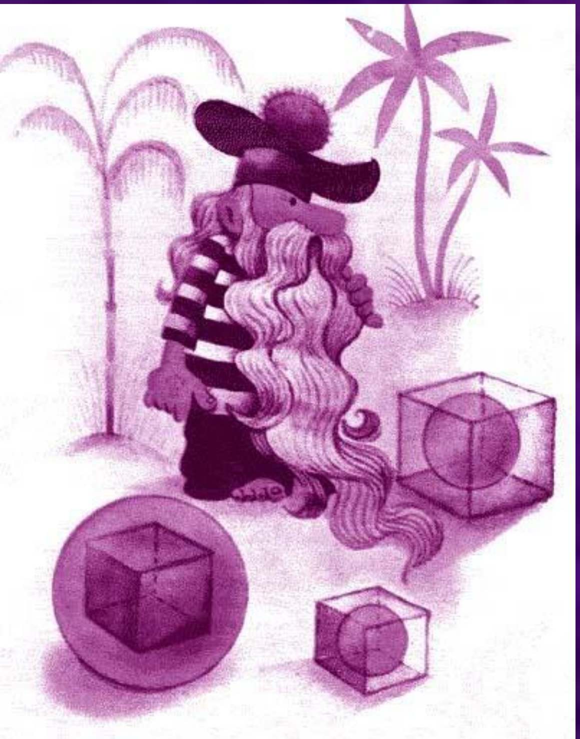
- Где? - переспросил матрос и вдруг засмеялся: -А нигде! До вчерашнего дня стояли они у меня на берегу друг за дружкой, по росту. А нынче ночью надумал я бежать. Надоели мне эти приказы-капризы хуже горькой редьки! Ну, сложил я все шарики и кубики по порядку один в другой, и - бултых в воду...

- Не может быть! -в один голос закричали мы с Пи.- Неужто мы так и не увидим вашей работы?!

- Кто его знает! - уклончиво хмыкнул матрос.- Коли очень захотите, может, и увидите. Не наяву, так в уме... - Вы хотите сказать, в воображении? - уточнил я.

- Вот-вот,- обрадованно закивал матрос.- С воображением да с соображением чего не увидишь!

- Ваша правда,- подтвердил капитан.- Но вы забыли про знания. Чтобы вообразить себе что-нибудь как следует -ну хоть ваши кубики и шарики, необходимо кое-что



смыслить в геометрии. Надо, например, знать, что, с точки зрения геометрии, шар только тогда считается вписанным в куб по-настоящему, когда поверхность его касается всех шести граней куба, иначе говоря, имеет с ним шесть точек касания.

Если же речь идёт о шаре, описанном вокруг, или, как говорят математики, около куба, значит, подразумевается, что поверхность его непременно проходит через все восемь вершин куба.

- Э, нет,- не согласился я,- раз шар описан около куба, стало быть, куб у него внутри. Но тогда с вершинами куба соприкасается не поверхность шара, а его внутренность...

- Вероятно, ты хотел сказать, внутренняя сторона его оболочки,- подсказал капитан.- Что ж, ты был бы прав, если бы речь шла о мячике - резиновом или, там, целлулоидовом, в который вписан кубик - деревянный или, скажем, пластмассовый. Иначе говоря, если бы имелись в виду тела физические. Но мы-то говорим о телах геометрических! Стало быть, у них не оболочка, а поверхность. А поверхность, как ты уже знаешь, двухмерна и толщины не имеет...

Тут я почему-то вспомнил треугольную тень от вымпела и перевёл разговор на другую тему.

- Интересно,- спросил я, обращаясь к матросу,- что вы смастерили под самый конец: шарики или кубики?

- А вы подумайте сами,- предложил тот.- Пробыл я здесь... ну, в общем, неважно сколько, и сделал всего 109 575 штук. В первые сутки - один кубик, а потом -по очереди - то по два шарика, то по два кубика. Вот и сосчитайте, что вышло последним.

- Прекрасная арифметическая задача,- похвалил капитан,- и, надеюсь, Нулик и Пи благополучно решат её дома. А сейчас нам пора на корабль. Ведь вы, надо думать, спешите? - добавил он и этак искоса, бочком посмотрел на матроса.

Нет, что ни говорите, а наш капитан самый удивительный из всех капитанов на свете! И как он только догадался, что матрос собирается бежать именно на нашем Фрегате?

А когда все мы были уже далеко от пролива Бесконечности, капитан задал нам ещё одну задачку, на сей раз геометрическую: во сколько раз диаметр описанного около куба шарика больше, чем диаметр вписанного? И ещё он сказал, что для этого надо сравнить диаметры этих шариков с ребром куба, а кроме того, знать теорему Пифагора, да хорошенько вспомнить, что такое диагональ.

Как видите, нелёгкая нам досталась работа, но уж во всяком случае не труднее той, что пришлось делать матросу. Так что вернёмся домой - повоюем!