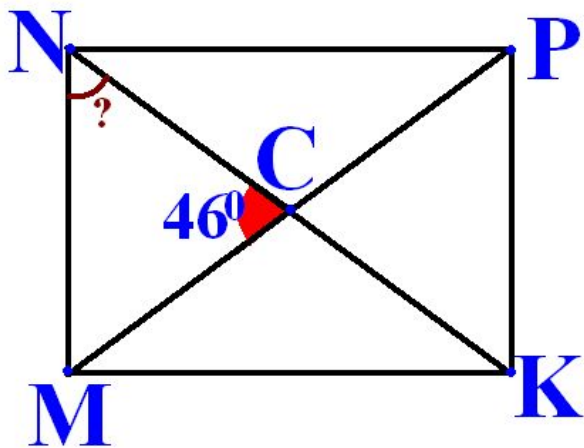


Подготовка к ГИА

Геометрия, 9 класс.

1



Диагонали прямоугольника $KMNP$ пересекаются в точке C . Найдите угол MNC , если угол MCN равен 46° .

Решение:

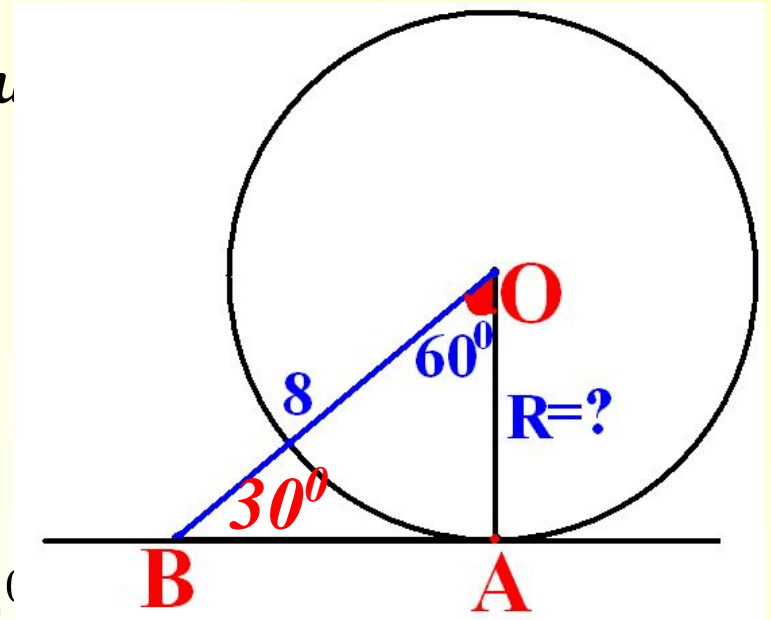
в прямоугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, значит $NC=CM$, то есть треугольник MNC -равнобедренный. А в равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Следовательно углы MNC и NMC равны. А так как сумма углов треугольника равна 180° , то:

$$\angle MNC = \angle NMC = \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = \frac{134^\circ}{2} = 67^\circ$$

Ответ: 67°

2

- Через точку A окружности центром O проведена касательная AB . Найдите радиус окружности, если $OB=8$, угол AOB равен 60° .



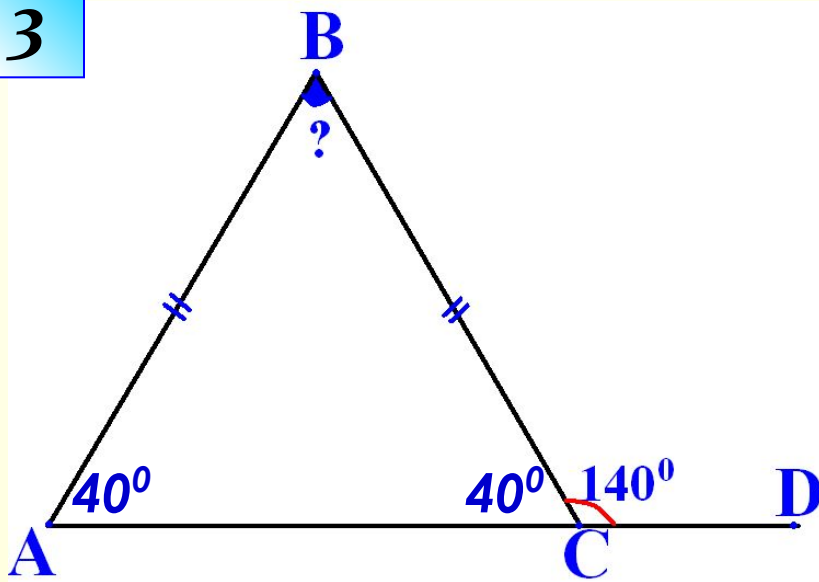
Решение: $\angle B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
-так как сумма острых углов
треугольника равна 90° .

$$R = \frac{BD}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

-так как катет, лежащий напротив
угла в 30° равен половине гипотенузы.

Ответ: 4

3



- Внешний угол при основании равнобедренного треугольника равен 140° . Найдите угол между боковыми сторонами этого треугольника.

Решение:

Углы BCA и BCD -смежные, а сумма смежных углов равна 180° .

$$\angle BCA = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\angle BAC = \angle BCA = 40^\circ$$

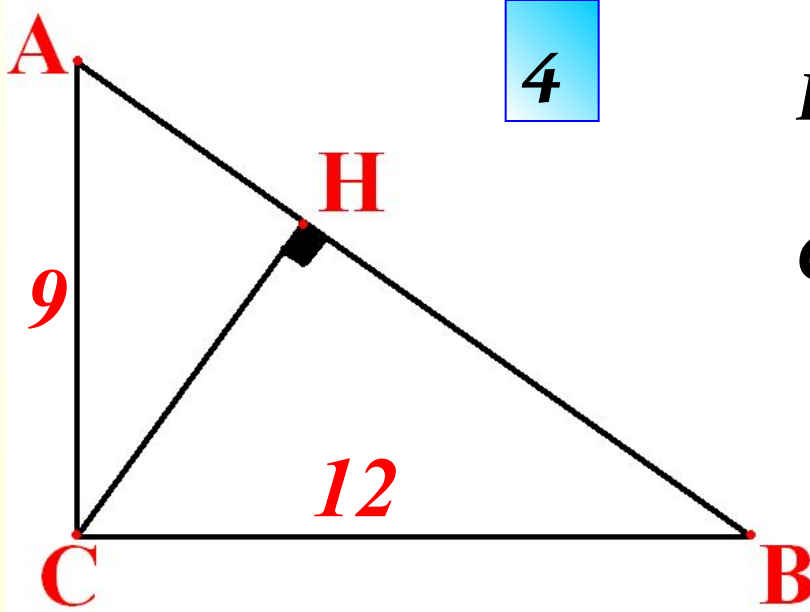
-как углы при основании равнобедренного треугольника.

$$\angle B = 180^\circ - (40^\circ + 40^\circ) = 100^\circ$$

-так как сумма углов треугольника равна 180° .

Ответ: 100°

4



Используя данные, указанные на рисунке, найдите высоту CH .

Решение:

1). Из $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$$

- в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$2). S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CH \mid \Rightarrow AC \cdot BC = AB \cdot CH \mid \Rightarrow$$

$$CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{9 \cdot 12}{15} = \frac{36}{5} = 7,2$$

Ответ: 7,2

5 Длина окружности равна 29π . Найдите радиус этой окружности.

Решение.

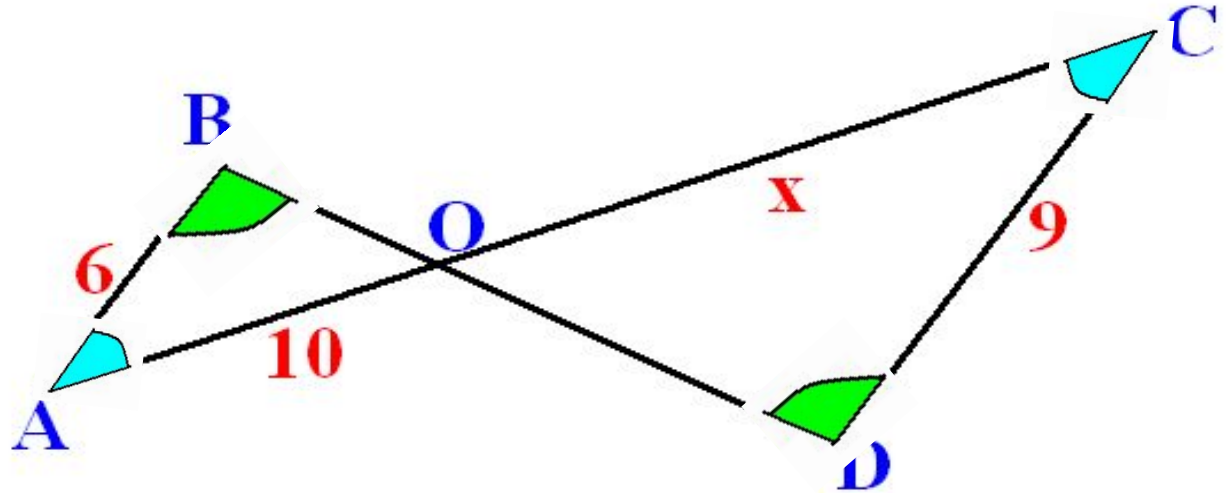
$$\begin{array}{l} C = 2\pi R \\ C = 29\pi \end{array} \quad \begin{array}{l} | \\ | \end{array} \Rightarrow 2\pi R = 29\pi \quad \begin{array}{l} | \\ | \end{array} \Rightarrow$$

$$2R = 29$$

$$R = \frac{29}{2}; \quad R = 14,5$$

Ответ: 14,5

6 Используя данные, указанные на рисунке, найдите AC , если известно, что $AB \parallel CD$.



Решение.

$\triangle ABO \sim \triangle CDO$ - по двум углам, ($\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ - как накрест лежащие, при параллельных прямых AB и CD и секущих AC и BD). Из подобия следует:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{CO} \implies CO = \frac{CD \cdot AO}{AB};$$

$$CO = \frac{9 \cdot 10}{6} = 15; AC = AO + OC = 10 + 15 = 25$$

Ответ: 25

7

Найдите боковую сторону равнобедренной трапеции, если её основания равны 9 и 19, а высота равна 12.

Решение.

1). Построим высоты BH и CN , получим прямоугольник $HBCN$. В нём $HN=BC=9$.

2). $\triangle ABH = \triangle DCN$ - по гипотенузе и острому углу.

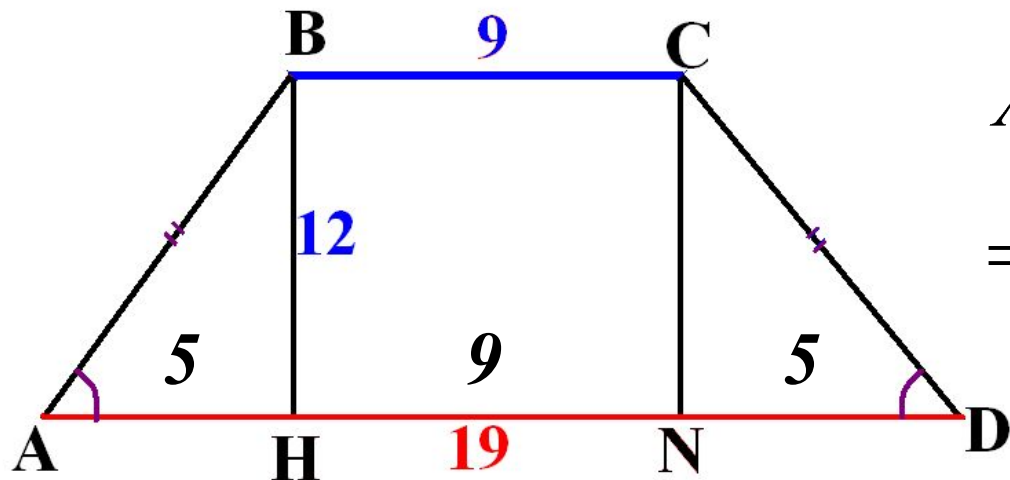
Из равенства следует: $AH = DN = \frac{(19 - 9)}{2} = 5$

3). Из $\triangle ABH$, $\angle H = 90^\circ$, по теореме Пифагора:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} =$$

$$= \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$



Ответ: 13

8

В параллелограмме $ABCD$ на стороне BC отмечена точка K так, что $BK=AB$.
Найдите $\angle BCD$, если $\angle KAD = 20^\circ$.

Решение.

1). В $\triangle ABK$ $AB=BK$, $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$,

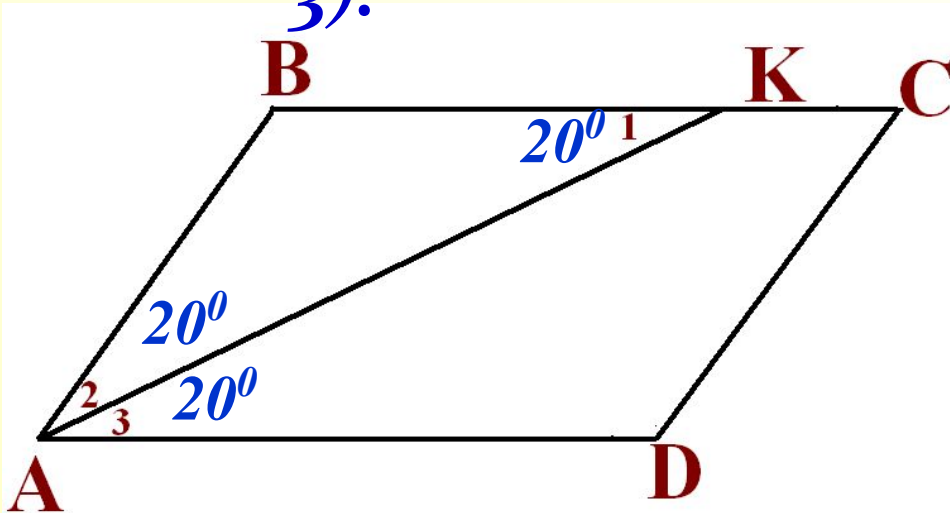
как углы при основании равнобедренного треугольника.

2). $\angle 1 = \angle 3 = 20^\circ$, -как накрестлежащие, при параллельных прямых AD и BC и секущей AK .

$$\begin{aligned} \angle 1 = \angle 2, \\ \angle 1 = \angle 3 = 20^\circ, \end{aligned} \Rightarrow \angle 3 = \angle 2 = 20^\circ, \angle BAD = \angle 2 + \angle 3 = 40^\circ$$

3). $\angle BAD = \angle BCD = 40^\circ$ -так как в параллелограмме противоположные углы равны.

Ответ: 40°



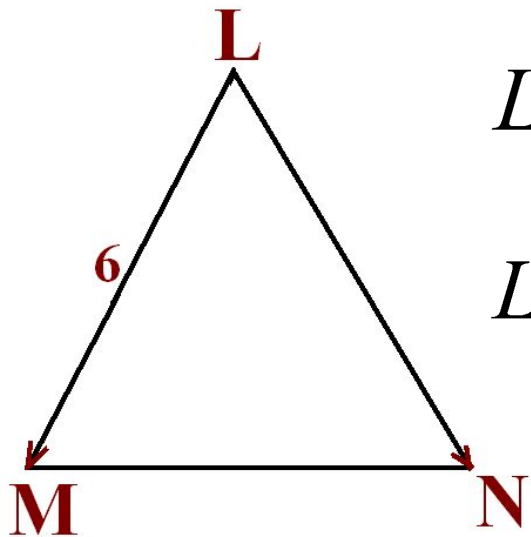
9

Сторона равностороннего треугольника MLN равна 6 см. Найдите скалярное произведение векторов

$$\vec{LM} \text{ и } \vec{LN}.$$

Решение.

В равностороннем треугольнике все углы по 60° .

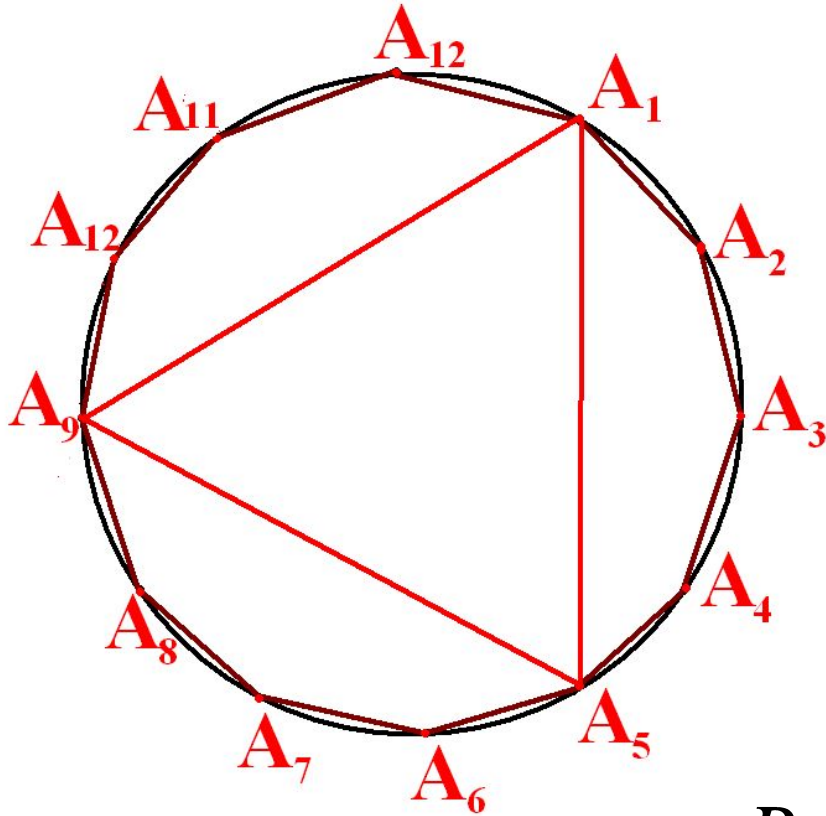


$$\vec{LM} \cdot \vec{LN} = |\vec{LM}| \cdot |\vec{LN}| \cdot \cos \angle L$$

$$\vec{LM} \cdot \vec{LN} = 6^2 \cdot \cos 60^\circ = 36 \cdot \frac{1}{2} = 18$$

Ответ: 18

10 Радиус окружности, описанной около правильного двенадцатиугольника $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8 A_9 A_{10} A_{11} A_{12}$ равен $5\sqrt{3}$. Найдите длину диагонали $A_1 A_5$.



Решение.

$A_1 A_5$ -сторона правильного треугольника, вписанного в окружность. Найдем её по формуле:

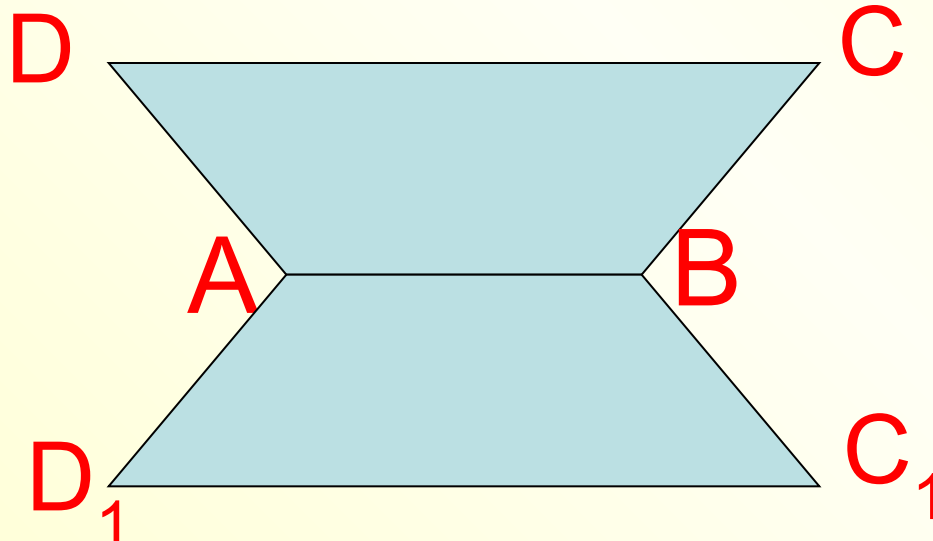
$$a = R\sqrt{3} \quad | \Rightarrow \quad A_1 A_5 = a = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 15$$

$$R = 5\sqrt{3}$$

Ответ: 15

11

Имеется лист фанеры прямоугольной формы, длина и ширина которого соответственно равны **10дм** и **5дм**. Из него, как показано на рисунке, вырезаны две одинаковые части в форме равнобедренных треугольников. Сколько кг краски потребуется, чтобы покрасить получившуюся фигуру, если длина отрезка $AB = 6\text{дм}$, а на **1дм²** поверхности расходуются **0,012** кг краски?



Решение.

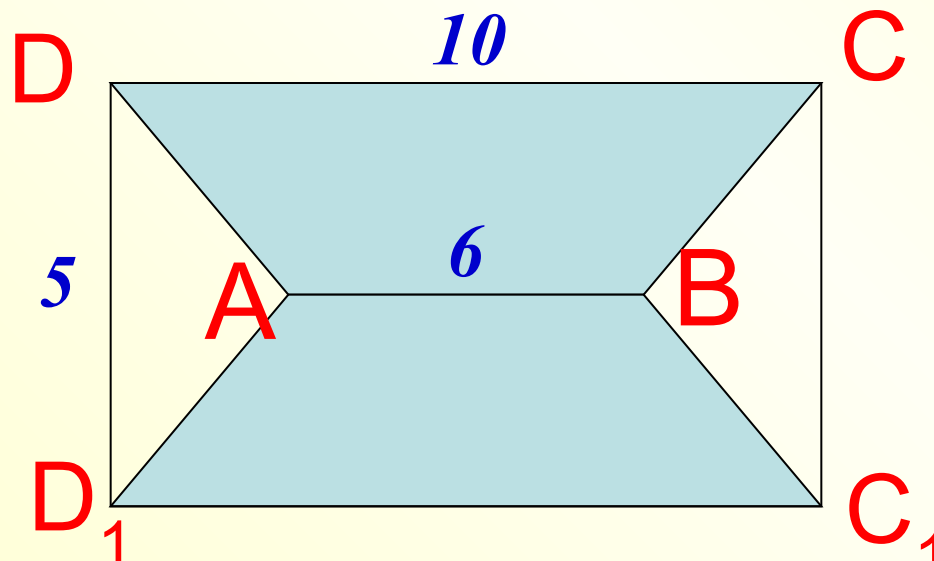
1). Площадь фигуры равна сумме площадей двух равных трапеций $ABCD$ и ABC_1D_1 .

Высота каждой трапеции $h=5:2=2,5$.

$$2). S_{ABCD} = \frac{(AB + CD)}{2} \cdot h, S_{ABCD} = \frac{(6 + 10)}{2} \cdot 2,5 = 8 \cdot 2,5 = 20$$

$$3). S_{\text{фигуры}} = 20 + 20 = 40 (\text{дм}^2)$$

4). $40 \cdot 0,012 = 0,48$ (кг)-потребуется краски.



Ответ: 0,48 кг

12

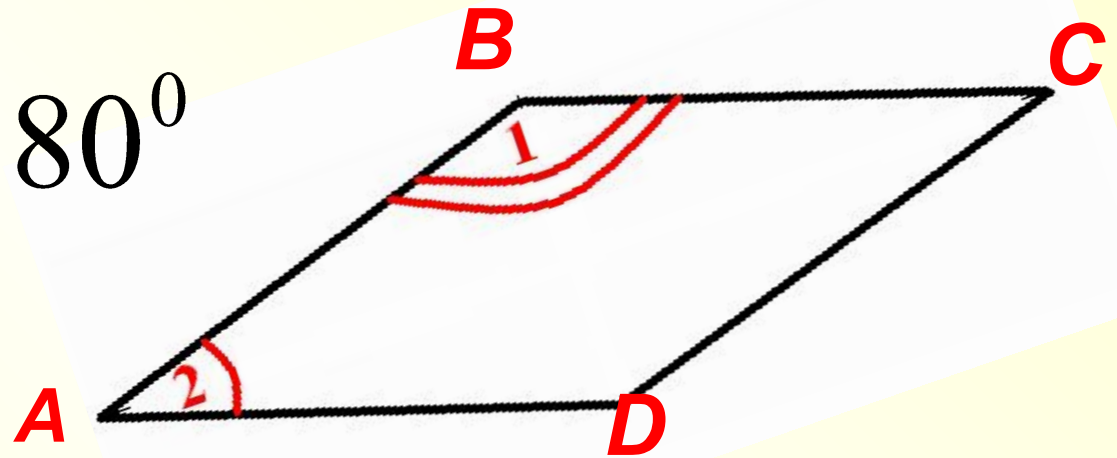
Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

- 1). Все углы ромба -острые.
- 2). Все высоты ромба равны.
- 3). Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
- 4). Радиус окружности, вписанной в ромб, равен стороне этого ромба.
- 5). В ромбе с углом 60° одна из диагоналей равна его стороне.

1). «*Все углы ромба - острые*» - не верно.

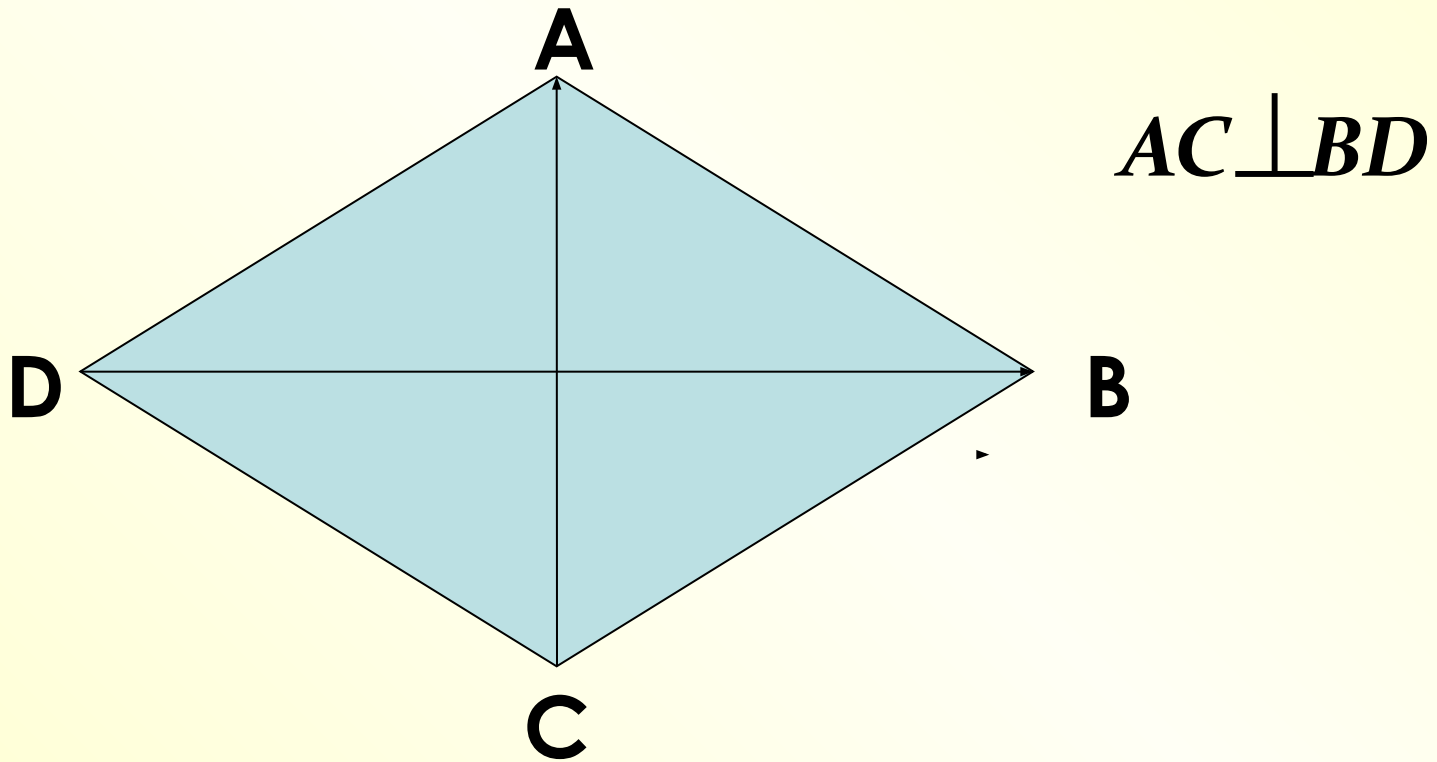
Доказательство.

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^{\circ}$$



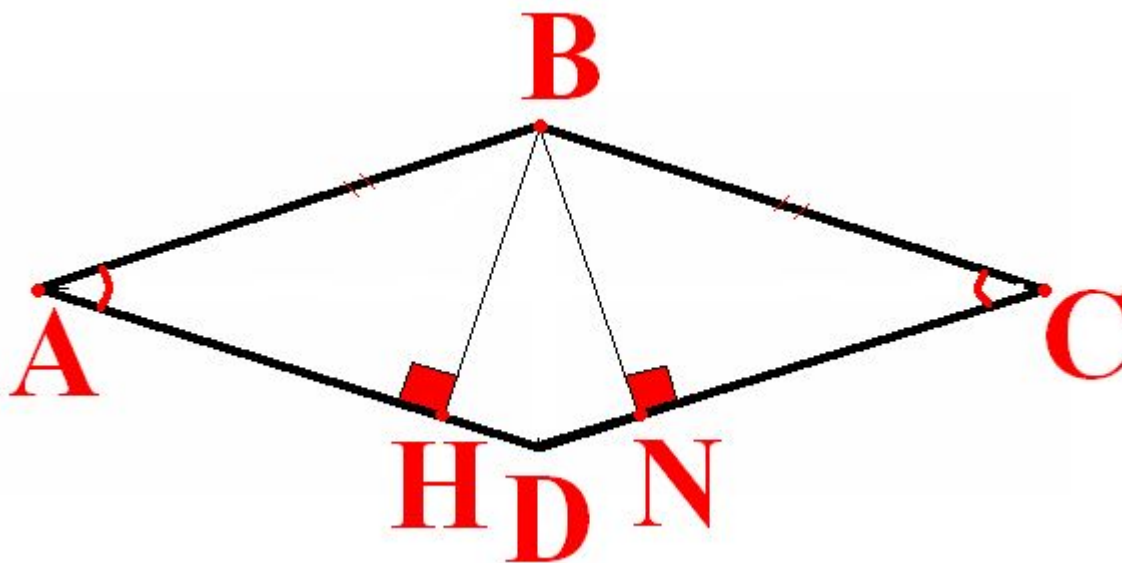
- так как $\angle 1$ и $\angle 2$ *дносторонние* при $AD \parallel BC$ и секущей AB . Если угол *2* - острый, то угол *1* будет тупой.

3). «**Диагонали ромба взаимно перпендикулярны**» - верно, по свойству диагоналей ромба.



2). **«Все высоты ромба равны»**- верно.
Доказательство.

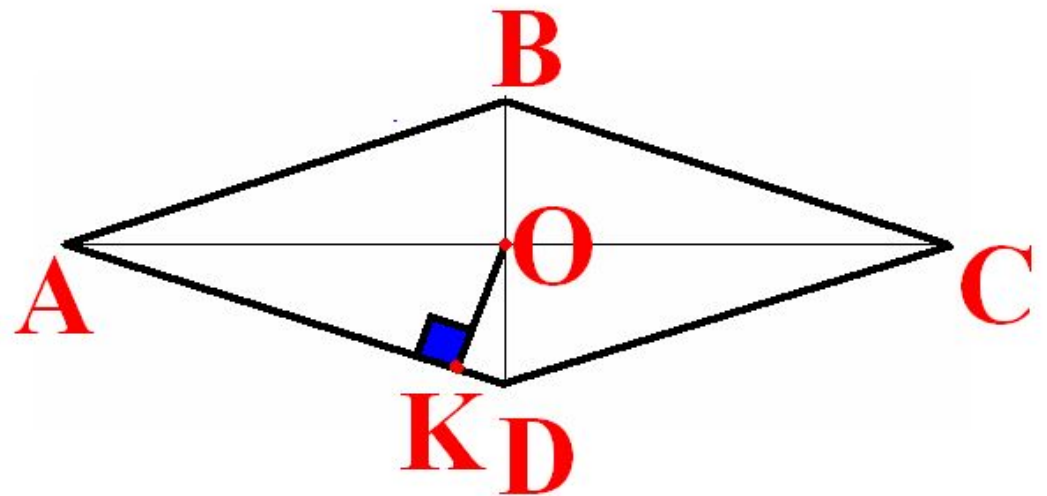
$\triangle ABH = \triangle CBN$ -по гипотенузе и острому углу
($AB=BC$, т.к. в ромбе все стороны равны, $\angle A = \angle C$,
т.к. в ромбе противоположные углы равны.) Из
равенства треугольников следует, что $BH=BN$, так
как они лежат напротив равных углов A и C .



4). «Радиус окружности, вписанной в ромб, равен стороне этого ромба» – не верно.

Доказательство.

- Центр окружности, вписанной в ромб, лежит в точке пересечения диагоналей. Из точки O построим перпендикуляр OK к стороне AD . OK – радиус вписанной в ромб окружности.
- $OK < OD$, так как перпендикуляр – это кратчайшее расстояние от точки до прямой.
- $OD < AD$, так как в прямоугольном треугольнике катет всегда меньше гипотенузы. ($\triangle AOD$)
- Следовательно OK



5). «В ромбе с углом 60° одна из диагоналей равна его стороне» - (верно)

Доказательство.

Сумма углов треугольника равна 180° градусов, значит:
 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

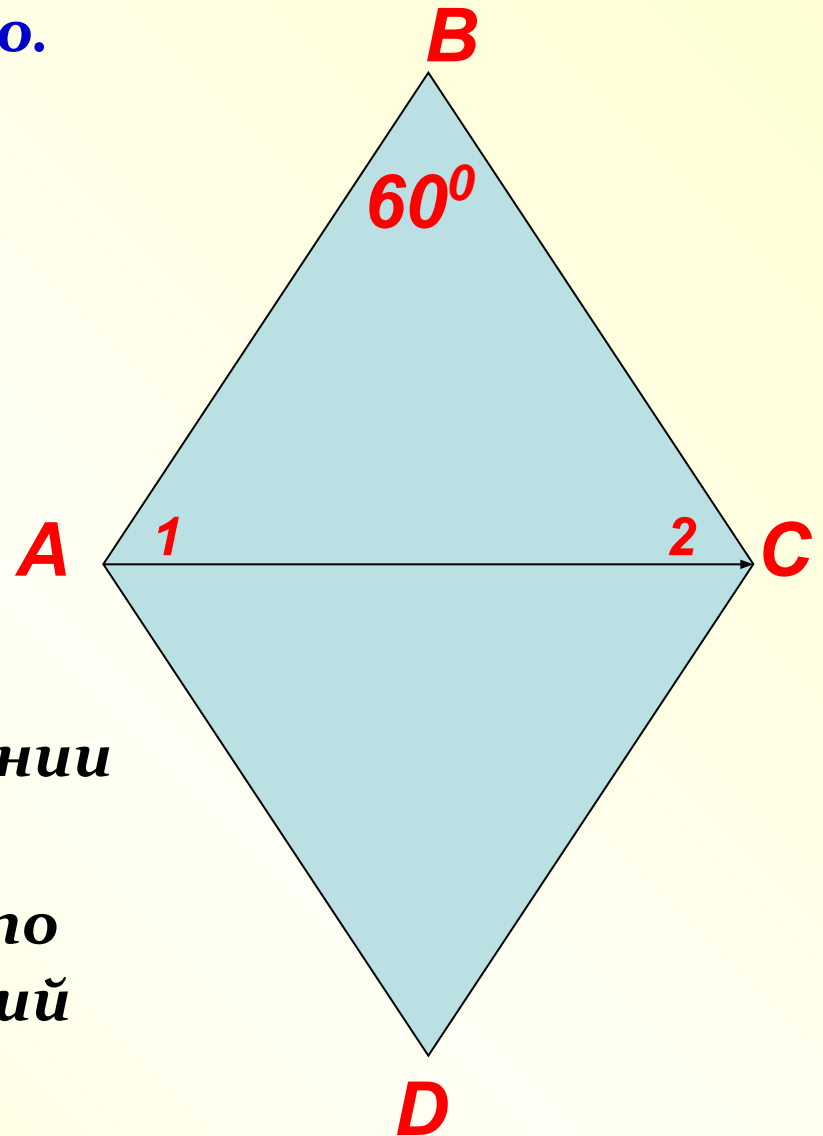
$AB=BC$, значит:

$$\angle 1 = \angle 2 = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

- так как в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

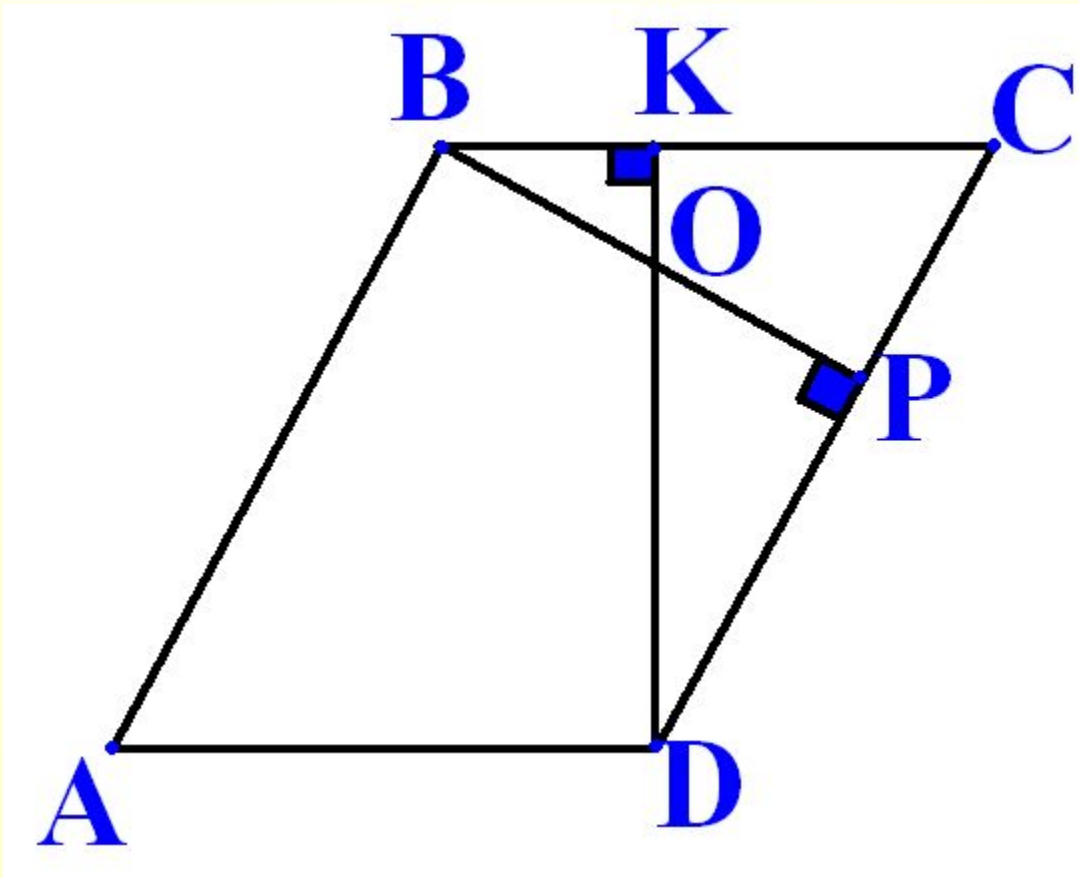
В треугольнике ABC все углы по 60° , значит он равносторонний

и $AC=AB=CB$.



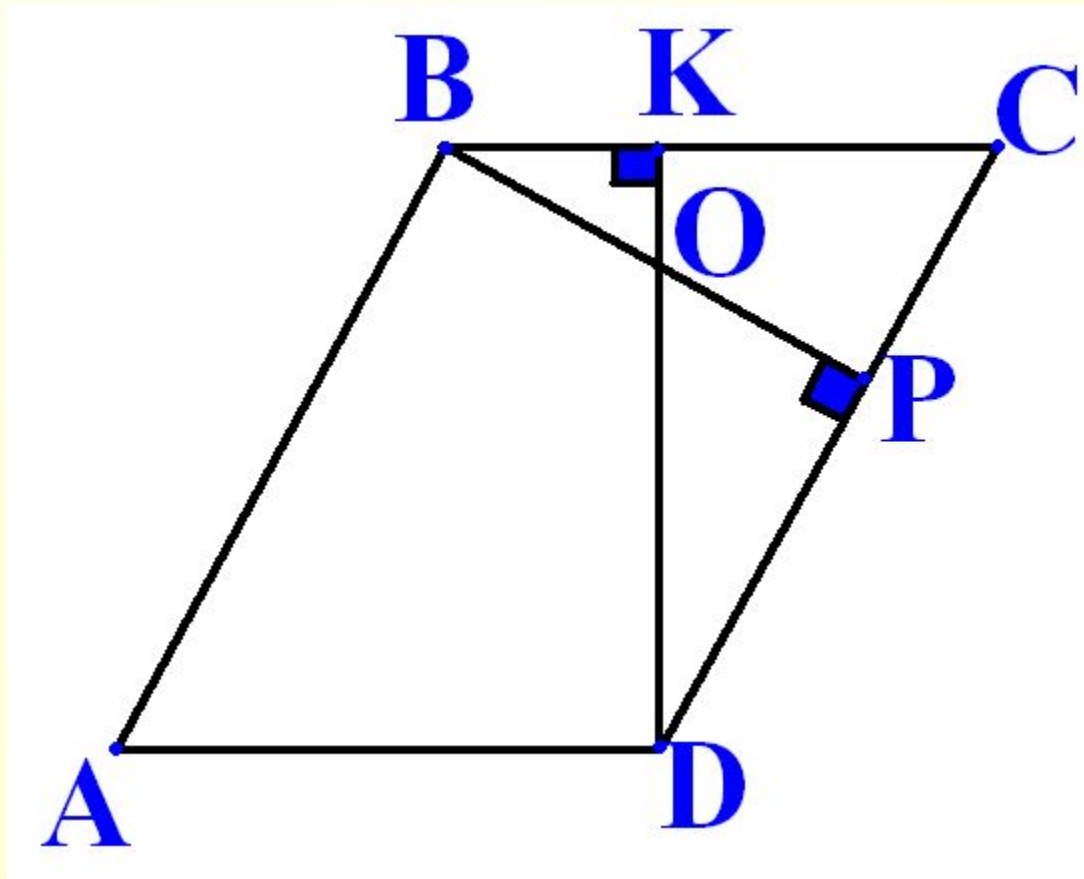
13

BP и DK - высоты параллелограмма $ABCD$, проведенные из вершины тупых углов, причем точка P лежит между точками B и C . Отрезки BP и DK пересекаются в точке O . Докажите, что треугольники CKD и CPB подобны, а углы KOB и BVD равны.

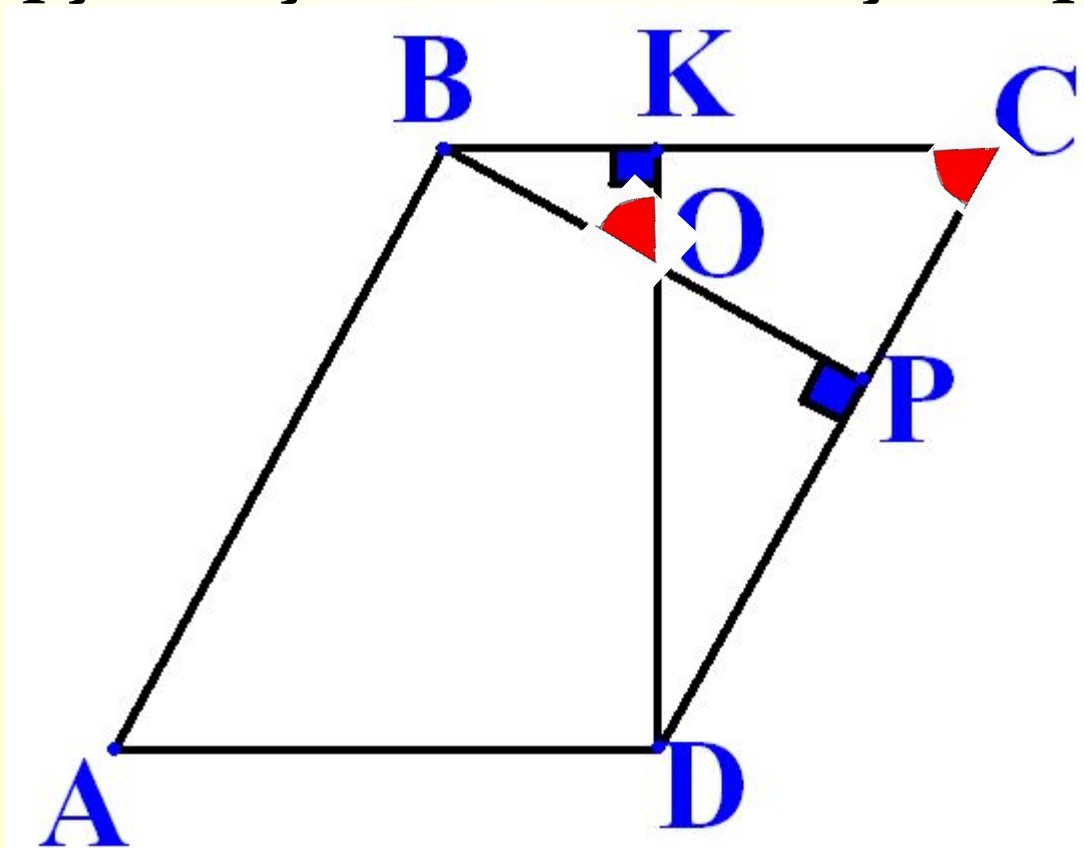


$\triangle CKD \sim \triangle CPB$ - по двум углам,
(по 1-му признаку подобия).

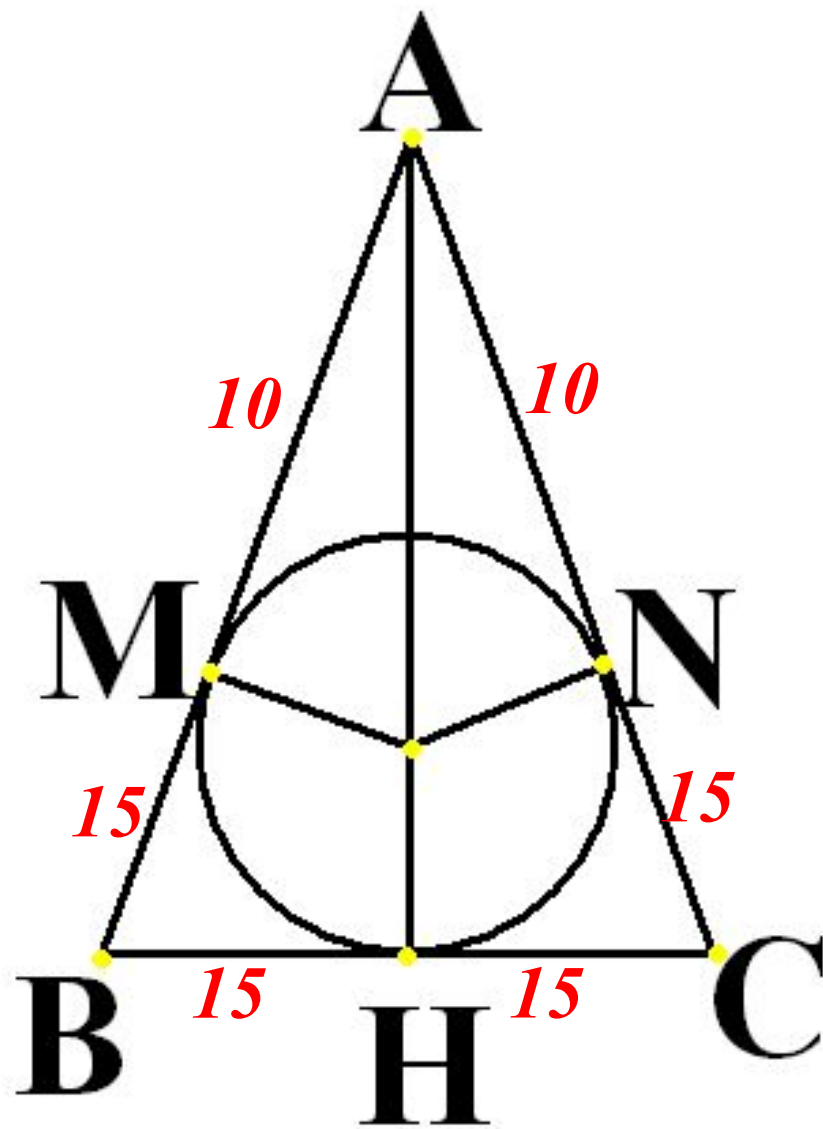
$\angle C$ - общий, $\angle BPC = \angle DKC = 90^\circ$,
так как DK и BP -высоты.



$OK \perp CB, OB \perp CD$, так как отрезки
 OK и OB лежат на высотах DK и BP
 $\angle KOB = \angle BCD$, так как, если стороны
одного угла перпендикулярны сторонам
другого угла, то такие углы равны.



В равнобедренный треугольник ABC с основанием BC вписана окружность. Она касается стороны AB в точке M . Найдите радиус этой окружности, если $AM=1$ и $BM=15$.



Решение.

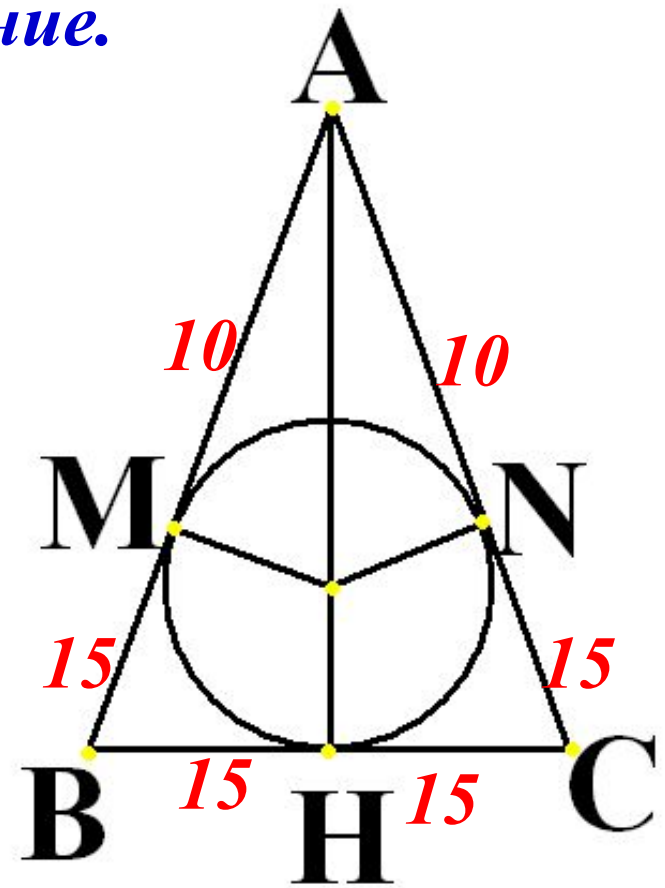
1). Пусть окружность касается сторон треугольника в точках М, Н и N, тогда $AM=AN=10$, $BM=BN=15$, как отрезки касательных, проведенных из одной точки.

2). $AB=AM+BM=10+15=25$

3). $AC=AB=25$, как боковые стороны равнобедренного треугольника.

4). $NC=AC-AN=25-10=15$

5). $HC=NC=15$ -как отрезки касательных, проведенных из одной точки.



5). В $\triangle ABH$ $\angle AHB = 90^\circ$. По теореме Пифагора

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} =$$

$$= \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{625 - 225} =$$

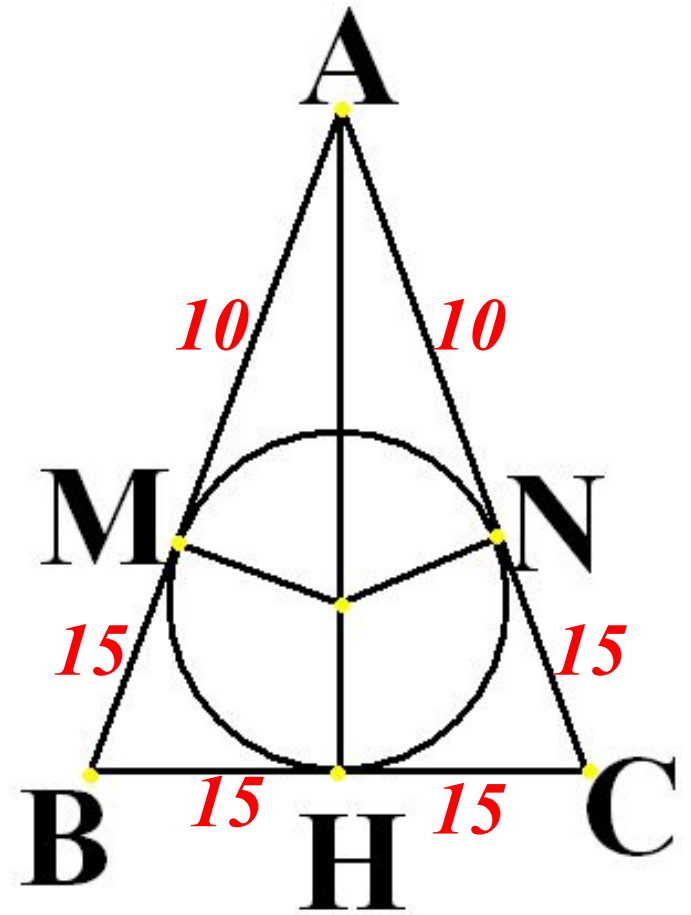
$$= \sqrt{400} = 20$$

6). $BC = BH + HC = 15 + 15 = 30$

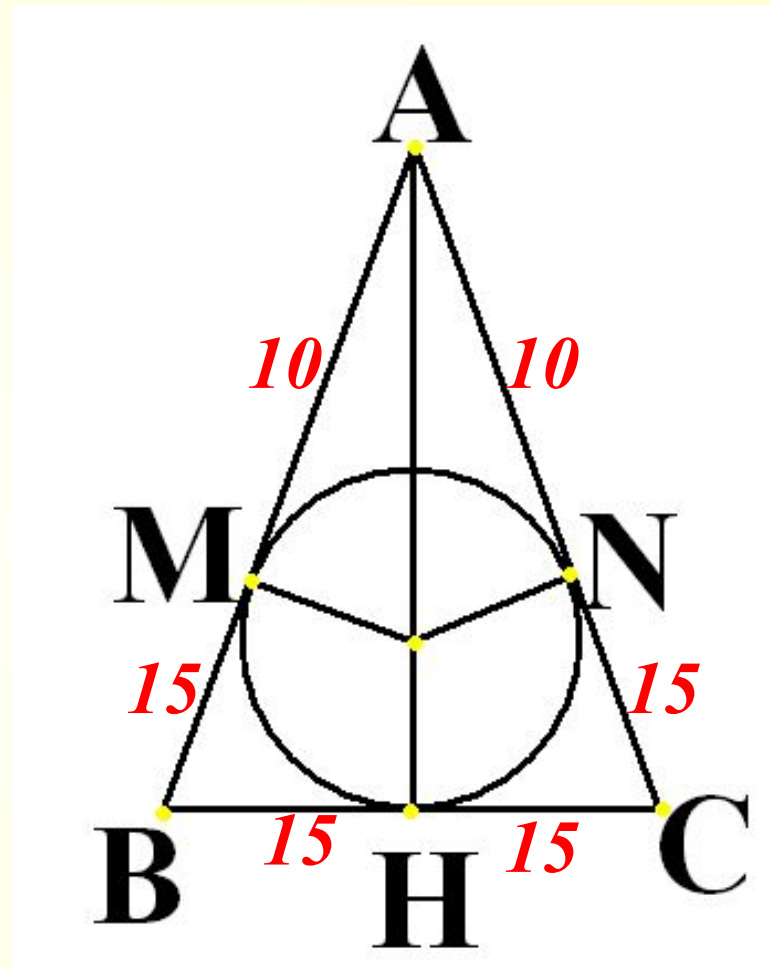
7). $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 20 = 300$$

8). $P = AB + AC + BC = 25 + 25 + 30 = 80$



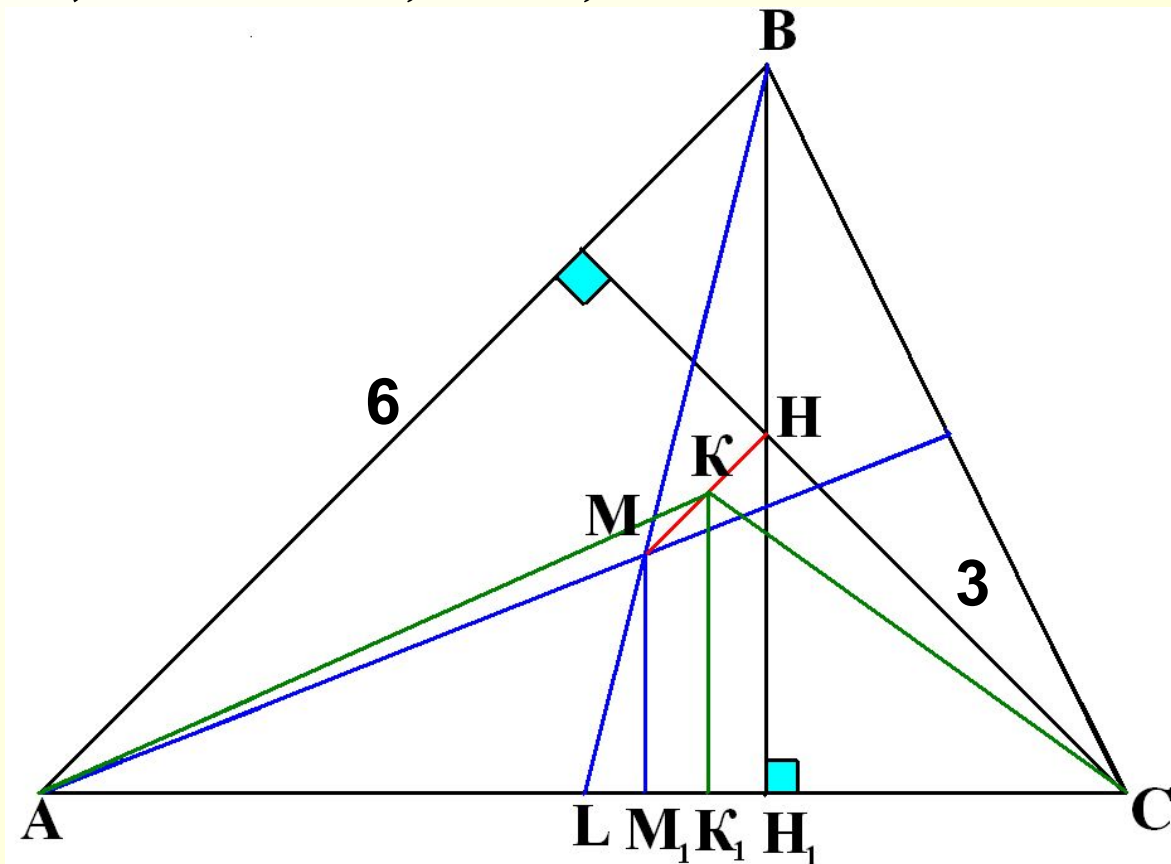
$$9). \quad S = \frac{1}{2} P \cdot r$$
$$r = \frac{2S}{P} = \frac{2 \cdot 300}{80} =$$
$$= \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7,5$$



Ответ: 7,5

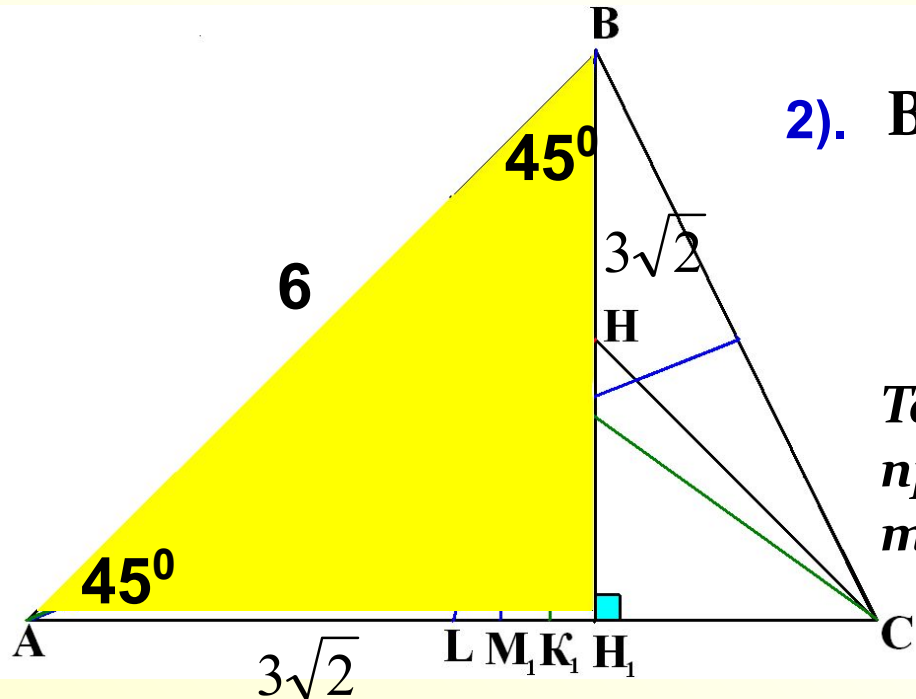
15. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H , а медианы – в точке M . Точка K – середина MH . Найдите площадь треугольника AKC , если известно, что $AB=6, CH=3,$ $\angle BAC=45^\circ$.

∠



Решение.

1). По условию, высоты $\triangle ABC$ пересекаются, значит точка H их пересечения расположена внутри этого треугольника. Доп. построение: Построим $MM_1 \parallel KK_1 \parallel HH_1$.

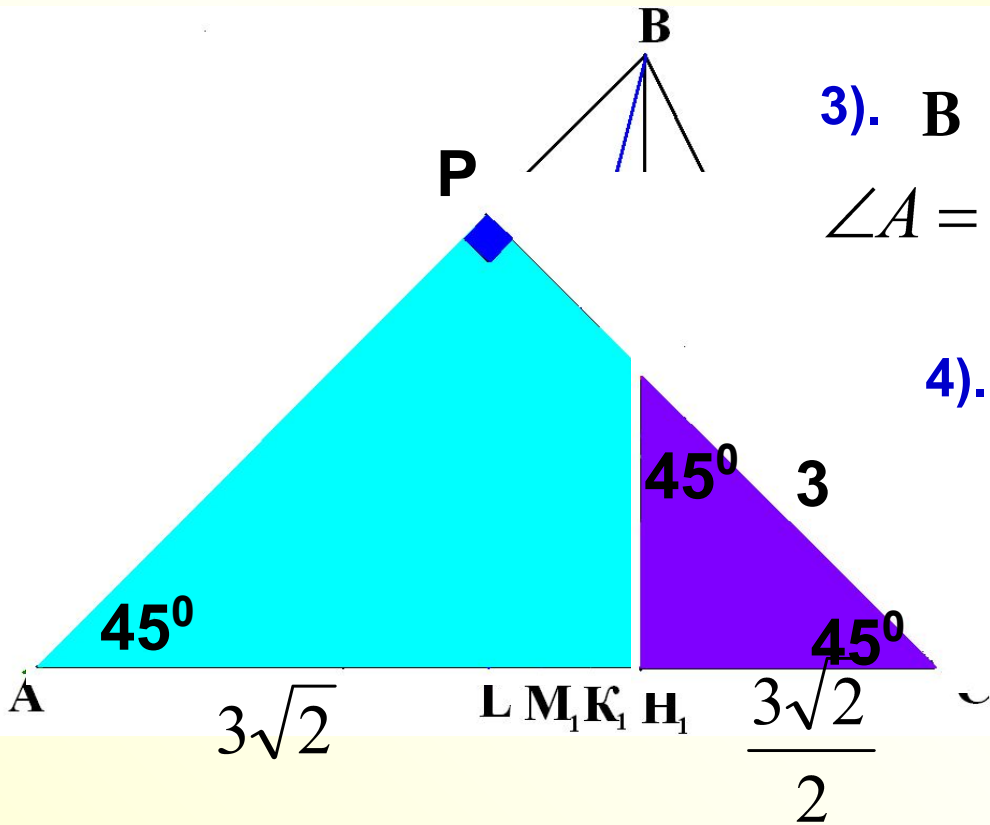


2). В $\triangle ABH_1$, $\angle H_1 = 90^\circ$,
 $\angle A = 45^\circ \mid \Rightarrow \angle B = 45^\circ$

Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° . Значит:

$AH_1 = BH_1$ - так как напротив равных углов лежат равные стороны.

$$\sin A = \frac{BH_1}{AB} \mid \Rightarrow BH_1 = AB \sin A = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$



3). В $\triangle APC$ $\angle P = 90^\circ$,
 $\angle A = 45^\circ \mid \Rightarrow \angle C = 45^\circ$ (см. п.1)

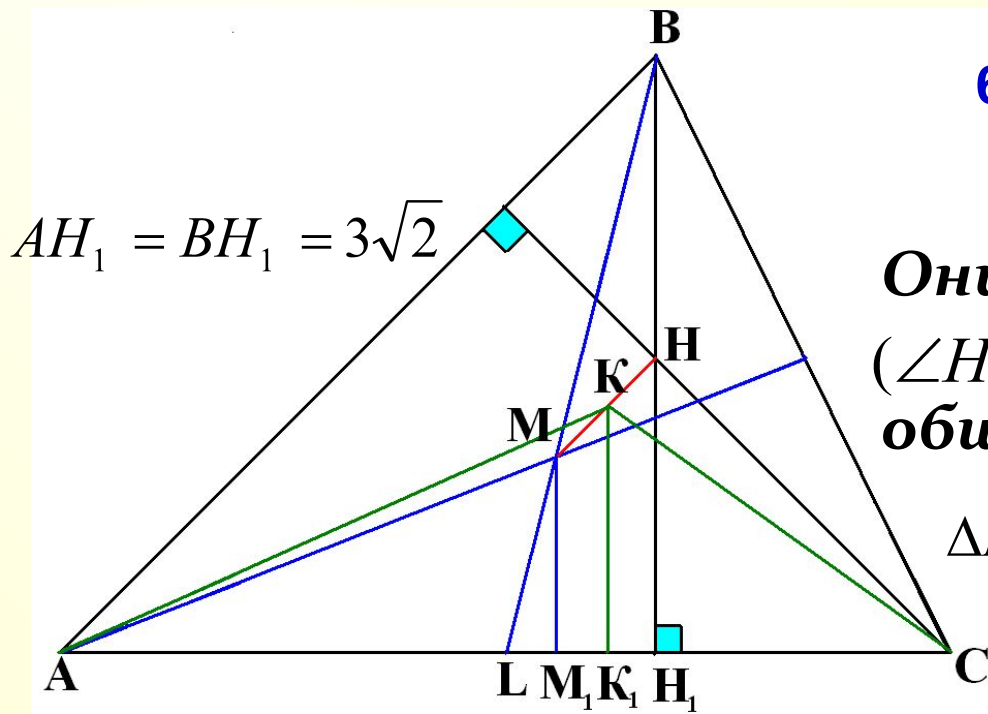
4). В $\triangle CHH_1$, $\angle H_1 = 90^\circ$,
 $\angle C = 45^\circ \mid \Rightarrow \angle H = 45^\circ \mid \Rightarrow$

$CH_1 = HH_1$ (см. п.1) и

$$\sin C = \frac{HH_1}{CH} \mid \Rightarrow$$

$$HH_1 = CH \sin C = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \mid \Rightarrow HH_1 = CH_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

5). $AC = AH_1 + H_1C = 3\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.



6). Рассмотрим:

$\triangle LBH_1$ и $\triangle LMM_1$.

Они – прямоугольные
 ($\angle H_1 = \angle M_1 = 90^\circ$) и имеют
 общий угол B , значит:

$\triangle LBH_1 \overset{k}{\sim} \triangle LMM_1$ - по двум углам.

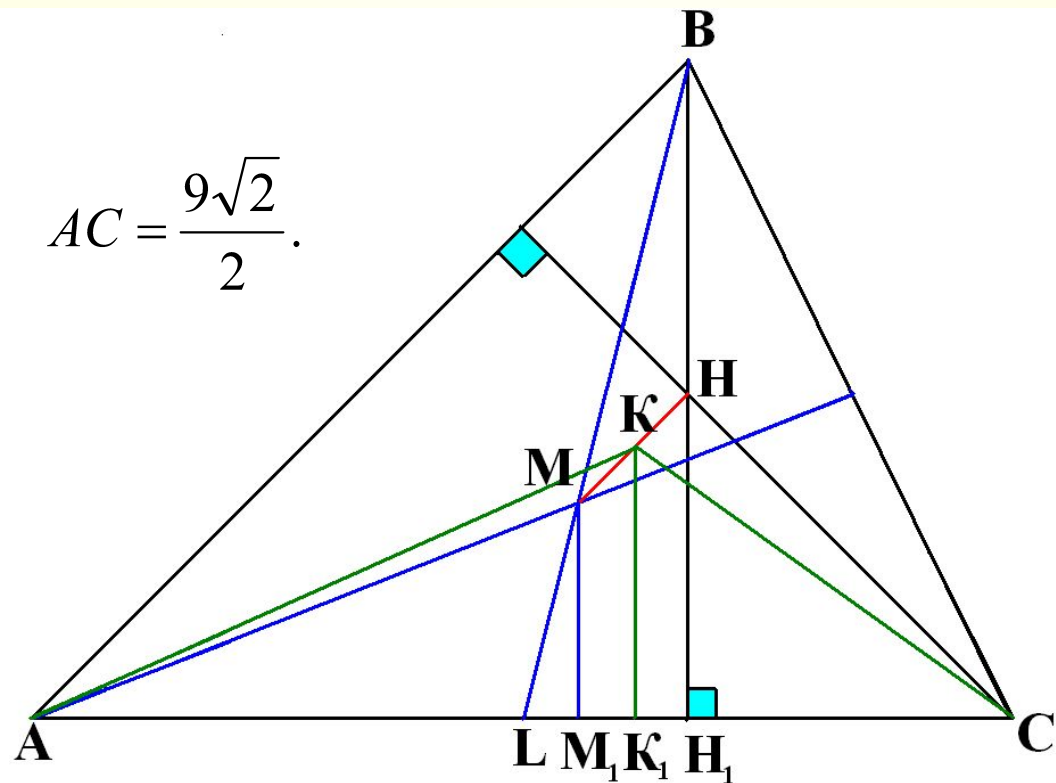
По свойству медианы:

$$LM = \frac{1}{3} LB \quad \Rightarrow \quad k = \frac{LB}{LM} = \frac{3}{1} = 3 \quad \Rightarrow$$

$$MM_1 = \frac{1}{3} BH_1 = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

7). Так как $MM_1 \parallel KK_1 \parallel HH_1$ (по построению) и K – середина MH , то K_1 – середина M_1H_1 (по теореме Фалеса).

Получили: KK_1 – средняя линия трапеции MM_1H_1H



$$AC = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

$$K_1 = \frac{MM_1 + HH_1}{2} = \frac{\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$8). S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2} AC \cdot KK_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{45}{8} = 5,625$$

Ответ: 5,625